Razonamiento Probabilista

Dra. Ing. Selva S. Rivera

Profesora Titular

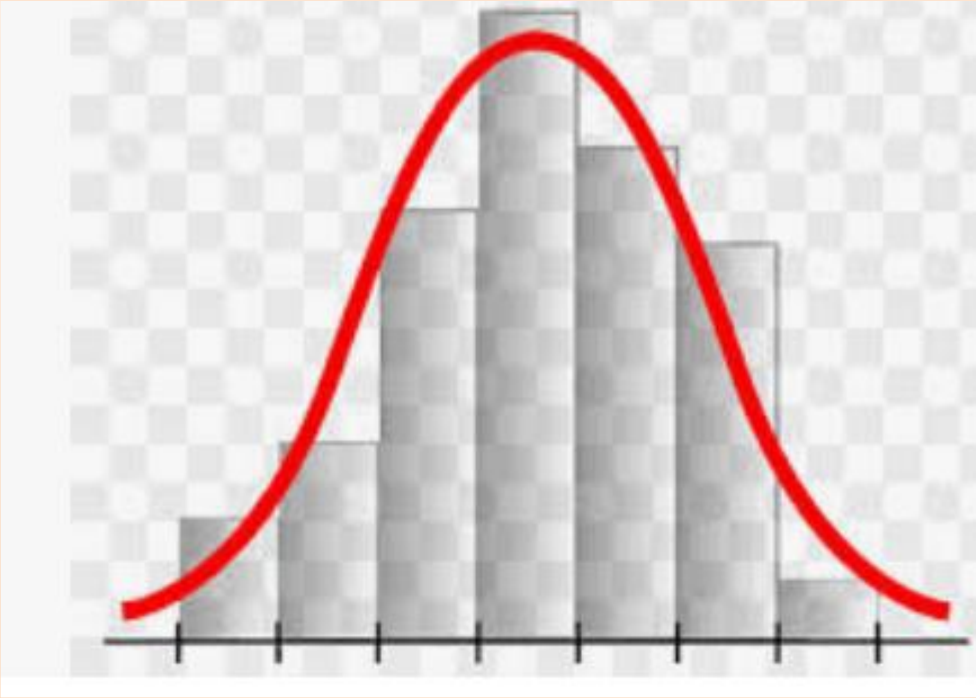
LENGUAJES FORMALES

Lenguaje	Compromiso ontológico (lo que sucede en el mundo)	Compromiso epistemológico (lo que el agente cree acerca de los hechos)
Lógica proposicional	Hechos	V / F / desconocido
Lóg. de primer orden	Hechos, objetos, relaciones	V / F / desconocido
Lógica temporal	Hechos, objetos, relaciones, tiempos	V / F / desconocido
Teoría de probabilidades	Hechos	Grados de creencia [0,1]
Lógica Difusa	Hechos con un grado de verdad [0,1]	Valor del intervalo conocido

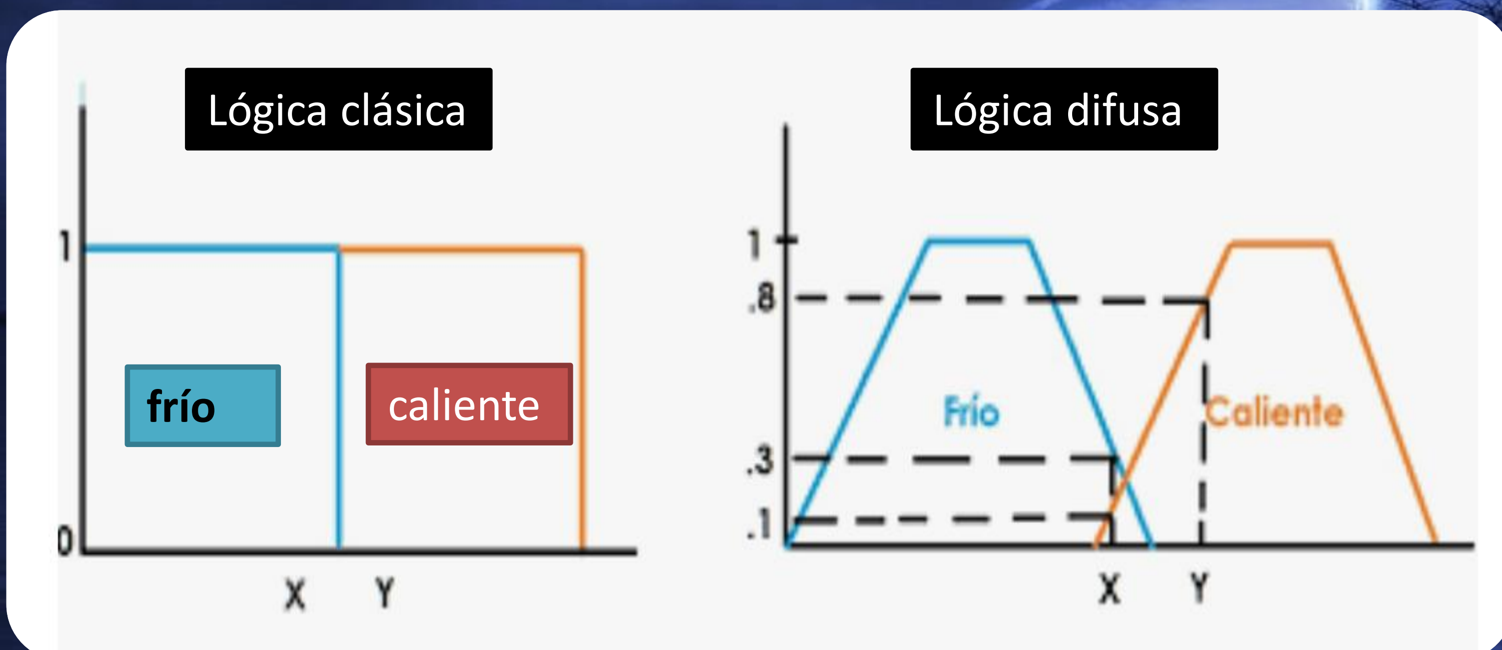
La Lógica Proposicional asume que hay hechos que suceden o no suceden en el mundo o no tiene ninguna opinión.

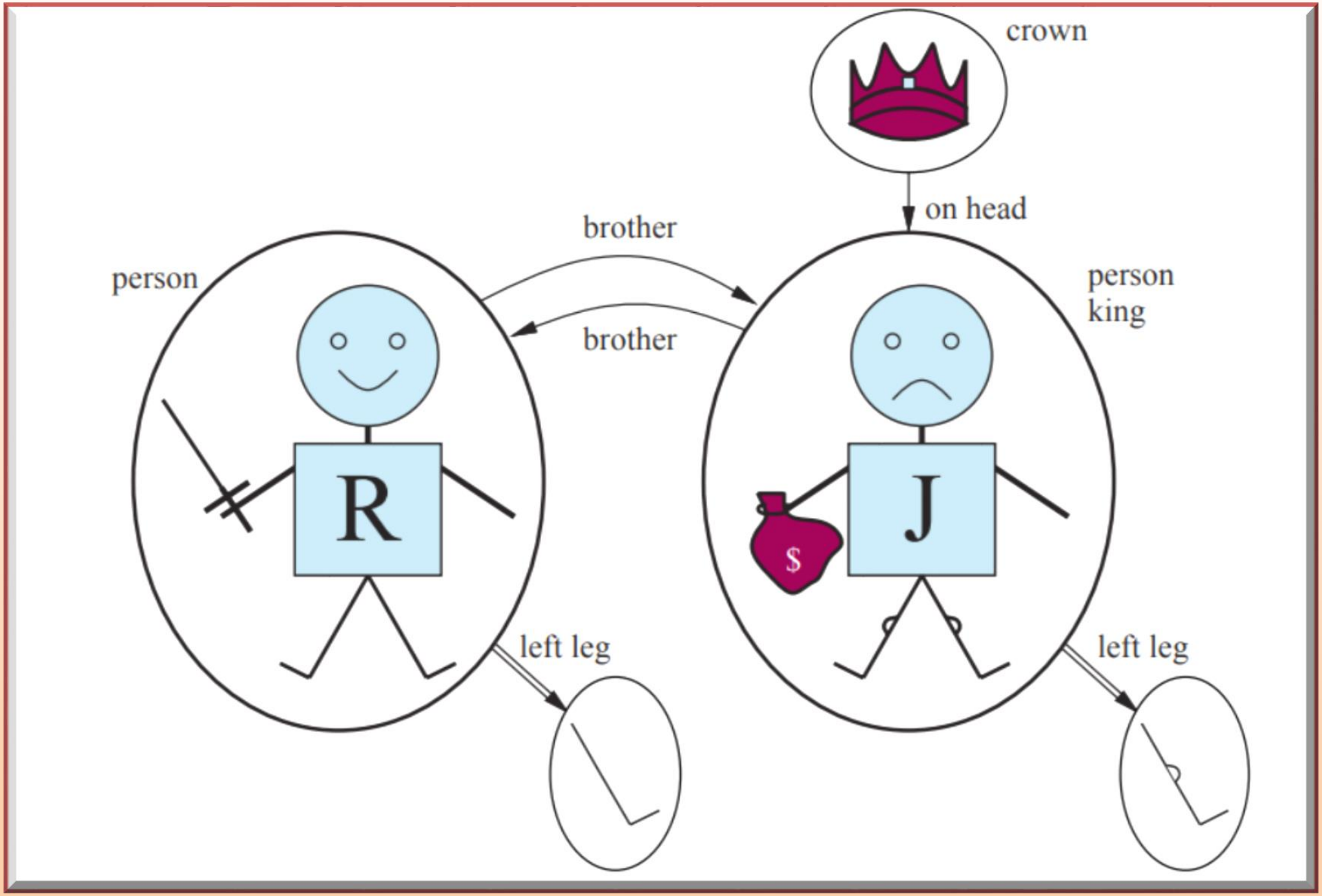
La Lógica de Primer Orden asume que el mundo se compone de objetos con ciertas relaciones entre ellos que suceden, no suceden o no hay opinión.

La Teoría de las Probabilidades pueden tener un grado de creencia que varía desde cero (no se cree en absoluto) a uno (se tiene creencia total)



La lógica difusa permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente del tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos.





Modelo en Lógica de Primer Orden

Lógica de Primer Orden

Lógica de Predicados o Cálculo de Predicados

- Marte es un planeta

OBJETO

PREDICADO ≡ $\boldsymbol{Propiedad}$

Oración

Planeta(Marte)
o
P(m)

En LPO los predicados son tratados como funciones cuyas entradas son los argumentos

Lógica de Primer Orden

Lógica de Predicados o Cálculo de Predicados

- **Júpiter es más grande que Marte**

OBJETOS

PREDICADO $\equiv$ ***Relación***

Oración

MasGrandeque(Júpiter,Marte)
o
MG(j,m)

CUANTIFICADORES

Una vez que tenemos una lógica que nos permite representar objetos, es muy natural querer expresar las propiedades de colecciones enteras de objetos en vez de enumerar los objetos por su nombre.

Cuantificadores estándar

- Universal $\forall$
- Existencial $\exists$

• CUANTIFICADOR Universal $\forall$

Todos los reyes son personas

$$\forall x \quad \text{Rey}(x) \rightarrow Persona(x)$$

Las casillas vecinas al Wumpus son apestosas

$$\forall x \quad \text{VecinaW}(x) \rightarrow Apestosa(x)$$

• CUANTIFICADOR Existencial ∃

El Rey Juan tiene una corona sobre su cabeza

$\exists x \ \ \text{Corona}(x) \wedge SobreCabeza(x, Juan)$

El Lingote de Oro resplandece

$\exists x \ \text{LingoteDeOro}(x) \rightarrow Resplandece(x)$

- **CONSTATES**

Marte
Júpiter

- **VARIABLES**

"ESTO ES ANTIGUO"
Antiguo (x) o A(x)

"Esto es más grande que aquello"
G(x,y)

- **CUANTIFICADORES**

"todos son amigables"
$\forall\, x, A(x)$

"alguien está mintiendo"
$\exists x \quad M(x)$

Expresión que afirma que una condición se cumple para un cierto nº de individuos

- **CONECTIVAS: son las mismas de la LP**

Oración	Formalización
Sócrates es sabio y prudente	Sabio(S) $\wedge \mathrm{Prudente}(\mathrm{S})$
Si Sócrates es sabio, entonces también es prudente	S(S) $\Rightarrow P(S)$
Nadie es sabio y además prudente	$\nexists x \quad (S(x) \wedge P(x))$
Todos los sabios son prudentes	$\forall x \quad (S(x) \Longrightarrow P(x))$

- **ARGUMENTO**

Todos los hombres son mortales
Sócrates es un hombre
Por lo tanto, Sócrates es mortal

LPO	LP
$\forall x \quad (H(x) \Longrightarrow M(x))$	$\mathrm{H} \Longrightarrow M$
H(S)	S$\Longrightarrow \mathrm{H}$
$\therefore M(S)$	$\therefore S \Longrightarrow M$

REGLAS DE INFERENCIA

- MODUS PONENS

$$\frac{P \Longrightarrow Q, \qquad P}{Q}$$

- GENERALIZACIÓN UNIVERSAL

$$\frac{A}{\forall x \quad A}$$

REDES SEMÁNTICAS

- Las RS se usan en IA para representar **conocimiento incierto** de un modo natural y eficiente.

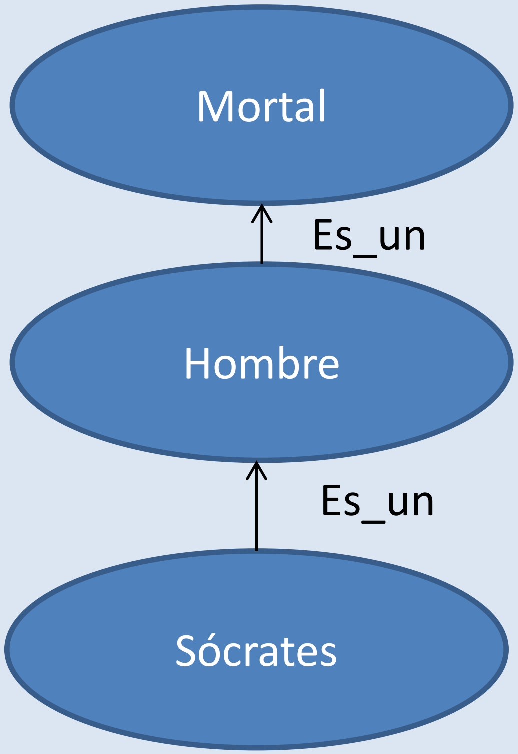
- Los elementos básicos son:

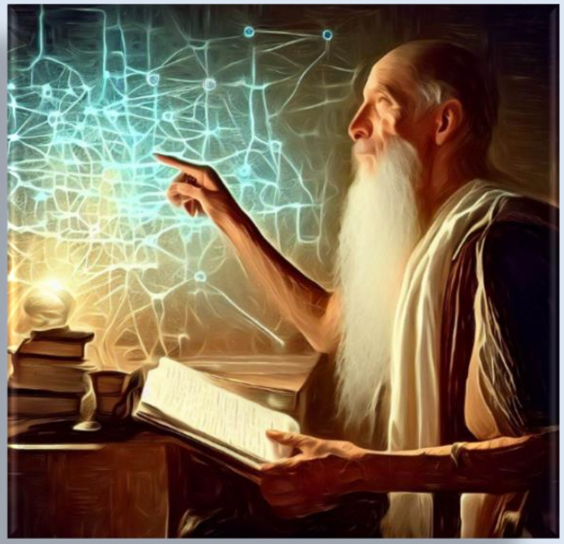
❖ estructuras de datos en nodos, que representan conceptos, unidos por arcos que representan las relaciones entre los conceptos

❖ un conjunto de procedimientos de inferencia que operan sobre las estructuras de datos.

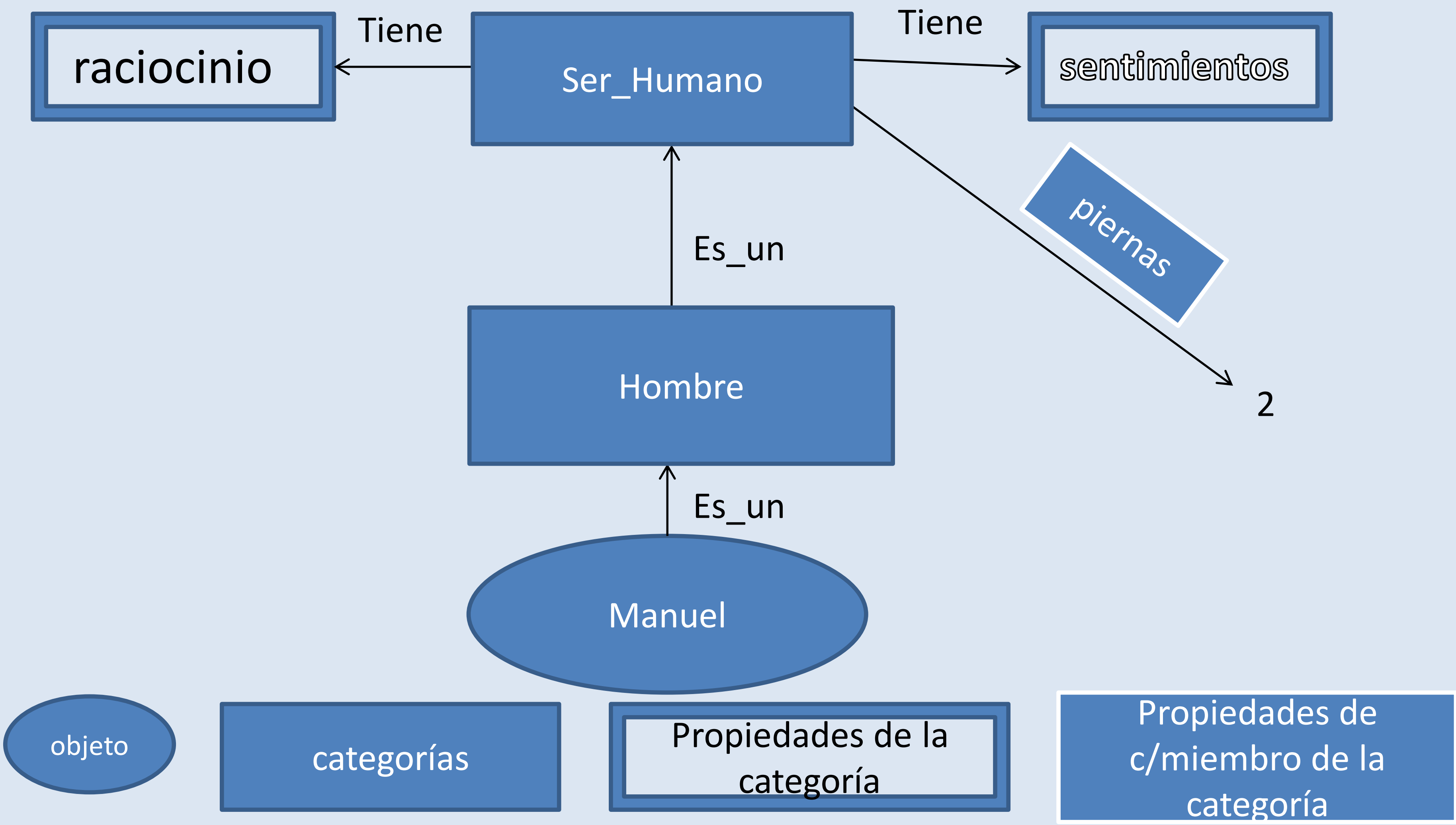
REDES SEMÁNTICAS

Una Red Semántica es un conjunto de nodos y arcos que representa gráficamente el conocimiento y existe jerarquía entre sus nodos.





Herencia: en la que los nodos heredan las propiedades o atributos de nodos de clase mayor
Las inferencias se hacen en base a las propiedades de herencia que existen entre los nodos



Comportamiento bajo incertidumbre

La probabilidad proporciona una manera de “resumir” la incertidumbre que se deriva de la ignorancia.

- **Los agentes deben saber comportarse bajo incertidumbre ya que casi nunca tienen acceso a toda la verdad sobre su entorno.**
- **Un agente Wumpus se encontrará a menudo incapaz de descubrir cual de los dos cuadrados contiene un pozo ya que tiene sensores que sólo le muestran información local.**

Grado de creencia

- **El conocimiento del agente puede como mucho proporcionar sólo un grado de creencia en las oraciones relevantes.**
- **Para tratar el grado de creencia se utiliza la Teoría de la Probabilidad que asigna a cada oración un grado de creencia entre 0 y 1.**

Si un paciente tiene dolor de muelas, el médico no lo sabe con seguridad pero podría creer que hay un 80% de posibilidad de que el paciente tenga caries.

Grado de creencia

- El grado de creencia podría provenir de datos estadísticos o de algunas reglas generales o de una combinación de fuentes.

- Asignar probabilidad cero a una oración determinada corresponde a una creencia inequívoca de que la oración es falsa

- Asignar una probabilidad uno corresponde a una creencia rotunda de que la oración es cierta.

Grado de creencia

- Las creencias del agente dependen de las percepciones que el agente ha recibido hasta el momento.

- Estas percepciones constituyen la evidencia sobre las que se basan las afirmaciones de probabilidades.

- Las probabilidades pueden cambiar cuando se adquiere más evidencia.

<u>Proposiciones:</u> **son afirmaciones acerca de un caso. Los grados de creencia se aplican a las proposiciones. Se pueden combinar usando todos los conectivos lógicos.**

<u>Variable aleatorias</u>: se refiere a una parte del mundo cuyo estatus es desconocido inicialmente.(booleanas, discretas, continuas)

<u>Dominio</u>: cada variable aleatoria tiene un dominio de posibles valores que puede tomar.

Sucesos Atómicos

- **Es una especificación completa del estado del mundo sobre el que el agente está inseguro.**

- **Puede pensarse como la asignación de valores particulares de todas las variables que componen el mundo.**

  (Ej: *caries=falso ^ dolor_muelas=cierto*)

Probabilidad "a priori"

- Antes de que la evidencia se obtenga, hablamos de probabilidad "a priori" o incondicional.
- Es el grado de creencia que se le otorga a una proposición "*a*" en ausencia de cualquier otra información. P(*a*)
- Ej: P(caries)=0,1
- Ej: P (Tiempo) = < 0,7 ; 0,2 ; 0,08 ; 0,02 >

Distribución de prob. a priori para la variable aleatoria Tiempo

Tiempo <soleado, lluvioso, nuboso, nevado>

Probabilidad *"a priori"*

- P (Tiempo, Caries)
  probabilidad de todas las combinaciones de los valores de un conjunto de variables aleatorias.

  Puede representarse por una tabla de probabilidades de 4x2 llamada *distribución de probabilidad conjunta* de Tiempo y Caries.

- **Para variables continuas se utilizan las funciones de densidad de probabilidad.**

Probabilidad “*a posteriori*”

- Después de obtener la evidencia, hablamos de probabilidad “a posteriori” o condicional.
- Se usan una vez que el agente obtiene alguna evidencia referente a las variables aleatorias desconocidas que constituyen el dominio.
- P (*a*|*b*)*: la probabilidad de “a” dado que todo lo que conozco es b.*
- Ej: P(caries|Dolor_de_muelas) = 0.8

Regla del producto

P (a|b)= P(a ^b) / P(b)

$$P(a \wedge b) = \mathrm{P(a|b)} \;.\; \mathrm{P(b)}$$

Usando <u>*P*</u> para distribuciones de probabilidades conjuntas

$$\underline{P}(X,Y) = \underline{P}(X|Y) \;.\; \underline{P}\,(Y)$$

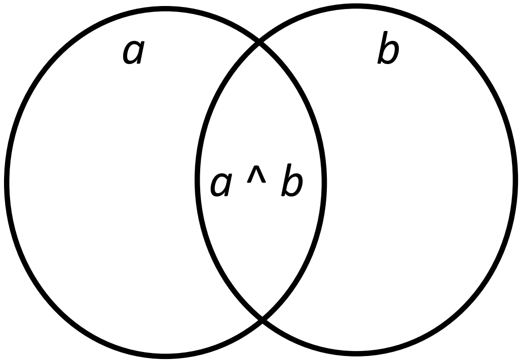
$$\left\{ P(X = x_i \wedge Y = y_j) = \begin{cases} P(X = x_1|Y = y_1)\,.\,P(Y = y_1) \\ P(X = x_1|Y = y_2)\,.\,P(Y = y_2) \\ \qquad\qquad \dots \dots .. \end{cases} \right.$$

AXIOMAS DE KOLMOGOROV

- $0 \leq P(a) \leq 1$

- **P(cierto) = 1** **P (falso) = 0**

- **P(*a* v *b*) = *P*(*a*) + *P*(*b*) – P(*a* ^ *b*)**



INFERENCIA PROBABILISTA

- **Cálculo de probabilidades "a posteriori" para proposiciones-pregunta a partir de la evidencia observada.**
- **La tabla de Distribución conjunta completa constituye la Base de Conocimiento**

	Dolor_de_muelas		**¬Dolor_de_muelas**	
	Infectarse	¬Infectarse	Infectarse	¬Infectarse
Caries	0,108	0,012	0,072	0,008
¬Caries	0,016	0,064	0,144	0,576

Aplicando el 3er Axioma de Kolmogorov:

P(caries v Dolor_de_muelas) = 0,108 + 0, 012 + 0,072 + 0,008 + 0,016 + 0,064 = 0,28

MARGINALIZACIÓN

- **Una distribución sobre Y puede obtenerse a partir de cualquier distribución conjunta que la contenga sumando en todas las demás variables. (sumatoria de eliminación)**

$$P(Y) = \sum_{z} P(Y, z)$$

P(caries) = 0,108 + 0,012 + 0,072 + 0,008 =0,2

	Dolor_de_muelas		¬Dolor_de_muelas	
	Infectarse	¬Infectarse	Infectarse	¬Infectarse
Caries	0,108	0,012	0,072	0,008
¬Caries	0,016	0,064	0,144	0,576

CONDICIONAMIENTO

- Una variante de la Marginalización que involucra probabilidades condicionales

$$P(Y) = \sum_{z} P(Y|z)\ .P(z)$$

Ejemplo

P(a\b) = P(a^b) / P(b)

- $P(caries|Dolordemuelas) =$

$$= \frac{P(caries \wedge Dolordemuelas)}{P(Dolordemuelas)} = \frac{0{,}108+0{,}012}{0{,}108+0{,}012+0{,}016+0{,}064} =$$

$$= 0{,}6$$

	Dolor_de_muelas		¬Dolor_de_muelas	
	Infectarse	¬Infectarse	Infectarse	¬Infectarse
Caries	0,108	0,012	0,072	0,008
¬Caries	0,016	0,064	0,144	0,576

Ejemplo

- $P(\neg caries|Dolordemuelas) =$

$$= \frac{P(\neg caries \wedge Dolordemuelas)}{P(Dolordemuelas)} = \frac{0{,}016+0{,}064}{0{,}108+0{,}012+0{,}016+0{,}064}$$

$$= 0{,}4$$

	Dolor_de_muelas		¬Dolor_de_muelas	
	Infectarse	¬Infectarse	Infectarse	¬Infectarse
Caries	0,108	0,012	0,072	0,008
¬Caries	**0,016**	**0,064**	0,144	0,576

CTE. DE NORMALIZACIÓN

- $\propto = \boldsymbol{Constante\ de\ normalización}$
- **Ej:** $\propto = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P(Dolordemuelas)}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{0{,}108+0{,}012+0{,}016+0{,}064}}$

	Dolor_de_muelas		¬Dolor_de_muelas	
	Infectarse	¬Infectarse	Infectarse	¬Infectarse
Caries	0,108	0,012	0,072	0,008
¬Caries	0,016	0,064	0,144	0,576

$\boldsymbol{P(caries|Dolordemuelas)}$ = $\propto . P(caries\ , Dolordemuelas\ )$

= $\propto . [P(caries, Dolordemuelas, infectarse) + P(caries, Dolordemuelas, \neg infectarse)\ ]$

= $\propto . [0{,}018 + 0{,}012] = 5\ .\ 0{,}12$= 0,6

INDEPENDENCIA

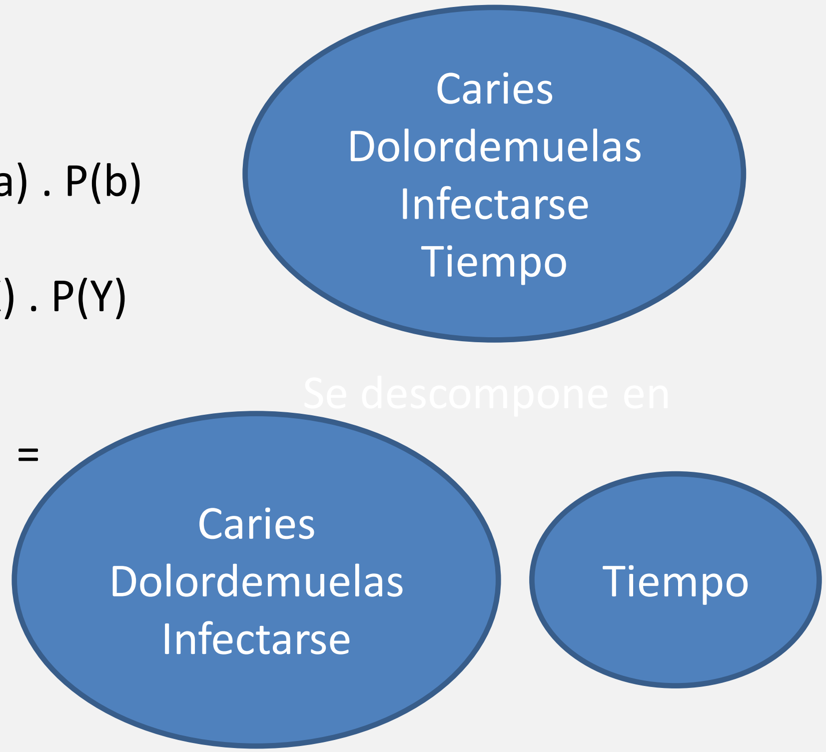
- Las afirmaciones de independencia ayudan a reducir el tamaño de la representación del dominio y la complejidad del problema de inferencia.
- Las afirmaciones de independencia se basan en el conocimiento del dominio.

$P(a|b)=P(a)$ $\quad$ $P(b|a)=P(b)$ $\quad$ $P(a \wedge b)=P(a) \cdot P(b)$

$P(X|Y)=P(X)$ $\quad$ $P(Y|X)=P(Y)$ $\quad$ $P(X,Y)=P(X) \cdot P(Y)$

P(Tiempo=nublado|Dolordemuelas,infectarse,caries) =

= P(Tiempo=nublado)



REGLA DE BAYES

- Según la Regla del producto:

$$P(a \wedge b) = P(a|b) \cdot P(b)$$

$$P(a \wedge b) = P(b|a) \cdot P(a)$$

Igualando

$$P(a|b) \cdot P(b) = P(b|a) \cdot P(a)$$

$$P(a|b) = P(b|a) \cdot P(a) \;/\; P(b)$$

En general:

$$P(Y|X) = P(X|Y) \cdot P(Y) / P(X)$$

Ejemplo

Un médico sabe que la enfermedad de meningitis causa al paciente que el cuello se agarrote, el 50% de las veces.
El médico también conoce algunos hechos incondicionados:

- La prob. a priori de que cualquier paciente tenga meningitis es 1/50.000
- La prob. a priori de que cualquier paciente tenga un cuello agarrotado es 1/20

s: el paciente tiene el cuello agarrotado
m: el paciente tiene meningitis

$P(s\backslash m) = 0,5$
$P(m) = 1/50.000$
$P(s) = 1/20$

Esperamos que sólo un paciente de entre 5.000 con un cuello agarrotado tenga meningitis.

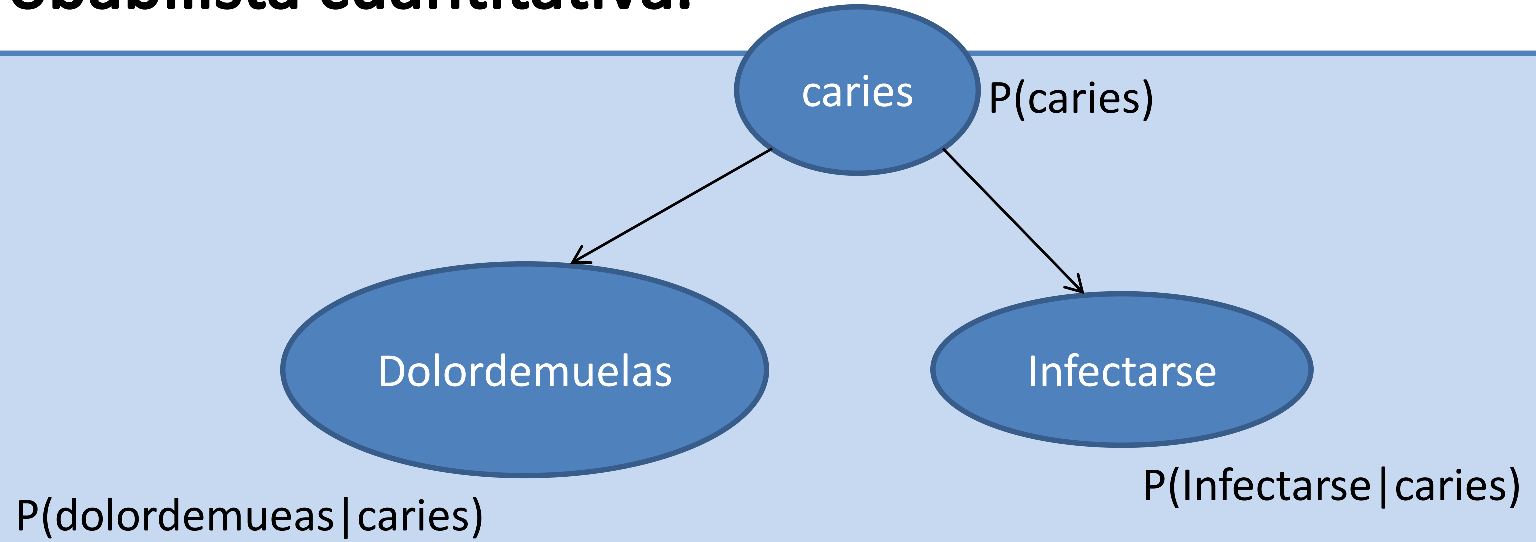
Se infiere:

$P(m\backslash s)= P(s\backslash m) \,.\, P(m) \,/\, P(s)= 0,0002$

normalizado: $\propto \,.\, P(s|m) \,.\, P(m)$ donde $\propto = 1 / P(s)$

REDES BAYESIANAS

- Es una estructura de datos que representa las dependencias entre las variables y permite mostrar una descripción escueta de cualquier distribución de probabilidades conjuntas completa.
- Una Red Bayesiana es un grafo acíclico dirigido en el que cada nodo está comentado con información probabilista cuantitativa.



REDES BAYESIANAS

- Es una representación correcta del dominio sólo si cada nodo es independiente condicionalmente de sus predecesores en la ordenación de los nodos, dados sus padres.

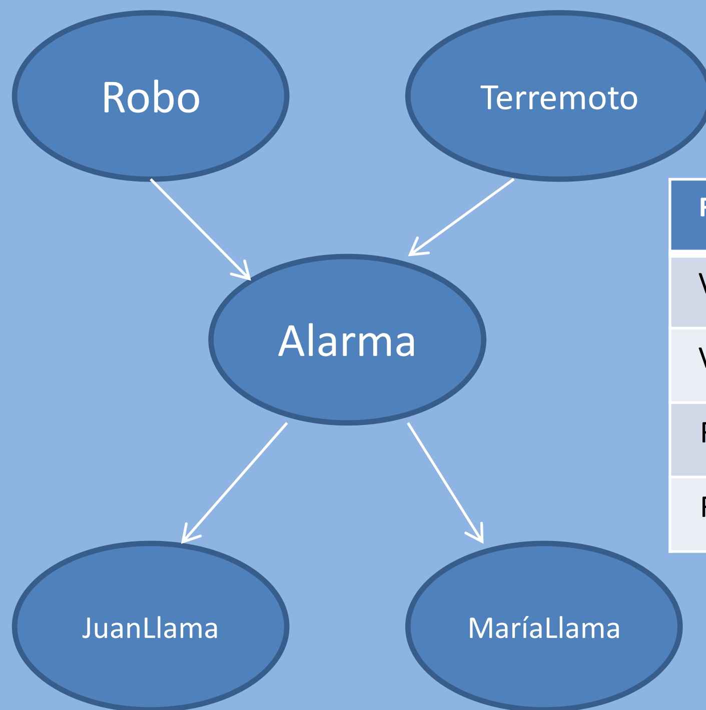
- Cada componente interactúa directamente con sólo un nº limitado de los otros componentes, es decir, es una representación compacta del dominio.

- Primero se añaden las causas raíces, luego las variables que influyen y así sucesivamente hasta llegar a las hojas que no tienen influencia causal directa sobre otras variables.

Ejemplo

P(R)=0,001

P(T)= 0,002



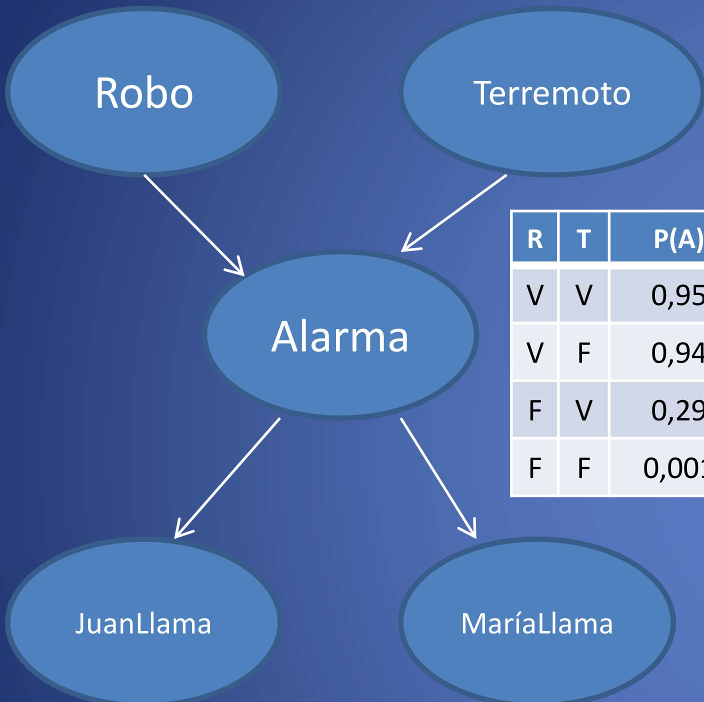
R	T	P(A)
V	V	0,95
V	F	0,94
F	V	0,29
F	F	0,001

A	P(J)
V	0,90
F	0,05

A	P(M)
V	0,70
F	0,01

Inferencia por enumeración

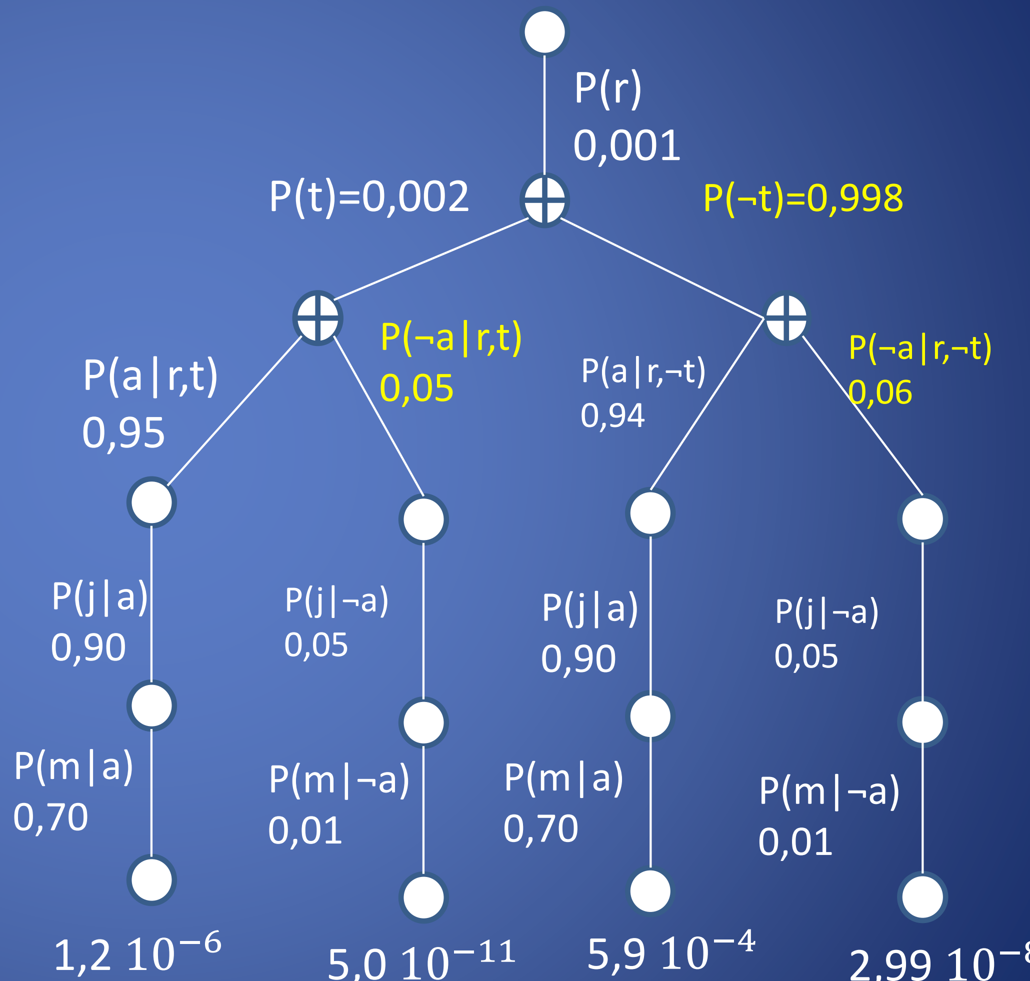
P(R)=0,001   P(T)= 0,002



R	T	P(A)
V	V	0,95
V	F	0,94
F	V	0,29
F	F	0,001

A	P(J)
V	0,90
F	0,05

A	P(M)
V	0,70
F	0,01



$\propto = \dfrac{1}{P(r|j,m)+P(-r|j,m)}$, $P(r|j,m) = \propto .\ 5{,}92\ 10^{-4} = 0{,}28$

Inferencia por eliminación de variables

1. El orden de las variables de la red es esencial para la eficiencia del algoritmo.

   Una heurística habitual es moverse desde las hojas hacia arriba dentro de la topología de la red bayesiana. Tomaremos M,J,A,T,R

2. Comenzamos con M

A	1
v	0,7
f	0,01

3. Tomo la siguiente variable, J

A	2
v	0,9
f	0,05

A	P(J)
V	0,90
F	0,05

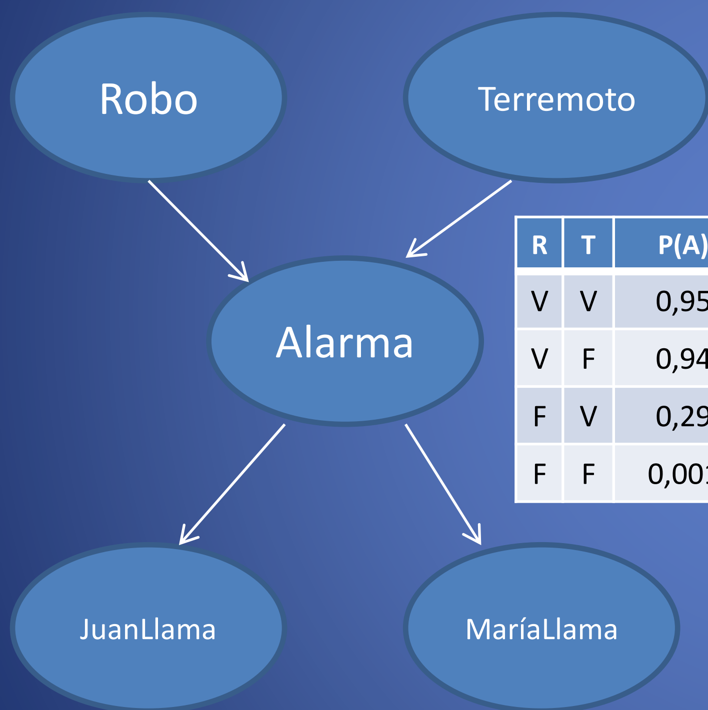
A	P(M)
V	0,70
F	0,01

Inferencia por eliminación de variables

4. Tomo la siguiente variable A, y armo la tabla

P(R)=0,001

P(T)= 0,002



R	T	P(A)
V	V	0,95
V	F	0,94
F	V	0,29
F	F	0,001

A	2
v	0,9
f	0,05

A	1
v	0,7
f	0,01

A	R	T	3	4= 1 . 2 . 3
V	**V**	**V**	**0,95**	0,5985
V	**V**	**F**	**0,94**	0,5922
V	**F**	**V**	**0,29**	0,1827
V	**F**	**F**	**0,001**	0,00063
F	V	V	0,05	0,00003
F	V	F	0,06	0,00003
F	F	V	0,71	0,00036
F	F	F	0,999	0,00049

Inferencia por eliminación de variables

5. Sumamos factores con igual combinación de R y T (y para A y ¬A)

A	R	T	P(A|R,T)	4
V	V	V	0,95	**0,5985**
V	V	F	0,94	0,5922
V	F	V	0,29	0,1827
V	F	F	0,001	0,00063
F	V	V	0,05	**0,00003**
F	V	F	0,06	0,00003
F	F	V	0,71	0,00036
F	F	F	0,999	0,00049

5	R	T
0,59853	V	V
0,59223	V	F
0,18306	F	V
0,00112	F	F

Inferencia por eliminación de variables

5	R	T
0,59853	V	V
0,59223	V	F
0,18306	F	V
0,00112	F	F

5. Continuamos con T

T	6
V	0,002
F	0,998

7 = 5.6	R	T
0,59853 . 0,002 = 0,001197	V	V
0,59223 . 0,998 = 0,591046	V	F
0,18306 . 0,002 = 0,000366	F	V
0,00113 . 0,998 = 0,001128	F	F

R	8 (sumamos para t y ¬t)	t	¬t
V	**0,59224**	0,001197	0,591046
F	**0,001494**	0,000366	0,001128

Inferencia por eliminación de variables

6. Finalizamos con R

R	9
V	0,001
F	0,999

R	8 (sumamos para t y ¬t)	t	¬t
V	**0,59224**	0,001197	0,591046
F	**0,001494**	0,000366	0,001128

10 = 8 . 9	R
0,59224 . 0,001 = 0,00059	V
0,00149 . 0,999 = 0,00149	F

P(r|j,m) = $\propto$ ⟨0,00059 ; 0,00149⟩= ⟨0,28 ; 0,72⟩

Si normalizamos $\propto = \frac{1}{0{,}00059+0{,}00149} = 480{,}769231$

CADENAS de MARKOV

Razonamiento Probabilista en el tiempo

- Un proceso de Markov es un proceso que se va moviendo de estado en estado dependiendo exclusivamente de los N estados anteriores.
- Un proceso de Markov es de primer orden si el estado actual depende sólo del estado previo y no de los estados iniciales:

$$P(X_t \backslash X_{0:t-1}) = P(X_t \backslash X_{t-1})$$

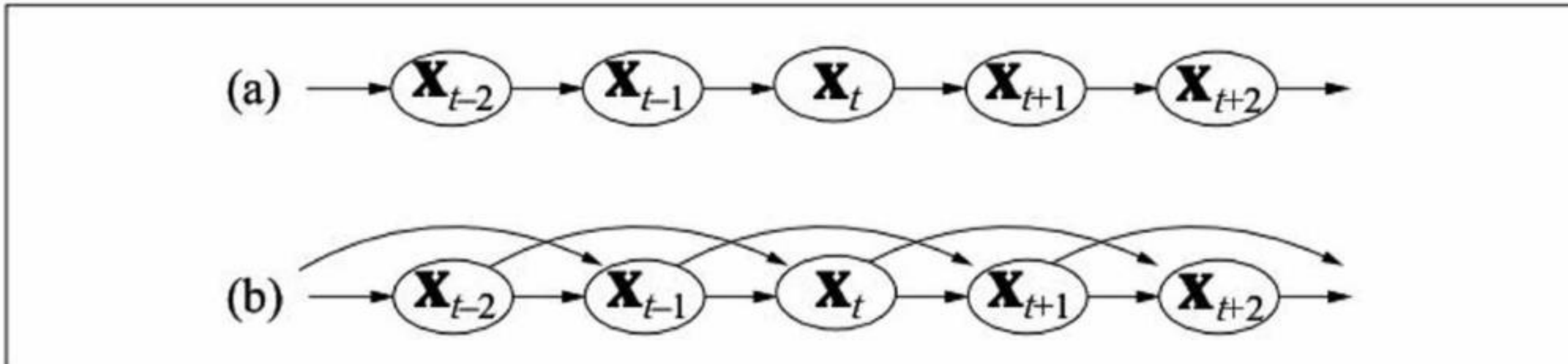


Figura 15.1 (a) Estructura de red bayesiana correspondiente a un proceso de Markov de primer orden con el estado definido por las variables $\mathbf{X}_t$. (b) Un proceso de Markov de segundo orden.

Inteligencia Artificial – Un enfoque moderno

Ejemplo
Variables: Soleado ; Nublado

- Un día se denomina "soleado" (S) si el sol brilla más de la mitad del día y se denomina "nublado" (N), si lo hace menos.
- Por experiencia se sabe que si hay un día nublado es igual de probable que el día siguiente sea también nublado.
- Si el día es soleado hay una probabilidad de 2/3 de que sea también soleado.

Matriz de Transición

- Un día se denomina “soleado” (S) si el sol brilla más de la mitad del día y se denomina “nublado” (N), si lo hace menos.

Matriz de Transición

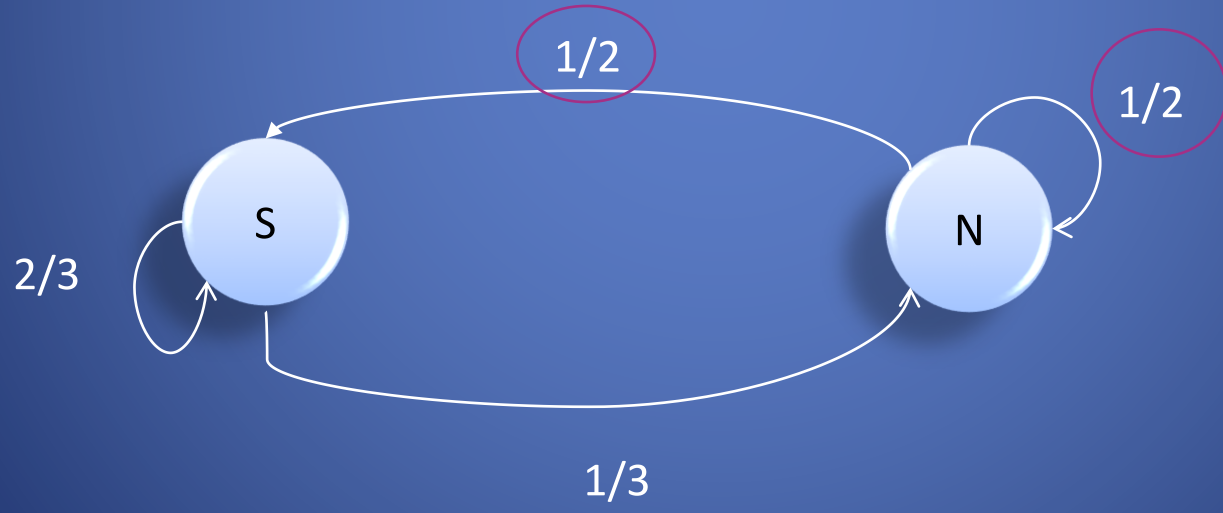
- Por experiencia se sabe que si hay un día nublado es igual de probable que el día siguiente sea también nublado.

Matriz de Transición

- Si el día es soleado hay una probabilidad de 2/3 de que sea también soleado.

Matriz de Transición

	N	S
N	$1/2$	$1/2$
S	$1/3$	$2/3$



- $T = \begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{matrix}$

La Matriz de Transición define una cadena de Markov.

La matriz que indica como se encuentra el sistema al inicio:

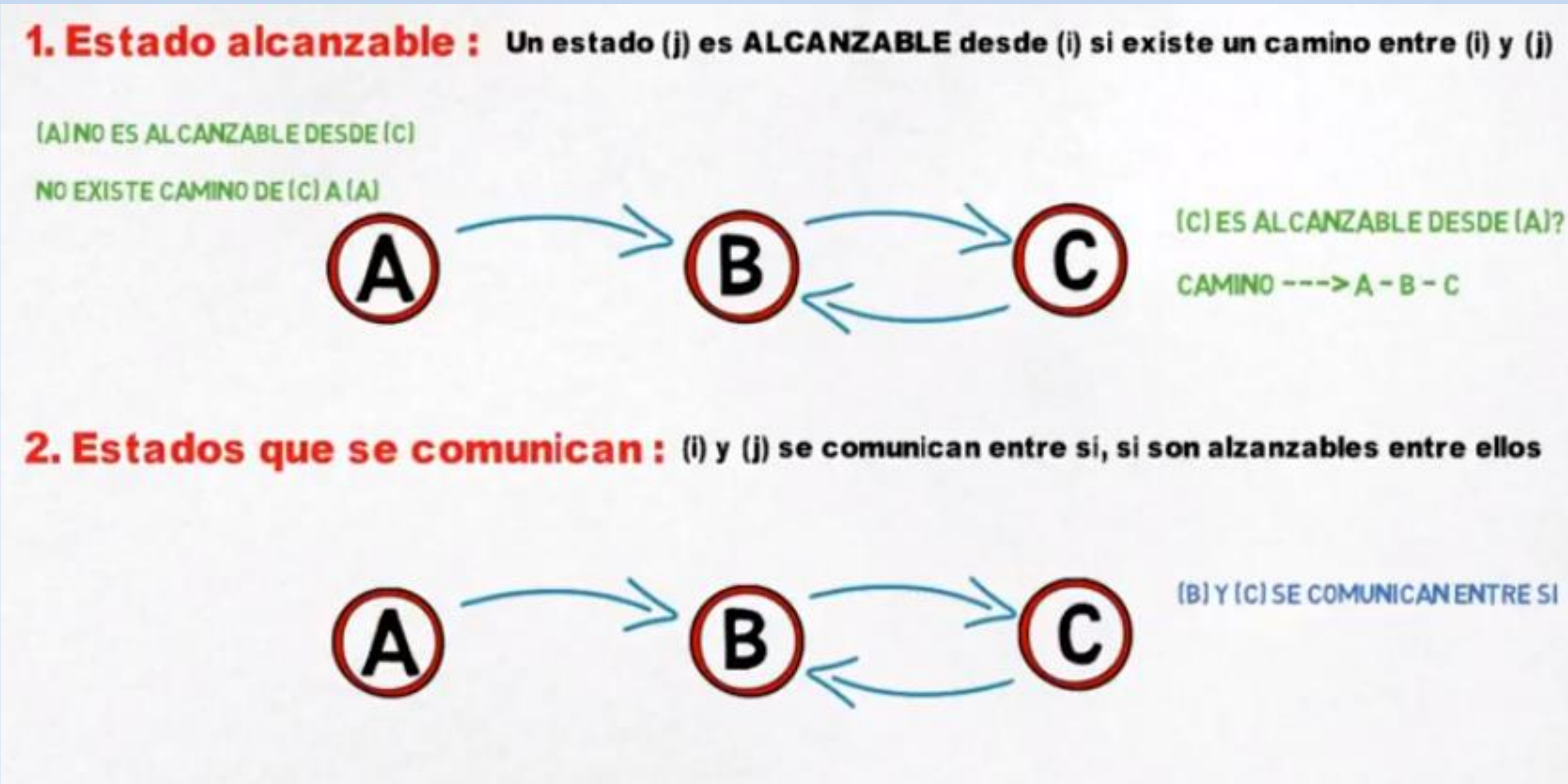
$P^{(0)} = (p_1^{(0)} \; p_2^{(0)}) = (N^{(0)} \quad S^{(0)}) = (1 \;\; 0)$ hoy está nublado

Se puede demostrar que $P^{(n)} = (p^{(0)} . T^{n})$

Al tercer día: $P^{(3)} = (p^{(0)} . T^{3}) = (1 \quad 0) . \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^3$

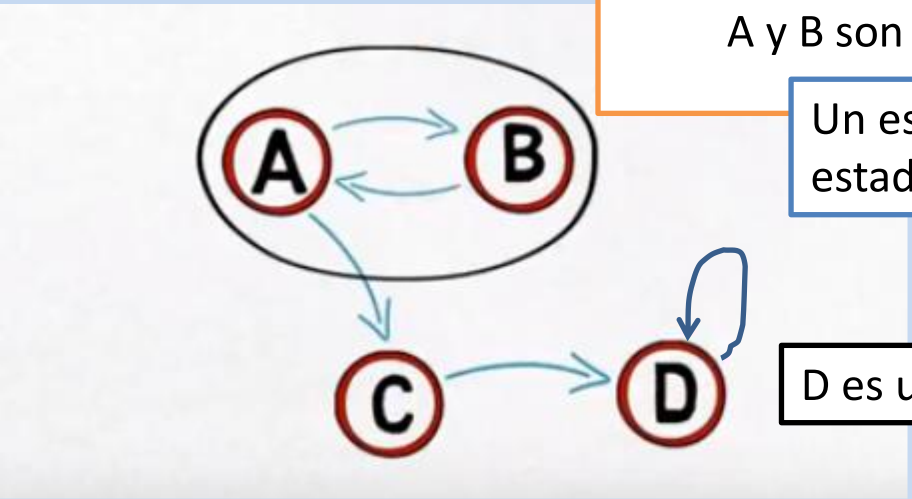
CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS

Si existe una probabilidad no nula que comenzando en un estado i se pueda llegar a un estado j al cabo de un cierto número de etapas (digamos n) se afirma que el estado j es **accesible o alcanzable** desde el estado i.



CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS

Un estado (i) es transitorio si existe un estado (j) al que puedo llegar saliendo de (i), pero no puedo llegar a (i) si salgo de (j).



A y B son estados recurrentes

Un estado es recurrente si existe al menos un estado desde el cual volver

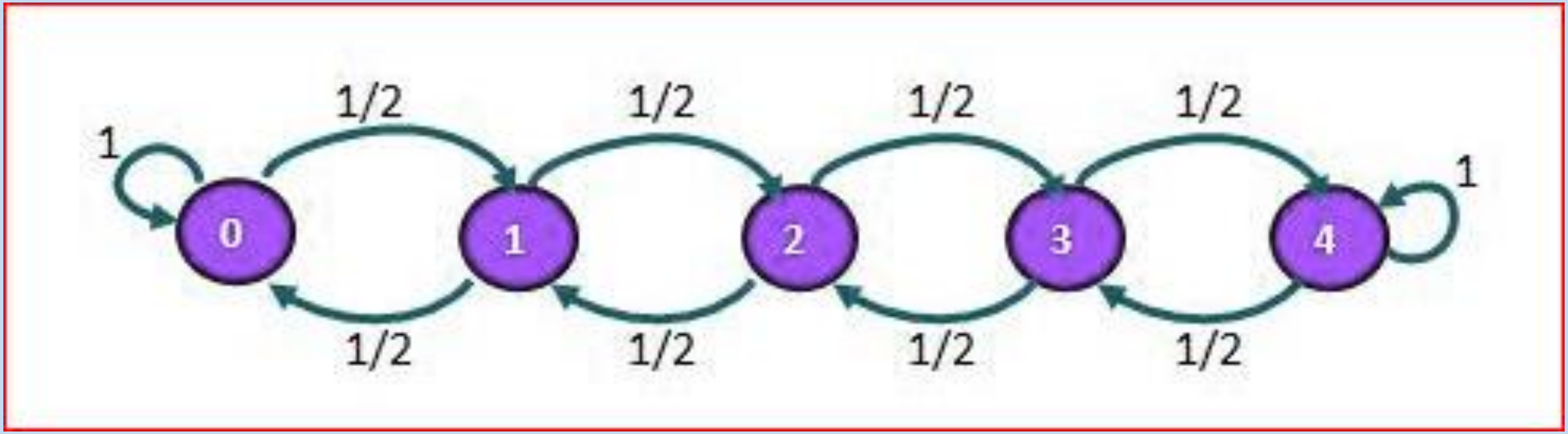
D es un estado absorbente

Un estado es absorbente cuando la probabilidad de quedarse allí es 1

C es un estado transitorio

Tanto desde A como desde B puedo llegar a C, pero desde C no puedo llegar a A o B.

CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS



Un estado es **periódico** si vuelve después de un número finito de pasos.

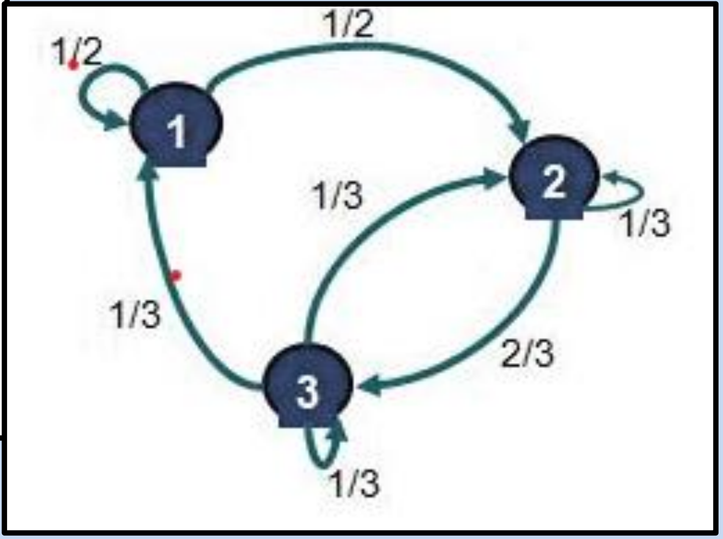
El **periodo** de un estado es el número mínimo de pasos que deben dar para volver a sí mismo.

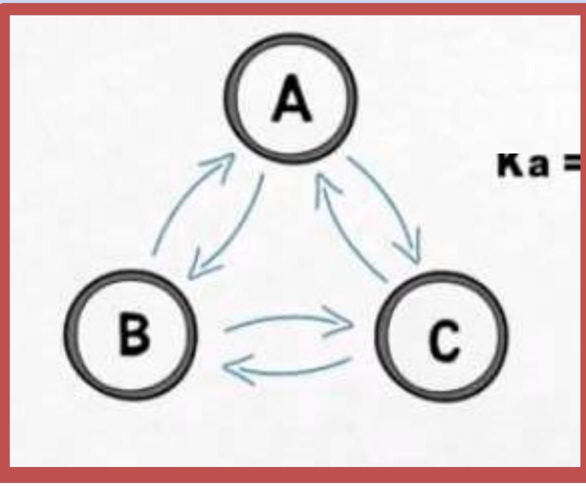
ESTADOS ERGÓDICOS Y ESTADOS ESTABLES

Un estado bastante importante es aquel que es **recurrente, no nulo y aperiódico**. Recibe el nombre de **ergódico**.

Los estados ergódicos son importantes en la clasificación de cadenas y para probar la existencia de distribuciones de probabilidad límite. Cuando se alcanzan estados estables.

Una Cadena de Markov donde todos sus estados son accesibles entre sí y por tanto se comunican se dice que es **irreducible**, es decir, que existe una única clase de estados.





Todos los estados en una cadena irreducible pertenecen a la misma clase. Si todos los estados son ergódicos entonces se dice que la cadena de Markov es **ergódica.**

Tres empresas de venta de engranajes (A,B y C) compiten y actualmente sus cuotas de mercado son 30%, 20% y 50% respectivamente.

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{matrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}82 & 0{,}03 \\ 0{,}13 & 0{,}12 & 0{,}75 \end{matrix}$$

La matriz de transición de la cadena de Markov representaría la probabilidad de que una empresa cambie de cuota de mercado de un período de tiempo a otro.

¿Cómo se repartirán el mercado a largo plazo?

Reparto del mercado después de n ciclos: $p^{(0)}T^n$

Estados Estables

1 mes :	$p^{(1)} = (0{,}3350 \quad 0{,}2540 \quad 0{,}4110\ )$
2 meses:	$p^{(2)} = (0{,}3595 \quad 0{,}2911 \quad 0{,}3494\ )$
6 meses:	$p^{(6)} = (0{,}4030 \quad 0{,}3543 \quad 0{,}2427\ )$
1 año:	$p^{(12)} = (0{,}4150 \quad 0{,}3704 \quad 0{,}2146\ )$
2 años	$p^{(24)} = (0{,}4165 \quad 0{,}3722 \quad 0{,}2113\ )$
3 Años	$p^{(36)} = (0{,}4165 \quad 0{,}3722 \quad 0{,}21131\ )$

Matriz estable

$$T = \begin{matrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}82 & 0{,}03 \\ 0{,}13 & 0{,}12 & 0{,}75 \end{matrix}$$

Haciendo L = [x y z] ; L . T = L ; x+y+z = 1 (la suma de las prob. =1)

Queda el siguiente sistema de ecuaciones

0,8 x + 0,1 y + 0,1 z = x
0,15 x + 0,82 y + 0,03 z = y
0,13 x + 0,12 y + 0,75 z = z
x + y + z = 1

Cuya solución es

x=0,4165
y=0,3722
z= 0,21131

Por lo que el método es práctico para resultados a largo plazo

En una cadena de Markov ergódica, la matriz de transición tiene las siguientes propiedades:

- Todos los elementos de la matriz son no negativos.
- La suma de los elementos de cada fila de la matriz es igual a 1.
- La matriz de transición es irreducible y aperiódica.

Análisis de los estados absorbentes

Una empresa emplea 3 tipos de ingenieros: principiantes, con experiencia y socios. Durante cierto año el 10% de los principiantes ascienden a ingenieros con experiencia y a un 10% se les pide que renuncien. Durante un año cualquiera un 5% de los ingenieros con experiencia ascienden a socios y a un 13% se les pide la renuncia. Los ingenieros que no se desempeñan adecuadamente, jamás descienden de categoría.

	P	**CE**	**Soc**	**Renuncia**
P	0,8	0,1	0	0,1
CE	0	0,82	0,05	0,13
Soc	0	0	1	0
Renuncia	0	0	0	1

1- la cadena de Markov se particiona

$$T = \left(\begin{array}{c|c} N & A \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$$

La disposición requiere que todos los estados absorbentes ocupen la esquina sureste de la nueva matriz.

	P	CE	Soc	Renuncia
P	0,8	0,1	0	0,1
CE	0	0,82	0,05	0,13
Soc	0	0	1	0
Renuncia	0	0	0	1

N = $estados\ no\ absorventes$

A = estados absorbentes

	P	CE
P	0,8	0,1
CE	0	0,82

	Soc	Ren
P	0	0,1
CE	0,05	0,13

A partir de:

$$N = \begin{matrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}82 \end{matrix} \qquad A = \begin{matrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}13 \end{matrix}$$

Se calcula:

$$(I - N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}18 \end{pmatrix}$$

$$(I - N)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2{,}7778 \\ 0 & 5{,}5556 \end{pmatrix}$$

Tiempo esperado para la absorción = $(I - N)^{-1}\ \mathbf{1}$

$\mathbf{1}$: vector columna unitario

$$(I - N)^{-1}\ \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 5 & 2{,}7778 \\ 0 & 5{,}5556 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}77 \\ 5{,}55 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la duración promedio de un ingeniero recién contratado?

Duración promedio : 5 + 2,77 = 7,77

¿Cuál es la duración promedio de un ingeniero con experiencia en la empresa?

Duración promedio: 5,55

Para hallar la probabilidad de que un ingeniero principiante llegue a ser socio se debe multiplicar $(I-N)^{-1}$ A

$$(I-N)^{-1}A = \begin{pmatrix} 5 & 2{,}7778 \\ 0 & 5{,}5556 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \color{red}{0{,}14} & 0{,}86 \\ 0{,}28 & 0{,}72 \end{pmatrix}$$

	Soc	Ren
P	**0,14**	0,86
CE	0,28	0,72