ROBÓTICA I

Trabajo Práctico N° 6

Alumnos:

Julián Andrés RAYES CANO, Leg. N° 13256

Juan Manuel BORQUEZ PEREZ, Leg. N° 13567

Ingeniería en Mecatrónica - UNCuyo

RAYES CANO, Julián Andrés
BORQUEZ PÉREZ, Juan Manuel

Jacobiano

Ejercicio TF (*obligatorio*): trabaje con su robot:

Trate de hallar el Jacobiano y el determinante simbólico de su robot.

Intente determinar los puntos singulares a partir del determinante simbólico. En caso de que no se puedan calcular (expresiones muy extensas), identifique al menos 3 mediante observaciones y análisis, y verifique que el determinante sea nulo en esos casos.

Estudie si en la aplicación elegida se trabajará en las proximidades de algún punto singular.

En primer lugar se define al robot de forma simbólica definiendo la matriz de Denavit-Hartenberg en función de los parámetros simbólicos (archivo **"robot_sym.m"**):

```
% Matriz simbólica de parámetros de Denavit-Hartenberg
syms d1 d4 d5 d6 a2 a3 real
dh = [0.0   d1   0    pi/2   0   ;
      0.0   0    a2   0      0   ;
      0.0   0    a3   0      0   ;
      0.0   d4   0    pi/2   0   ;
      0.0   d5   0    pi/2   0   ;
      0.0   d6   0    0      0   ];

% Vector de variables articulares
syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 real
q = [q1 q2 q3 q4 q5 q6];
```

En el archivo **"Ejercicio_6.m"** se encuentran las operaciones y deducciones con el Jacobiano del robot.

- Singularidad de q_5

Se obtiene la siguiente expresión para el Jacobiano igualado a cero:

$$0 = a_2 a_3 S_5 \left(\frac{d_5 C(q_2 + 2q_3 + q_4)}{2} + \frac{a_2 C(q_2 + q_3)}{2} - \frac{d_5 C(q_2 + q_4)}{2} - \frac{a_3 C_2}{2} - \frac{a_2 C(q_2 - q_3)}{2} + \frac{a_3 C(q_2 + 2q_3)}{2} \right)$$

De donde se deduce la **primera singularidad, que sucede cuando $\boldsymbol{q_5 = n\pi}$** (n entero).

- Singularidad de q_3

Multiplicando a la expresión anterior por 2 y dividiéndola por $a_2 a_3 S_5$ **asumiendo ahora que $\boldsymbol{q_5}$ no es un valor singular,** obtenemos la siguiente expresión, que corresponde al paréntesis que siendo igual a cero podría anular también el determinante:

$$0 = d_5 C(q_2 + 2q_3 + q_4) + a_2 C(q_2 + q_3) - d_5 C(q_2 + q_4) - a_3 C_2 - a_2 C(q_2 - q_3) + a_3 C(q_2 + 2q_3)$$

Se observa **una nueva singularidad, la cual se da para q3 = n*pi** (n entero), ya que queda lo siguiente:

$$0 = \boldsymbol{d_5 \mathrm{C}(q_2 + q_4) + a_2 \mathrm{C}_2 - d_5 \mathrm{C}(q_2 + q_4) - a_3 \mathrm{C}_2 - a_2 \mathrm{C}_2 + a_3 C_2}$$

En donde los miembros de igual color se anulan mutuamente.

- Otras singularidades

La expresión se puede poner como:

$$AC_2 + BS_2 = 0$$

Y se puede ver como:

$$[A\ B]\begin{bmatrix}C_2\\S_2\end{bmatrix}=0 \quad (a)$$

En donde:

$$A = d_5\,C\,(2\,q_3 + q_4) - d_5\,C_4 - a_3 + a_3\,C\,(2\,q_3)$$

$$B = d_5\,S_4 - 2\,a_2\,S_3 - a_3\,S\,(2\,q_3) - d_5\,S\,(2\,q_3 + q_4)$$

Si definimos:

$$C_a = \frac{d_5}{a_3}\,, S_b = \frac{a_3}{a_2}\ y\ S_g = \frac{d_5}{a_2}$$

Al desarrollar y operar, se pueden redefinir los factores A y B:

$$A = C\,(2\,q_3) - C_a\,C_4 + C_a\,C\,(2\,q_3 + q_4) - 1$$

$$B = S_g\,S_4 - 2\,S_3 - S_g\,S\,(2\,q_3 + q_4) - S_b\,S\,(2\,q_3)$$

$$[A * \boldsymbol{Sb} \quad B]\begin{bmatrix}C_2\\S_2\end{bmatrix}=0 \ \ (b)$$

Los factores A y B son solo función de las variables $q_3\ y\ q_4$, y para cualquier par de valores se obtiene un vector en el plano cuyas componentes son [A B] y para el que siempre se puede determinar la dirección normal.. El ángulo de esta dirección respecto del eje de abscisas indica el valor de q_2 en los puntos singulares.

Así, se puede obtener:

$$q_2 = f(q_3, q_4) = \mathrm{atan}\left(\frac{B}{A^2+B^2}, \frac{A * \boldsymbol{Sb}}{A^2+B^2}\right) \pm \frac{\pi}{2}$$

Como se podrá notar, esto da como resultado otro conjunto infinito de posibles valores singulares que se obtienen al recorrer los distintos pares de valores de $q_3\ y\ q_4$.

Por ejemplo, para el siguiente conjunto de valores (q_3,q_4)=(1.1;0,8)[rad], se obtienen los valores de q_2:

$$q_{2-1} = \ -0.64187\,rad$$

$$q_{2-2} = \ -3.7835\,rad$$

Los cuales cumplen con la anulación del determinante del Jacobiano.

La última condición a considerar es la posibilidad de que A y B sean simultáneamente nulos para valores de q_3 no singulares.

Operando nuevamente con A y B se puede redefinir sin afectar la ecuación (b) como:

$$A = S_3(1 + C_a C_4) + C_3(C_a S_4)$$

$$B = S_g S_3 S_4 - 1 - C_3(S_g C_4 + S_b)$$

Al igualar ambos factores a cero de forma simultánea se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} C_a S_4 & 1 + C_a C_4 \\ -S_g C_4 - S_b & S_g S_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tomando C_3 y S_3 como incógnitas del sistema, las expresiones de las soluciones son:

$$C_3 = \frac{-(1 + C_a C_4)}{\det(A)} \tag{c}$$

$$S_3 = \frac{C_a S_4}{\det(A)} \tag{d}$$

En donde A es la matriz del sistema, y la expresión del determinante es:

$$\det(A) = C_a S_4^2 S_g + (S_g C_4 + S_b) + C_a C_4 (S_g C_4 + S_b)$$

Que también se puede expresar como:

$$\det(A) = (C_a + C_4) S_g + (1 + C_a C_4) S_b$$

Por otro lado, se debe cumplir la identidad $C_3^2 + S_3^2 = 1$. Al imponerla y desarrollar, obtenemos la siguiente ecuación considerando que el determinante $\det(A)$ es no nulo.

$$1 + 2C_a C_4 + C_a^2 = \det(A)^2$$

$$1 + 2C_a C_4 + C_a^2 = ((C_a + C_4) S_g + (1 + C_a C_4) S_b)^2$$

La ecuación anterior se puede expresar en la forma:

$$aC_4^2 + bC_4 + c = 0$$

En donde los coeficientes son constantes dadas por:

$$a = (S_g + S_b C_a)^2$$

$$b = 2\left(S_g^2 C_a + S_g S_b C_a^2 + S_g S_b + S_b^2 C_a - C_a\right)$$

$$c = (S_g C_a + S_b)^2 - 1 - C_a^2$$

Lo que da soluciones en C_4 dadas por:

$$C_{4-1} = 0.2509$$

$$C_{4-2} = -2.4893$$

Se puede observar que la segunda solución de C_4 no es compatible con la imagen de la función coseno, por lo que queda descartada.

Ahora se procede a utilizar el valor válido de C4 para obtener 2 valores de q4, correspondientes a aquellos ángulos que satisfacen ese coseno.

$$q_{4-1} = 1.3172\, rad$$

$$q_{4-2} = -1.3172\, rad$$

Los cuales permitirán tomar las expresiones (c) y (d) para calcular un valor de q3 para cada valor de q4

El resultado de esto es:

$$q_{3-1} = 2.9511$$

$$q_{3-2} = -2.9511$$

Ambos pares de valores satisfacen la nulidad del determinante Jacobiano

Todas las singularidades mencionadas anteriormente pueden probarse en los scripts adjuntados a la entrega

La verificación de las singularidades correspondientes a las variables articulares q3 y q5 se encuentran en el script "Ejercicio_6.m" y las correspondientes al conjunto infinito de singularidades dadas por q2 en función de q3 y q4, así como los dos pares de valores desarrollados al final de este informe, se encuentran en el script "singularidades" ya que, dada su mayor complejidad, merecían un código aparte para su tratamiento más ordenado.

A priori la aplicación parece no tener trayectorias que pasen por puntos singulares, aunque habría que ver cada caso particular, con la cinemática inversa de los puntos específicos de la simulación y observar el progreso del determinante del Jacobiano.