Informe de Trabajo Práctico N°2
Herramientas Matemáticas

Robótica I

Ingeniería en Mecatrónica
Facultad de Ingeniería - UNCUYO

Alumno: Juan Manuel BORQUEZ PEREZ
Legajo: 13567

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO
FACULTAD
DE INGENIERÍA

1. Ejercicio 1.

Grafique el sistema **M** respecto de **O** para cada una de las siguientes matrices de rotación:

Se utiliza la función *trplot* del **Robotic Toolbox** para obtener las gráficas.

Se utiliza la función *tr2eul* para obtener los **ángulos de Euler** (roll, pitch, yaw).

1.1. Inciso a

$$^{O}Rot_{M} = \begin{bmatrix} 0{,}500 & -0{,}866 \\ 0{,}866 & 0{,}500 \end{bmatrix}$$

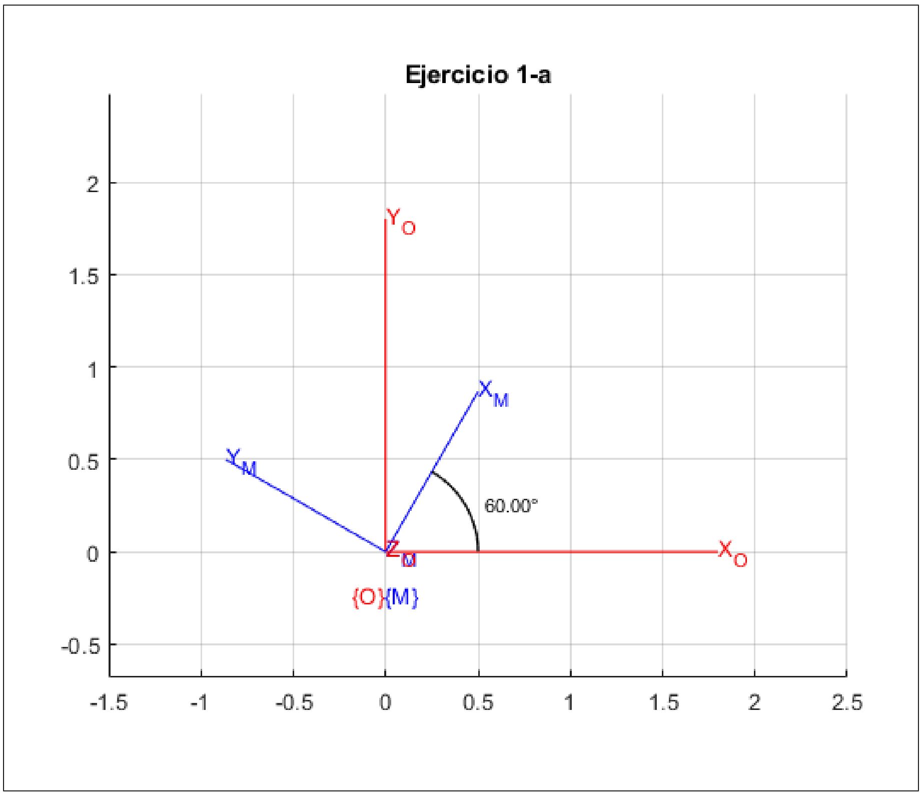

Figura 1: Sistema O y Sistema M superpuestos con indicación de ángulo de rotación.

1.2. Inciso b

$$^{O}Rot_{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para este caso los ángulos de rotación pueden ser:

$$\begin{aligned} roll &= 0° \\ pitch &= 90° \\ yaw &= -90° \end{aligned}$$

Otra posibilidad es:

$$\begin{aligned} roll &= -90° \\ pitch &= 90° \\ yaw &= 0° \end{aligned}$$

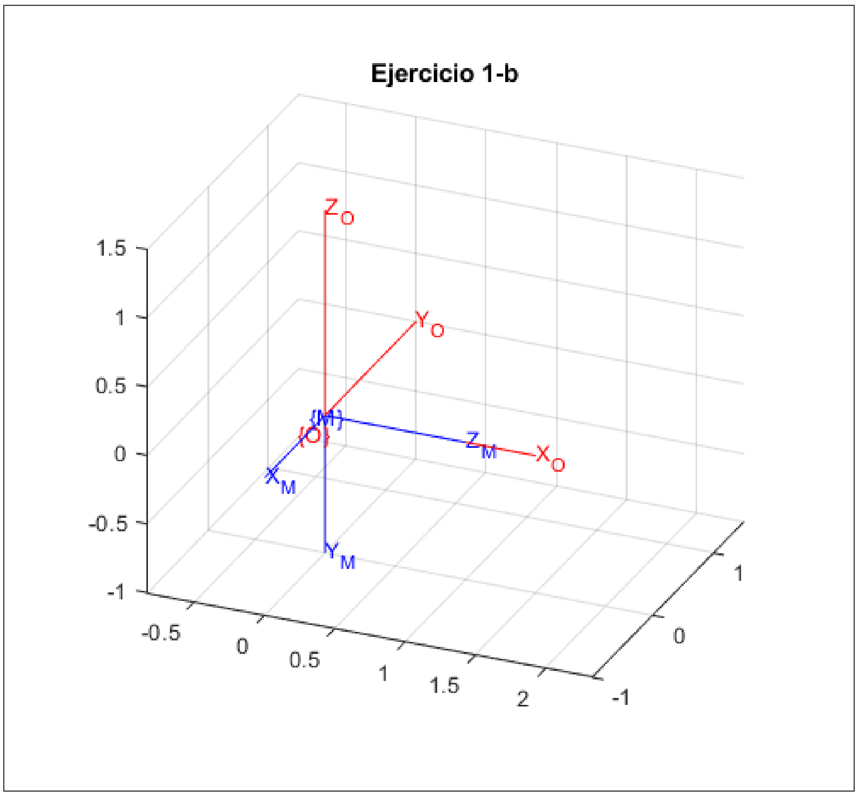

Figura 2: Sistema O y Sistema M superpuestos

1.3. Inciso c

$$^{M}Rot_{O} = \begin{bmatrix} 0{,}500 & -0{,}750 & -0{,}433 \\ 0{,}866 & 0{,}433 & 0{,}250 \\ 0 & -0{,}500 & 0{,}866 \end{bmatrix}$$

La matriz $^{O}Rot_{M}$, que es la inversa de la matriz $^{M}Rot_{O}$ por corresponder a la transformación inversa, se obtiene simplemente transponiendo la matriz $^{M}Rot_{O}$. Esto dado que las matrices de rotación y por lo tanto las matrices de transformación homogénea correspondiente son ortogonales (en particular ortonormales).

$$^{O}Rot_M = \begin{bmatrix} 0{,}500 & 0{,}866 & 0 \\ -0{,}750 & 0{,}433 & -0{,}500 \\ -0{,}433 & 0{,}250 & 0{,}866 \end{bmatrix}$$

Para este caso los ángulos de rotación son:

$$roll = -90^\circ$$
$$pitch = 30^\circ$$
$$yaw = 30^\circ$$

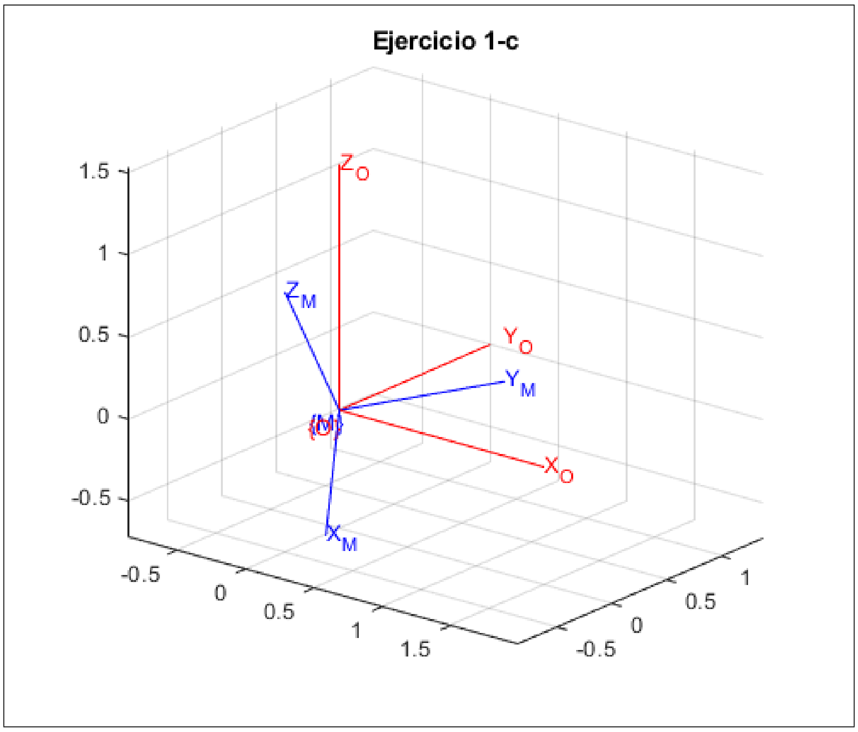

Figura 3: Sistema O y Sistema M superpuestos

2. Ejercicio 2 (obligatorio).

Exprese cada uno de los siguientes vectores en el sistema de referencia **O** sabiendo que sus coordenadas son respecto al sistema **M**, el cual sufrió la rotación indicada. Realice un gráfico donde se aprecie el vector y sus coordenadas en ambos sistemas.

Se utilizan las funciones **trot2, trotx, troty, trotz** para obtener las matrices de transformación homogénea $^{O}T_M$. Así:

$$^{O}a = {}^{O}T_M \, {}^{M}a \tag{1}$$

2.1. Inciso a

$$^{M}a = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \rightarrow \{M\}\,\text{rotó} - 17^\circ\,\text{en}\, Z_O$$

$$^{O}a = \begin{bmatrix} 1{,}1025 & 0{,}1858 \end{bmatrix}$$

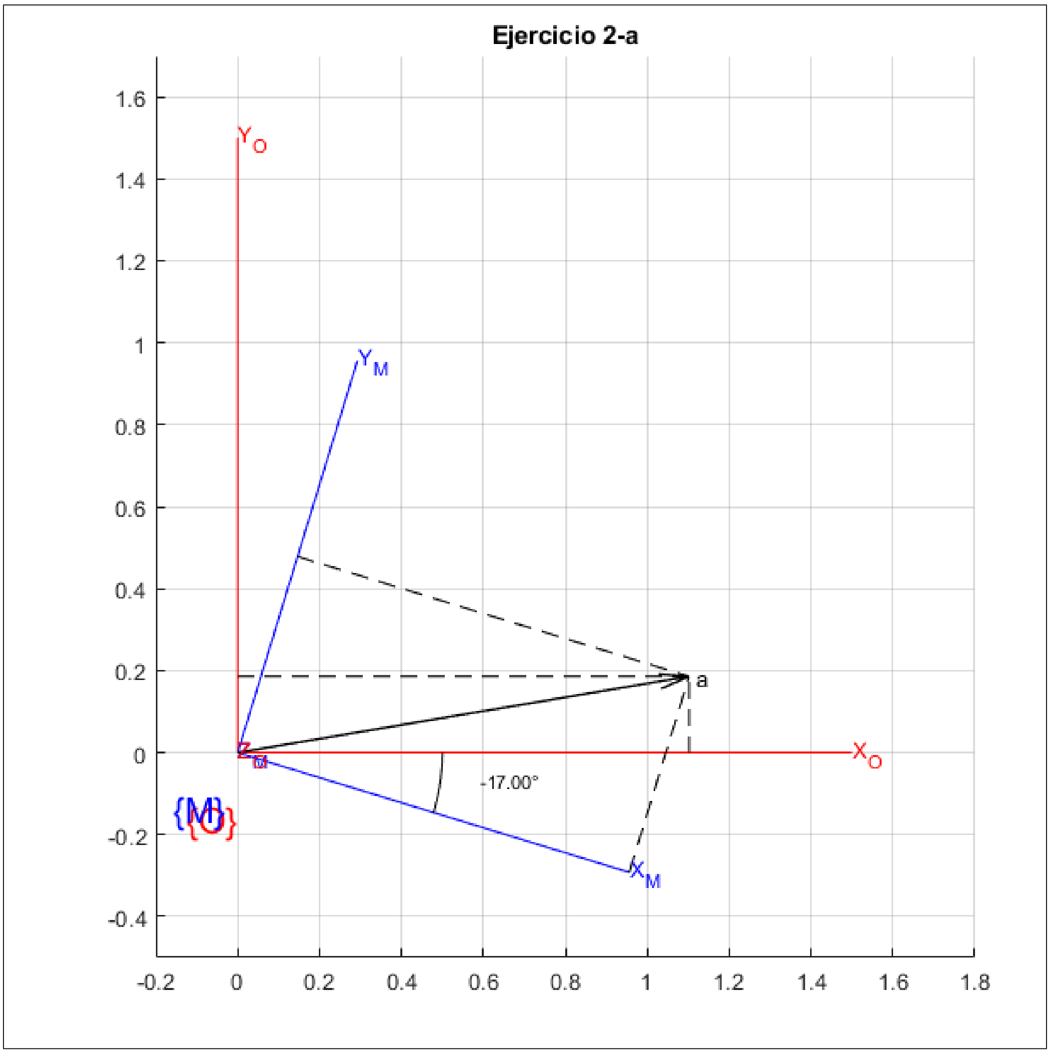

Figura 4: Sistemas M y O superpuestos - Vector con guías de proyección y cota de ángulo

2.2. Inciso b

$$^{M}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{M\}\,\text{rotó}\,35^{\circ}\,\text{en}\,X_O$$

$$^{O}b = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5736 & 0{,}8192 \end{bmatrix}$$

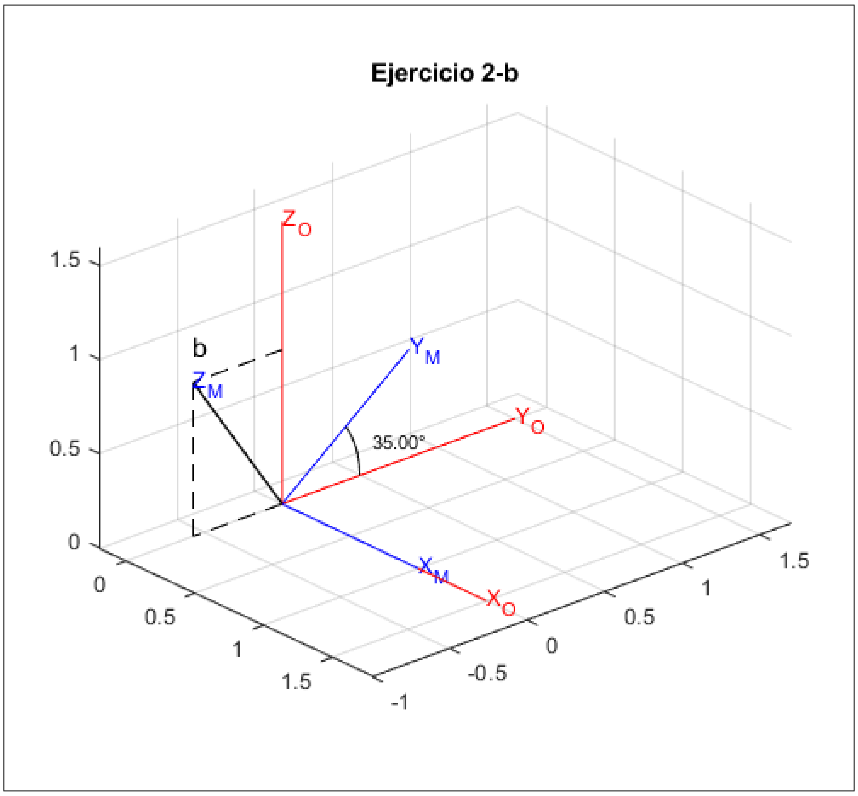

Figura 5: Sistemas M y O superpuestos - Vector con guías de proyección y cota de ángulo

2.3. Inciso c

$$^{M}b = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix} \rightarrow \{M\}\,\text{rotó}\,90^\circ\,\text{en}\,Y_O$$

$$^{O}b = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & -1 \end{bmatrix}$$

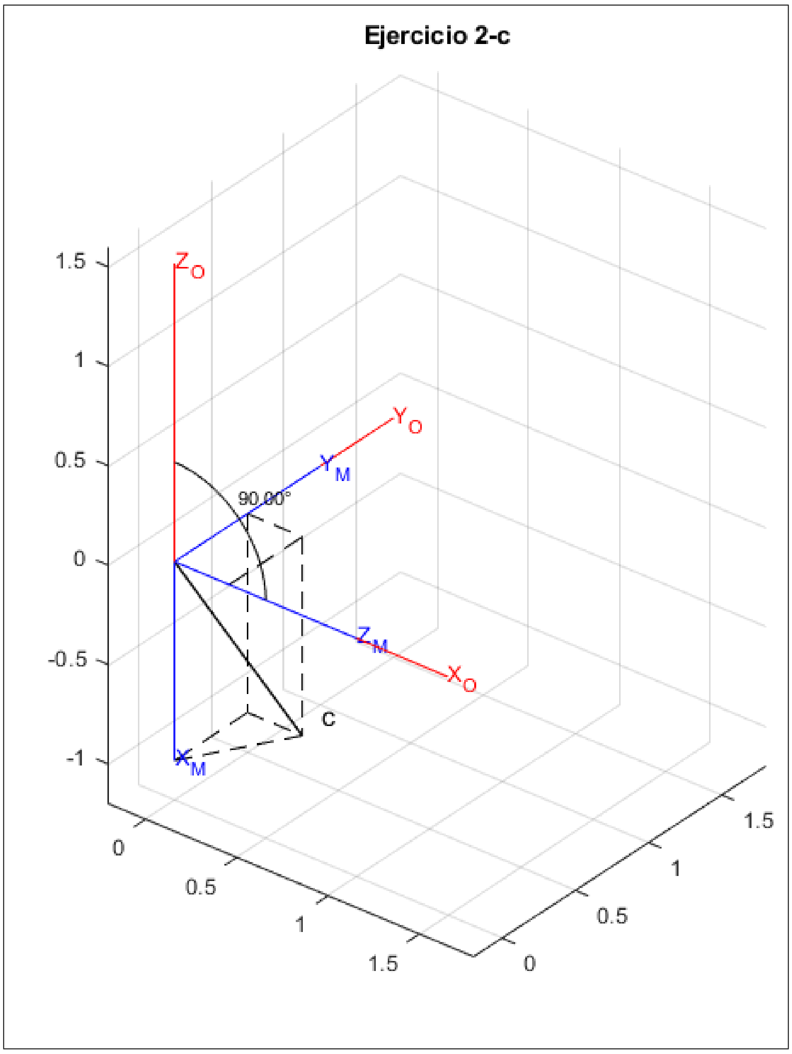

Figura 6: Sistemas M y O superpuestos - Vector con guías de proyección y cota de ángulo

3. Ejercicio 3

Escriba en forma general las matrices de transformación homogénea que representan los siguientes casos:

3.1. a. Traslación pura en el espacio

Traslación a un punto **p** de coordenadas [**x y z**] en el sistema **O**.

$$^{M}T_O = Tras(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2. b. Rotación en el eje X

Rotación de un ángulo α (roll) respecto del eje X.

$$^{M}T_{O} = Rot\left(\alpha, X\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3. c. Rotación en el eje Y

Rotación de un ángulo β (pitch) respecto del eje Y.

$$^{M}T_{O} = Rot\left(\beta, Y\right) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4. d. Rotación en el eje Z

Rotación de un ángulo γ (yaw) respecto del eje Z.

$$^{M}T_{O} = Rot\left(\gamma, Z\right) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Ejercicio 4 (obligatorio)

En la siguiente figura se observa el vector α respecto del sistema $\{\mathbf{M}\}$. El punto $\mathbf{M}$ respecto de $\{\mathbf{O}\}$ es $^{O}p_{M} = (7, 4)$.

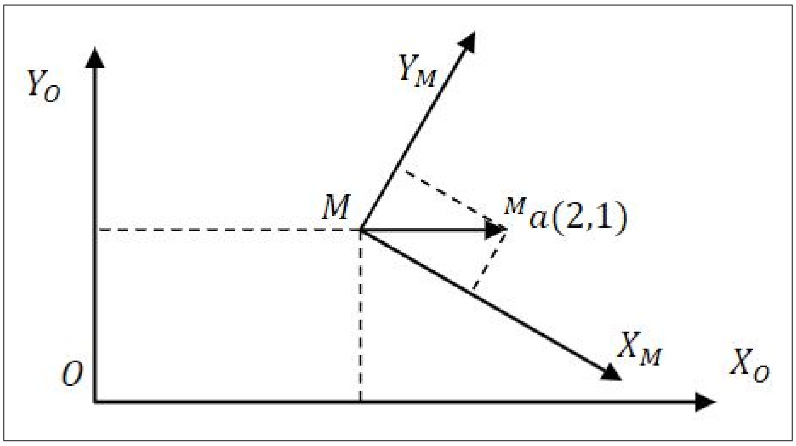

Figura 7: Gráfica del enunciado.

4.1. Inciso a.

Halle, por el método que elija, el ángulo de rotación del sistema M respecto de O.

Como el vector a es paralelo a $\mathbf{X_O}$, el ángulo que forma con $\mathbf{X_M}$ (sentido dextrógiro) es el ángulo que se debe rotar este eje para que sea paralelo a $\mathbf{X_O}$, es decir, el ángulo de la transformación inversa de rotación y el opuesto del ángulo que buscamos.

Ese ángulo se determina utilizando la función **atan2** de MATLAB tomando las coordenadas de a en el sistema $\{\mathbf{M}\}$ y tomándo el opuesto.

$$\gamma(yaw) = -26{,}56°$$

4.2. Inciso b.

Exprese la matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación del sistema M respecto de O.

Se usa **trotz** para obtener la matriz de rotación.

$$^{M}T_{O} = \begin{bmatrix} 0{,}8944 & 0{,}4472 & 7 \\ -0{,}4472 & 0{,}8944 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3. Inciso c.

Use la transformación hallada para representar el vector a respecto del sistema O. Verifique gráficamente el resultado.

Se obtiene segun eq. (1)

$$^{O}a = \begin{bmatrix} 9{,}24 \\ 4{,}00 \end{bmatrix}$$

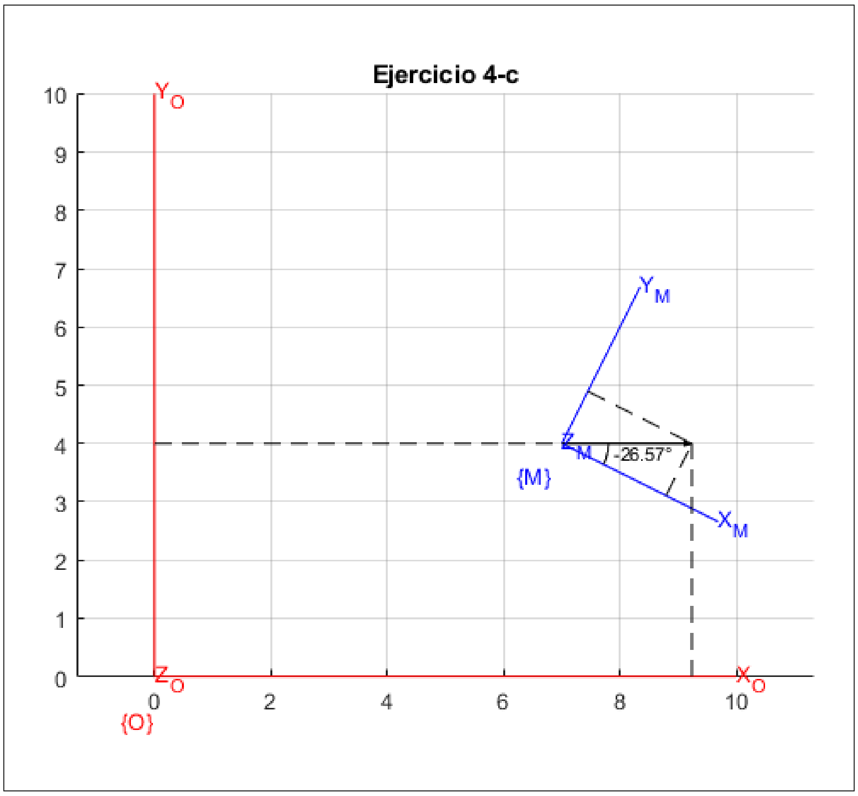

Figura 8: Verificación gráfica del ejercicio.

5. Ejercicio 5

Escriba la matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación del sistema M respecto de O para cada caso. Realice un gráfico donde se aprecie la diferencia.

5.1. Inciso a.

El sistema M giró 45° respecto del eje Y_O, luego se trasladó un vector $^{M}p = (0, 0, 1)$

Se usa **troty** con $\beta = 45°$ y se obtiene la matriz de trasnformación homogénea R. Luego se usa **transl** con ^{M}p y se obtiene la matriz de transformación homogénea T. Se obtiene $^{O}T_M = R_a * T_a$.

5.2. Inciso b.

El sistema M se trasladó un vector ^{O}p = (0, 0, 1), luego giró 45° respecto del eje Y_M.

Se usa **transl** con ^{O}p y se obtiene la matriz de transformación homogénea T. Luego Se usa **troty** con $\beta = 45°$ y se obtiene la matriz de trasnformación homogénea R. Se obtiene $^{O}T_M = T * R$.

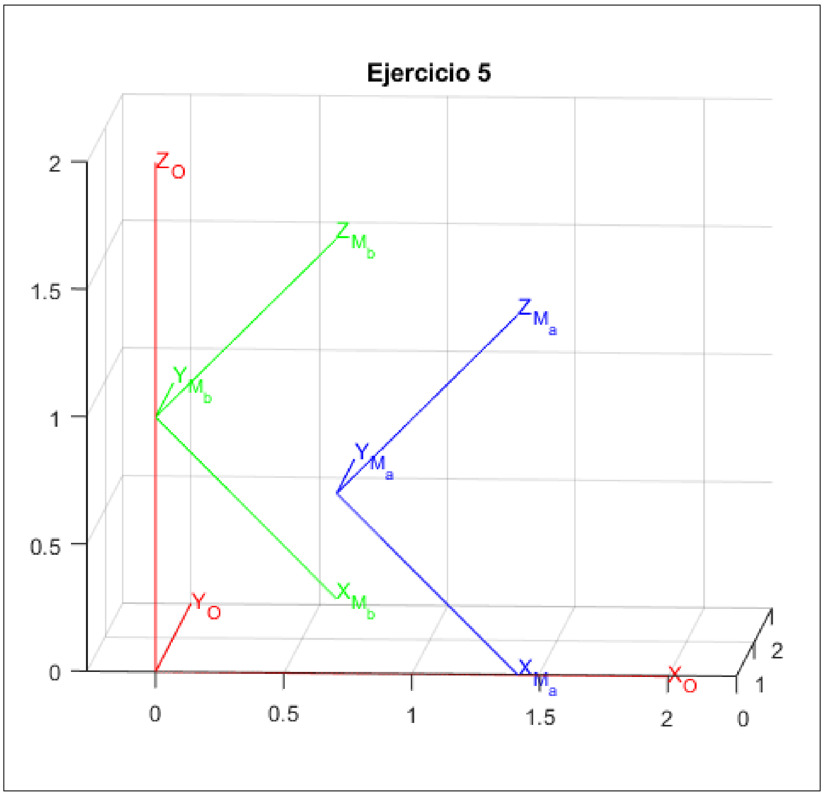

Figura 9: Diferencia entre los sistemas de referencia obtenidos.

6. Ejercicio 6

Exprese el vector ${}^{O}p = (0.5\ 0\ 1)$ respecto del sistema M de cada caso del ejercicio anterior.

De eq. (1) se puede obtener:

$$ {}^{M}a = {}^{O}T_{M}^{-1}\,{}^{O}a \tag{2}$$

$$ {}^{O}T_{M}^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T\,{}^{O}p_M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Sin embargo obtendremos la solución de los problemas utilizando el operador \de MATLAB.

6.1. a

$$ {}^{O}p = \begin{bmatrix} -0{,}3536 \\ 0 \\ 0{,}0607 \end{bmatrix} $$

6.2. b

$$^{O}p = \begin{bmatrix} 0{,}3536 \\ 0 \\ 0{,}3536 \end{bmatrix}$$

7. Ejercicio 7.

Analizar la siguiente transformación compuesta e indicar V o F. Considere que T representa la posición y orientación de un sistema de referencia M respecto de otro sistema de referencia O.

$$T = TrotX(\alpha)Ttrans(0,2,0)TrotY(\beta)$$

7.1. Inciso a

El sistema M sufrió una rotación α respecto de X_O, luego una traslación de 2 unidades sobre el eje Y_O, y finalmente una rotación β respecto de este mismo eje.

F. La traslación y la última rotación no son sobre los ejes del sistema O sino respecto del último sistema obtenido luego de la transformación previa.

7.2. Inciso b

El sistema M sufrió una rotación α respecto de X_M, luego una traslación de 2 unidades sobre el eje Y_M, y finalmente una rotación β respecto de este mismo eje

F. La primera rotación es respecto del eje X_O.

7.3. Inciso c

Un vector p expresado en O puede expresarse en M realizando el producto: $^{M}p = T.p$

F. La premultiplicación debería ser por la inversa T.

7.4. Inciso d

Un vector p expresado en M puede expresarse en O realizando el producto: $^{O}p = T.p$

V.

8. Ejercicio 8

En función de las siguientes matrices escritas en forma simbólica halle la expresión correcta para cada caso:

- ${}^{O}T_{M}$: matriz de trasformación homogénea del sistema M respecto de O.
- ${}^{M}T_{A}$: matriz de trasformación homogénea del sistema A respecto de M.
- ${}^{A}T_{B}$: matriz de trasformación homogénea del sistema B respecto de A.
- ${}^{O}T_{F}$: matriz de trasformación homogénea del sistema F respecto de O
- ${}^{F}T_{D}$: matriz de trasformación homogénea del sistema D respecto de F

8.1. B respecto de O

$${}^{O}T_{B} = {}^{O}T_{M}\,{}^{M}T_{A}\,{}^{A}T_{B}$$

8.2. F respecto de B

$${}^{B}T_{F} = {}^{O}T_{B}{}^{-1}\,{}^{O}T_{F}$$

8.3. B respecto de D

$${}^{D}T_{B} = {}^{F}T_{D}{}^{-1}\,{}^{B}T_{F}{}^{-1}$$