

# **Análisis del comportamiento de una membrana en movimiento vibratorio con animaciones interactivas.**

Cabrerizo Armando Ernesto<sup>a</sup>, Cladera Ojeda Fernando<sup>a</sup>,  
Eduardo Totter<sup>a</sup>, Silvia Raichman<sup>a</sup>, Aníbal Mirasso<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería, Lencinas s/n,  
5500 Mendoza, Argentina  
[arcabrerizo@gmail.com](mailto:arcabrerizo@gmail.com), [cladera.f@gmail.com](mailto:cladera.f@gmail.com), [etotter@fing.uncu.edu.ar](mailto:etotter@fing.uncu.edu.ar),  
[sraichman@uncu.edu.ar](mailto:sraichman@uncu.edu.ar), [aemirasso@uncu.edu.ar](mailto:aemirasso@uncu.edu.ar)

**Resumen.** En el marco de un Proyecto Integrador de la asignatura Matemática Avanzada de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, se plantea el estudio de diversas situaciones problema, relacionadas al comportamiento de una membrana en movimiento vibratorio. Esta actividad constituye un espacio de acercamiento de los estudiantes a la investigación e innovación, destinado a potenciar el desarrollo de habilidades asociadas al perfil del ingeniero en Mecatrónica. En este trabajo se presenta la solución analítica de los diversos problemas planteados y se describe la propuesta de implementación computacional realizada por los estudiantes con asistencia de los docentes, por medio del uso de herramientas de software libre para cumplir con un requisito del Proyecto Integrador de la Asignatura. Se muestran resultados obtenidos a partir de las animaciones interactivas diseñadas, las cuales permiten observar el comportamiento de la membrana en estudio para las distintas situaciones de interés planteadas.

**Palabras Clave:** Matemática Avanzada, membrana bidimensional, animaciones interactivas, software libre.

## **1 Introducción**

El presente documento está desarrollado como proyecto integrador de la cátedra de Matemática Avanzada de la carrera Ingeniería en Mecatrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo. Dicha asignatura tiene como objetivo el estudio y comprensión de distintos modelos matemáticos de sistemas dinámicos lineales mediante métodos analíticos y numéricos.

La metodología de enseñanza de la materia estimula el interés por el dominio de los instrumentos analíticos y numéricos propios del ingeniero. También incentiva a las conductas apropiadas para un profesional como son la creatividad, curiosidad y objetividad.

Estos objetivos permiten establecer como condición de aprobación un proyecto de investigación final, donde se ponen en juego las habilidades y destrezas desarrolladas durante el cursado. En este marco es donde se desarrolla el siguiente documento.

Al analizar las ecuaciones diferenciales, y más específicamente la ecuación de onda, es ineludible pensar en la aplicación de dichas ecuaciones a un dominio más

amplio que meramente el unidimensional. Ese fue el objetivo que se propuso al afrontar este trabajo y el hecho de su elección.

Durante el desarrollo del mismo, se abordan tanto los conceptos básicos de la resolución matemática, como así también las diferentes condiciones posibles que pueden presentarse en el problema. Se presenta a continuación una síntesis de la solución por series de Fourier de la ecuación, con condiciones de borde de Dirichlet y/o Neumann. Asimismo se muestran resultados de la implementación computacional elaborada específicamente para este trabajo, así como también las animaciones desarrolladas para distintos ejemplos utilizando software libre.

## 2 Desarrollo

En este apartado, se presenta el núcleo del documento en dos secciones, la primera es una introducción acerca de los métodos analíticos utilizados, y la segunda es un descripción de la implementación computacional propuesta en este trabajo.

### 2.1 Resolución de la ecuación de onda en dos dimensiones

Al extender los conceptos de mecánica vibratoria de la onda unidimensional, al dominio bidimensional, es posible encontrar la ecuación diferencial que representa la física de una membrana. La ecuación resultante, por consiguiente, es muy similar. Sin embargo, ahora no sólo se encuentra la derivada segunda de la función incógnita respecto a una variable espacial, sino a dos ( $x$  e  $y$ ). La ecuación de onda en dos dimensiones y un dominio rectangular, queda expresada de la siguiente manera [1] y [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a \wedge 0 < y < b\}. \quad (1)$$

$$c^2 = \frac{T}{\rho}. \quad (2)$$

Donde la función  $u$  que representa el desplazamiento vertical de los puntos de la membrana, depende de las dos variables en el plano  $x$  e  $y$  y del tiempo  $t$ , en tanto que la constante física  $c^2$  está dada por la relación entre la tensión de la membrana  $T$  y la densidad de la misma  $\rho$ .

Para la resolución de dicha ecuación se deben plantear 6 condiciones, en este caso, cuatro de borde y dos iniciales.

#### 2.1.1 Condiciones de Dirichlet

Las cuatro condiciones de frontera que se plantean, son constantes y homogéneas (condiciones de Dirichlet). Es decir, se define un rectángulo como dominio de la membrana, por el cual se va a propagar la vibración y cuyos bordes permanecerán

fijos:

$$u(0, y, t) = 0 ; u(a, y, t) = 0 ; u(x, 0, t) = 0 ; u(x, b, t) = 0. \quad (3)$$

En forma adicional, se especifican dos condiciones para el tiempo  $t=0$ s: una para la configuración inicial de la membrana, dada por la ecuación (4) y otra para las velocidades iniciales, dada por la ecuación (5):

$$u(x, y, 0) = f(x, y). \quad (4)$$

$$\dot{u}(x, y, 0) = g(x, y). \quad (5)$$

Donde la ecuación (5) en el presente caso, es homogénea, es decir  $g(x, y) = 0$ .

La resolución del problema se va llevar a cabo por el método de separación de variables o del producto de Fourier. En dicho desarrollo se propone una función  $u$  como producto de funciones de cada una de las variables independientes [1]:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t). \quad (6)$$

Luego reemplazando la ecuación (6) en la expresión diferencial (1) se obtiene:

$$X(x)Y(y)\ddot{T}(t) = c^2(X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t)). \quad (7)$$

Dividiendo ambos miembros de la (7) por  $X(x)Y(y)T(t).c^2$  y después despejando las funciones de  $x$ , se obtiene:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)c^2}.$$

Como cada miembro depende de variables distintas se puede concluir que la siguientes igualdades son constantes:

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= cte. \\ -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)c^2} &= cte. \end{aligned}$$

Recordando la resolución de la ecuación de onda unidimensional se propone a la constante con un valor negativo tal que se obtenga una solución sinusoidal, que cumpla con las condiciones homogéneas de frontera:

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\lambda^2 \rightarrow X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \\ X(x) &= \text{sen}(\lambda \cdot x); \quad \lambda = \frac{n\pi}{a}. \end{aligned}$$

Se repite un procedimiento similar para la segunda ecuación, donde se obtienen las

siguientes expresiones:

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)c^2} = -\lambda^2 \rightarrow \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)c^2} + \lambda^2.$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu^2 \rightarrow Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0.$$

$$Y(y) = \text{sen}(\mu y); \quad \mu = \frac{m\pi}{b}.$$

Para el caso de la función en el tiempo el procedimiento de resolución es similar, pero ahora se deben cumplir las condiciones iniciales. La condición homogénea de la derivada arroja una expresión cosenoidal:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)c^2} + \lambda^2 = -\mu^2 \rightarrow \ddot{T}(t) + c^2(\lambda^2 + \mu^2)T(t) = 0.$$

$$T(t) = \cos(\tau t); \quad \tau = c\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\pi.$$

En síntesis el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0. \\ Y''(y) + \mu^2 Y(y) &= 0. \\ \ddot{T}(t) + c^2(\lambda^2 + \mu^2)T(t) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Las soluciones a dichas ecuaciones son:

$$X(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (9)$$

$$Y(y) = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \quad (10)$$

$$T(t) = \cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\pi t\right). \quad (11)$$

La solución de la ecuación (1), con condiciones de borde dadas por (3), (4) y (5), queda expresada de la siguiente manera:

$$u_{mn}(x, y, t) = A_{mn} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\pi t\right). \quad (12)$$

Donde la constante  $A$  depende de “ $n$ ” y “ $m$ ” y es el resultado de la multiplicación de las constantes de cada una de las resoluciones de las ecuaciones diferenciales.

Los coeficientes  $A_{mn}$  se obtienen de la serie de Fourier en dos dimensiones. Se observa que la resolución es similar al problema unidimensional, diferenciándose en que se lleva a cabo una doble integración de la multiplicación de la función por cada uno de los términos sinusoidales (que dependen de “ $x$ ” e “ $y$ ”) [1]:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy dx. \quad (13)$$

Finalmente se recurre al principio de superposición, donde la combinación lineal de una serie de soluciones es también solución de la ecuación diferencial [1]:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\pi t\right). \quad (14)$$

### 2.1.2 Condiciones de Neumann

A continuación se procede a resolver el problema de Neumann, que establece las siguientes condiciones de borde:

$$\frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u(a, y, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

Las mismas, junto con las condiciones dadas por las ecuaciones (4) y (5), permiten obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias como el indicado en (8), cuyas soluciones están dadas por:

$$X(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (16)$$

$$Y(y) = \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \quad (17)$$

$$T(t) = \cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\pi t\right). \quad (18)$$

En este caso, la solución de la ecuación (1) con condiciones de borde dadas por (15), (4) y (5), queda expresada de la siguiente manera:

$$u_{mn}(x, y, t) = A_{mn} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(c\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\pi t\right). \quad (19)$$

Los coeficientes  $A_{mn}$  se obtienen de la serie de Fourier en dos dimensiones:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy dx. \quad (20)$$

Y al igual que en la ecuación (14), se recurre al principio de superposición, obteniendo de este modo:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \cos\left(c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \pi t\right). \quad (21)$$

### 2.1.3 Cambio en las condiciones iniciales

En lugar de una distribución de posiciones iniciales “ $f(x,y)$ ”, se define una distribución de velocidades “ $g(x,y)$ ”. De esta manera, la ecuación (4) es homogénea y la (5) no homogénea. Es así que variará la solución de la función  $T(t)$ , que en este caso tiene una distribución sinusoidal:

$$T(t) = \text{sen}\left(c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \pi t\right). \quad (22)$$

## 2.2 Implementación Computacional

Para la implementación computacional de este trabajo, se opta por la utilización de herramientas de software libre. Desde la perspectiva de la educación, esta clase de herramientas no sólo son fácilmente obtenidas desde Internet, sino que además ofrecen alternativas de alta calidad técnica generadas con los principios implícitos de solidaridad, cooperación e intercambio [3].

Para la resolución y el cálculo de resultados se trabaja sobre el lenguaje de programación *Python* [4], es decir se escribió un programa desde el inicio para ser interpretado por dicho lenguaje.

La resolución del cálculo algebraico se realizó por medio del software *wxMaxima* [5], [6] y la simulación de los problemas, mediante el uso del programa *Gnuplot* [7].

El enfoque por el que se resuelve este problema es notoriamente complejo, en cuanto a requerimientos de procesamiento. Esto se debe a que cada una de las funciones solución está compuesta por 30 términos para  $m$  y  $n$ , y cada uno de los instantes de tiempo requiere el cálculo de una grilla de 75 puntos de lado.

Se optó por resolver el problema en primera instancia y almacenar los resultados obtenidos (grilla de puntos) para posteriormente realizar los gráficos pertinentes con sus animaciones.

**Rutina de cálculo.** Consta de tres partes fundamentales:

1. Definición de  $A_{mn}$ : Se exporta la expresión obtenida para los términos de la serie de Fourier, luego de la integración, utilizando un CAS (Computer Algebra System, en el presente caso, *wxMaxima* [5]).
2. Iteración para realizar la sumatoria: A partir de los término  $A_{mn}$  y los términos sinusoidales o cosenoidales que describen el comportamiento en función del tiempo, se desarrolla la expresión final de la solución.
3. Cálculo y escritura en archivo: Para cada uno de los instantes de tiempo, se calculan todos los puntos de la grilla y se guardan en un archivo. Éste será posteriormente leído para ser graficado.

**Rutina de graficación.** En este caso, pueden determinarse dos partes importantes:

1. Apertura del programa graficador: Utilizando *GnuPlot* [7], [8], se establecen los parámetros correspondientes del gráfico, los cuales pueden ser cambiados a elección, brindando de esta manera al usuario, la posibilidad de interactividad con el problema planteado.
2. Iteración sobre los archivos de tiempo: Se realiza el gráfico para cada uno de los archivos escritos por el programa de cálculo correspondiente a un tiempo determinado. Al graficar cada uno de los archivos con un delay apropiado entre un gráfico y el siguiente, se obtiene una animación de las características deseadas.

### 3 Resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos para distintas situaciones problema consideradas.

Tal como se plantea, para la resolución de la ecuación de onda, se necesita una función que indique la distribución de posiciones iniciales o de velocidades iniciales de la membrana. En este caso, al tener dos dimensiones espaciales ( $x$  e  $y$ ), nuestra función ha de ser del tipo dada por las ecuaciones (4) y (5).

Se plantean como funciones, para los arreglos iniciales, superficies formadas por dos parábolas cuadráticas en planos perpendiculares. Es decir, se realiza el producto de las ecuaciones (23) y (24) para obtener la ecuación (25)

$$u_0 = k_1(x - x_0)(x - x_1). \quad (23)$$

$$u_0 = k_2(y - y_0)(y - y_1). \quad (24)$$

$$u_0 = k_3(x - x_0)(x - x_1)(y - y_0)(y - y_1). \quad (25)$$

Donde  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $y_0$  e  $y_1$  son ceros de la función  $u_0(x,y)$ . La constante  $k_3$  se calcula de manera que la función alcance una altura determinada en su vértice.

Para ejemplificar mejor este concepto, se muestra la superficie con ceros en 0 y 1 (tanto en  $x$  como en  $y$ ) y altura de vértice 1 según la ecuación (25).

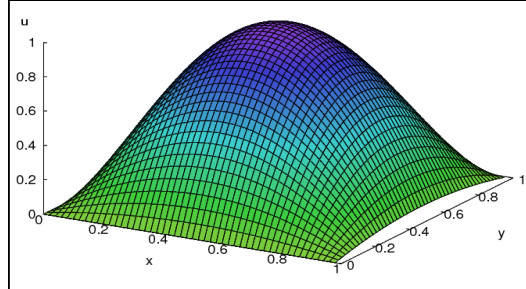
$$u_0 = 16(x)(x-1)(y)(y-1).$$

$$u_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = k_3(x)(x-1)(y)(y-1) = 1.$$

$$1 = k_3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right) \Rightarrow k_3 = 16.$$

$$u_0 = 16(x)(x-1)(y)(y-1).$$

En la Figura 1 se puede observar la representación gráfica de dicha superficie, la cual es la base para realizar las pruebas de la implementación computacional.



**Fig. 1.** Superficie base para las pruebas de implementación computacional.

Antes de establecer las funciones a analizar, se determinan ciertos parámetros para estandarizar todos los problemas a resolver, a saber:

- $c = 1$
- $a = b = L = 1$
- La altura de la perturbación es igual a 1.
- Se toman 30 términos para las sumatorias de  $m$  y  $n$ .
- Los puntos de la solución de la ecuación diferencial se calculan en un dominio cuadrado de 75 puntos de ancho ( $75^2 = 5625$  puntos).

### 3.1 Condiciones de Borde de Dirichlet – Distribución de posiciones iniciales

**Gota en una esquina del dominio.** Imaginemos que queremos analizar lo que sucede cuando hay una perturbación en una de las esquinas de una membrana de forma cuadrada de área unitaria. Más específicamente, la perturbación está dada por una “gota” en forma de cuarto de parábola.

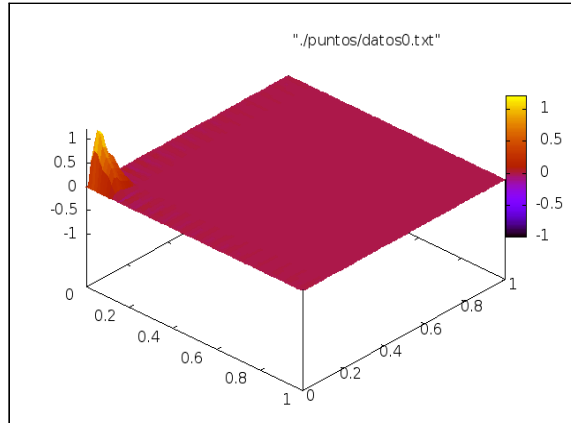
Matemáticamente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_0 = \left(\frac{8}{L}\right)^4 \left(x - \frac{L}{8}\right)\left(x - \frac{L}{8}\right)\left(y - \frac{L}{8}\right)\left(y - \frac{L}{8}\right), & \begin{array}{l} 0 < x < 1/8 L. \\ 0 < y < 1/8 L. \end{array} \\ 0, & \text{para todo otro punto.} \end{array} \right.$$

Con dicha función, obtenida por el método descrito en la sección anterior, se realiza la integración de los términos de la serie de Fourier con ayuda de un CAS. La expresión algebraica obtenida, es llevada a la línea correspondiente del programa realizado para el cálculo de puntos.

Graficando la función  $u(x,y,0) = u_0$  es posible observar que representa con exactitud aceptable la función inicial propuesta, tal como muestra la Figura 2.

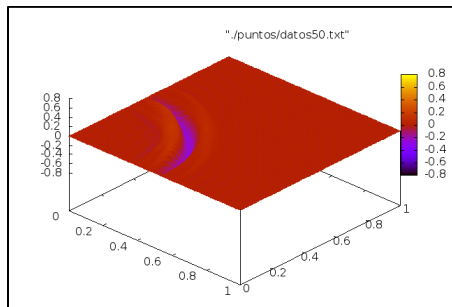




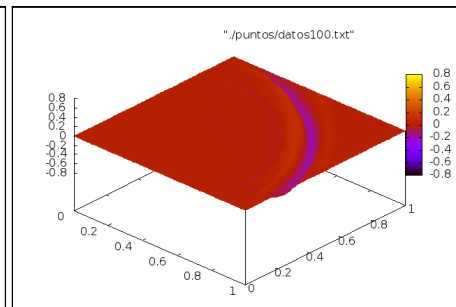
**Fig. 2.** Superficie inicial para el problema de la gota en una esquina del dominio.

La distorsión que se puede apreciar en dicha figura, es provocada por el denominado “fenómeno de Gibbs”. Básicamente lo que se observa es una aproximación de la función, dada por la sumatoria finita de una serie de funciones sinusoidales.

Las Figuras 3 y 4 muestran la configuración de la membrana para un tiempo  $t=0.50s$  y  $t=1s$  respectivamente.



**Fig. 3.** Onda a 0.5s



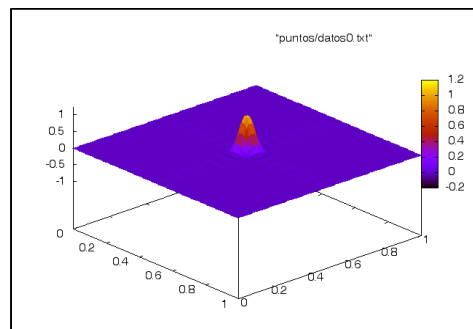
**Fig. 4.** Onda a 1s

A partir de la observación de estas imágenes y de las animaciones realizadas, aproximadamente mil imágenes para diez segundos por cada ejemplo, se concluye que la onda se expande de manera radial desde la esquina en que se produce la perturbación. Esto es fácilmente observable por ejemplo, a partir del estudio de la propagación de ondas en un estanque.

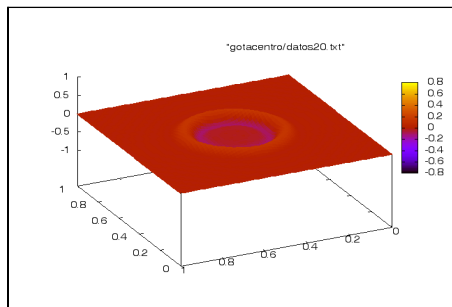
**Gota en el centro.** Imagínese que ahora se analiza lo que sucede cuando hay una perturbación en el centro de la membrana anteriormente estudiada. Por ejemplo, este fenómeno se compara de mejor manera a lo que sucede cuando una gota cae sobre una superficie libre de líquido en reposo. Para realizar la simulación, se divide el dominio en cuadrados de un noveno de ancho, y se coloca la función parabólica de altura 1 en el cuadrado central. Es decir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_0 = \left(\frac{18}{L}\right)^4 \left(x - \frac{L.4}{9}\right) \left(x - \frac{L.5}{9}\right) \left(y - \frac{L.4}{9}\right) \left(y - \frac{L.5}{9}\right), & \begin{array}{l} 4/9 L < x < 5/9 L. \\ 4/9 L < y < 5/9 L. \end{array} \\ 0, & \text{para todo otro punto.} \end{array} \right.$$

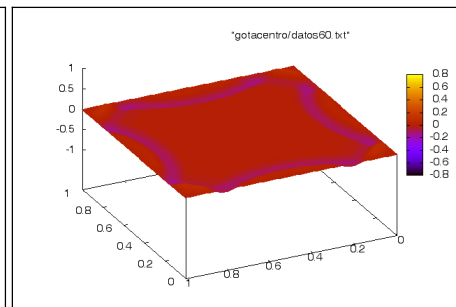
Se repite el procedimiento explicado anteriormente y se grafica  $u(x,y,0) = u_0$ . Se observa que la aproximación obtenida utilizando series de Fourier es mejor que en el problema anterior, ya que en este caso no se tienen las discontinuidades de fin de dominio.



**Fig. 5.** Superficie inicial para el problema de la gota en el centro del dominio.



**Fig. 6.** Onda a los 0,2s



**Fig. 7.** Onda a los 0,6s

A partir de las Figuras 5, 6 y 7, puede observarse cómo el frente de onda avanza de manera radial, al igual que en el caso anterior, sólo que esta vez desde el centro. Esto es así, debido a que la velocidad de propagación es la misma en todas las direcciones.

Para  $t=0.6s$ , se observa que al impactar parte de la onda con el borde se produce el fenómeno de reflexión, por el cual la onda rebota y vuelve en su trayectoria. Al ser un dominio cuadrado este recorrido es distinto para cada sección de la onda inicial.

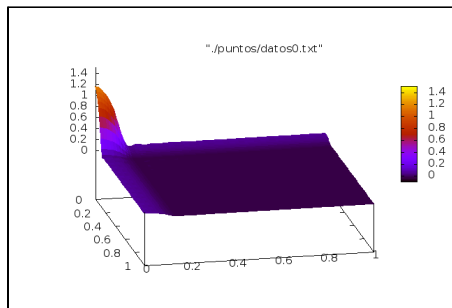
### 3.2 Condiciones de Neumann – Distribución de posiciones iniciales

**Sábana.** En este caso se plantean condiciones de frontera de Neumann o naturales, que para este problema diferencial produce que los bordes no se fijen a una posición, sino que están en dirección horizontal. Se puede imaginar una sábana en movimiento

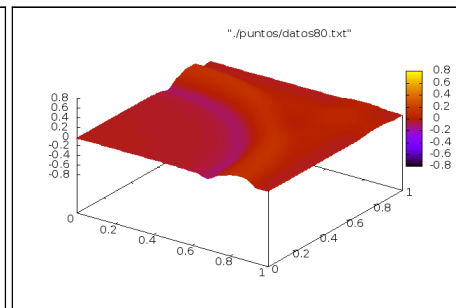
a la cual se le da una forma inicial en una de las esquinas, más específicamente un cuarto de parábola, dicha función se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u'_0 = \left(\frac{18}{L}\right)^4 \left(x - \frac{L}{8}\right)\left(x + \frac{L}{8}\right)\left(y - \frac{L}{8}\right)\left(y - \frac{L}{8}\right); & \text{si } 0 < x < \frac{L}{8} \wedge 0 < y < \frac{L}{8}. \\ u'_0 = 0; & \text{para todo otro punto.} \end{cases}$$

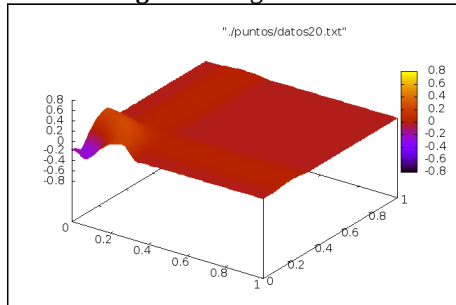
En la Figura 8 se muestra la configuración inicial del problema y en las Figuras 9, 10 y 11 las configuraciones de propagación para distintos tiempos característicos del ejemplo examinado:



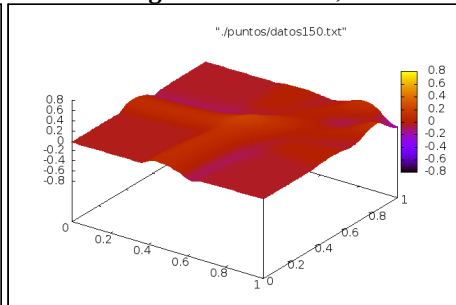
**Fig. 8.** Configuración inicial



**Fig. 9.** Onda a los 0,2s



**Fig. 10.** Onda a los 0,8s



**Fig. 11.** Onda a los 1,5s

Lo más notable de esta simulación es que al rebotar las ondas en los bordes del dominio, éstas no se invierten. Esto se debe a que los extremos no se han fijado y se permite el movimiento de los puntos extremos. Se puede observar cómo la onda se transmite de manera radial desde la esquina en la que se inicia hasta llegar a la esquina opuesta. Al hacerlo, rebota reflejándose y por la forma del dominio no coincidente con la perturbación, las ondas reflejadas comienzan a formar una distribución muy compleja. Esto se debe al fenómeno de interferencia, en el que las ondas se superponen, produciendo su disminución o intensificación.

### 3.3 Condiciones de Dirichlet – Distribución Inicial de Velocidades

**Tambor.** En esta simulación se imagina un tambor cuadrado al que se le aplica un golpe en el centro.

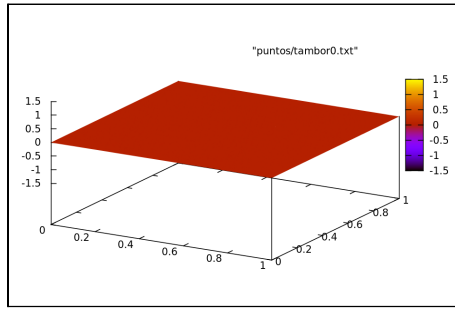
Suponiendo una fuerza impulsiva, se otorga una cantidad de movimiento al centro de la membrana, produciendo una distribución de velocidades al inicio del fenómeno. Ésta será la causante del movimiento, ya que la membrana se encuentra en reposo al inicio.

El gradiente de velocidades se plantea parabólico en el noveno central de la sección, por una cuestión de simplicidad para elaborar la función inicial. Es decir:

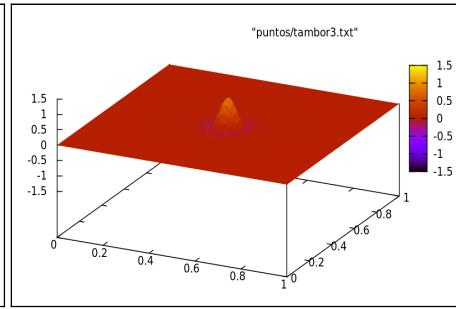
$$\begin{cases} u'_0 = \left(\frac{18}{L}\right)^4 \left(x - \frac{4L}{9}\right)\left(x - \frac{5L}{9}\right)\left(y - \frac{4L}{9}\right)\left(y - \frac{5L}{9}\right); \text{ si } \left\{4\frac{L}{9} < x < 5\frac{L}{9} \wedge 4\frac{L}{9} < y < 5\frac{L}{9}\right\}. \\ u'_0 = 0; \text{ para todo otro punto.} \end{cases}$$

Se debe tener presente que en esate caso la expresión dependiente del tiempo en la función solución de la ecuación diferencial es sinusoidal.

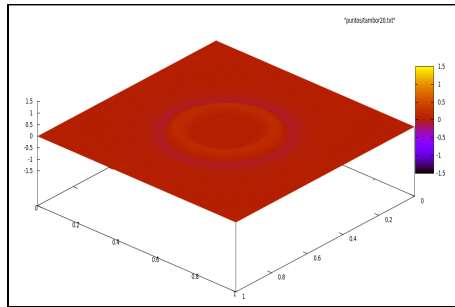
En la Figura 12 se muestra la configuración inicial del problema y en las Figuras 13, 14 y 15 las configuraciones de propagación para distintos tiempos característicos del ejemplo examinado:



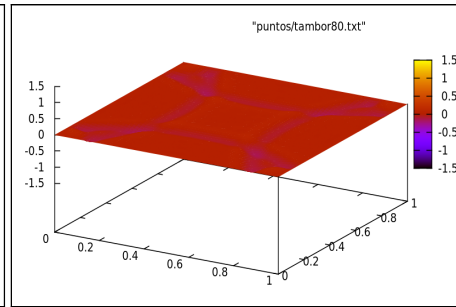
**Fig. 12.** Configuración inicial



**Fig. 13.** Onda a los 0,003s



**Fig. 14.** Onda a los 0,2s



**Fig. 15.** Onda a los 0,8s

Se puede apreciar que la membrana comienza en reposo y que a los 3 milisegundos se obtiene el pico de la parábola dado por el “golpe”. Posteriormente se grafica la transmisión de la onda de forma radial hasta el choque contra los bordes, donde se comienza a producir la interferencia. El fenómeno luego del inicio es muy similar a los estudiados anteriormente.

## 4 Conclusiones

El desarrollo del trabajo integrador descripto, dentro del marco de la asignatura Matemática Avanzada, permite a los estudiantes profundizar el conocimiento y la aplicación de métodos tanto analíticos como computacionales, para la resolución de ecuaciones diferenciales de notable complejidad. La utilización de las herramientas de software libre seleccionadas para la implementación numérica de los problemas estudiados, brinda la posibilidad de potenciar el desarrollo de habilidades asociadas al perfil del estudiante de Ingeniería en Mecatrónica.

Para el caso del comportamiento vibratorio de una membrana, modelado con la ecuación de onda bidimensional, se investigaron distintas formas de resolución del problema. Finalmente se optó por la resolución analítica utilizando series de Fourier ya que resultó una forma fiable y sencilla de plantear el problema, para estudiar el comportamiento de las situaciones de interés.

Sin embargo, se aprecia que el costo computacional de optar por este tipo de soluciones, es decir métodos analíticos, es muy elevado. La razón de ello es que en este caso se trabaja con funciones trascendentales y la cantidad de términos para obtener una aproximación apta, hace el cálculo muy complejo. También agrega complejidad el hecho de darle una buena definición al dominio.

La obtención de resultados de buena calidad y fluidez en las animaciones, implicó la realización de las instancias de cálculo y graficación del problema, en etapas diferentes. A pesar de que se requiere una gran cantidad de tiempo y poder computacional para calcular todos los problemas propuestos, resultan simulaciones de gran precisión y fluidez.

El uso de herramientas computacionales permite conceptualizar de manera global el problema bidimensional, hecho que es imposible de realizar, en la escala propuesta, si las limitaciones son el lápiz y el papel.

Para finalizar, deseamos expresar que el proyecto permite apreciar la belleza intrínseca de la matemática. Tal como lo expresa el matemático Bertrand Russell, *“Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría austera, como la de una escultura”*.

## 5 Referencias

1. Zill, D. G.: Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado, Thomson 6ta Edición, Capítulo 11. 2006.
2. Raichman, S.; Totter, E.; Mirasso, A.: Apunte de la cátedra de Matemática Avanzada, Unidad 2 - Facultad de Ingeniería, UNCuyo. 2010.
3. Cobo, J.C.: Conocimiento, creatividad y software libre: Una oportunidad para la educación en la sociedad actual. Universitat Oberta de Catalunya. <http://uocpapers.uoc.edu>; 2009.
4. Lenguaje de programación Python [www.python.org](http://www.python.org)
5. Software de cálculo algebraico (CAS, computer algebra system) wxMaxima <http://sourceforge.net/projects/wxmaxima/>
6. Riotorto, M. R.: Primeros pasos en Maxima. 2008.
7. William, T.; Kelley, C.: Gnuplot 4.4, An interactive plotting program. 2010.
8. Graficador portable Gnuplot <http://www.gnuplot.info/>