Informe de Trabajo Práctico N°6
Jacobiano

Robótica I

Ingeniería en Mecatrónica
Facultad de Ingeniería - UNCUYO

Alumno: Juan Manuel BORQUEZ PEREZ
Legajo: 13567

1. Ejercicio 1

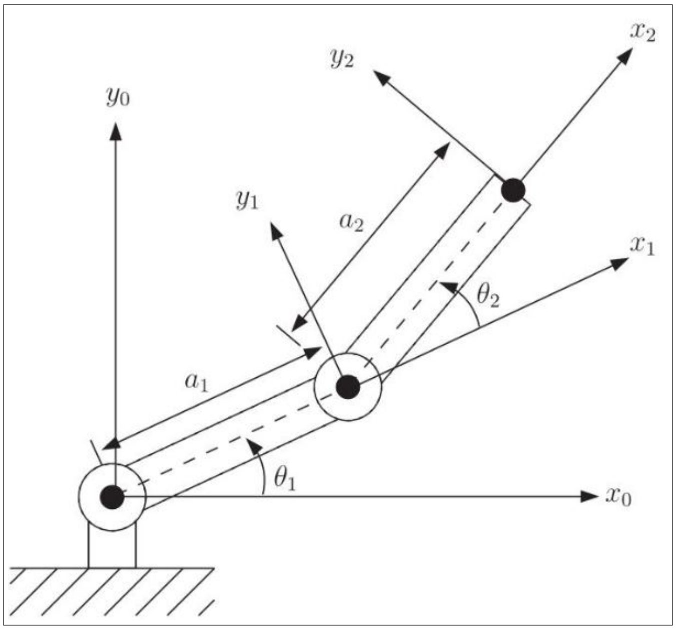

Figura 1: Robot planar RR Ejercicio 1.

1.1. Mediante derivación respecto del tiempo obtenga el Jacobiano del robot

Se tiene:

$$\begin{cases} x = a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ z = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \theta_1+\theta_2 \end{cases} \tag{1}$$

Cada fila en el Jacobiano se puede obtener como el gradiente de la función en esa fila respecto de las variables $q_1 \equiv \theta_1$ y $q_2 \equiv \theta_2$. Se obtiene:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1\sin(\theta_1) - a_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -a_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) & a_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

1.2. Calcule la velocidad del extremo $\dot{p}$, en m/s para $q = [\pi/6, \pi/6]$, en rad y $\dot{q} = [0, -1]$ en rad/s. Suponga longitud de eslabón unitaria. Observe el gráfico del robot e interprete los resultados

Las velocidades en el extremo se calculan a partir de las velocidades articulares como:

$$\dot{p} = J(q)\dot{q} \tag{3}$$

Para los valores dados se obtiene:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} -\sin(\pi/6) - \sin(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \cos(\pi/6) + \cos(\pi/3) & \cos(\pi/3) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ -0.500 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ -1.000 \end{bmatrix}$$

En donde las primeras 3 componentes están en m/s y las últimas 3 en rad/s.

1.3. Trabaje solo con las coordenadas X-Y (primeras 2 filas del J) y verifique mediante la inversa algebraica que $\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{p}$ se cumple

Conservando solo las filas del plano X-Y nos queda:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1\sin(\theta_1) - a_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -a_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) & a_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Luego $J^{-1}(q)$ es:

$$J^{-1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{a_1\sin(\theta_2)} & \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{a_1\sin(\theta_2)} \\ -\frac{a_1\cos(\theta_1)+a_2\cos(\theta_1+\theta_2)}{a_1a_2\sin(\theta_2)} & -\frac{a_1\sin(\theta_1)+a_2\sin(\theta_1+\theta_2)}{a_1a_2\sin(\theta_2)} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Para los valores del inciso anterior verificamos:

$$J^{-1}(q)\dot{p} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} & \frac{\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} \\ -\frac{\cos(\pi/6)+\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} & -\frac{\sin(\pi/6)+\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \dot{q}$$

2. Ejercicio 3

halle el Jacobiano en forma general de los 3 robots siguientes

2.1.

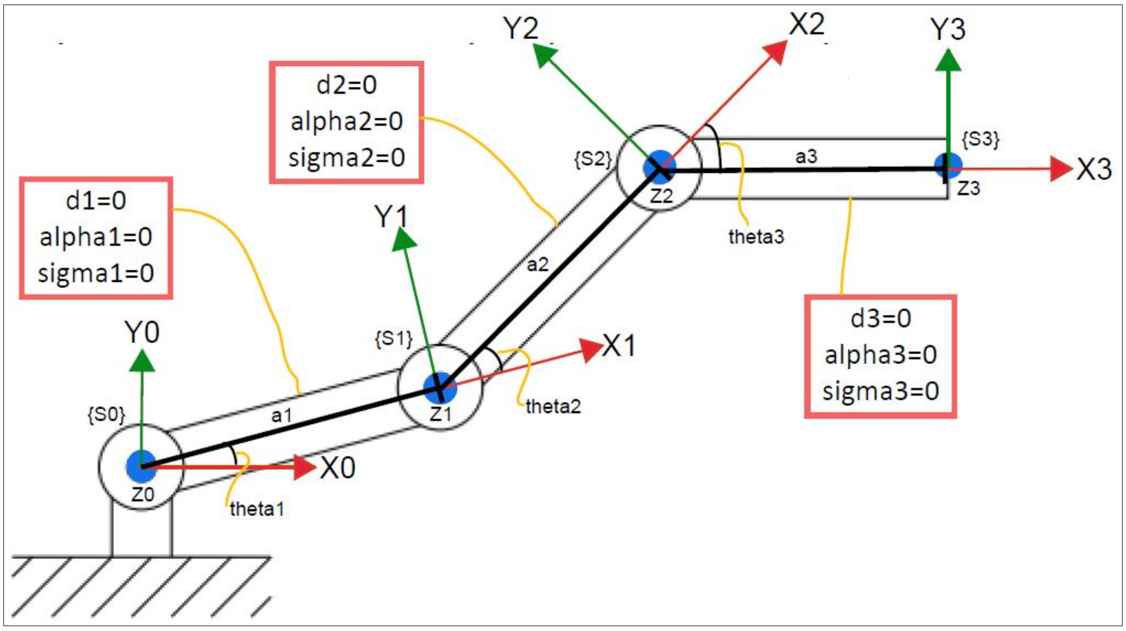

Figura 2: Convención DH utilizada para robot RRR planar.

Las ecuaciones de la cinemática directa se obtienen extendiendo las indicadas en eq. (1) y se obtiene

$$\begin{cases} x = a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) + a_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ y = a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_1+\theta_2) + a_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ z = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \theta_1+\theta_2+\theta_3 \end{cases} \tag{6}$$

El jacobiano se obtiene también por extensión de eq. (2)

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1S_1 - a_2S_{12} - a_3S_{123} & -a_2S_{12} - a_3S_{123} & -a_3S_{123} \\ a_1C_1 + a_2C_{12} + a_3C_{123} & a_2C_{12} + a_3C_{123} & a_3C_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

2.2.

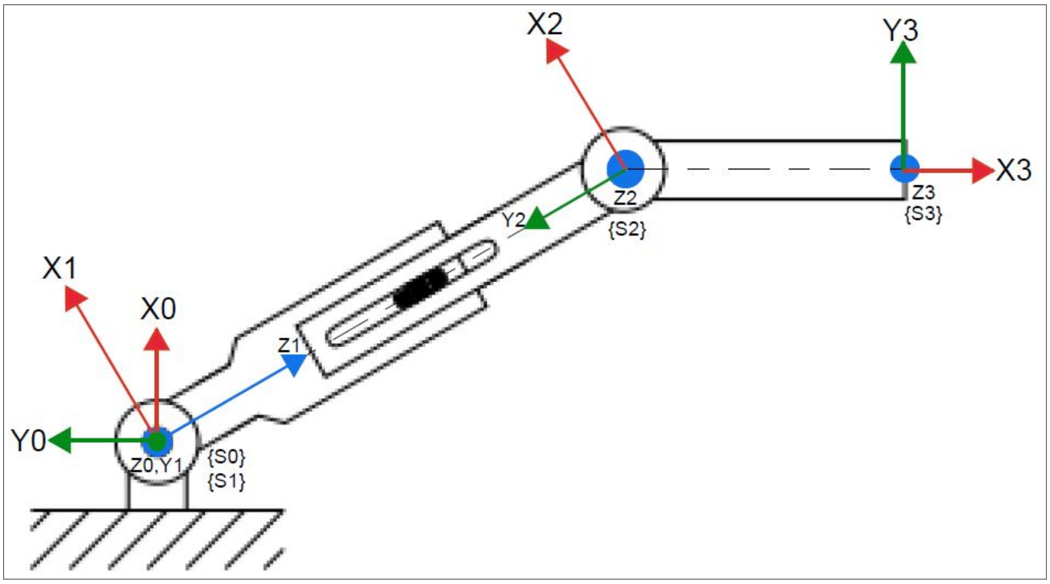

Figura 3: Convención DH utilizada para robot RLR planar.

Los parámetros de DH del robot son:

Sistema	θ	d	a	α	σ
1	q_1	0	0	$\pi/2$	0
2	0	q_2	0	$-\pi/2$	1
3	q_3	0	a_3	0	0

Cuadro 1: Parámetros DH RLR planar.

Las ecuaciones de la cinemática directa se obtienen aplicando "fkine" de forma simbólica en MATLAB:

$$\begin{bmatrix} \cos(q_1+q_3) & -\sin(q_1+q_3) & 0 & a_3\cos(q_1+q_3)+q_2\sin(q_1) \\ \sin(q_1+q_3) & \cos(q_1+q_3) & 0 & a_3\sin(q_1+q_3)-q_2\cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego tenemos:

$$\begin{cases} x = a_3\cos(q_1+q_3)+q_2\sin(q_1) \\ y = a_3\sin(q_1+q_3)-q_2\cos(q_1) \\ z = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = q_1+q_3 \end{cases} \tag{8}$$

Finalmente el jacobiano es:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_3 \sin(q_1 + q_3) + q_2 \cos(q_1) & \sin(q_1) & -a_3 \sin(q_1 + q_3) \\ a_3 \cos(q_1 + q_3) + q_2 \sin(q_1) & -\cos(q_1) & a_3 \cos(q_1 + q_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$