Informe de Trabajo Práctico N°6

Jacobiano

Robótica I

Ingeniería en Mecatrónica
Facultad de Ingeniería - UNCUYO

Alumno: Juan Manuel BORQUEZ PEREZ
Legajo: 13567

1. Ejercicio 6

$$A = d_5\, C\,(2\,q_3 + q_4) - d_5\, C_4 - a_3 + a_3\, C\,(2\,q_3)$$
$$B = d_5\, S_4 - 2\,a_2\, S_3 - a_3\, S\,(2\,q_3) - d_5\, S\,(2\,q_3 + q_4)$$
$$A = C\,(2\,q_3) - C_a\, C_4 + C_a\, C\,(2\,q_3 + q_4) - 1$$
$$B = S_g\, S_4 - 2\,S_3 - S_g\, S\,(2\,q_3 + q_4) - S_b\, S\,(2\,q_3)$$

Vamos a descomponer paso a paso el problema que planteaste:

Expresión Original:

$$A = \cos(2q_3) - C_a\cos(q_4) + C_a\cos(2q_3 + q_4) - 1$$

Paso 1: Expansión de $\cos(2q_3 + q_4)$

Usamos la identidad de suma de ángulos:

$$\cos(2q_3 + q_4) = \cos(2q_3)\cos(q_4) - \sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Entonces, la ecuación queda:

$$A = \cos(2q_3) - C_a\cos(q_4) + C_a(\cos(2q_3)\cos(q_4) - \sin(2q_3)\sin(q_4)) - 1$$

Paso 2: Agrupación de términos con $\cos(q_4)$

Reagrupamos los términos que tienen $\cos(q_4)$:

$$A = (\cos(2q_3) - 1) + C_a(\cos(2q_3)\cos(q_4) - \sin(2q_3)\sin(q_4)) - C_a\cos(q_4)$$

Agrupamos $C_a\cos(q_4)$:

$$A = (\cos(2q_3) - 1) + C_a\cos(q_4)(\cos(2q_3) - 1) - C_a\sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Paso 3: Reemplazo de $1 - \cos(2q_3)$ por $2\sin^2(q_3)$

Aplicamos la identidad trigonométrica:

$$1 - \cos(2q_3) = 2\sin^2(q_3)$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$A = -2\sin^2(q_3) + C_a\cos(q_4)(-2\sin^2(q_3)) - C_a\sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Resultado Final:

$$A = -2\sin^2(q_3) - 2C_a\cos(q_4)\sin^2(q_3) - C_a\sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Este sería el resultado final con los términos correctamente agrupados y el reemplazo realizado.

Vamos a seguir los pasos que indicaste, comenzando desde la expresión final que obtuvimos anteriormente.

Expresión Original:

$$A = -2\sin^2(q_3) - 2C_a\cos(q_4)\sin^2(q_3) - C_a\sin(2q_3)\sin(q_4)$$

Paso 1: Expansión de $\sin(2q_3)$
Usamos la identidad de doble ángulo para el seno:

$$\sin(2q_3) = 2\sin(q_3)\cos(q_3)$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$A = -2\sin^2(q_3) - 2C_a\cos(q_4)\sin^2(q_3) - C_a(2\sin(q_3)\cos(q_3))\sin(q_4)$$

Paso 2: Dividir toda la expresión por $\sin(q_3)$
Dividimos cada término entre $\sin(q_3)$:

$$\frac{A}{\sin(q_3)} = -2\sin(q_3) - 2C_a\cos(q_4)\sin(q_3) - 2C_a\cos(q_3)\sin(q_4)$$

Paso 3: Factorizar $\sin(q_3)$ y $\cos(q_3)$
Reagrupamos para factorizar:
- Agrupamos términos con $\sin(q_3)$:

$$\frac{A}{\sin(q_3)} = \sin(q_3)(-2 - 2C_a\cos(q_4)) - 2C_a\cos(q_3)\sin(q_4)$$

- Ahora factorizamos $\sin(q_3)$ y $\cos(q_3)$ por separado:

$$\frac{A}{\sin(q_3)} = \sin(q_3)(-2 - 2C_a\cos(q_4)) + \cos(q_3)(-2C_a\sin(q_4))$$

Resultado Final:
La expresión final es:

$$A = S_3(1 + C_aC_4) + C_3(C_aS_4)$$

Este sería el resultado con los términos factorizados en función de $\sin(q_3)$ y $\cos(q_3)$, dividiendo la expresión por $\sin(q_3)$ como solicitaste. Eso tiene que ser cero, y se puede expresar como;

$$u = \begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 + 2C_aC_4 \\ C_aS_4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

La expresión se reduce a:

$$u \cdot v = 0$$

Pero **v** depende solamente de q_4. Para cada valor del mismo se pueden encontrar el vector **u** que indica la dirección normal.

Para B por otro lado. Vamos a desarrollar los pasos que mencionaste para la expresión B.

Expresión original:

$$B = S_g \sin(q_4) - 2\sin(q_3) - S_g \sin(2q_3 + q_4) - S_b \sin(2q_3)$$

Paso 1: Expandir $\sin(2q_3 + q_4)$
Usamos la identidad de suma de ángulos para el seno:

$$\sin(2q_3 + q_4) = \sin(2q_3)\cos(q_4) + \cos(2q_3)\sin(q_4)$$

Sustituyendo en la expresión:

$$B = S_g \sin(q_4) - 2\sin(q_3) - S_g(\sin(2q_3)\cos(q_4) + \cos(2q_3)\sin(q_4)) - S_b \sin(2q_3)$$

Paso 2: Agrupar los términos con $S_g \sin(q_4)$
Reagrupamos los términos que tienen $\sin(q_4)$:

$$B = S_g \sin(q_4) - S_g \cos(2q_3)\sin(q_4) - 2\sin(q_3) - S_g \sin(2q_3)\cos(q_4) - S_b \sin(2q_3)$$

Factorizamos $S_g \sin(q_4)$:

$$B = S_g \sin(q_4)(1 - \cos(2q_3)) - 2\sin(q_3) - S_g \sin(2q_3)\cos(q_4) - S_b \sin(2q_3)$$

Paso 3: Agrupar los términos con $\sin(2q_3)$
Reagrupamos los términos que contienen $\sin(2q_3)$:

$$B = S_g \sin(q_4)(1 - \cos(2q_3)) - 2\sin(q_3) - (\sin(2q_3))(S_g \cos(q_4) + S_b)$$

Paso 4: Reemplazar $1 - \cos(2q_3)$ por $2\sin^2(q_3)$
Usamos la identidad trigonométrica $1 - \cos(2q_3) = 2\sin^2(q_3)$ en el primer término:

$$B = S_g \sin(q_4)(2\sin^2(q_3)) - 2\sin(q_3) - (\sin(2q_3))(S_g \cos(q_4) + S_b)$$

Paso 5: Expandir $\sin(2q_3)$
Usamos la identidad $\sin(2q_3) = 2\sin(q_3)\cos(q_3)$:

$$B = S_g \sin(q_4)(2\sin^2(q_3)) - 2\sin(q_3) - 2\sin(q_3)\cos(q_3)(S_g \cos(q_4) + S_b)$$

Paso 6: Dividir toda la expresión por $\sin(q_3)$
Dividimos cada término entre $\sin(q_3)$:

$$\frac{B}{\sin(q_3)} = S_g \sin(q_4)(2\sin(q_3)) - 2 - 2\cos(q_3)(S_g \cos(q_4) + S_b)$$

Resultado final:
La expresión final es:

$$B = S_g S_3 S_4 - 1 - C_3(S_g C_4 + S_b)$$

Ahora:

$$w = \begin{bmatrix} -S_g C_4 - S_b \\ S_g S_4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

La expresión se reduce a:

$$u \cdot w = 1$$

Esto es $\parallel u \parallel \parallel w \parallel \cos(\zeta) = 1$ Pero $\parallel u \parallel = 1$. Luego

$$\cos(\zeta) = \frac{1}{\parallel w \parallel}$$

Eso implica que debe ser:

$$\parallel (w) \parallel > 1$$

$$\|w\|^2 = S_g^2 + 2S_gS_bC_4 + S_b^2 > 1$$

Esta es la expresión del cuadrado del módulo del vector w. Para los valores de q4 que se cumple a desigualdad anterior se obtienen el vector v y el vector w que necesariamente deben estar alineados para que determinen un único valor de u y por lo tanto de q_3.

Eso último todavía hay que verificarlo.

Otra forma de hacerlo mas rápido es: Dado que los vectores w y v son:

$$w = \begin{bmatrix} -S_gC_4 - S_b \\ S_gS_4 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 + 2C_aC_4 \\ C_aS_4 \end{bmatrix}$$

Queremos formar la matriz del sistema de ecuaciones T usando estos vectores como filas:

$$\begin{bmatrix} C_aS_4 & 1 + C_aC_4 \\ -S_gC_4 - S_b & S_gS_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$