

Informe de Trabajo Práctico N°2

Herramientas Matemáticas

Robótica I

Ingeniería en Mecatrónica
Facultad de Ingeniería - UNCUIYO

Alumno: Juan Manuel BORQUEZ PEREZ
Legajo: 13567



UNCUIYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD
DE INGENIERÍA**

1. Ejercicio 1.

Grafique el sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$ para cada una de las siguientes matrices de rotación:

Se utiliza la función **trplot** del **Robotic Toolbox** para obtener las gráficas.

Se utiliza la función **tr2eul** para obtener los **ángulos de Euler** (roll, pitch, yaw).

1.1. Inciso a

$${}^O Rot_M = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,866 \\ 0,866 & 0,500 \end{bmatrix}$$

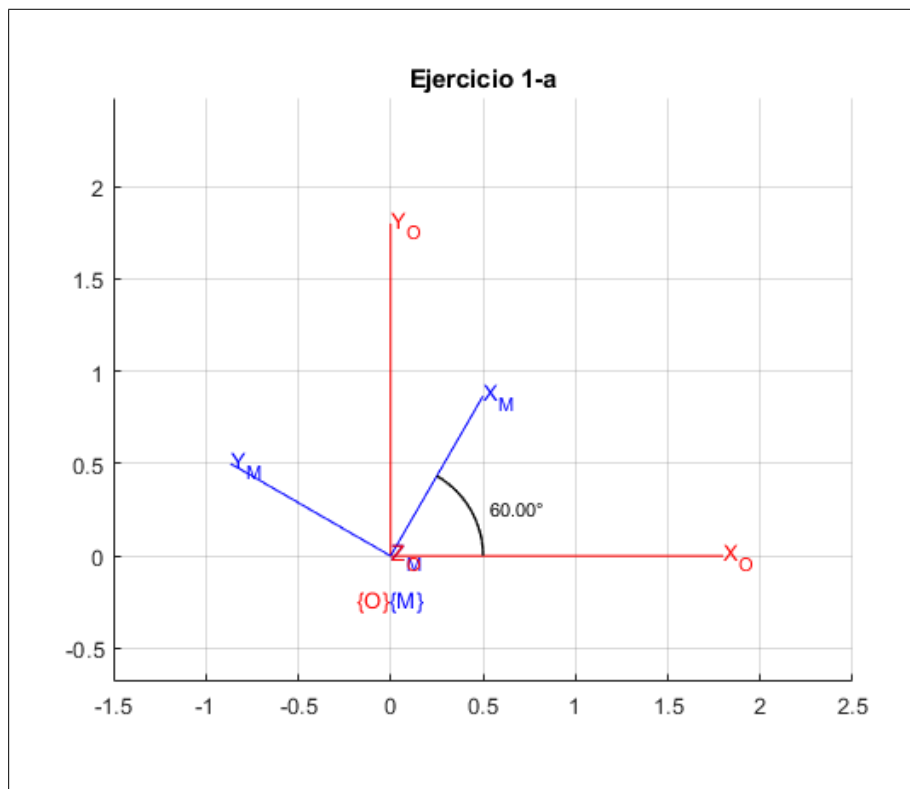


Figura 1: Sistema O y Sistema M superpuestos con indicación de ángulo de rotación.

1.2. Inciso b

$${}^O Rot_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para este caso los ángulos de rotación pueden ser:

$$\begin{aligned}roll &= 0^\circ \\pitch &= 90^\circ \\yaw &= -90^\circ\end{aligned}$$

Otra posibilidad es:

$$\begin{aligned}roll &= -90^\circ \\pitch &= 90^\circ \\yaw &= 0^\circ\end{aligned}$$

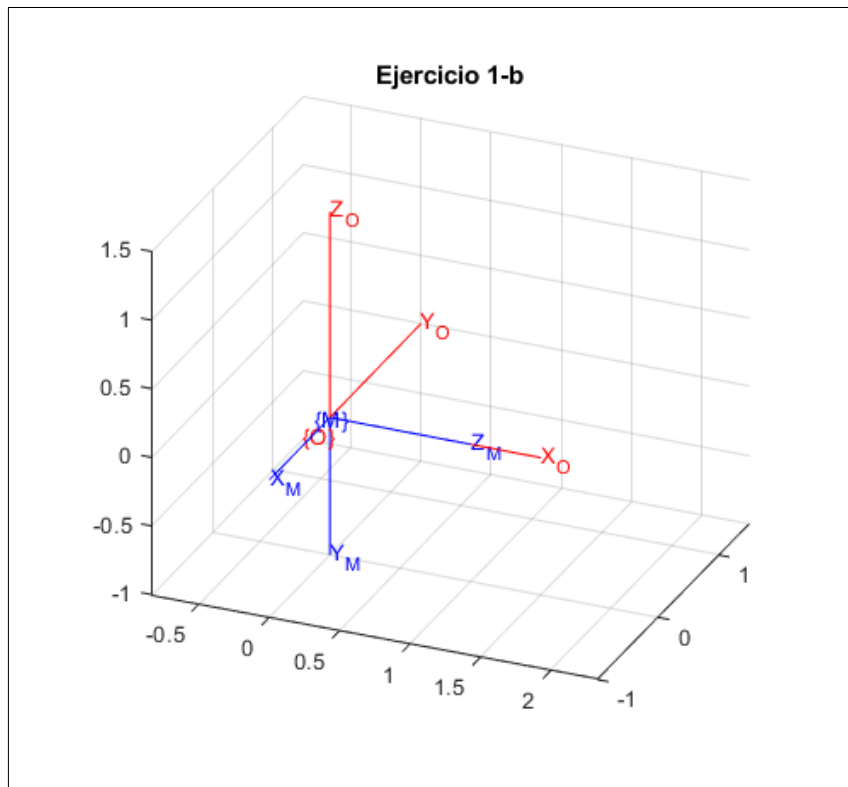


Figura 2: Sistema O y Sistema M superpuestos

1.3. Inciso c

$${}^M Rot_O = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,750 & -0,433 \\ 0,866 & 0,433 & 0,250 \\ 0 & -0,500 & 0,866 \end{bmatrix}$$

La matriz ${}^O Rot_M$, que es la inversa de la matriz ${}^M Rot_O$ por corresponder a la transformación inversa, se obtiene simplemente transponiendo la matriz ${}^M Rot_O$. Esto dado que las matrices de rotación y por lo tanto las matrices de transformación homogénea correspondientes son ortogonales (en particular ortonormales).

$${}^O Rot_M = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,866 & 0 \\ -0,750 & 0,433 & -0,500 \\ -0,433 & 0,250 & 0,866 \end{bmatrix}$$

Para este caso los ángulos de rotación son:

$$\begin{aligned} roll &= -90^\circ \\ pitch &= 30^\circ \\ yaw &= 30^\circ \end{aligned}$$

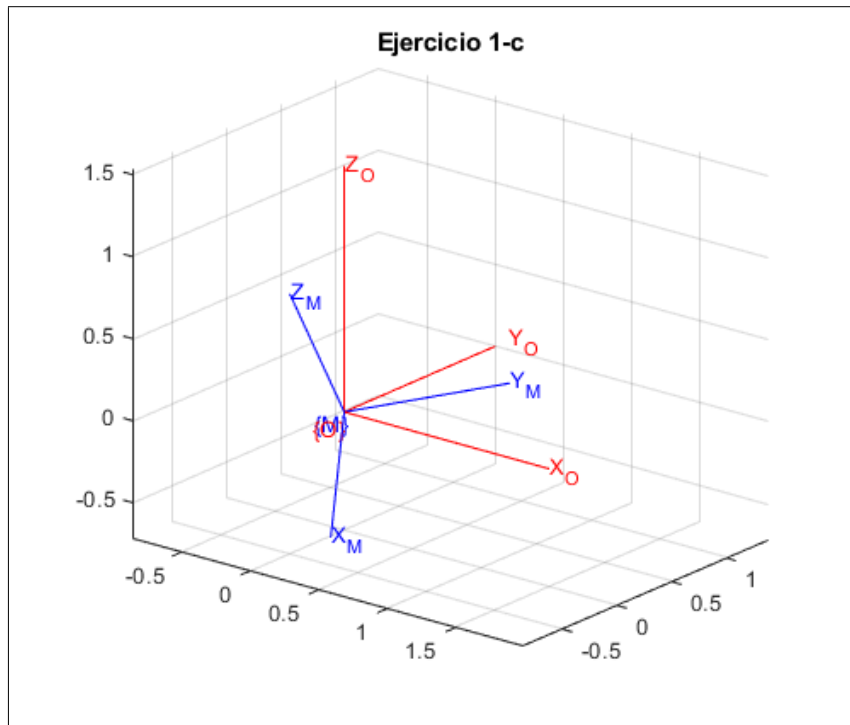


Figura 3: Sistema O y Sistema M superpuestos

2. Ejercicio 2 (obligatorio).

Expresé cada uno de los siguientes vectores en el sistema de referencia $\{O\}$ sabiendo que sus coordenadas son respecto al sistema $\{M\}$, el cual sufrió la rotación indicada. Realice un gráfico donde se aprecie el vector y sus coordenadas en ambos sistemas.

Se utilizan las funciones **trot2**, **trotx**, **troty**, **trotz** para obtener las matrices de transformación homogénea ${}^O T_M$.

$${}^O a = {}^O T_M {}^M a \quad (1)$$

2.1. Inciso a

$${}^M a = [1 \ 0,5] \rightarrow \{M\} \text{ rotó } -17^\circ \text{ en } Z_O$$

$${}^O a = [1,1025 \quad 0,1858]$$

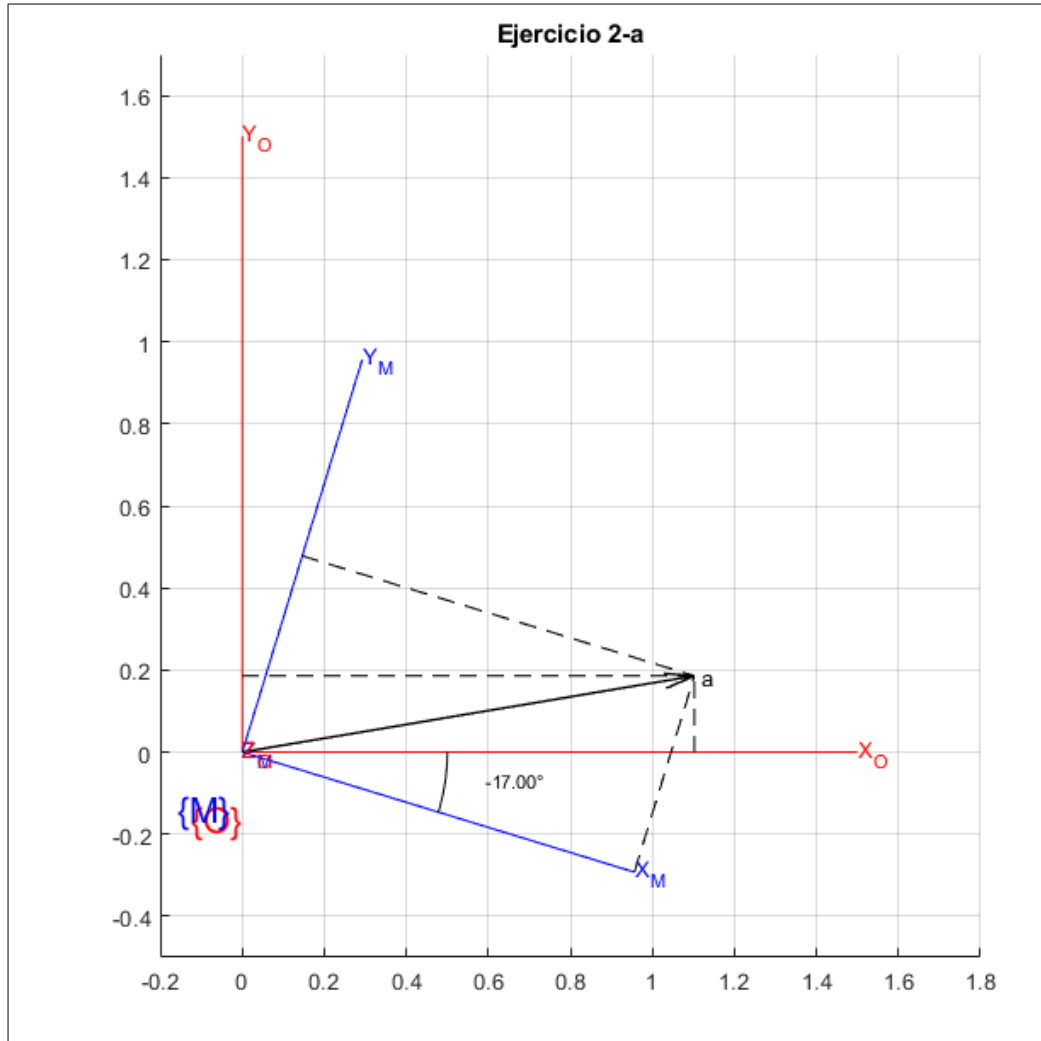


Figura 4: Sistemas M y O superpuestos - Vector con guías de proyección y cota de ángulo

2.2. Inciso b

$${}^M b = [0 \quad 0 \quad 1] \rightarrow \{M\} \text{ rotó } 35^\circ \text{ en } X_O$$

$${}^O b = [0 \quad -0,5736 \quad 0,8192]$$

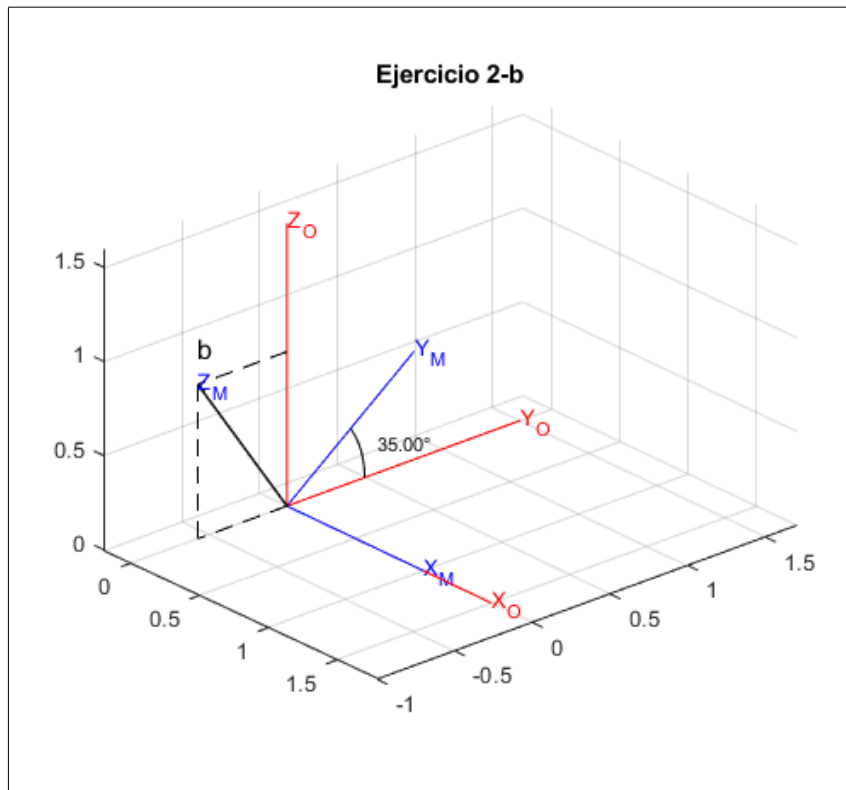


Figura 5: Sistemas M y O superpuestos - Vector con guías de proyección y cota de ángulo

2.3. Inciso c

$${}^M c = [1 \quad 0,5 \quad 0,3] \rightarrow \{M\} \text{ rotó } 90^\circ \text{ en } Y_O$$

$${}^O c = [0,3 \quad 0,5 \quad -1]$$

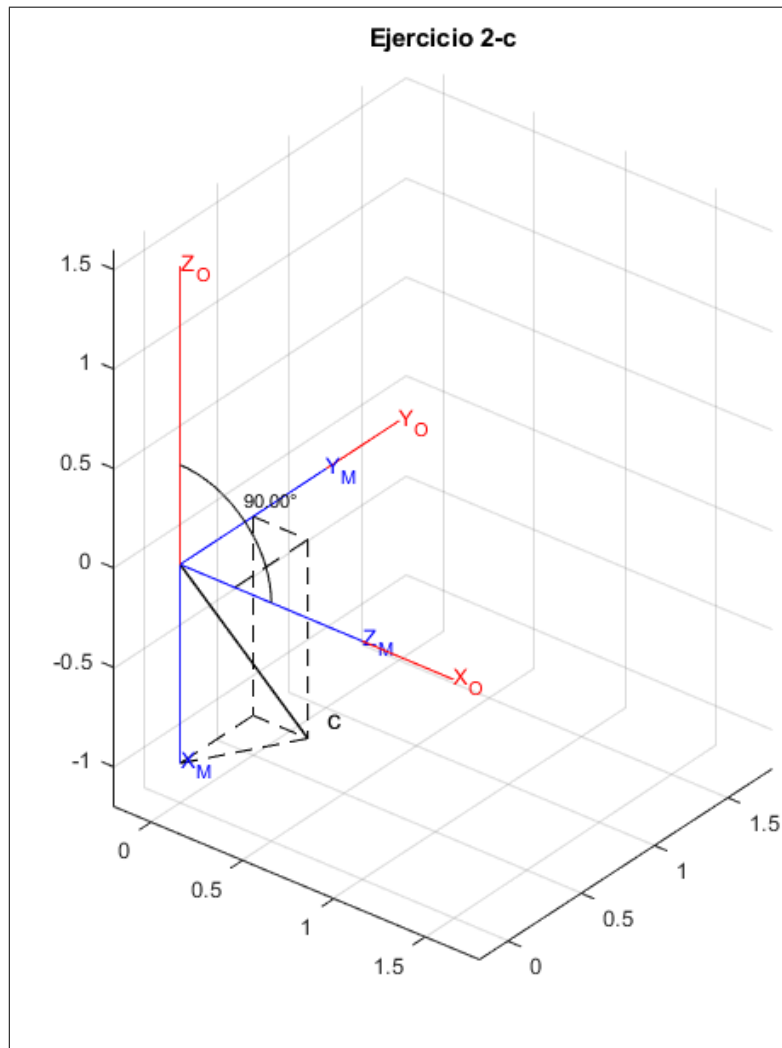


Figura 6: Sistemas M y O superpuestos - Vector con guías de proyección y cota de ángulo

3. Ejercicio 3

Escriba en forma general las matrices de transformación homogénea que representan los siguientes casos:

3.1. a. Traslación pura en el espacio

Traslación a un punto \mathbf{p} de coordenadas $[x \ y \ z]$ en el sistema $\{\mathbf{O}\}$.

$${}^O T_M = \text{Tras}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2. b. Rotación en el eje X

Rotación de un ángulo α (roll) respecto del eje X.

$${}^O T_M = Rot(\alpha, X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3. c. Rotación en el eje Y

Rotación de un ángulo β (pitch) respecto del eje Y.

$${}^O T_M = Rot(\beta, Y) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4. d. Rotación en el eje Z

Rotación de un ángulo γ (yaw) respecto del eje Z.

$${}^O T_M = Rot(\gamma, Z) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Ejercicio 4 (obligatorio)

En la siguiente figura se observa el vector α respecto del sistema $\{M\}$. El punto M respecto de $\{O\}$ es ${}^O p_M = (7, 4)$.

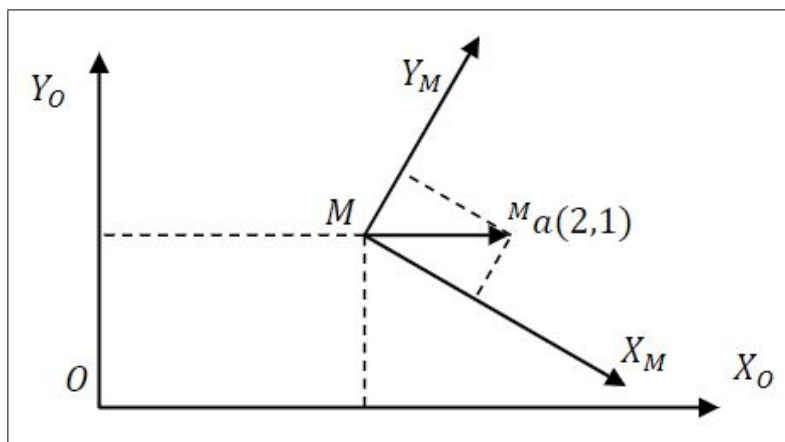


Figura 7: Gráfica del enunciado.

4.1. Inciso a.

Halle, por el método que elija, el ángulo de rotación del sistema M respecto de O.

Como el vector a es paralelo a \mathbf{X}_O , el ángulo que forma con \mathbf{X}_M (sentido dextrógiro) es el ángulo que se debe rotar este eje para que sea paralelo a \mathbf{X}_O , es decir, el ángulo de la transformación inversa de rotación y el opuesto del ángulo que buscamos.

Ese ángulo se determina utilizando la función **atan2** de MATLAB tomando las coordenadas de a en el sistema $\{M\}$ y luego obteniendo el ángulo opuesto.

$$\gamma(yaw) = -26,56^\circ$$

4.2. Inciso b.

Expresé la matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$.

Se usa **trotz** para obtener la matriz de rotación.

$${}^O T_M = \begin{bmatrix} 0,8944 & 0,4472 & 7 \\ -0,4472 & 0,8944 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3. Inciso c.

Use la transformación hallada para representar el vector a respecto del sistema $\{O\}$. Verifique gráficamente el resultado.

Se obtiene según eq. (1)

$${}^O a = \begin{bmatrix} 9,24 \\ 4,00 \end{bmatrix}$$

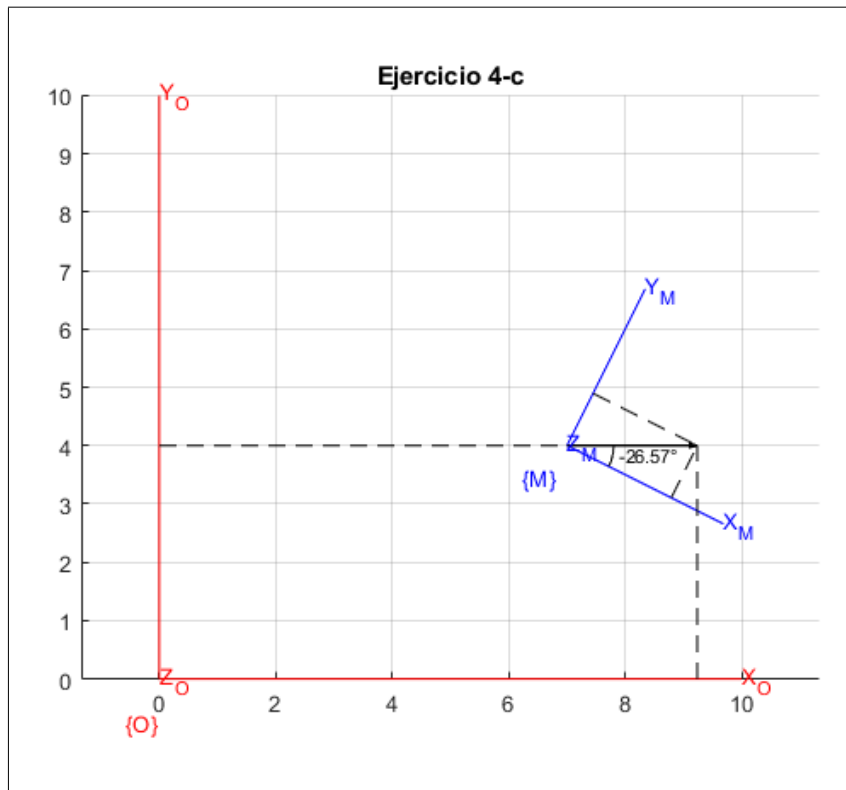


Figura 8: Verificación gráfica del ejercicio.

5. Ejercicio 5

Escriba la matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$ para cada caso. Realice un gráfico donde se aprecie la diferencia.

5.1. Inciso a.

El sistema M giró 45° respecto del eje Y_O , luego se trasladó un vector ${}^M p = (0, 0, 1)$

Se usa **troty** con $\beta = 45^\circ$ y se obtiene la matriz de transformación homogénea R. Luego se usa **transl** con ${}^M p$ y se obtiene la matriz de transformación homogénea T. Se obtiene ${}^O T_M = R * T$.

5.2. Inciso b.

El sistema M se trasladó un vector ${}^O p = (0, 0, 1)$, luego giró 45° respecto del eje Y_M .

Se usa **transl** con ${}^O p$ y se obtiene la matriz de transformación homogénea T. Luego se usa **troty** con $\beta = 45^\circ$ y se obtiene la matriz de transformación homogénea R. Se obtiene ${}^O T_M = T * R$.

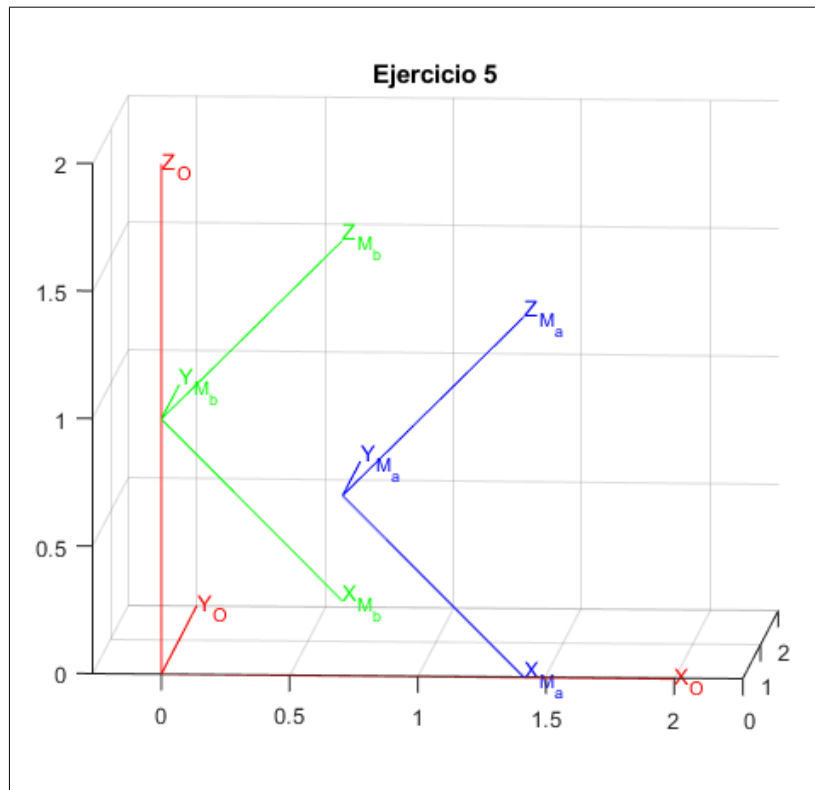


Figura 9: Diferencia entre los sistemas de referencia obtenidos.

6. Ejercicio 6

Expresar el vector ${}^O p = (0.5, 0, 1)$ respecto del sistema $\{M\}$ de cada caso del ejercicio anterior.

De eq. (1) se puede obtener:

$${}^M a = {}^O T_M^{-1} {}^O a \quad (2)$$

$${}^O T_M^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T {}^O p_M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Sin embargo obtendremos la solución de los problemas utilizando el operador "\" de MATLAB.

6.1. Inciso a

$${}^O p = \begin{bmatrix} -0,3536 \\ 0 \\ 0,0607 \end{bmatrix}$$

6.2. Inciso b

$${}^O p = \begin{bmatrix} 0,3536 \\ 0 \\ 0,3536 \end{bmatrix}$$

7. Ejercicio 7.

Analizar la siguiente transformación compuesta e indicar V o F. Considere que T representa la posición y orientación de un sistema de referencia $\{M\}$ respecto de otro sistema de referencia $\{O\}$.

$$T = TrotX(\alpha)Ttrans(0, 2, 0)TrotY(\beta)$$

7.1. Inciso a

El sistema $\{M\}$ sufrió una rotación α respecto de X_O , luego una traslación de 2 unidades sobre el eje Y_O , y finalmente una rotación β respecto de este mismo eje.

V. Si consideramos que el sistema obtenido en las transformaciones intermedias conserva el nombre $\{O\}$ y solamente se denomina $\{M\}$ al sistema obtenido luego de todas las transformaciones realizadas.

7.2. Inciso b

El sistema M sufrió una rotación α respecto de X_M , luego una traslación de 2 unidades sobre el eje Y_M , y finalmente una rotación β respecto de este mismo eje

F. Las transformaciones deberían ir con el sub-índice O .

7.3. Inciso c

Un vector p expresado en $\{O\}$ puede expresarse en $\{M\}$ realizando el producto: ${}^M p = T.p$

F. La premultiplicación debería ser por la inversa T .

7.4. Inciso d

Un vector p expresado en $\{M\}$ puede expresarse en $\{O\}$ realizando el producto: ${}^O p = T.p$

V.

8. Ejercicio 8

En función de las siguientes matrices escritas en forma simbólica halle la expresión correcta para cada caso:

- ${}^O T_M$: matriz de transformación homogénea del sistema {M} respecto de {O}.
- ${}^M T_A$: matriz de transformación homogénea del sistema {A} respecto de {M}.
- ${}^A T_B$: matriz de transformación homogénea del sistema {B} respecto de {A}.
- ${}^O T_F$: matriz de transformación homogénea del sistema {F} respecto de {O}.
- ${}^F T_D$: matriz de transformación homogénea del sistema {D} respecto de {F}.

8.1. {B} respecto de {O}

$${}^O T_B = {}^O T_M {}^M T_A {}^A T_B$$

8.2. {F} respecto de {B}

$${}^B T_F = {}^O T_B^{-1} {}^O T_F$$

8.3. {B} respecto de {D}

$${}^D T_B = {}^F T_D^{-1} {}^B T_F^{-1}$$