Informe de Trabajo Práctico N°6

Jacobiano

Robótica I

Ingeniería en Mecatrónica
Facultad de Ingeniería - UNCUYO

Alumno: Juan Manuel BORQUEZ PEREZ
Legajo: 13567

1. Ejercicio 1

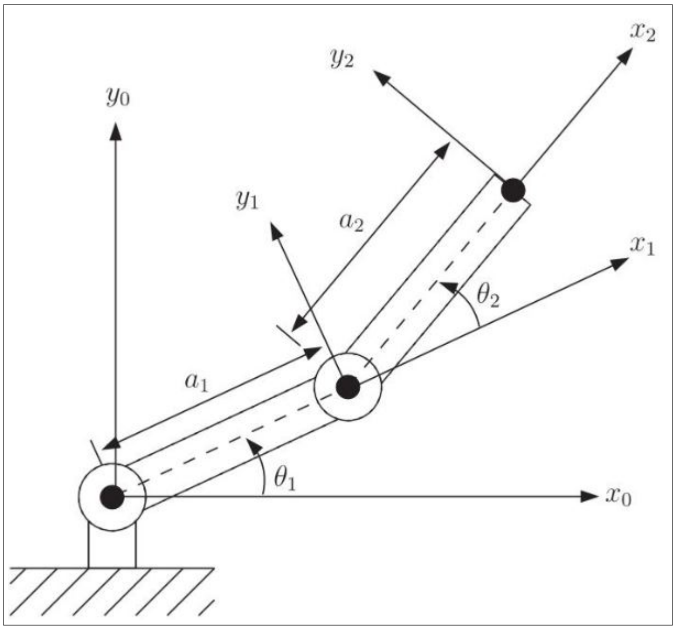

Figura 1: Robot planar RR Ejercicio 1.

1.1. Mediante derivación respecto del tiempo obtenga el Jacobiano del robot

Se tiene:

$$\begin{cases} x = a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ z = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \theta_1+\theta_2 \end{cases} \tag{1}$$

Cada fila en el Jacobiano se puede obtener como el gradiente de la función en esa fila respecto de las variables $q_1 \equiv \theta_1$ y $q_2 \equiv \theta_2$. Se obtiene:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1\sin(\theta_1) - a_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -a_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) & a_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

1.2. Calcule la velocidad del extremo $\dot{p}$, en m/s para $q = [\pi/6, \pi/6]$, en rad y $\dot{q} = [0, -1]$ en rad/s. Suponga longitud de eslabón unitaria. Observe el gráfico del robot e interprete los resultados

Las velocidades en el extremo se calculan a partir de las velocidades articulares como:

$$\dot{p} = J(q)\dot{q} \tag{3}$$

Para los valores dados se obtiene:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} -\sin(\pi/6) - \sin(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \cos(\pi/6) + \cos(\pi/3) & \cos(\pi/3) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ -0.500 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ -1.000 \end{bmatrix}$$

En donde las primeras 3 componentes están en m/s y las últimas 3 en rad/s.

1.3. Trabaje solo con las coordenadas X-Y (primeras 2 filas del J) y verifique mediante la inversa algebraica que $\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{p}$ se cumple

Conservando solo las filas del plano X-Y nos queda:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Luego $J^{-1}(q)$ es:

$$J^{-1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{a_1 \sin(\theta_2)} & \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{a_1 \sin(\theta_2)} \\ -\frac{a_1 \cos(\theta_1)+a_2 \cos(\theta_1+\theta_2)}{a_1 a_2 \sin(\theta_2)} & -\frac{a_1 \sin(\theta_1)+a_2 \sin(\theta_1+\theta_2)}{a_1 a_2 \sin(\theta_2)} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Para los valores del inciso anterior verificamos:

$$J^{-1}(q)\dot{p} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} & \frac{\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} \\ -\frac{\cos(\pi/6)+\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} & -\frac{\sin(\pi/6)+\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \dot{q}$$

2. Ejercicio 3

halle el Jacobiano en forma general de los 3 robots siguientes

2.1.

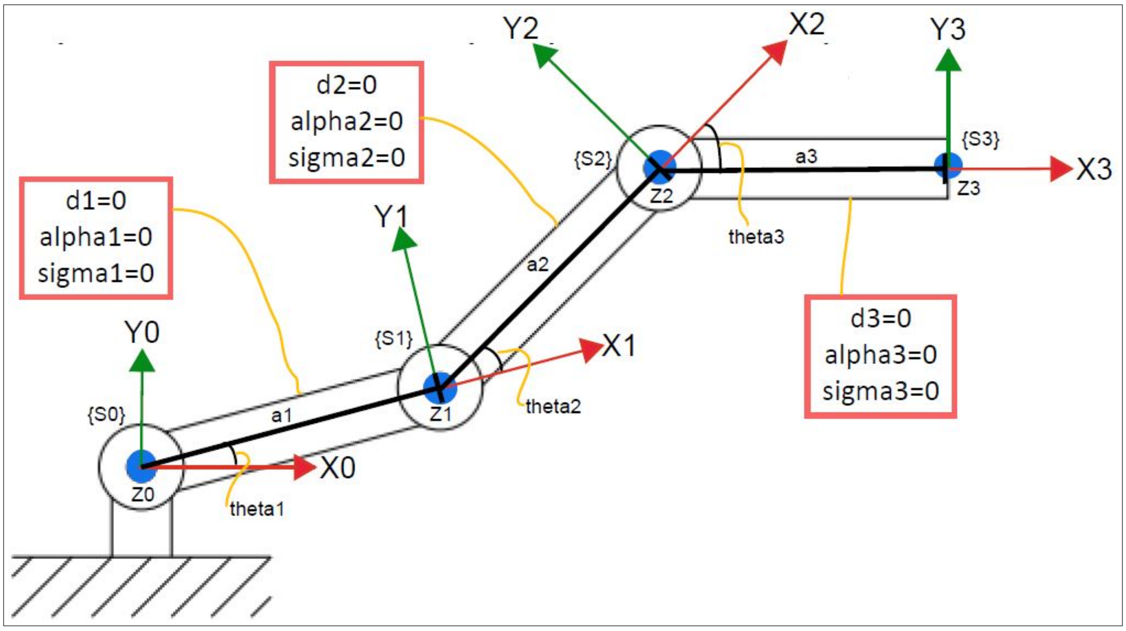

Figura 2: Convención DH utilizada para robot RRR planar.

Las ecuaciones de la cinemática directa se obtienen extendiendo las indicadas en eq. (1) y se obtiene

$$\begin{cases} x = a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) + a_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ y = a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_1+\theta_2) + a_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ z = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \theta_1+\theta_2+\theta_3 \end{cases}$$

El jacobiano se obtiene también por extensión de eq. (2)

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1S_1 - a_2S_{12} - a_3S_{123} & -a_2S_{12} - a_3S_{123} & -a_3S_{123} \\ a_1C_1 + a_2C_{12} + a_3C_{123} & a_2C_{12} + a_3C_{123} & a_3C_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

2.2.

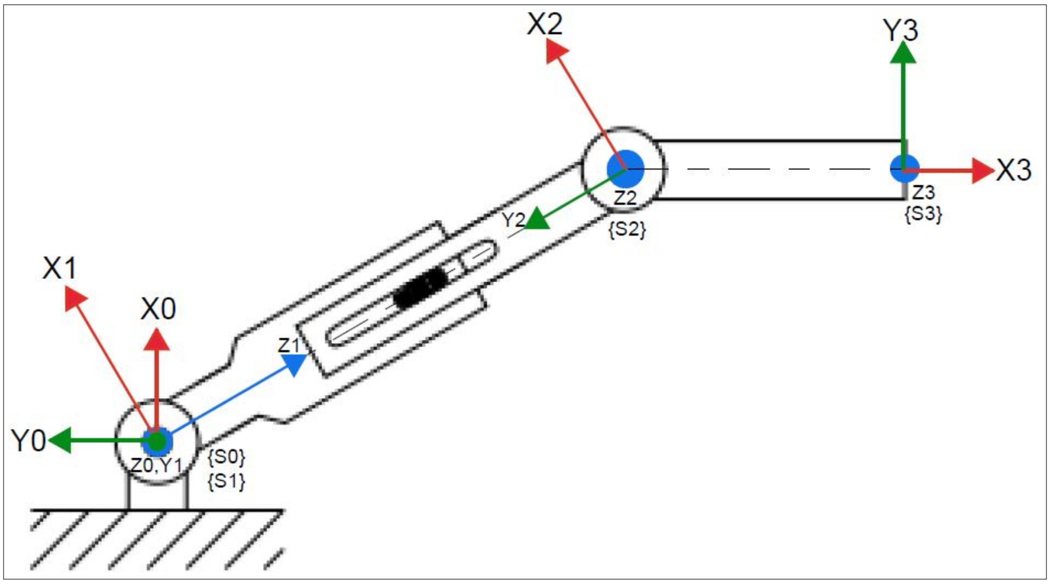

Figura 3: Convención DH utilizada para robot RLR planar.

Los parámetros de DH del robot son:

Sistema	θ	d	a	α	σ
1	q_1	0	0	$\pi/2$	0
2	0	q_2	0	$-\pi/2$	1
3	q_3	0	a_3	0	0

Cuadro 1: Parámetros DH RLR planar.

Las ecuaciones de la cinemática directa se obtienen aplicando "fkine" de forma simbólica en MATLAB:

$$CD = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_3) & -\sin(q_1+q_3) & 0 & a_3\cos(q_1+q_3)+q_2\sin(q_1) \\ \sin(q_1+q_3) & \cos(q_1+q_3) & 0 & a_3\sin(q_1+q_3)-q_2\cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego tenemos:

$$\begin{cases} x = a_3\cos(q_1+q_3)+q_2\sin(q_1) \\ y = a_3\sin(q_1+q_3)-q_2\cos(q_1) \\ z = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = q_1+q_3 \end{cases}$$

Finalmente el jacobiano es:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_3\sin(q_1+q_3)+q_2\cos(q_1) & \sin(q_1) & -a_3\sin(q_1+q_3) \\ a_3\cos(q_1+q_3)+q_2\sin(q_1) & -\cos(q_1) & a_3\cos(q_1+q_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

2.3.

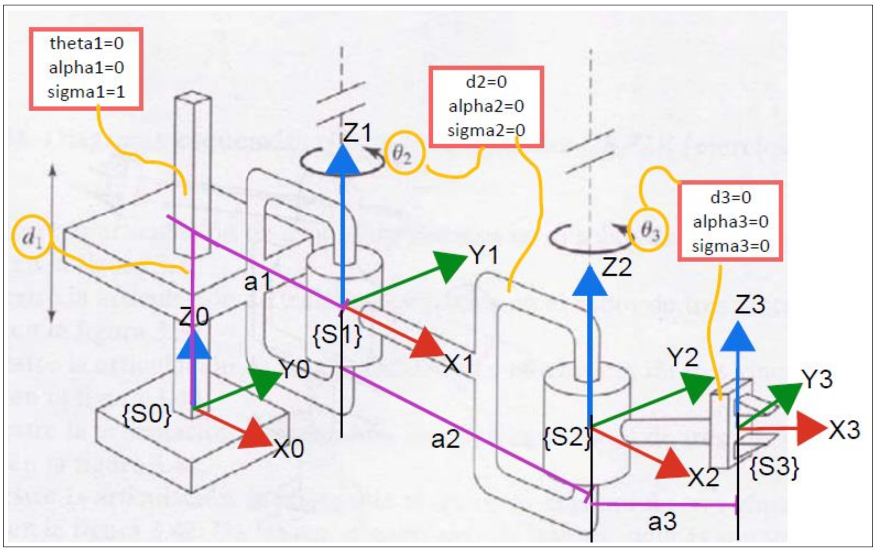

Figura 4: Convención DH utilizada para robot LRR

Sistema	θ	d	a	α	σ
1	0	q_1	a_1	0	1
2	q_2	0	a_2	0	0
3	q_3	0	a_3	0	0

Cuadro 2: Parámetros DH robot LRR

La cinemática directa obtenida de forma simbólica con MATLAB es:

$$CD = \begin{bmatrix} \cos(q_2+q_3) & -\sin(q_2+q_3) & 0 & a_1 + a_3\,\cos(q_2+q_3) + a_2\,\cos(q_2) \\ \sin(q_2+q_3) & \cos(q_2+q_3) & 0 & a_3\,\sin(q_2+q_3) + a_2\,\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene

$$\begin{cases} x = a_1 + a_2\,\cos(q_2) + a_3\,\cos(q_2+q_3) \\ y = a_2\,\sin(q_2) + a_3\,\sin(q_2+q_3) \\ z = q_1 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = q_2 + q_3 \end{cases}$$

Luego el Jacobiano es:

$$J(q) = \begin{bmatrix} 0 & -a_2\,\sin(q_2) - a_3\,\sin(q_2+q_3) & -a_3\,\sin(q_2+q_3) \\ 0 & a_2\,\cos(q_2) + a_3\,\cos(q_2+q_3) & a_3\,\cos(q_2+q_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

3. Ejercicio 3

La implementación en código en "Ejercicio_3.m"

4. Ejercicio 4

Análisis de los puntos singulares en base al determinante del Jacobiano.

4.1. Determine para qué valores de $q = [\theta_1\ \theta_2]^T$ será cero el determinante

4.1.1. RR planar

$$det(J(q)) = a_1 a_2 \sin(q_2)$$
$$det(J(q)) = 0 \leftrightarrow q = \begin{bmatrix} q_1 \\ n\pi \end{bmatrix} \quad ; n \,\epsilon\, \mathbb{Z}$$

4.1.2. RRR planar

$$det(J(q)) = a_1 a_2 \sin(q_2)$$
$$det(J(q)) = 0 \leftrightarrow q = \begin{bmatrix} q_1 \\ n\pi \\ q_3 \end{bmatrix} \quad ; n \,\epsilon\, \mathbb{Z}$$

4.1.3. RLR planar

$$det(J(q)) = -q_2$$

$$det(J(q)) = 0 \leftrightarrow q = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

4.1.4. LRR

$$det(J(q)) = a_2 a_3 \sin(q_3)$$

$$det(J(q)) = 0 \leftrightarrow q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ n\pi \end{bmatrix} \quad ; n \,\epsilon\, \mathbb{Z}$$

4.2. Interprete qué tienen de particular las soluciones del punto anterior

4.2.1. RR planar

En este caso, cuando se cumple la condición indicada el extremo del robot se encuentra en el circulo de extensión máxima o en el círculo de mínima extensión. En esos puntos las velocidades $\dot{x}$ y $\dot{y}$ no son independientes entre sí, sino que deben ser un vector tangente al círculo en cuestión (se pierde un grado de libertad al controlar la velocidad del extremo).

4.2.2. RRR

Similarmente al caso anterior cuando $q_2 = 0$ se pierde un grado de libertad del robot. El vector de velocidad cartesiana en el extremo del segundo eslabon tiene que ser tangente a un circulo y con $\dot{q}_3$ no se puede controlar los gdl restante.

4.2.3. RLR

En esta condición las articulaciones 1 y 3 coinciden y por lo tanto el efecto sobre la velocidad del efector final de q_1 y q_3 es el mismo, es decir, no actúan de forma independiente de modo que se pierde un grado de libertad.

4.2.4. LRR

Este caso es esencialmente equivalente al caso del robot RR planar.

5. Ejercicio 5

Trabajando con el robot RRR planar.

5.1.

Adapte el código anterior para analizar el Jacobiano simbólico y halle la expresión del determinante. ¿Puede aplicar los puntos 1 y 2 del ejercicio anterior?

Analizado en el ejercicio anterior.

5.2.

Trabaje numéricamente con longitud de eslabón 1m, 0.8m y 0.6m. Calcule el Jacobiano y su determinante para $q = [\pi/6 \; 0 \; \pi/6]$, en rad. Verifique que el determinante es cero. Verifique que el rango de la matriz es menor que los g.d.l. del robot (función “rank”). Ejecute la función “jsingu(J)” e interprete y relacione el resultado con el robot del ejercicio 1

La implementación en código en “Ejercicio_5.m” indica que el determinante del Jacobiano es cero, el rango de la matriz es 2. Y la función “jsingu(J)” indica que hay una dependencia lineal por la que q_3 depende de q_1 y q_2.

5.3.

Para la posición articular anterior:

5.3.1. Calcule la velocidad articular requerida para lograr las siguientes velocidades cartesianas en el extremo operativo: $v = [1\,0\,0]\,m/s$. Use el jacobiano reducido

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} -1.31 \\ 2.96 \\ -1.64 \end{bmatrix} * 10^{15}$$

5.3.2. ¿Por qué existe inversa?

En realidad la inversa no existe, pero dado que se obtiene la misma de forma numérica, en realidad el determinante de la misma da como resultado un número muy cercano a cero con el que todavía se puede obtener la inversa pero dando como resultado valores muy grandes.

5.3.3. ¿Cuál es el número de condición del jacobiano reducido?

El número de condición que se obtiene es $1.81 * 10^{16}$

5.3.4. Asuma que q_2 no es cero, sino que está cerca: $q_2 = 0.001$. ¿Cuánto valen las velocidades articulares para lograr el mismo v?

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0.8655 \\ -1.948 \\ 1.0825 \end{bmatrix} * 10^{3}$$

5.3.5. ¿Cuánto valen el determinante y el número de condición del jacobiano en este caso?

$$det(J) = 8.0000 * 10^{-4}$$
$$cond(J) = 9.1798 * 10^{3}$$

5.3.6. ¿Qué conclusión puede sacar sobre la proximidad del punto singular?

Incluso en las cercanías de un punto singular, para velocidades no demasiado elevadas en el extremo del robot, las velocidades articulares requeridas son excesivas, luego las acciones de control necesarias para lograr esas consignas de velocidad también serían muy grandes, se exigiría demasiado a los controladores de las articulaciones, el consumo de corriente sería elevado y demás.

6. Ejercicio 6

Vamos a descomponer paso a paso el problema que planteaste:
Expresión Original:

$$A = \cos(2q_3) - C_a \cos(q_4) + C_a \cos(2q_3 + q_4) - 1$$

Paso 1: Expansión de $\cos(2q_3 + q_4)$
Usamos la identidad de suma de ángulos:

$$\cos(2q_3 + q_4) = \cos(2q_3)\cos(q_4) - \sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Entonces, la ecuación queda:

$$A = \cos(2q_3) - C_a \cos(q_4) + C_a(\cos(2q_3)\cos(q_4) - \sin(2q_3)\sin(q_4)) - 1$$

Paso 2: Agrupación de términos con $\cos(q_4)$
Reagrupamos los términos que tienen $\cos(q_4)$:

$$A = (\cos(2q_3) - 1) + C_a(\cos(2q_3)\cos(q_4) - \sin(2q_3)\sin(q_4)) - C_a \cos(q_4)$$

Agrupamos $C_a \cos(q_4)$:

$$A = (\cos(2q_3) - 1) + C_a \cos(q_4)(\cos(2q_3) - 1) - C_a \sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Paso 3: Reemplazo de $1 - \cos(2q_3)$ por $2\sin^2(q_3)$
Aplicamos la identidad trigonométrica:

$$1 - \cos(2q_3) = 2\sin^2(q_3)$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$A = -2\sin^2(q_3) + C_a \cos(q_4)(-2\sin^2(q_3)) - C_a \sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Resultado Final:

$$A = -2\sin^2(q_3) - 2C_a\cos(q_4)\sin^2(q_3) - C_a\sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Este sería el resultado final con los términos correctamente agrupados y el reemplazo realizado.

Vamos a seguir los pasos que indicaste, comenzando desde la expresión final que obtuvimos anteriormente.

Expresión Original:

$$A = -2\sin^2(q_3) - 2C_a\cos(q_4)\sin^2(q_3) - C_a\sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Paso 1: Expansión de $\sin(2q_3)$

Usamos la identidad de doble ángulo para el seno:

$$\sin(2q_3) = 2\sin(q_3)\cos(q_3)$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$A = -2\sin^2(q_3) - 2C_a\cos(q_4)\sin^2(q_3) - C_a(2\sin(q_3)\cos(q_3))\sin(q_4)$$

Paso 2: Dividir toda la expresión por $\sin(q_3)$

Dividimos cada término entre $\sin(q_3)$:

$$\frac{A}{\sin(q_3)} = -2\sin(q_3) - 2C_a\cos(q_4)\sin(q_3) - 2C_a\cos(q_3)\sin(q_4)$$

Paso 3: Factorizar $\sin(q_3)$ y $\cos(q_3)$

Reagrupamos para factorizar:

- Agrupamos términos con $\sin(q_3)$:

$$\frac{A}{\sin(q_3)} = \sin(q_3)(-2 - 2C_a\cos(q_4)) - 2C_a\cos(q_3)\sin(q_4)$$

- Ahora factorizamos $\sin(q_3)$ y $\cos(q_3)$ por separado:

$$\frac{A}{\sin(q_3)} = \sin(q_3)(-2 - 2C_a\cos(q_4)) + \cos(q_3)(-2C_a\sin(q_4))$$

Resultado Final:

La expresión final es:

$$\frac{A}{-2\sin(q_3)} = \sin(q_3)(1 + 2C_a\cos(q_4)) + \cos(q_3)(C_a\sin(q_4))$$

Este sería el resultado con los términos factorizados en función de $\sin(q_3)$ y $\cos(q_3)$, dividiendo la expresión por $\sin(q_3)$ como solicitaste. Eso tiene que ser cero, y se puede expresar como;

$$u = \begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 + 2C_aC_4 \\ C_aS_4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

La expresión se reduce a:

$$u \cdot v = 0$$

Pero **v** depende solamente de q_4. Para cada valor del mismo se pueden encontrar el vector **u** que indica la dirección normal.

Para B por otro lado. Vamos a desarrollar los pasos que mencionaste para la expresión B.

Expresión original:

$$B = S_g \sin(q_4) - 2\sin(q_3) - S_g \sin(2q_3 + q_4) - S_b \sin(2q_3)$$

Paso 1: Expandir $\sin(2q_3 + q_4)$
Usamos la identidad de suma de ángulos para el seno:

$$\sin(2q_3 + q_4) = \sin(2q_3)\cos(q_4) + \cos(2q_3)\sin(q_4)$$

Sustituyendo en la expresión:

$$B = S_g \sin(q_4) - 2\sin(q_3) - S_g(\sin(2q_3)\cos(q_4) + \cos(2q_3)\sin(q_4)) - S_b \sin(2q_3)$$

Paso 2: Agrupar los términos con $S_g \sin(q_4)$
Reagrupamos los términos que tienen $\sin(q_4)$:

$$B = S_g \sin(q_4) - S_g \cos(2q_3)\sin(q_4) - 2\sin(q_3) - S_g \sin(2q_3)\cos(q_4) - S_b \sin(2q_3)$$

Factorizamos $S_g \sin(q_4)$:

$$B = S_g \sin(q_4)(1 - \cos(2q_3)) - 2\sin(q_3) - S_g \sin(2q_3)\cos(q_4) - S_b \sin(2q_3)$$

Paso 3: Agrupar los términos con $\sin(2q_3)$
Reagrupamos los términos que contienen $\sin(2q_3)$:

$$B = S_g \sin(q_4)(1 - \cos(2q_3)) - 2\sin(q_3) - (\sin(2q_3))(S_g \cos(q_4) + S_b)$$

Paso 4: Reemplazar $1 - \cos(2q_3)$ por $2\sin^2(q_3)$
Usamos la identidad trigonométrica $1 - \cos(2q_3) = 2\sin^2(q_3)$ en el primer término:

$$B = S_g \sin(q_4)(2\sin^2(q_3)) - 2\sin(q_3) - (\sin(2q_3))(S_g \cos(q_4) + S_b)$$

Paso 5: Expandir $\sin(2q_3)$
Usamos la identidad $\sin(2q_3) = 2\sin(q_3)\cos(q_3)$:

$$B = S_g \sin(q_4)(2\sin^2(q_3)) - 2\sin(q_3) - 2\sin(q_3)\cos(q_3)(S_g \cos(q_4) + S_b)$$

Paso 6: Dividir toda la expresión por $\sin(q_3)$
Dividimos cada término entre $\sin(q_3)$:

$$\frac{B}{\sin(q_3)} = S_g \sin(q_4)(2\sin(q_3)) - 2 - 2\cos(q_3)(S_g \cos(q_4) + S_b)$$

Resultado final:
La expresión final es:

$$\frac{B}{2\sin(q_3)} = S_g \sin(q_3)\sin(q_4) - 1 - 1\cos(q_3)(S_g \cos(q_4) + S_b)$$

Ahora:

$$w = \begin{bmatrix} -S_g C_4 - S_b \\ S_g S_4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

La expresión se reduce a:

$$u \cdot w = 1$$

Esto es $\| u \| \| w \| \cos(\zeta) = 1$ Pero $\| u \| = 1$. Luego

$$\cos(\zeta) = \frac{1}{\| w \|}$$

Eso implica que debe ser:

$$\| (w) \| > 1$$

$$\|w\|^2 = S_g^2 + 2S_g S_b C_4 + S_b^2 > 1$$

Esta es la expresión del cuadrado del módulo del vector w.