

# ROBÓTICA I

## Trabajo Práctico N° 5B



Alumnos:

Julián Andrés RAYES CANO, Leg. N° 13256

Juan Manuel BORQUEZ PEREZ, Leg. N° 13567

Ingeniería en Mecatrónica - UNCuyo

### Cinemática Inversa B

*Para aprobar y regularizar la materia, en cada trabajo práctico debe tener aprobado los ejercicios marcados como **obligatorios**. Se recomienda realizar todos los ejercicios para lograr un mayor entendimiento de los conceptos teóricos volcados en las clases, además le servirán también para la elaboración del trabajo final integrador. Se atenderán consultas de todos los ejercicios por igual.*

**Ejercicio TF (obligatorio):** escriba una función de cinemática inversa específica para su robot, con las siguientes características:

1. Debe recibir el objeto SerialLink de su robot, los parámetros cartesianos que considere necesarios (pudiendo ser una matriz de transformación homogénea u otro conjunto de valores), un booleano "q\_mejor", y también un vector de posiciones articulares "q0" en el que se encuentra el robot actualmente.
2. Dependiendo del valor de "q\_mejor" debe devolver una única solución (en caso de true): la más cercana al "q0" pasado; o debe devolver todas las soluciones halladas (caso de false).
3. Se recomienda tomar como guía el material propuesto por la cátedra, con el ejemplo del IRB140.

#### Resolución:

Antes de realizar el script, se resolvió el problema de la cinemática inversa mediante un método alternativo (Saixuan Chen et. al) al método de Pieper, debido a que el robot seleccionado no posee muñeca esférica.

Para aplicar este método se debe tener en cuenta que se cumpla lo siguiente:

- Debe haber 3 ejes de las articulaciones adyacentes paralelos entre sí

Es el caso del UR10e, de acuerdo a la siguiente imagen, las articulaciones 2, 3 y 4 cumplen la condición.

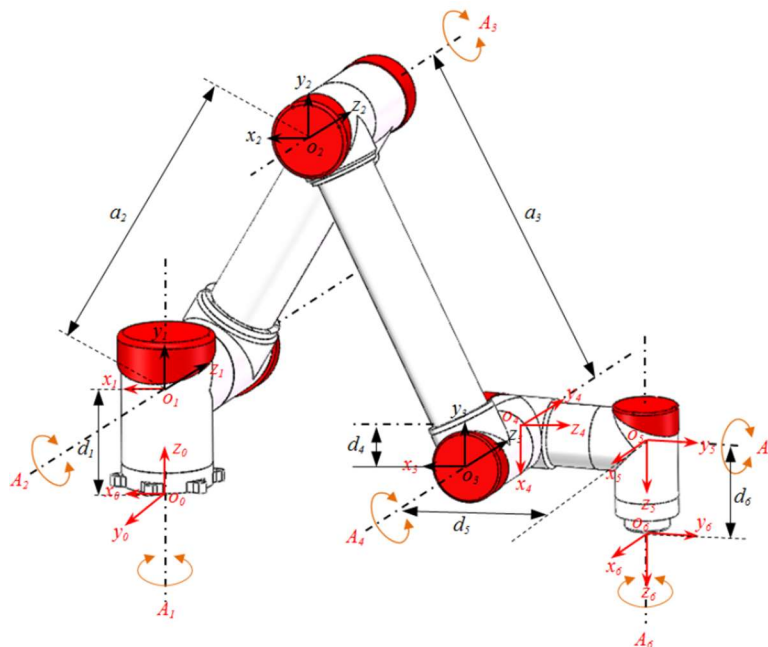


Fig.1 (Saixuan Chen et. Al)

Cabe destacar que nuestra definición de los sistemas de referencia y por ende de los parámetros en la matriz de Denavit-Hartenberg fue distinta a la del paper, por lo que hubo que hacer modificaciones en los signos de algunos elementos de las matrices.

Asumiendo totalmente conocidas la posición y orientación del extremo operativo, se procede como sigue.

Teniendo en cuenta que:

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Para calcular la variable articular angular  $q_1$  se pre-multiplica por la inversa de  ${}^0T_1$ :

$${}^0T_1^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (2)$$

El lado izquierdo de 2 es:

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc} C_1 n_x + S_1 n_y & C_1 o_x + S_1 o_y & C_1 a_x + S_1 a_y & C_1 p_x + S_1 p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z - d_1 \\ \hline S_1 n_x - C_1 n_y & S_1 o_x - C_1 o_y & S_1 a_x - C_1 a_y & S_1 p_x - C_1 p_y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Mientras que el lado derecho es:

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc} S_6 S_{234} + C_5 C_6 C_{234} & C_6 S_{234} - C_5 C_{234} S_6 & C_{234} S_5 & C_2 a_2 + C_{23} a_3 + S_{234} d_5 + C_{234} S_5 d_6 \\ C_5 C_6 S_{234} - C_{234} S_6 & -C_6 C_{234} - C_5 S_6 S_{234} & S_5 S_{234} & S_2 a_2 - C_{234} d_5 + S_{23} a_3 + S_5 S_{234} d_6 \\ \hline C_6 S_5 & -S_5 S_6 & -C_5 & d_4 - C_5 d_6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Se debe tener en cuenta que, dado que  $q_2, q_3$  y  $q_4$  son consecutivos y sus ejes paralelos,  $q_{234} = q_2 + q_3 + q_4$

A partir de 3 y 4, igualando las expresiones de la fila 3 en las columnas 3 y 4:

$$\begin{cases} S_1 a_x - C_1 a_y = -C_5 \\ S_1 p_x - C_1 p_y = d_4 - C_5 d_6 \end{cases} \quad (5)$$

De las cuales se despeja:

$$(p_x - d_6 a_x) S_1 + (d_6 a_y - p_y) C_1 = d_4 \quad (6)$$

Haciendo uso de la trigonometría:

$$\begin{cases} \rho \sin \phi = d_6 a_y - p_y \\ \rho \cos \phi = p_x - d_6 a_x \end{cases} \quad (7)$$

$$\phi = a \tan 2(d_6 a_y - p_y, p_x - d_6 a_x) \quad (8)$$

De manera que se obtiene el valor de  $\Phi$  ya que los parámetros dentro de  $\tan 2$  son conocidos.

Reemplazando 7 y 8 en 6 y haciendo uso de la identidad trigonométrica  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$  :

$$\sin(\phi + q_1) = \frac{d_4}{\rho} \quad (9)$$

$$\phi + q_1 = a \tan 2\left(\frac{d_4}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \frac{d_4^2}{\rho^2}}\right) \quad (10)$$

De modo que, reemplazando y despejando se obtiene:

$$q_1 = a \tan 2(d_4, \pm \sqrt{(d_6 a_y - p_y)^2 + (p_x - d_6 a_x)^2 - d_4^2}) - a \tan 2(d_6 a_y - p_y, p_x - d_6 a_x) \quad (11)$$

De donde se obtienen 2 soluciones para  $q_1$  siempre y cuando  $p$  del espacio de trabajo. Si esto no se cumple, obtendremos soluciones en Matlab con parte real e imaginaria (cuando el discriminante se haga negativo), de modo que, rescatando sólo la parte real obtendríamos valores aproximados, correspondientes al valor más próximo al punto fuera del espacio de trabajo.

Volviendo a 3 y 4, analizando la tercera fila en la primera y segunda columna se tiene:

$$\begin{cases} S_1 n_x - C_1 n_y = C_6 S_5 \\ S_1 o_x - C_1 o_y = -S_5 S_6 \end{cases} \quad (12)$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y sumando miembro a miembro, se puede eliminar los cosenos y senos que involucran a  $q_6$  haciendo uso de la identidad trigonométrica fundamental  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ . Se tiene:

$$S_5 = \pm \sqrt{(n_x S_1 - n_y C_1)^2 + (o_x S_1 - o_y C_1)^2} \quad (13)$$

De la primera expresión de la ecuación 5, se puede obtener  $\cos(q_5)$  y luego obtener:

$$q_5 = a \tan 2\left(\pm \sqrt{(n_x S_1 - n_y C_1)^2 + (o_x S_1 - o_y C_1)^2}, C_1 a_y - S_1 a_x\right) \quad (14)$$

De modo que habrá 2 valores de  $q_5$  para cada valor de  $q_1$ , resultando en 4 soluciones hasta ahora.

Para el cálculo de  $q_6$  se obtiene, de 12, dividiendo por  $S_5$ :

$$\begin{cases} \frac{n_x S_1 - n_y C_1}{S_5} = C_6 \\ -\frac{o_x S_1 - o_y C_1}{S_5} = S_6 \end{cases} \quad (15)$$

Nótese que hay una **singularidad** en el caso de que  $S_5 = 0$ , lo cual se da para valores de  $q_5 = 0, n\pi$  y dado que todas las articulaciones del UR10e tienen límites de  $\pm 360^\circ$ , se tendrá singularidad para  $q_5 = 0, 180^\circ, 360^\circ$ .

Ahora, dividiendo la segunda expresión de 15 por la primera, se tiene:

$$q_6 = a \tan 2 \left( -\frac{o_x S_1 - o_y C_1}{S_5}, \frac{n_x S_1 - n_y C_1}{S_5} \right) \quad (16)$$

Ahora para el cálculo de  $q_{234}$  se utilizarán las **filas 1 y 2 de la columna 3** de las ecuaciones 3 y 4:

$$\begin{cases} C_1 a_x + S_1 a_y = C_{234} S_5 \\ a_z = S_5 S_{234} \end{cases} \quad (17)$$

Luego:

$$\begin{cases} \frac{C_1 a_x + S_1 a_y}{S_5} = C_{234} \\ \frac{a_z}{S_5} = S_{234} \end{cases} \quad (18)$$

Siempre teniendo en cuenta que  $S_5 \neq 0$ .

Finalmente:

$$q_{234} = q_1 + q_2 + q_3 = \text{atan2} \left( \frac{a_z}{S_5}, \frac{C_1 a_x + S_1 a_y}{S_5} \right) \quad (19)$$

Para el cálculo de  $q_2$ , en las ecuaciones 3 y 4, **filas 1 y 2 y columna 4**:

$$\begin{cases} C_1 p_x + S_1 p_y = C_2 a_2 + C_{23} a_3 + S_{234} d_5 + C_{234} S_5 d_6 \\ p_z - d_1 = S_2 a_2 - C_{234} d_5 + S_{23} a_3 + S_5 S_{234} d_6 \end{cases} \quad (20)$$

Definiendo A y B como:

$$\begin{aligned} A &= C_1 p_x - S_{234} d_5 + S_1 p_y - C_{234} S_5 d_6 \\ B &= p_z - d_1 + C_{234} d_5 - S_5 S_{234} d_6 \end{aligned} \quad (21)$$

Reemplazando 21 en 20, despejando, elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro, podemos deshacernos de la variable  $q_{23}$  obteniendo:

$$2a_2 A C_2 + 2a_2 B S_2 = A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2 \quad (22)$$

Se puede hacer:

$$\begin{cases} \eta \sin \varphi = A \\ \eta \cos \varphi = B \end{cases} \quad (23)$$

Luego,  $\eta = \sqrt{A^2 + B^2}$  y  $\varphi = \text{atan2}(A, B)$

Reemplazando 23 en 22 queda:

$$2a_2\eta \sin \varphi C_2 + 2a_2\eta \cos \varphi S_2 = A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2 \quad (24)$$

Haciendo uso de la identidad  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ :

$$\sin(\varphi + q_2) = \frac{A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_2\eta} \quad (25)$$

Haciendo uso de la identidad  $\cos^2 x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ :

$$\cos(\varphi + q_2) = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_2\eta} \right)^2} \quad (26)$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\varphi + q_2 = \text{atan2} \left( \frac{A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_2\eta}, \pm \sqrt{1 - \left( \frac{A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_2\eta} \right)^2} \right) \quad (27)$$

Finalmente, operando y eliminando los denominadores comunes:

$$q_2 = \text{atan2} \left( A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2, \pm \sqrt{4a_2^2(A^2 + B^2) - (A^2 + B^2 + a_2^2 - a_3^2)^2} \right) - \text{atan2}(A, B) \quad (28)$$

De modo que habrá 2 valores de  $q_2$  para cada par de valores entre  $q_1$  y  $q_5$ , por lo que contamos con 8 soluciones, hasta ahora.

Para el cálculo de  $q_3$  y  $q_4$  se calcula primero  $q_{23}$ . Para ello se sustituye A y B de la 21 en la ecuación 20 y se reordena para obtener:

$$\begin{cases} A - C_2 a_2 = C_{23} a_3 \\ B - S_2 a_2 = S_{23} a_3 \end{cases} \quad (29)$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene:

$$q_{23} = \text{atan2}(B - S_2 a_2, A - C_2 a_2) \quad (30)$$

Finalmente:

$$q_3 = q_{23} - q_2 \quad (31)$$

$$q_4 = q_{234} - q_{23} \quad (32)$$



Con lo que se cuenta con 8 soluciones de todas las variables articulares, desde  $q_1$  hasta  $q_6$  dependiendo de los valores que tomen las variables  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_5$ , siempre y cuando la ubicación y orientación del efector final se encuentre dentro del espacio de trabajo.

En realidad, matemáticamente se obtienen 8 soluciones gracias al uso de  $\text{atan2}$ , pero se debe tener en cuenta que como el robot tiene límites articulares entre  $\pm 360^\circ$ , las soluciones serán dos más por cada solución. Teniendo en cuenta que son 6 articulaciones, el número total de soluciones encontradas si el robot tuviera límites entre  $\pm 180^\circ$  (8 soluciones) debe multiplicarse por  $2^6$ , dando un resultado de **512 soluciones**.

Adjunto a esta entrega se encuentran los scripts de Matlab con la implementación de la cinemática inversa detallada anteriormente.

UR10E\_ikine es la **función de cinemática inversa y contiene el cálculo del “Q mejor”** y el script UR10E\_ikine\_test es el código desde el cual **se hace el llamado a la función anterior y se imprimen las figuras en función del valor de la variable booleana “mejor”**.

### Referencias

- Chen, S., Luo, M., Abdelaziz, O., & Jiang, G. (2017, May). A general analytical algorithm for collaborative robot (cobot) with 6 degree of freedom (DOF). In 2017 International Conference on Applied System Innovation (ICASI) (pp. 698-701). IEEE.
- Materiales de cátedra ROBÓTICA I – Facultad de Ingeniería – UNCuyo