

# Informe de Trabajo Práctico N°2

## Herramientas Matemáticas

Robótica I

Ingeniería en Mecatrónica

Facultad de Ingeniería - UNCUIYO

Alumno: Juan Manuel BORQUEZ PEREZ

Legajo: 13567



**UNCUIYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

## 1. Ejercicio 1.

Grafique el sistema  $\{M\}$  respecto de  $\{O\}$  para cada una de las siguientes matrices de rotación:

Se utiliza la función **trplot** del **Robotic Toolbox** para obtener las gráficas.

Se utiliza la función **tr2eul** para obtener los **ángulos de Euler** (roll, pitch, yaw).

### 1.1. Inciso a

$${}^O Rot_M = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,866 \\ 0,866 & 0,500 \end{bmatrix}$$

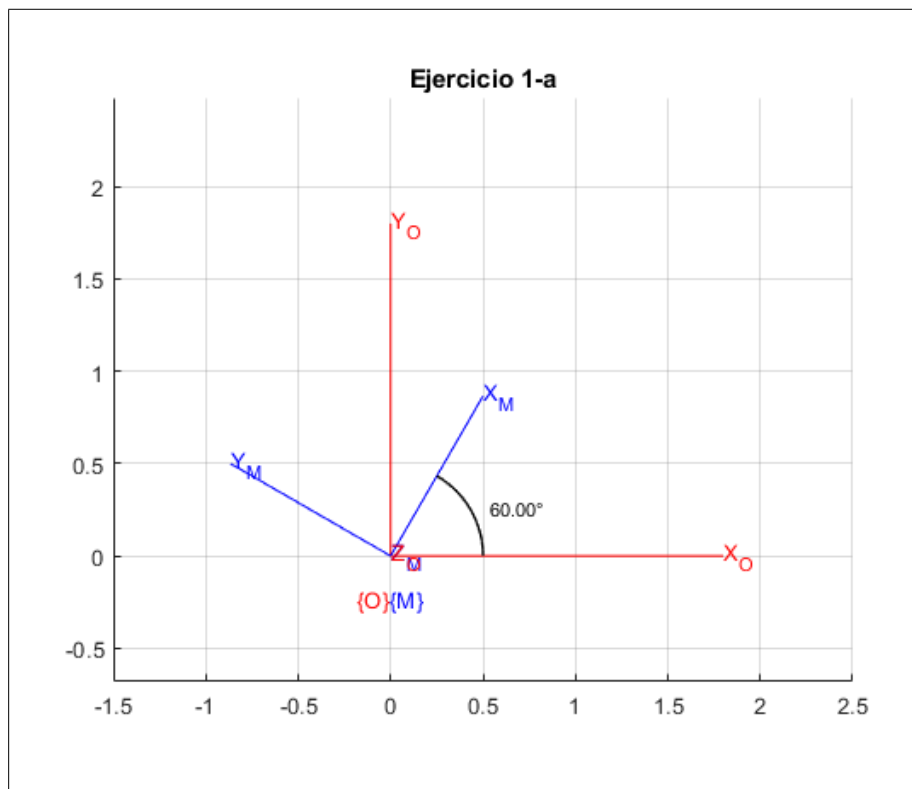


Figura 1: Sistema O y Sistema M superpuestos con indicación de ángulo de rotación.

### 1.2. Inciso b

$${}^O Rot_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para este caso los ángulos de rotación pueden ser:

$$\begin{aligned}roll &= 0^\circ \\pitch &= 90^\circ \\yaw &= -90^\circ\end{aligned}$$

Otra posibilidad es:

$$\begin{aligned}roll &= -90^\circ \\pitch &= 90^\circ \\yaw &= 0^\circ\end{aligned}$$

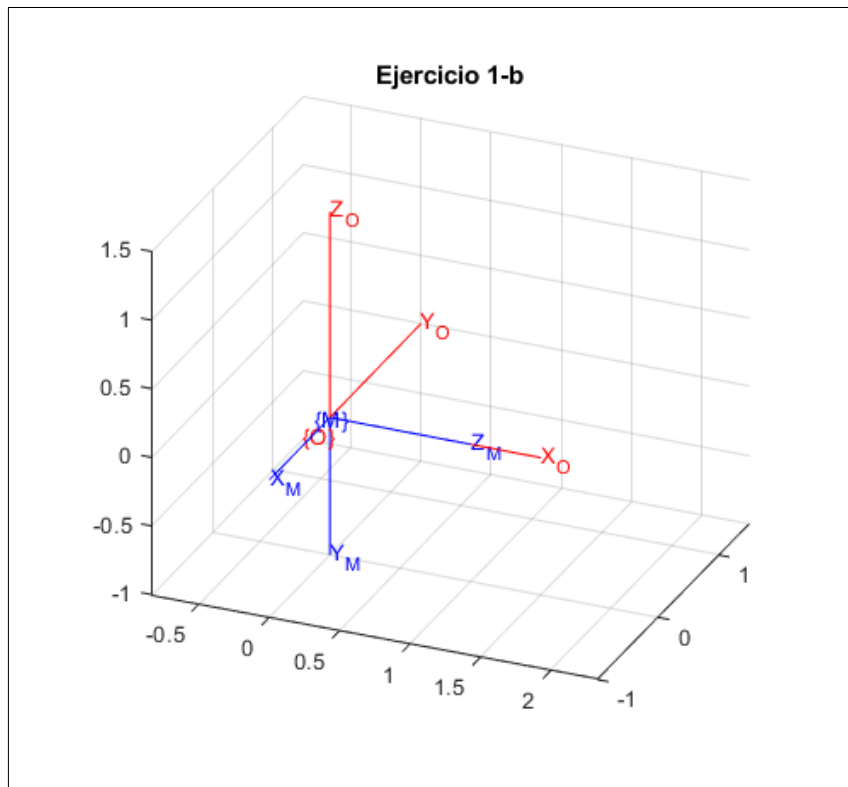


Figura 2: Sistema O y Sistema M superpuestos

### 1.3. Inciso c

$${}^M Rot_O = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,750 & -0,433 \\ 0,866 & 0,433 & 0,250 \\ 0 & -0,500 & 0,866 \end{bmatrix}$$

La matriz  ${}^O Rot_M$ , que es la inversa de la matriz  ${}^M Rot_O$  por corresponder a la transformación inversa, se obtiene simplemente transponiendo la matriz  ${}^M Rot_O$ . Esto dado que las matrices de rotación y por lo tanto las matrices de transformación homogénea correspondientes son ortogonales (en particular ortonormales).

$${}^O Rot_M = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,866 & 0 \\ -0,750 & 0,433 & -0,500 \\ -0,433 & 0,250 & 0,866 \end{bmatrix}$$

Para este caso los ángulos de rotación son:

$$\begin{aligned} roll &= -90^\circ \\ pitch &= 30^\circ \\ yaw &= 30^\circ \end{aligned}$$

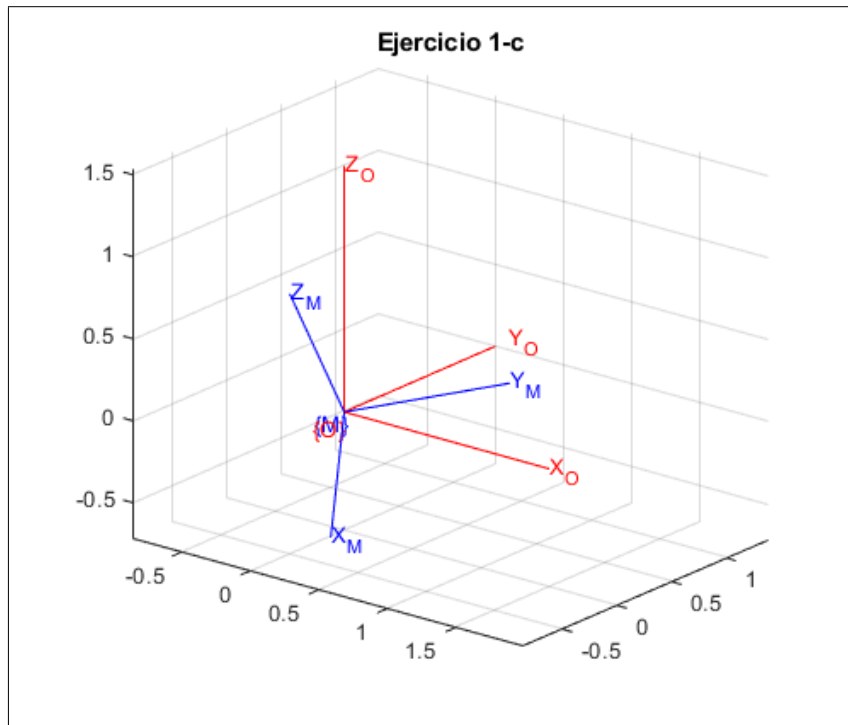


Figura 3: Sistema O y Sistema M superpuestos

## 2. Ejercicio 2 (obligatorio).

Expresé cada uno de los siguientes vectores en el sistema de referencia  $\{O\}$  sabiendo que sus coordenadas son respecto al sistema  $\{M\}$ , el cual sufrió la rotación indicada. Realice un gráfico donde se aprecie el vector y sus coordenadas en ambos sistemas.

Se utilizan las funciones **trot2**, **trotx**, **troty**, **trotz** para obtener las matrices de transformación homogénea  ${}^O T_M$ .

$${}^O a = {}^O T_M {}^M a \quad (1)$$

### 2.1. Inciso a

$${}^M a = [1 \ 0,5] \rightarrow \{M\} \text{ rotó } -17^\circ \text{ en } Z_O$$

$${}^O a = [1,1025 \quad 0,1858]$$

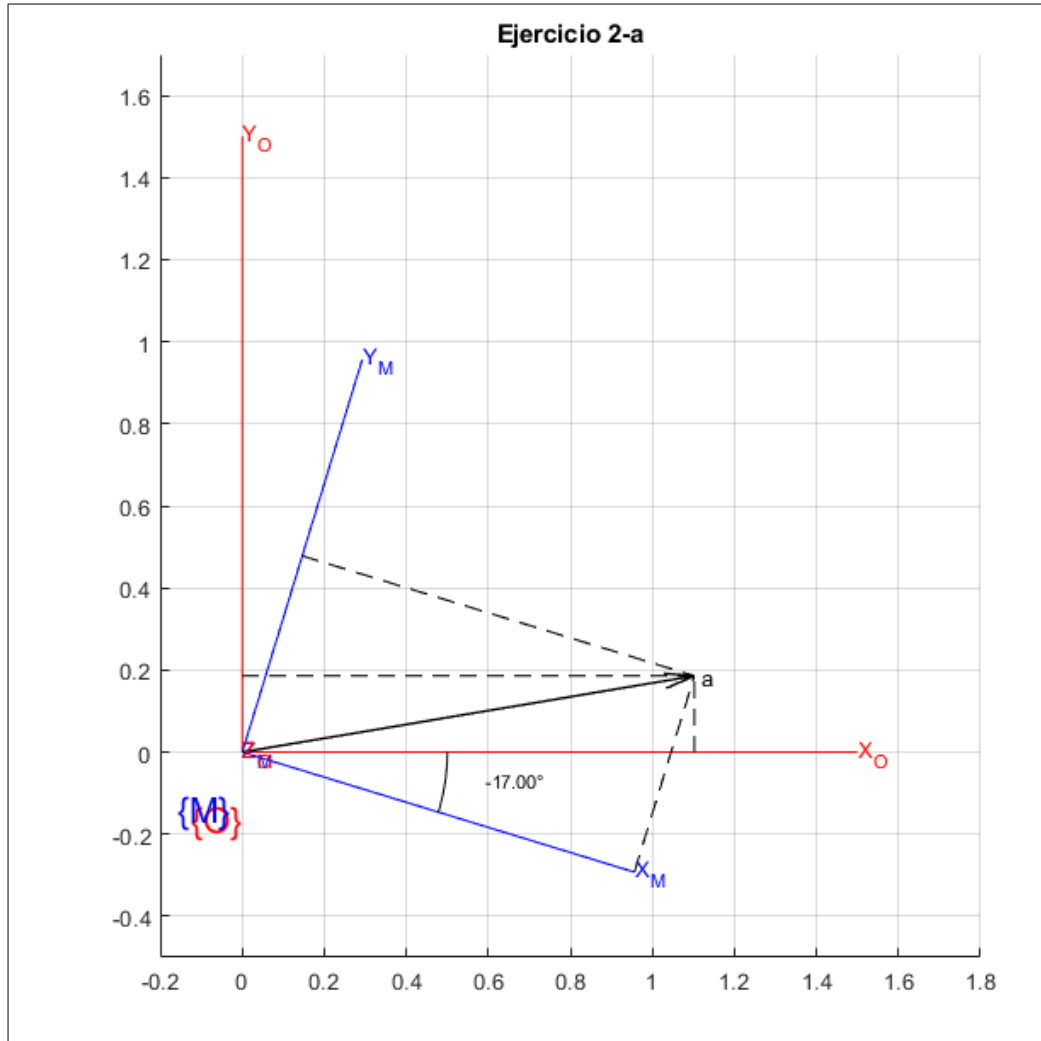


Figura 4: Sistemas M y O superpuestos - Vector con guías de proyección y cota de ángulo

## 2.2. Inciso b

$${}^M b = [0 \quad 0 \quad 1] \rightarrow \{M\} \text{ rotó } 35^\circ \text{ en } X_O$$

$${}^O b = [0 \quad -0,5736 \quad 0,8192]$$

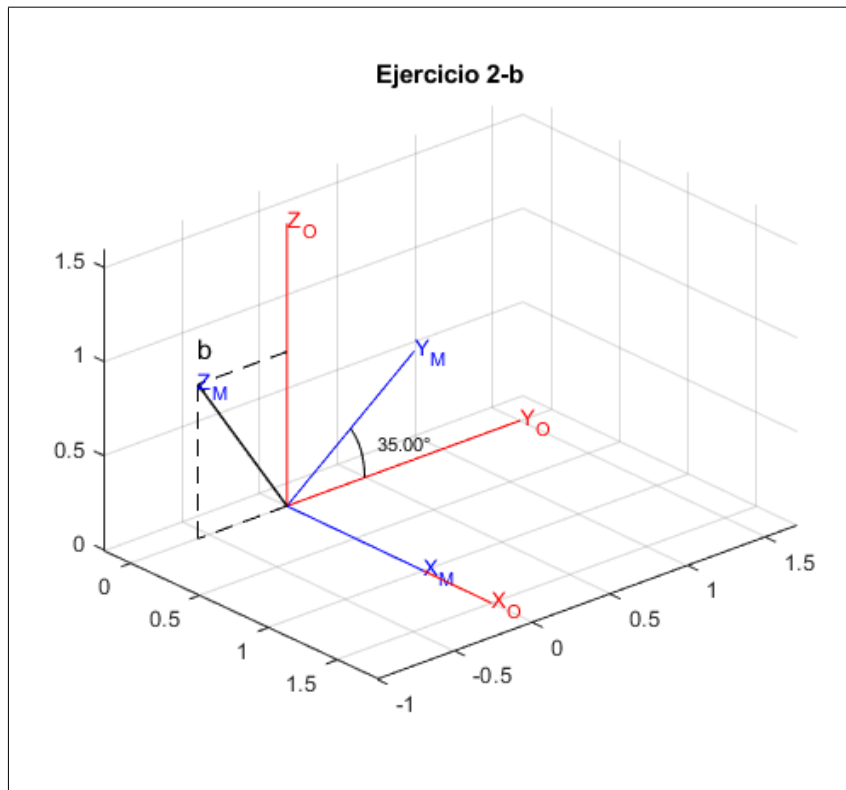


Figura 5: Sistemas M y O superpuestos - Vector con guías de proyección y cota de ángulo

### 2.3. Inciso c

$${}^M c = [1 \quad 0,5 \quad 0,3] \rightarrow \{M\} \text{ rotó } 90^\circ \text{ en } Y_O$$

$${}^O c = [0,3 \quad 0,5 \quad -1]$$

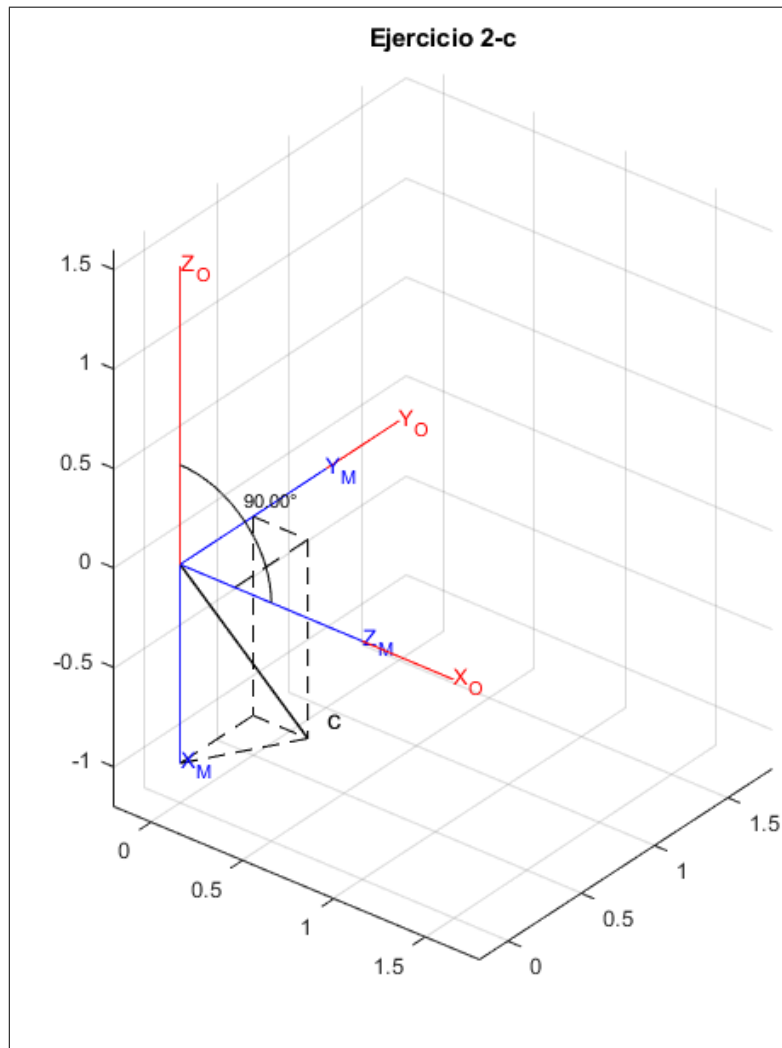


Figura 6: Sistemas M y O superpuestos - Vector con guías de proyección y cota de ángulo

### 3. Ejercicio 3

Escriba en forma general las matrices de transformación homogénea que representan los siguientes casos:

#### 3.1. a. Traslación pura en el espacio

Traslación a un punto  $\mathbf{p}$  de coordenadas  $[x \ y \ z]$  en el sistema  $\{\mathbf{O}\}$ .

$${}^O T_M = \text{Tras}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.2. b. Rotación en el eje X

Rotación de un ángulo  $\alpha$  (roll) respecto del eje X.

$${}^O T_M = Rot(\alpha, X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3. c. Rotación en el eje Y

Rotación de un ángulo  $\beta$  (pitch) respecto del eje Y.

$${}^O T_M = Rot(\beta, Y) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.4. d. Rotación en el eje Z

Rotación de un ángulo  $\gamma$  (yaw) respecto del eje Z.

$${}^O T_M = Rot(\gamma, Z) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4. Ejercicio 4 (obligatorio)

En la siguiente figura se observa el vector  $\alpha$  respecto del sistema  $\{M\}$ . El punto M respecto de  $\{O\}$  es  ${}^O p_M = (7, 4)$ .

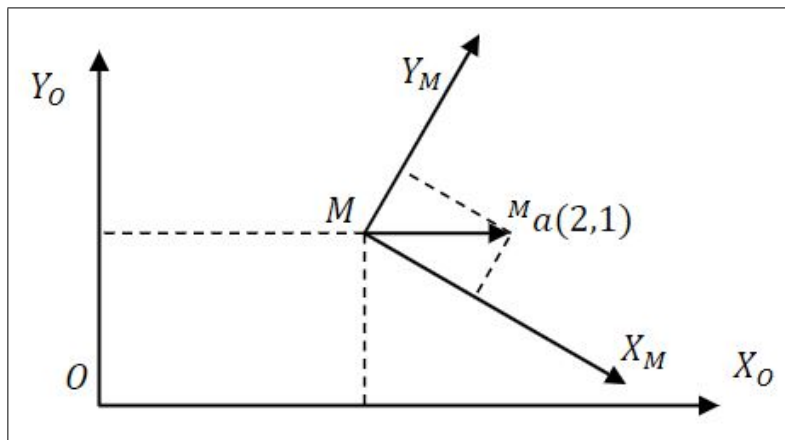


Figura 7: Gráfica del enunciado.



#### 4.1. Inciso a.

Halle, por el método que elija, el ángulo de rotación del sistema M respecto de O.

Como el vector  $a$  es paralelo a  $\mathbf{X}_O$ , el ángulo que forma con  $\mathbf{X}_M$  (sentido dextrógiro) es el ángulo que se debe rotar este eje para que sea paralelo a  $\mathbf{X}_O$ , es decir, el ángulo de la transformación inversa de rotación y el opuesto del ángulo que buscamos.

Ese ángulo se determina utilizando la función **atan2** de MATLAB tomando las coordenadas de  $a$  en el sistema  $\{M\}$  y luego obteniendo el ángulo opuesto.

$$\gamma(yaw) = -26,56^\circ$$

#### 4.2. Inciso b.

Expresé la matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación del sistema  $\{M\}$  respecto de  $\{O\}$ .

Se usa **trotz** para obtener la matriz de rotación.

$${}^O T_M = \begin{bmatrix} 0,8944 & 0,4472 & 7 \\ -0,4472 & 0,8944 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 4.3. Inciso c.

Use la transformación hallada para representar el vector  $a$  respecto del sistema  $\{O\}$ . Verifique gráficamente el resultado.

Se obtiene según eq. (1)

$${}^O a = \begin{bmatrix} 9,24 \\ 4,00 \end{bmatrix}$$

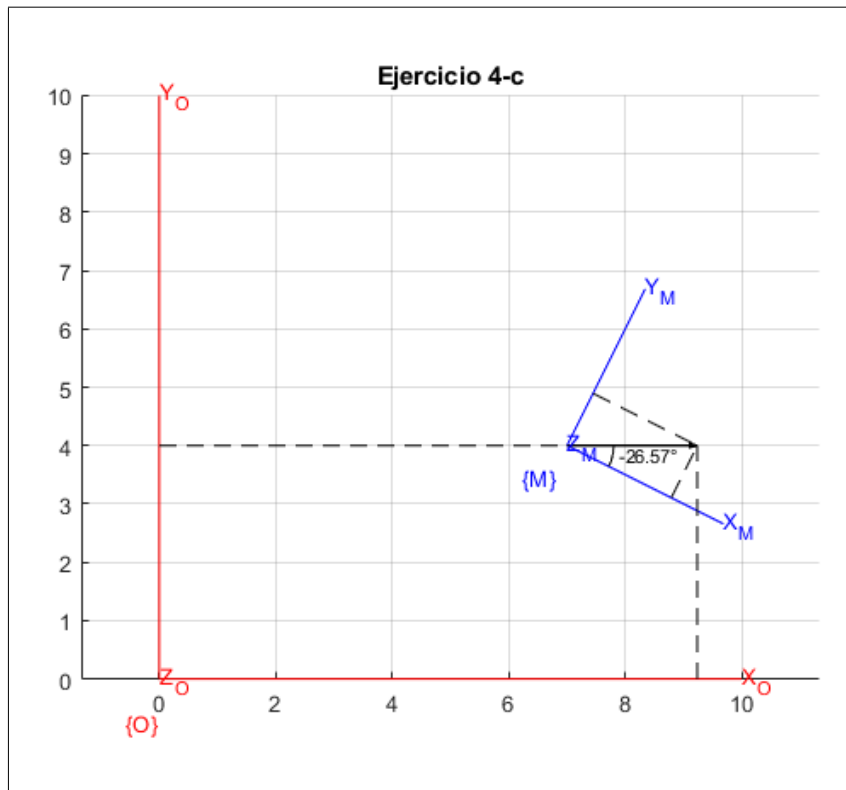


Figura 8: Verificación gráfica del ejercicio.

## 5. Ejercicio 5

Escriba la matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación del sistema {M} respecto de {O} para cada caso. Realice un gráfico donde se aprecie la diferencia.

### 5.1. Inciso a.

El sistema M giró  $45^\circ$  respecto del eje  $Y_O$ , luego se trasladó un vector  ${}^M p = (0, 0, 1)$

Se usa **troty** con  $\beta = 45^\circ$  y se obtiene la matriz de transformación homogénea R. Luego se usa **transl** con  ${}^M p$  y se obtiene la matriz de transformación homogénea T. Se obtiene  ${}^O T_M = R * T$ .

### 5.2. Inciso b.

El sistema M se trasladó un vector  ${}^O p = (0, 0, 1)$ , luego giró  $45^\circ$  respecto del eje  $Y_M$ .

Se usa **transl** con  ${}^O p$  y se obtiene la matriz de transformación homogénea T. Luego se usa **troty** con  $\beta = 45^\circ$  y se obtiene la matriz de transformación homogénea R. Se obtiene  ${}^O T_M = T * R$ .

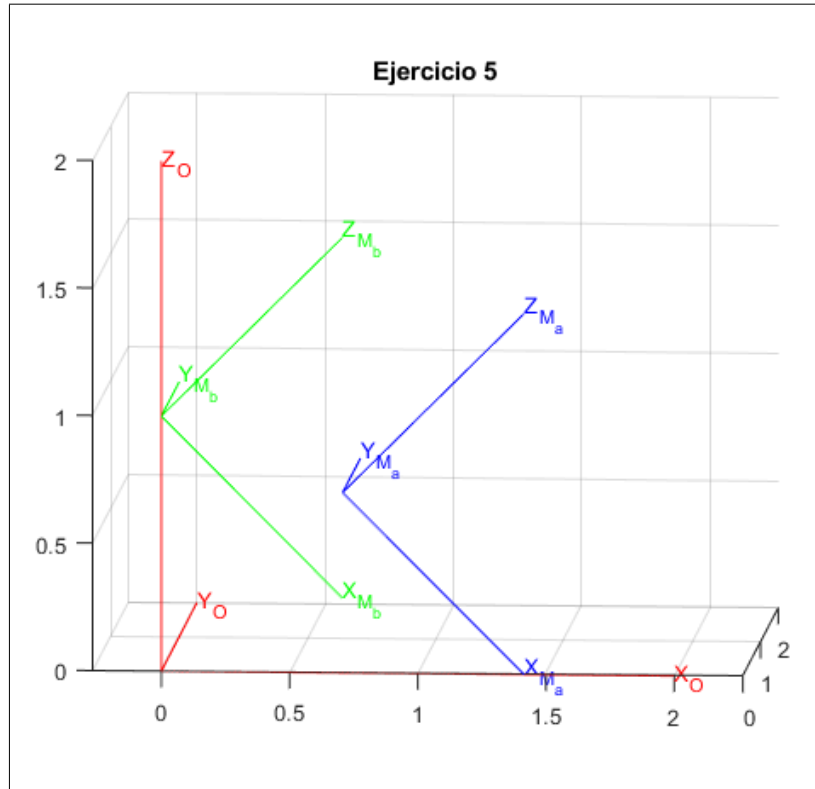


Figura 9: Diferencia entre los sistemas de referencia obtenidos.

## 6. Ejercicio 6

Expresar el vector  ${}^O p = (0.5, 0, 1)$  respecto del sistema  $\{M\}$  de cada caso del ejercicio anterior.

De eq. (1) se puede obtener:

$${}^M a = {}^O T_M^{-1} {}^O a \quad (2)$$

$${}^O T_M^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T {}^O p_M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Sin embargo obtendremos la solución de los problemas utilizando el operador "\ " de MATLAB.

### 6.1. Inciso a

$${}^O p = \begin{bmatrix} -0,3536 \\ 0 \\ 0,0607 \end{bmatrix}$$

## 6.2. Inciso b

$${}^O p = \begin{bmatrix} 0,3536 \\ 0 \\ 0,3536 \end{bmatrix}$$

## 7. Ejercicio 7.

Analizar la siguiente transformación compuesta e indicar V o F. Considere que  $T$  representa la posición y orientación de un sistema de referencia  $\{M\}$  respecto de otro sistema de referencia  $\{O\}$ .

$$T = TrotX(\alpha)Ttrans(0, 2, 0)TrotY(\beta)$$

### 7.1. Inciso a

El sistema  $\{M\}$  sufrió una rotación  $\alpha$  respecto de  $X_O$ , luego una traslación de 2 unidades sobre el eje  $Y_O$ , y finalmente una rotación  $\beta$  respecto de este mismo eje.

F. Las transformaciones deberían ser respecto del sistema  $\{M\}$ .

### 7.2. Inciso b

El sistema  $M$  sufrió una rotación  $\alpha$  respecto de  $X_M$ , luego una traslación de 2 unidades sobre el eje  $Y_M$ , y finalmente una rotación  $\beta$  respecto de este mismo eje

V.

### 7.3. Inciso c

Un vector  $p$  expresado en  $\{O\}$  puede expresarse en  $\{M\}$  realizando el producto:  ${}^M p = T.p$

F. La premultiplicación debería ser por la inversa  $T$ .

### 7.4. Inciso d

Un vector  $p$  expresado en  $\{M\}$  puede expresarse en  $\{O\}$  realizando el producto:  ${}^O p = T.p$

V.

## 8. Ejercicio 8

En función de las siguientes matrices escritas en forma simbólica halle la expresión correcta para cada caso:

- ${}^O T_M$ : matriz de transformación homogénea del sistema {M} respecto de {O}.
- ${}^M T_A$ : matriz de transformación homogénea del sistema {A} respecto de {M}.
- ${}^A T_B$ : matriz de transformación homogénea del sistema {B} respecto de {A}.
- ${}^O T_F$ : matriz de transformación homogénea del sistema {F} respecto de {O}.
- ${}^F T_D$ : matriz de transformación homogénea del sistema {D} respecto de {F}.

### 8.1. {B} respecto de {O}

$${}^O T_B = {}^O T_M {}^M T_A {}^A T_B$$

### 8.2. {F} respecto de {B}

$${}^B T_F = {}^O T_B^{-1} {}^O T_F$$

### 8.3. {B} respecto de {D}

$${}^D T_B = {}^F T_D^{-1} {}^B T_F^{-1}$$