

# Informe de Trabajo Práctico N°6

## Jacobiano

Robótica I

Ingeniería en Mecatrónica  
Facultad de Ingeniería - UNCUIYO

Alumno: Juan Manuel BORQUEZ PEREZ  
Legajo: 13567



**UNCUIYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

## 1. Ejercicio 1

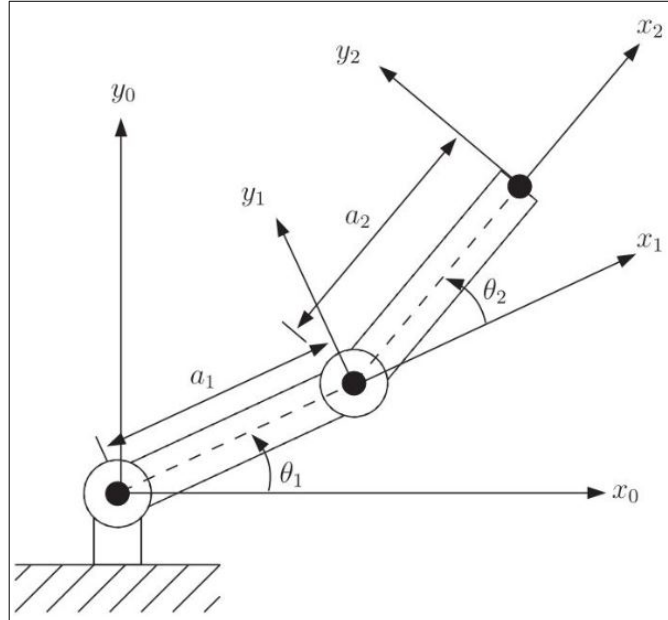


Figura 1: Robot planar RR Ejercicio 1.

### 1.1. Mediante derivación respecto del tiempo obtenga el Jacobiano del robot

Se tiene:

$$\begin{cases} x = a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ z = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \theta_1 + \theta_2 \end{cases} \quad (1)$$

Cada fila en el Jacobiano se puede obtener como el gradiente de la función en esa fila respecto de las variables  $q_1 \equiv \theta_1$  y  $q_2 \equiv \theta_2$ . Se obtiene:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- 1.2. Calcule la velocidad del extremo  $\dot{p}$ , en m/s para  $q = [\pi/6, \pi/6]$ , en rad y  $\dot{q} = [0, -1]$  en rad/s. Suponga longitud de eslabón unitaria. Observe el gráfico del robot e interprete los resultados**

Las velocidades en el extremo se calculan a partir de las velocidades articulares como:

$$\dot{p} = J(q)\dot{q} \quad (3)$$

Para los valores dados se obtiene:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} -\sin(\pi/6) - \sin(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \cos(\pi/6) + \cos(\pi/3) & \cos(\pi/3) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ -0.500 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ -1.000 \end{bmatrix}$$

En donde las primeras 3 componentes están en m/s y las últimas 3 en rad/s.

- 1.3. Trabaje solo con las coordenadas X-Y (primeras 2 filas del J) y verifique mediante la inversa algebraica que  $\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{p}$  se cumple**

Conservando solo las filas del plano X-Y nos queda:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Luego  $J^{-1}(q)$  es:

$$J^{-1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{a_1 \sin(\theta_2)} & \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{a_1 \sin(\theta_2)} \\ -\frac{a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)}{a_1 a_2 \sin(\theta_2)} & -\frac{a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)}{a_1 a_2 \sin(\theta_2)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para los valores del inciso anterior verificamos:

$$J^{-1}(q)\dot{p} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} & \frac{\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} \\ -\frac{\cos(\pi/6) + \cos(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} & -\frac{\sin(\pi/6) + \sin(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \dot{q}$$

## 2. Ejercicio 3

halle el Jacobiano en forma general de los 3 robots siguientes

## 2.1.

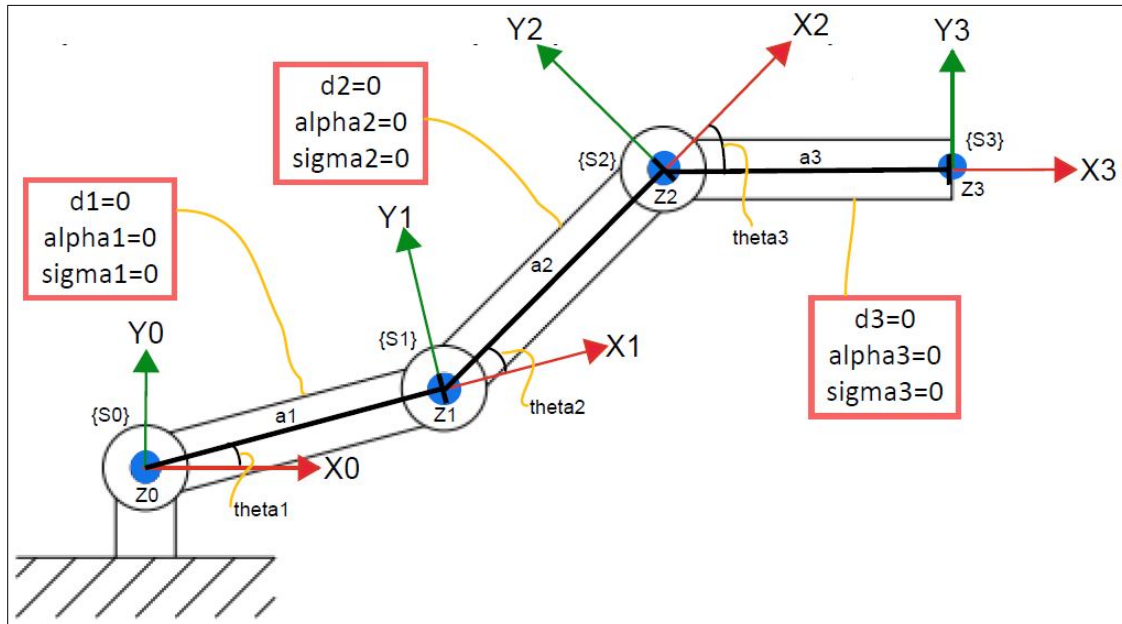


Figura 2: Convención DH utilizada para robot RRR planar.

Las ecuaciones de la cinemática directa se obtienen extendiendo las indicadas en eq. (1) y se obtiene

$$\begin{cases} x = a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y = a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ z = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{cases}$$

El jacobiano se obtiene también por extensión de eq. (2)

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - a_2 S_{12} - a_3 S_{123} & -a_2 S_{12} - a_3 S_{123} & -a_3 S_{123} \\ a_1 C_1 + a_2 C_{12} + a_3 C_{123} & a_2 C_{12} + a_3 C_{123} & a_3 C_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

## 2.2.

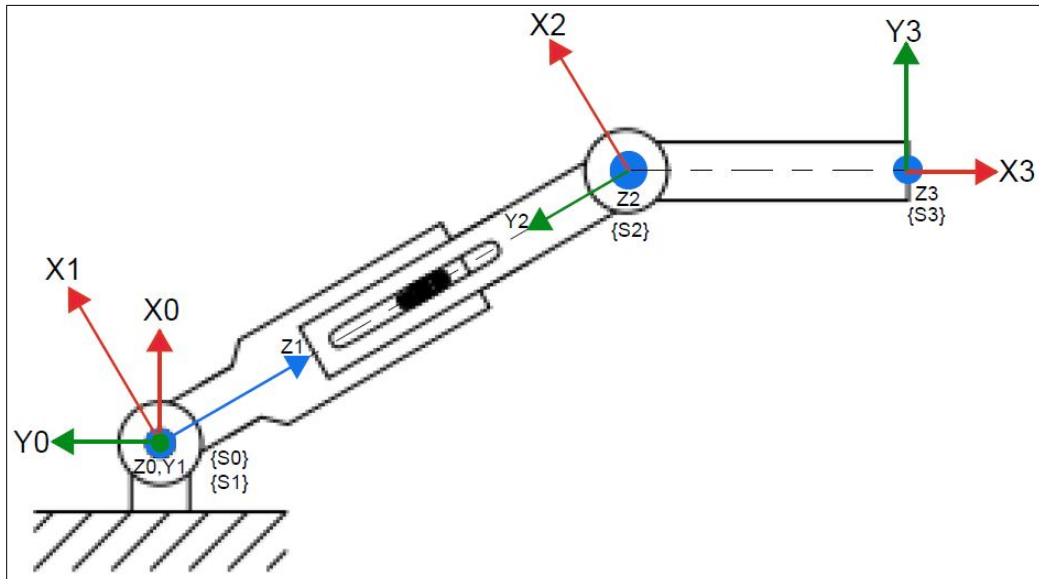


Figura 3: Convención DH utilizada para robot RLR planar.

Los parámetros de DH del robot son:

Sistema	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$	$\sigma$
1	$q_1$	0	0	$\pi/2$	0
2	0	$q_2$	0	$-\pi/2$	1
3	$q_3$	0	$a_3$	0	0

Cuadro 1: Parámetros DH RLR planar.

Las ecuaciones de la cinemática directa se obtienen aplicando “fkine” de forma simbólica en MATLAB:

$$CD = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_3) & -\sin(q_1 + q_3) & 0 & a_3 \cos(q_1 + q_3) + q_2 \sin(q_1) \\ \sin(q_1 + q_3) & \cos(q_1 + q_3) & 0 & a_3 \sin(q_1 + q_3) - q_2 \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego tenemos:

$$\begin{cases} x = a_3 \cos(q_1 + q_3) + q_2 \sin(q_1) \\ y = a_3 \sin(q_1 + q_3) - q_2 \cos(q_1) \\ z = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = q_1 + q_3 \end{cases}$$

Finalmente el jacobiano es:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a_3 \sin(q_1 + q_3) + q_2 \cos(q_1) & \sin(q_1) & -a_3 \sin(q_1 + q_3) \\ a_3 \cos(q_1 + q_3) + q_2 \sin(q_1) & -\cos(q_1) & a_3 \cos(q_1 + q_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

### 2.3.

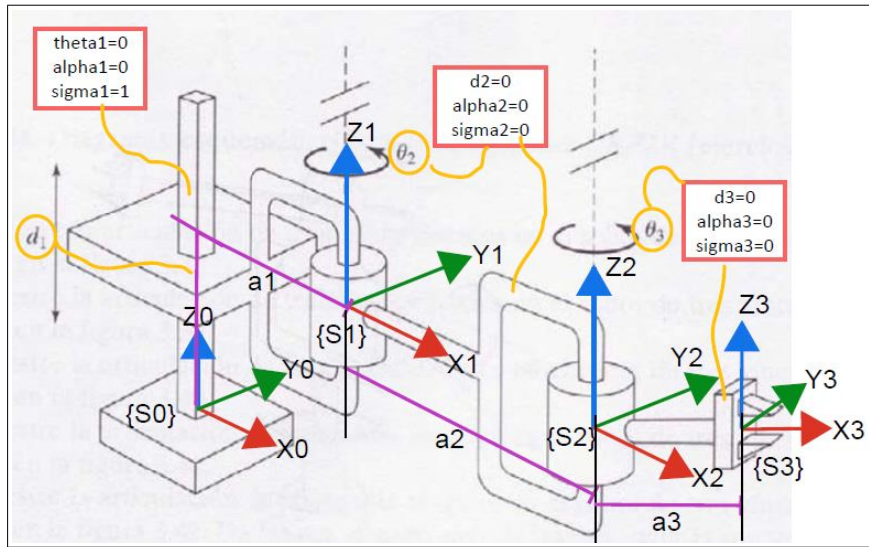


Figura 4: Convención DH utilizada para robot LRR

Sistema	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$	$\sigma$
1	0	$q_1$	$a_1$	0	1
2	$q_2$	0	$a_2$	0	0
3	$q_3$	0	$a_3$	0	0

Cuadro 2: Parámetros DH robot LRR

La cinemática directa obtenida de forma simbólica con MATLAB es:

$$CD = \begin{bmatrix} \cos(q_2 + q_3) & -\sin(q_2 + q_3) & 0 & a_1 + a_3 \cos(q_2 + q_3) + a_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2 + q_3) & \cos(q_2 + q_3) & 0 & a_3 \sin(q_2 + q_3) + a_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene

$$\begin{cases} x = a_1 + a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3) \\ y = a_2 \sin(q_2) + a_3 \sin(q_2 + q_3) \\ z = q_1 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = q_2 + q_3 \end{cases}$$

Luego el Jacobiano es:

$$J(q) = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \sin(q_2) - a_3 \sin(q_2 + q_3) & -a_3 \sin(q_2 + q_3) \\ 0 & a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3) & a_3 \cos(q_2 + q_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 3. Ejercicio 3