Sección: Fundamentos Procesos Estocasticos

Curso: Procesos Estocasticos

Profesor: Fabian Velasquez Clavijo

Universidad de los Llanos

2024-1

Proceso estocastico (Proceso Aleatorio)

Es un conjunto de variables aleatorias que tienen representación en el dominio del tiempo como funciónes llamadas trayectorias o funciones muestra.

$X(t,\zeta) = X(t) = X_t$ variadas notaciones del proceso estocastico

$X(t,\zeta) = A(\zeta)\cos(2t)$ $\quad A(\zeta) \backsim U(a,b) \quad \rightarrow$ forma extensa

$X(t) = A\cos(2t)$ $\quad A \backsim U(a,b) \quad \rightarrow$ forma abreviada

$A \rightarrow$ es la amplitud que es variable aleatori y presenta comportamiento aleatorio

$\cos(2t) \rightarrow$ son funciones cosenos y presentan el comportamiento determinista.

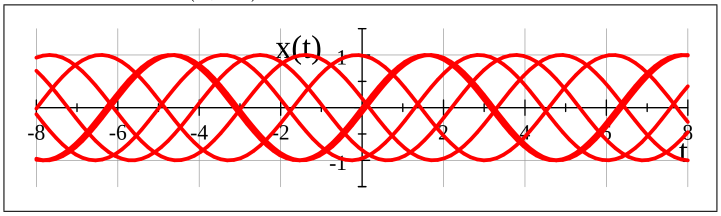
$X(t,\zeta_0) = X(t)$ Si se fija la parte aleatoria el proceso estocastico se comporta como función en el tiempo.

$X(t_0,\zeta) = X$ Si se fija el tiempo entonces el proceso estocastico se comporta como variable aleatoria.

$X(t_0,\zeta_0)$ Si se fija el tiempo y la variable aleatoria entonces el proceso estocastico se comporta como un punto.

$X(t,\zeta) = X_t$ Si se deja variable el tiempo y la variable aleatoria entonces es un proceso estocastico.

Ejemplo 1. Graficar las trayectorias del proceso estocastico $x(t) = \sin(t - \Phi)$ con $\Phi \backsim U(0, 2\pi)$



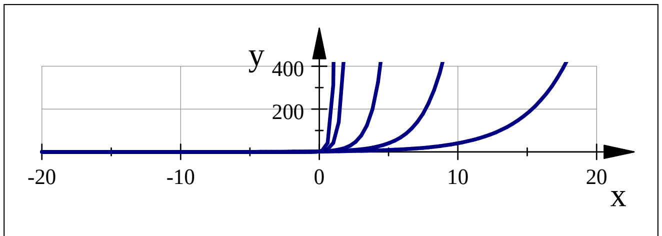
Tarea. Graficar 100 trayectorias (mismo color) del proceso estocastico $X(t) = 2e^{\Phi t}$ con $\Phi \backsim Exp(2)$ y ademas grafica su valor medio (con otro color).

solución:

planteamiento

$\Phi = \text{rand}(\exp(2))$

$t = [-30 : 20]$
for i=1 to 100



$E(X(t)) = E\left(2e^{\Phi t}\right) = \int_0^{\infty} 2e^{\Phi t} 2e^{-2\Phi} d\Phi$

Clasificación de Procesos Estocasticos

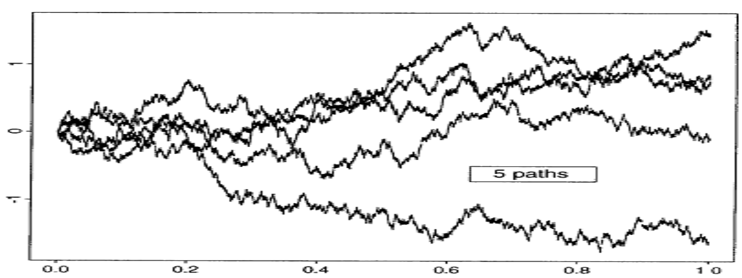
tiempo\X	Continuo	Discreto
continuo (t)	*Proceso estocastico continuo*	*Proceso estocastico discreto*
discreto (n)	*Secuencia aleatoria continua*	*Secuencia aleatoria discreta*

Proceso estocastico determinista: Es un proceso estocastico en el que sus trayectorias se representan con funciones deterministas.

$x(t) = ae^{\Phi t}$ con $\Phi \backsim Exp(2)$

Proceso estocastico no determinista: Es un proceso estocastico en el que sus trayectorias no se pueden representan con funciones deterministas.

$x(t) = B(t)$ movimiento browniano



proceso estocastico no determinista

Proceso Estocastico Estacionario: Un proceso estocastico es estacionario si sus caracteristicas estadisticas permanecen invariantes ante variaciones en el tiempo.

Caracteristicas Estadisticas de los Procesos Estocasticos
Valor Esperado

$E(X) = \mu_X = \overline{X} \quad \rightarrow$ notaciòn

$E\left(X_t\right)=\int_{-\infty}^{\infty} xf\left(x;t\right)dx$ $\qquad$ $E\left(X_t\right)=\sum xf\left(x;t\right)$

Potencia.

$P_X\left(t\right)=P_X=E\left(X^2\left(t\right)\right)$

Varianza.

$\sigma_X^2=Var\left(X\left(t\right)\right)$ $\rightarrow$ notaciòn
$Var\left(X\left(t\right)\right)=E\left(X^2\left(t\right)\right)-E\left(X\left(t\right)\right)^2=E\left(\left(X\left(t\right)-\overline{X\left(t\right)}\right)^2\right)$
$\sigma_X^2=P_X-\overline{X}^2$

Función de Autocorrelación

$R_{XX}\left(t_1,t_2\right)=E\left(X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right)$
$t_1=t$ $\qquad$ $t_2=t+\tau$

$R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=E\left(X\left(t\right)X\left(t+\tau\right)\right)$

Función de Correlación Cruzada.

$R_{XY}\left(t,t+\tau\right)=E\left(X\left(t\right)Y\left(t+\tau\right)\right)$

Función de Autocovarianza

$C_{XX}\left(t,t+\tau\right)=E\left[\left(X\left(t\right)-\overline{X\left(t\right)}\right)\left(X\left(t+\tau\right)-\overline{X\left(t+\tau\right)}\right)\right]$
$C_{XX}\left(t,t+\tau\right)=R_{XX}\left(t,t+\tau\right)-\overline{X\left(t\right)}.\overline{X\left(t+\tau\right)}$

Covarianza Cruzada

$C_{XY}\left(t,t+\tau\right)=E\left[\left(X\left(t\right)-\overline{X\left(t\right)}\right)\left(Y\left(t+\tau\right)-\overline{Y\left(t+\tau\right)}\right)\right]$
$C_{XY}\left(t,t+\tau\right)=R_{XY}\left(t,t+\tau\right)-\overline{X\left(t\right)}.\overline{Y\left(t+\tau\right)}$

Coeficiente de correlación

$\rho=\frac{C_{XX}(t,t+\tau)}{\sqrt[2]{Var(X(t))}\sqrt[2]{Var(X(t+\tau))}}$ $\quad$, $-1\leq\rho\leq 1$

Ejemplo1. Determine las caracteristicas estadisticas: $\overline{X}$, P_X, σ_X^2, $R_{XX}\left(t,t+\tau\right)$, $C_{XX}\left(t,t+\tau\right)$ y ρ del proceso estocastico $X\left(t\right)=2t-\Phi t^2$
con $\Phi\backsim U\left(0,1\right)$
solución: $\overline{X}=E\left(2t-\Phi t^2\right)=E\left(2t\right)-E\left(\Phi t^2\right)$
$\overline{X}=2t-t^2E\left(\Phi\right)$
$\overline{X}=2t-t^2\left(\frac{0+1}{2}\right)$

$$\overline{X} = 2t - \tfrac{t^2}{2}$$
$$P_X = E\left(\left(2t - \Phi t^2\right)^2\right) = E\left(4t^2 - 4t^3\Phi + \Phi^2 t^4\right)$$
$$P_X = E\left(4t^2\right) - E\left(4t^3\Phi\right) + E\left(\Phi^2 t^4\right)$$
$$P_X = 4t^2 - 4t^3 E\left(\Phi\right) + t^4 E\left(\Phi^2\right)$$
$$P_X = 4t^2 - 4t^3\left(\tfrac{0+1}{2}\right) + t^4\left(\tfrac{1^3-0^3}{3(1-0)}\right)$$
$$P_X = 4t^2 - 2t^3 + \tfrac{t^4}{3}$$
$$\sigma_X^2 = P_X - \overline{X}^2 = \left(4t^2 - 2t^3 + \tfrac{t^4}{3}\right) - \left(2t - \tfrac{t^2}{2}\right)^2 = \tfrac{t^4}{12}$$
$$\sigma_X^2 = \tfrac{t^4}{12}$$

$$R_{XX}\left(t, t+\tau\right) = E\left(\left(2t - \Phi t^2\right)\left(2\left(t+\tau\right) - \Phi\left(t+\tau\right)^2\right)\right)$$
$$R_{XX}\left(t, t+\tau\right) = E\left(\left(2t - \Phi t^2\right)2\left(t+\tau\right) - \left(2t - \Phi t^2\right)\Phi\left(t+\tau\right)^2\right)$$
$$R_{XX}\left(t, t+\tau\right) = E\left(\left(2t - \Phi t^2\right)2\left(t+\tau\right)\right) - E\left(\left(2t - \Phi t^2\right)\Phi\left(t+\tau\right)^2\right)$$
$$R_{XX}\left(t, t+\tau\right) = E\left(4t\left(t+\tau\right) - 2t^2\left(t+\tau\right)\Phi\right) - E\left(2t\left(t+\tau\right)^2\Phi - t^2\left(t+\tau\right)^2\Phi^2\right)$$
$$R_{XX}\left(t, t+\tau\right) = 4t\left(t+\tau\right) - 2t^2\left(t+\tau\right)E\left(\Phi\right) - 2t\left(t+\tau\right)^2 E\left(\Phi\right) - t^2\left(t+\tau\right)^2 E\left(\Phi^2\right)$$
$$R_{XX}\left(t, t+\tau\right) = 4t\left(t+\tau\right) - 2t^2\left(t+\tau\right)\left(\tfrac{0+1}{2}\right) - 2t\left(t+\tau\right)^2\left(\tfrac{0+1}{2}\right) - t^2\left(t+\tau\right)^2\left(\tfrac{1^3-0^3}{3(1-0)}\right)$$
$$R_{XX}\left(t, t+\tau\right) = 4t\left(t+\tau\right) - t^2\left(t+\tau\right) - t\left(t+\tau\right)^2 - \tfrac{1}{3}t^2\left(t+\tau\right)^2$$
$$C_{XX}\left(t, t+\tau\right) = R_{XX}\left(t, t+\tau\right) - \overline{X\left(t\right)}.\overline{X\left(t+\tau\right)}$$
$$\overline{X\left(t+\tau\right)} = E\left(2\left(t+\tau\right) - \Phi\left(t+\tau\right)^2\right)$$
$$\overline{X\left(t+\tau\right)} = E\left(2\left(t+\tau\right)\right) - E\left(\left(t+\tau\right)^2\Phi\right)$$
$$\overline{X\left(t+\tau\right)} = 2\left(t+\tau\right) - \left(t+\tau\right)^2 E\left(\Phi\right)$$
$$\overline{X\left(t+\tau\right)} = 2\left(t+\tau\right) - \left(t+\tau\right)^2\left(\tfrac{0+1}{2}\right)$$
$$\overline{X\left(t+\tau\right)} = 2\left(t+\tau\right) - \tfrac{1}{2}\left(t+\tau\right)^2$$
$$C_{XX}\left(t, t+\tau\right) = \left(4t\left(t+\tau\right) - t^2\left(t+\tau\right) - t\left(t+\tau\right)^2 - \tfrac{1}{3}t^2\left(t+\tau\right)^2\right) - \left(2t - \tfrac{t^2}{2}\right)\left(2\left(t+\tau\right) - \tfrac{1}{2}\left(t+\tau\right)^2\right)$$
$$C_{XX}\left(t, t+\tau\right) = -\tfrac{7}{12}t^2\left(t+\tau\right)^2$$
$$Var\left(X\left(t+\tau\right)\right) = E\left(\left(2\left(t+\tau\right) - \Phi\left(t+\tau\right)^2\right)^2\right) - \left(2\left(t+\tau\right) - \tfrac{1}{2}\left(t+\tau\right)^2\right)^2$$
$$Var\left(X\left(t+\tau\right)\right) = E\left(4\left(t+\tau\right)^2 - 4\left(t+\tau\right)\left(t+\tau\right)^2\Phi + \Phi^2\left(t+\tau\right)^4\right) - \left(2\left(t+\tau\right) - \tfrac{1}{2}\left(t+\tau\right)^2\right)^2$$
$$Var\left(X\left(t+\tau\right)\right) = 4\left(t+\tau\right)^2 - 4\left(t+\tau\right)\left(t+\tau\right)^2 E\left(\Phi\right) + \left(t+\tau\right)^4 E\left(\Phi^2\right) - \left(2\left(t+\tau\right) - \tfrac{1}{2}\left(t+\tau\right)^2\right)^2$$
$$Var\left(X\left(t+\tau\right)\right) = 4\left(t+\tau\right)^2 - 2\left(t+\tau\right)\left(t+\tau\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(t+\tau\right)^4 - 4\left(t+\tau\right)^2 + \left(t+\tau\right)\left(t+\tau\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(t+\tau\right)^4$$
$$Var\left(X\left(t+\tau\right)\right) = \tfrac{1}{12}\left(t+\tau\right)^4 - \left(t+\tau\right)\left(t+\tau\right)^2$$
$$\rho = \frac{-\frac{7}{12}t^2\left(t+\tau\right)^2}{\left(\sqrt[2]{\frac{1}{12}t^4}\right)\sqrt[2]{\frac{1}{12}\left(t+\tau\right)^4 - \left(t+\tau\right)\left(t+\tau\right)^2}}$$

Ejemplo2. Sea el proceso $X(t) = 1 + t\Phi$ con $\Phi \backsim N(0,1)$. Determine las siguientes caracteristicas estadisticas: $\overline{X}$, σ_X^2, $P_X, R_{XX}(t, t+\tau)$, $C_{XX}(t, t+\tau)$ y ρ.

solución:

$\overline{X(t)} = E(1 + t\Phi)$
$\overline{X(t)} = 1 + tE(\Phi)$
$\overline{X(t)} = 1 + t(0)$
$\overline{X(t)} = 1$
$P_X = E\left(X(t)^2\right)$
$P_X = E\left((1 + t\Phi)^2\right) = E\left(1 + 2t\Phi + t^2\Phi^2\right)$
$P_X = 1{+}2tE(\Phi){+}t^2E\left(\Phi^2\right)$

$Var(\Phi) = E\left(\Phi^2\right) - E(\Phi)^2 = 1$
$E\left(\Phi^2\right) = 1 + 0^2 = 1$

$P_X = 1 + 2t(0) + t^2(1)$
$P_X = 1 + t^2$
$\sigma_X^2 = P_X - \overline{X}^2$
$\sigma_X^2 = 1 + t^2 - 1^2$
$\sigma_X^2 = t^2$
$R_{XX}(t, t+\tau) = E((1 + t\Phi)(1 + (t+\tau)\Phi))$
$R_{XX}(t, t+\tau) = E\left(1 + (2t+\tau)\Phi + t(t+\tau)\Phi^2\right)$
$R_{XX}(t, t+\tau) = 1 + (2t+\tau)E(\Phi) + t(t+\tau)E\left(\Phi^2\right)$
$R_{XX}(t, t+\tau) = 1 + (2t+\tau)0 + t(t+\tau)1$
$R_{XX}(t, t+\tau) = 1 + t(t+\tau)$
$E(X(t+\tau)) = E(1 + (t+\tau)\Phi)$
$E(X(t+\tau)) = 1 + (t+\tau)E(\Phi) = 1 + (t+\tau)0$
$E(X(t+\tau)) = 1$
$C_{XX}(t, t+\tau) = 1 + t(t+\tau) - (1)(1)$
$C_{XX}(t, t+\tau) = t(t+\tau)$
$Var(X(t+\tau)) = E\left(X(t+\tau)^2\right) - E(X(t+\tau))^2$
$Var(X(t+\tau)) = E\left((1 + (t+\tau)\Phi)^2\right) - 1^2$
$Var(X(t+\tau)) = E\left(1 + 2(t+\tau)\Phi + (t+\tau)^2\Phi^2\right) - 1^2$
$Var(X(t+\tau)) = 1 + 2(t+\tau)E(\Phi) + (t+\tau)^2E\left(\Phi^2\right) - 1$
$Var(X(t+\tau)) = 1 + 2(t+\tau)0 + (t+\tau)^2 1 - 1$
$Var(X(t+\tau)) = (t+\tau)^2$
$\rho = \frac{t(t+\tau)}{\sqrt[2]{t^2}.\sqrt[2]{(t+\tau)^2}} = 1$

Ejemplo3. Sea el proceso $X(t) = 3e^{-t\Theta}$ con $\Theta \backsim Exp(2)$. Determine las siguientes caracteristicas estadisticas : $\overline{X}$, σ_X^2, P_X, $R_{XX}(t, t+\tau)$, $C_{XX}(t, t+\tau)$ y ρ.

solución:

$E(X(t)) = E\left(3e^{-t\Theta}\right) = \int_0^\infty 3e^{-t\Theta}2e^{-2\Theta}d\Theta$
$E(X(t)) = 6\int_0^\infty e^{-(t+2)\Theta}d\Theta$

$E\left(X\left(t\right)\right)=-6\left[\frac{e^{-\left(t+2\right)\Theta}}{\left(t+2\right)}\right]_{0}^{\infty}$
$E\left(X\left(t\right)\right)=\frac{6}{t+2}$
$P_X=E\left(X\left(t\right)^2\right)=\int_0^\infty 9e^{-2t\Theta}2e^{-2\Theta}d\Theta$
$P_X=18\int_0^\infty e^{-2(t+1)\Theta}d\Theta=-18\left[\frac{e^{-2(t+1)\Theta}}{2(t+1)}\right]_0^\infty$
$P_X=18\left(\frac{1}{2(t+1)}\right)$
$P_X=\frac{9}{t+1}$
$\sigma_X^2=\frac{9}{t+1}-\left(\frac{6}{t+2}\right)^2=\frac{9t^2}{(t+1)(t+2)^2}$
$R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=E\left(X\left(t\right)X\left(t+\tau\right)\right)$
$R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=E\left(3e^{-t\Theta}3e^{-(t+\tau)\Theta}\right)$
$R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=9\int_0^\infty e^{-(2t+\tau)\Theta}2e^{-2\Theta}d\Theta$
$R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=18\int_0^\infty e^{-(2t+\tau)\Theta}e^{-2\Theta}d\Theta$
continuarlo
$E\left(X\left(t+\tau\right)\right)=\int_0^\infty 3e^{-(t+\tau)\Theta}2e^{-2\Theta}d\Theta$
continuarlo
$C_{XX}\left(t,t+\tau\right)=R_{XX}\left(t,t+\tau\right)-\overline{X\left(t\right)}.\overline{X\left(t+\tau\right)}$

*Tarea de Refuerzo***.** Sea el proceso $X\left(t\right)=at+\Psi$ con $\Psi\backsim U\left(0,1\right)$. Determine las siguientes caracteristicas estadisticas: $\overline{X},\sigma_X^2,$ $P_X,$ $R_{XX}\left(t,t+\tau\right),$ $C_{XX}\left(t,t+\tau\right)$ y ρ.

Ruido Blanco

Un proceso estocastico $X\left(t\right)$ es *ruido blanco* si $C_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\beta\delta\left(t\right)$ con $\beta>0$.

$\beta\delta\left(t-t_0\right)=\left\{\begin{array}{c}\beta \text{ si } t=t_0\\ 0 \text{ si } t\neq t_0\end{array}\right\}$ $\rightarrow$ funciòn impulso

El espectro del ruido blanco se determina con la magnitud de la transformada de Fourier sobre la autocovarianza donde se obtiene un espectro constante tipico del ruido blanco. $\boxed{\mathcal{F}\left(C_{XX}\left(t,t+\tau\right)\right)=\beta\mathcal{F}\left(\delta\left(t\right)\right)=\beta \text{ luego el espectro es } \left\|\mathcal{F}\left(C_{XX}\left(t,t+\tau\right)\right)\right\|=\beta}$

Proceso Estocastico Estacionario. Un proceso estocastico es estacionario si sus propiedades estadisticas permanecen invariantes ante variaciones en el tiempo.

Estacionariedad de un orden determinado

Un proceso es estacionario de orden uno si $f\left(x;t\right)=f\left(x;t+\tau\right)$ luego $E\left(X\left(t\right)\right)=C$ (constante). Un proceso es estacionario de orden dos si: $f\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)=f\left(x_1,x_2;t_1+\tau,t_2+\tau\right)$ entonces $R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=R_{XX}\left(\tau\right).$

Proceso Estocastico no Correlacionado: Un proceso estocastico $X\left(t\right)$ es no correlacionado si $C_{XX}\left(t,t+\tau\right)=0$ que implica que $R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\overline{X\left(t\right)}.\overline{X\left(t+\tau\right)}$.

Procesos Estocasticos Ortogonales: Dos proceso estocasticos $X(t)$ y $Y(t)$ son ortogonales si la correlación cruzada $R_{XY}(t, t+\tau) = 0$.

Proceso Estacionario en Sentido Estricto: Un proceso estocastico es estacionario en sentido estricto de orden N si es estacionario de todos los ordenes menores e iguales a N.

Proceso Estacionario en Sentido Amplio (WSS)

Un proceso es estacionario en sentido amplio si se cumple que:
1). $E(X(t)) = C$
2). $R_{XX}(t, t+\tau) = R_{XX}(\tau)$.

Si un proceso $X(t)$ es WSS entonces $R_{XX}(0) = E\left(X(t)^2\right)$.

Propiedades

1) $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$
2). $\|R_{XX}(\tau)\| \leq R_{XX}(0)$

Ejemplo1. Verificar si el proceso $X(t) = A\cos(wt - \Phi)$ es WSS, ruido blanco y si es no correlacionado con $\Phi \backsim U(-\pi, \pi)$.

solución: $\overline{X} = E(A\cos(wt-\Phi)) = \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(wt-\Phi)\frac{1}{2\pi}d\Phi = \frac{A}{2\pi}\left[\frac{sen(wt-\Phi)}{-1}\right]_{-\pi}^{\pi}$

$\overline{X} = \frac{A}{-2\pi}[sen(wt-\Phi)]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$\overline{X} = 0$

$R_{XX}(t, t+\tau) = E(A\cos(wt-\Phi)A\cos(w(t+\tau)-\Phi))$

$R_{XX}(t, t+\tau) = A^2E(\cos(wt-\Phi)\cos(w(t+\tau)-\Phi))$

$R_{XX}(t, t+\tau) = A^2E\left(\frac{1}{2}\cos(2wt+w\tau-2\Phi) + \frac{1}{2}\cos(w\tau)\right)$

$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}A^2E(\cos(2wt+w\tau-2\Phi)) + \frac{1}{2}A^2E(\cos(w\tau))$

$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(w\tau) + \frac{1}{2}A^2E(\cos(2wt+w\tau-2\Phi))$

$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(w\tau) + \frac{1}{2}A^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(2wt+w\tau-2\Phi)\,d\Phi$

$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(w\tau) + \frac{A^2}{-8\pi}[sen(2wt+w\tau-2\Phi)]_{-\pi}^{\pi}$

$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(w\tau) - \frac{1}{8\pi}A^2[sen(2wt+w\tau-2\pi) - sen(2wt+w\tau+2\pi)]$

$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(w\tau) - \frac{1}{8\pi}A^2(0)$

$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(w\tau) = R_{XX}(\tau)$

como $\overline{X} = 0$ y $R_{XX}(t, t+\tau) = R_{XX}(\tau)$ entonces el proceso $X(t)$ es WSS.

$C_{XX}(t, t+\tau) = R_{XX}(t, t+\tau) - \overline{X(t)}.\overline{X(t+\tau)}$

$C_{XX}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(w\tau) - (0)\,\overline{X(t+\tau)}$

$C_{XX}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(w\tau) \neq 0$ por tanto $X(t)$ no es ruido blanco y si es correlacionado.

Procesos Conjuntamente Estacionarios en Sentido Amplio

Dos procesos $X(t)$ y $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si se cumple que:

1) Si $X(t)$ y $Y(t)$ cada uno son estacionarios en sentido amplio.

2).$R_{XY}(t, t+\tau) = R_{XY}(\tau)$.

Propiedades.

1) $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$
2). $\|R_{XY}(\tau)\| \leq R_{XY}(0)$
3). $\|R_{XY}(\tau)\| \leq \frac{1}{2}(R_{XX}(0) + R_{YY}(0))$
4). $\|R_{XY}(\tau)\| \leq \sqrt[2]{R_{XX}(0)\, R_{YY}(0)}$

Tarea de repaso.

Sea el proceso $X(t) = 3e^{-t\Theta}$ con $\Theta \backsim Exp(2)$.

a). Verificar si el proceso $X(t)$ es: no correlacionado, ruido blanco , WSS y estacionario de orden uno.

Caracteristicas Temporales (Deterministas)

Valor medio temporal: $\overline{x} = \mathbf{A}[X(t)] = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\, dt$ (valor medio determinista).

Función de correlación temporal

$\mathbf{r}_{XX}(t, t+\tau) = \mathbf{A}[X(t)\, X(t+\tau)]$

$\mathbf{r}_{XX}(t, t+\tau) = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\, X(t+\tau)\, dt$

Proceso Ergódico: Son procesos aleatorios en los cuales sus propiedades estadisticas son iguales a las propiedades temporales.

Proceso Ergódico respecto al valor medio: Un proceso $X(t)$ es ergòdico respecto al valor medio si el proceso es *WSS* y si $E(X(t)) = \mathbf{A}[X(t)]$.

Proceso Ergódico respecto a la función de correlación: Un proceso $X(t)$ es ergòdico respecto a la funciòn de correlaciòn si el proceso es *WSS* y si $R_{XX}(t, t+\tau) = \mathbf{r}_{XX}(t, t+\tau)$.

Proceso Ergódico: Un proceso $X(t)$ es ergòdico si es *WSS,* y si $R_{XX}(t, t+\tau) = \mathbf{r}_{XX}(t, t+\tau)$ y $\overline{x} = \overline{X}$.

Ejemplo1. Determine si el proceso estocastico $X(t) = 2t - \Phi t^2$ con $\Phi \backsim U(0,1)$ es ergodico y si lo es con que tipo de ergodicidad.

solución:

$\mathbf{A}[X(t)] = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(2t - \Phi t^2\right) dt$

$$\mathbf{A}\left[X\left(t\right)\right]=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\left[t^{2}-\frac{\Phi t^{3}}{3}\right]_{-T}^{T}$$
$$\mathbf{A}\left[X\left(t\right)\right]=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\left[T^{2}-\frac{\Phi T^{3}}{3}-T^{2}-\frac{\Phi T^{3}}{3}\right]$$
$$\mathbf{A}\left[X\left(t\right)\right]=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[\frac{-2\Phi T^{3}}{3}\right]=-\infty \quad \text{no tiene valor medio temporal}$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(2t-\Phi t^{2}\right)\left(2\left(t+\tau\right)-\Phi\left(t+\tau\right)^{2}\right)dt$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(4t^{2}-2t\Phi\left(t+\tau\right)^{2}+4t\tau-2t^{2}\tau\Phi-2t^{3}\Phi+t^{2}\Phi^{2}\left(t+\tau\right)^{2}\right)dt$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(4t^{2}+4t\tau-2t\Phi\left(t^{2}+2t\tau+\tau^{2}\right)-2t^{3}\Phi-2t^{2}\tau\Phi+t^{2}\Phi^{2}\left(t^{2}+2t\tau+\tau^{2}\right)\right)$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{4t^{3}}{3}-t^{4}\Phi-2t^{3}\tau\Phi-t^{2}\tau^{2}\Phi+2t^{2}\tau+\frac{t^{5}\Phi^{2}}{5}+\frac{t^{4}\tau\Phi^{2}}{2}+\frac{t^{3}\tau^{2}\Phi^{2}}{3}\right]_{-T}^{T}$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\left[\begin{array}{c}\frac{4T^{3}}{3}-T^{4}\Phi-2T^{3}\tau\Phi-T^{2}\tau^{2}\Phi+2T^{2}\tau+\frac{T^{5}\Phi^{2}}{5}+\frac{T^{4}\tau\Phi^{2}}{2}+\frac{T^{3}\tau^{2}\Phi^{2}}{3}+\frac{4T^{3}}{3}\\+T^{4}\Phi-2T^{3}\tau\Phi+T^{2}\tau^{2}\Phi-2T^{2}\tau+\frac{T^{5}\Phi^{2}}{5}-\frac{T^{4}\tau\Phi^{2}}{2}+\frac{T^{3}\tau^{2}\Phi^{2}}{3}\end{array}\right]$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[\frac{8T^{2}}{3}-2T^{3}\tau\Phi+\frac{T^{4}\Phi^{2}}{5}+\frac{2T^{5}\Phi^{2}}{5}+\frac{2T^{2}\tau^{2}\Phi^{2}}{3}\right]=\infty$$

no tiene funcion correlacion temporal

Luego el proceso $X\left(t\right)$ no es ergodico de ningun tipo porque no existe valor medio temporal ni funciòn de correlacion temporal.

Ejemplo2. Verificar si el proceso $X\left(t\right)=A\cos\left(w_{0}t-\Phi\right)$, $\Phi\backsim U\left(0,2\pi\right)$ es ergódico y que tipo de ergodicidad.

solución: $\overline{X}=0$ $\quad R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\frac{1}{2}A^{2}\cos\left(w\tau\right)$ $\quad w_{0}=\frac{2\pi}{T}$

$$\overline{x}=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos\left(w_{0}t-\Phi\right)dt=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{AT}{2T}\left[\frac{sen\left(\frac{2\pi}{T}t-\Phi\right)}{2\pi}\right]_{-T}^{T}$$
$$\overline{x}=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{A}{4\pi}\left[sen\left(2\pi-\Phi\right)-sen\left(\Phi+2\pi\right)\right]=0$$

como $\overline{X}=\overline{x}=0$ luego $X\left(t\right)$ es ergodico con respecto al valor medio.

$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^{2}\cos\left(w_{0}t-\Phi\right)\cos\left(w_{0}t+w_{0}\tau-\Phi\right)dt$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{A^{2}}{2T}\int_{-T}^{T}\cos\left(w_{0}t-\Phi\right)\cos\left(w_{0}t+w_{0}\tau-\Phi\right)dt$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{A^{2}}{4T}\int_{-T}^{T}(\cos\left(w_{0}\tau\right)+\cos\left(2w_{0}t+w_{0}\tau-2\Phi\right))dt$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{A^{2}}{4T}\int_{-T}^{T}\cos\left(w_{0}\tau\right)dt+\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{A^{2}}{4T}\int_{-T}^{T}\cos\left(2w_{0}t+w_{0}\tau-2\Phi\right)dt$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{A^{2}\cos(w_{0}\tau)}{4T}\left[t\right]_{-T}^{T}+\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{A^{2}T}{4T}\left[\frac{sen\left(\frac{4\pi}{T}t+w_{0}\tau-2\Phi\right)}{4\pi}\right]_{-T}^{T}$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{A^{2}\cos(w_{0}\tau)}{4T}\left[2T\right]+\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{A^{2}}{4}\left[\frac{sen(4\pi+w_{0}\tau-2\Phi)-sen(-4\pi+w_{0}\tau-2\Phi)}{4\pi}\right]$$
$$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2}A^{2}\cos\left(w\tau\right)=\frac{1}{2}A^{2}\cos\left(w\tau\right)$$

como $\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\frac{1}{2}A^{2}\cos\left(w\tau\right)=R_{XX}\left(t,t+\tau\right)$ luego $X\left(t\right)$ es ergòdico respecto a la funciòn correlaciòn.

como $\overline{X}=0=\overline{x}$ $\quad y \quad$ $\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\frac{1}{2}A^{2}\cos\left(w\tau\right)=R_{XX}\left(t,t+\tau\right)$ entonces $X\left(t\right)$ es un proceso ergódico.

Otras Propiedades

Función de correlación cruzada temporal

$\mathbf{r}_{XY}(t,t+\tau)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,Y(t+\tau)\,dt$

Si un proceso $X(t)=\overline{X}+N(t)$ es WSS , $\overline{N}=0$ y $\lim_{|\tau|\longrightarrow\infty}R_{NN}(\tau)=0$ con componentes no periodicas entonces $\left(\overline{X}\right)^2=\lim_{|\tau|\longrightarrow\infty}R_{XX}(\tau)$

Autocorrelación Discreta

$R_{XX}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,x(n+k)$

$E(x(n))=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)$

Correlación Cruzada Discreta

$R_{XY}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,y(n+k)$

Laboratorio 1. Diseño e implementaciòn de un algoritmo automatico que reconoce entre ruido blanco y señal de información (emisora).

seudocodigo:
$f\rightarrow$ captura audio
y=$R_{XX}(f)$; hallan la autocorrelaciòn
plot(y)
z=$C_{XX}(f)$ hallan la autocovarianza
plot(z)
c=fft(z); hallan la tranformada rapida de Fourier
Espectro=abs(c) ; es para calcular la norma de los puntos de la fft
plot($Espectro$) (tanto de la señal de audio como del ruido blanco)

La parte final del laboratorio construye un algoritmo automatico (programaciòn propia) para detectar cuando el espectro es constante y no constante para de esa forma reconocer entre ruido blanco y señal de informaciòn.

Nota: El reconocimiento en tiempo real no debe comparar con todo el banco de grabaciones sino con unos patrones constantes que pueden ser energia promedio del espectro, valor medio y desviaciòn estandar promedio del espectro que fueron obtenidas de un paso anterior al reconocimiento que se denomina entrenamiento.

Pautas del Informe: *Construir un informe impreso IEEE de una sola columna, con la primera pagina compuesta de introducciòn y marco teorico, en la ultima pagina colocar las conclusiones y referencias bibliograficas y el resto del informe que es 80% o 90% restante compuesto de la metodologia (fases de desarrollo, diagramas,graficas, tablas, imagenes, descripciones, pantallazos, evidencias) y el tamaño del informe debe estar entre 6 a 8 paginas. Las lines de codigo que se coloquen solo deben las partes mas importante del reconocimiento computacional en la señal y no ser excesivo con tanto codigo en el informe.*

Ejercicios de repaso capitulo 6

6.3-8. Se tiene los procesos $X(t), Y(t)$ que son estadisticamente independientes y con valor medio cero y tienen función de autocorrelación $R_{XX}(\tau) = e^{-|\tau|}$ y $R_{YY}(\tau) = \cos(2\pi\tau)$ .Sea $W_1(t) = X(t) + Y(t)$ y $W_2(t) = X(t) - Y(t)$.

a). Hallar la función de autocorrelación del proceso $W_1(t)$

b). Hallar la función de correlación cruzada de los procesos $W_1(t)$ y $W_2(t)$.

solución:

a)

$R_{W_1W_1}(\tau) = E(W_1(t)W_1(t+\tau))$

$R_{W_1W_1}(\tau) = E((X(t) + Y(t))(X(t+\tau) + Y(t+\tau)))$

$R_{W_1W_1}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau) + X(t)Y(t+\tau) + Y(t)X(t+\tau) + Y(t)Y(t+\tau))$

$R_{W_1W_1}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) + E(X(t)Y(t+\tau)) + E(Y(t)X(t+\tau)) + E(Y(t)Y(t+\tau))$

$R_{W_1W_1}(\tau) = R_{XX}(\tau) + E(X(t))E(Y(t+\tau)) + E(Y(t))E(X(t+\tau)) + R_{YY}(\tau)$

$R_{W_1W_1}(\tau) = e^{-|\tau|} + (0)E(Y(t+\tau)) + (0)E(X(t+\tau)) + \cos(2\pi\tau)$

$R_{W_1W_1}(\tau) = e^{-|\tau|} + \cos(2\pi\tau)$

b) $R_{W_1W_2}(\tau) = E(W_1(t)W_2(t+\tau)) = E((X(t) + Y(t))(X(t+\tau) - Y(t+\tau)))$

$R_{W_1W_2}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau) - X(t)Y(t+\tau) + Y(t)X(t+\tau) - Y(t)Y(t+\tau))$

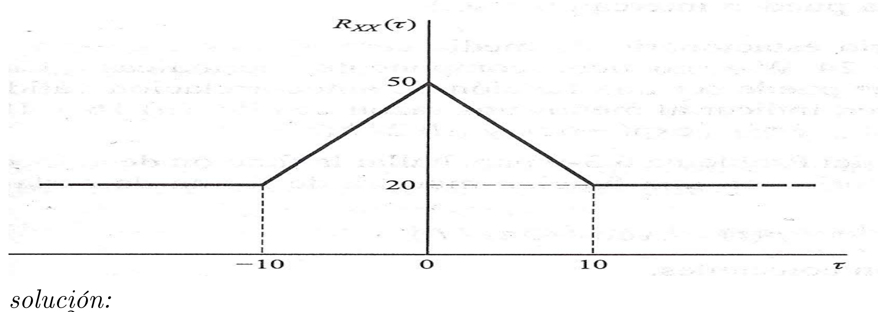
$R_{W_1W_2}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) - E(X(t)Y(t+\tau)) + E(Y(t)X(t+\tau)) - E(Y(t)Y(t+\tau))$

$R_{W_1W_2}(\tau) = R_{XX}(\tau) - E(X(t))E(Y(t+\tau)) + E(Y(t))E(X(t+\tau)) - R_{YY}(\tau)$

$R_{W_1W_2}(\tau) = e^{-|\tau|} - (0)E(Y(t+\tau)) + (0)E(X(t+\tau)) - \cos(2\pi\tau)$

$R_{W_1W_2}(\tau) = e^{-|\tau|} - \cos(2\pi\tau)$

6.3-14. Para un proceso aleatorio ergodico estacionario que tiene la función de autocorrelación mostrada en la figura. Determine: $E(X(t))$, $P_{XX}(t)$ y $Var(X(t))$.



solución:

$(\overline{X})^2 = \lim_{|\tau| \longrightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = 20 \quad \Longrightarrow \overline{X} = \sqrt[2]{20}$

$R_{XX}(0) = E\left(X(t)^2\right) = P_{XX}(t)$

$R_{XX}(0) = P_{XX}(t) = 50$

$Var(X(t)) = P_{XX}(t) - (\overline{X})^2 = 50 - 20 = 30$

$Var\left(X\left(t\right)\right)=30$

1). Sea el proceso $X\left(t\right)=3e^{-t\Theta}$ con $\Theta\backsim Exp\left(2\right)$. Determine las caracteristicas estadisticas: $\overline{X}$, σ_X^2, P_X, $R_{XX}\left(t,t+\tau\right)$, $C_{XX}\left(t,t+\tau\right)$ y ρ.

2). Verificar si el proceso $X\left(t\right)$ es no correlacionado, ruido blanco , WSS, ergódico y estacionario de orden uno.

solución:

$\overline{X}=E\left(X\left(t\right)\right)=\int_0^{\infty}3e^{-t\Theta}2e^{-2\Theta}d\Theta$

$E\left(X\left(t\right)\right)=6\int_0^{\infty}e^{-(t+2)\Theta}d\Theta$

$E\left(X\left(t\right)\right)=-6\left[\frac{e^{-(t+2)\Theta}}{(t+2)}\right]_0^{\infty}$

$E\left(X\left(t\right)\right)=\frac{6}{t+2}$

$P_X=E\left(X\left(t\right)^2\right)=\int_0^{\infty}9e^{-2t\Theta}2e^{-2\Theta}d\Theta$

$P_X=18\int_0^{\infty}e^{-2(t+1)\Theta}d\Theta=-18\left[\frac{e^{-2(t+1)\Theta}}{2(t+1)}\right]_0^{\infty}$

$P_X=18\left(\frac{1}{2(t+1)}\right)$

$P_X=\frac{9}{t+1}$

$\sigma_X^2=\frac{9}{t+1}-\left(\frac{6}{t+2}\right)^2=\frac{9t^2}{(t+1)(t+2)^2}$

$R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=E\left(X\left(t\right)X\left(t+\tau\right)\right)$

$R_{XX}\left(t,t+\tau\right)=E\left(3e^{-t\Theta}3e^{-(t+\tau)\Theta}\right)$

continuarlo

$E\left(X\left(t+\tau\right)\right)==\int_0^{\infty}3e^{-(t+\tau)\Theta}2e^{-2\Theta}d\Theta$

continuarlo

$C_{XX}\left(t,t+\tau\right)=R_{XX}\left(t,t+\tau\right)-\overline{X\left(t\right)}.\overline{X\left(t+\tau\right)}$

continuarlo

$\overline{x}=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(3e^{-t\Theta}\right)dt$

continuarlo

$\mathbf{r}_{XX}\left(t,t+\tau\right)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(3e^{-t\Theta}\right)\left(3e^{-(t+\tau)\Theta}\right)dt$

continuarlo

6.3-16. Se tiene los procesos sin componentes periodicas $X\left(t\right)$, $Y\left(t\right)$ son WSS con valor medio cero y $\sigma_X^2=5$ y $\sigma_Y^2=10$.

Explique porque cada función de autocorrelación a cada uno de los procesos.

a) $R_{XX}\left(\tau\right)=6e^{-3\tau}\mu\left(\tau\right)$

$\left(\overline{X}\right)^2=\lim_{|\tau|\longrightarrow\infty}R_{XX}\left(\tau\right)=6$

$\overline{X}=\sqrt[2]{6}\neq 0$ por eso la función de autocorrelación no corresponde al proceso aleatorio $X\left(t\right)$

c) $\sigma_X^2=5$ $\sigma_Y^2=10$ $\overline{X}=0$ $\overline{Y}=0$

$P_X=\sigma_X^2+\left(\overline{X}\right)^2=5+0^2=5$ $P_Y=\sigma_Y^2+\left(\overline{Y}\right)^2=10+0^2=10$

$\left|R_{XY}\left(\tau\right)\right|\leq\sqrt[2]{50}$

$\left|R_{XY}\left(\tau\right)\right|_{\max}=9$

$9 \nleq \sqrt[2]{50}$ luego la función de correlación cruzada no corresponde a los procesos $X(t)$ y $Y(t)$

Analisis Espectral de los Procesos Aleatorios *(La tematica de aqui en adelante no ingresa para el parcial del corte 1 pero si para la entrega del taller del corte 1)*

Transformada de Fourier.

$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\cdot -jwt} dt = F(w)$

$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{\cdot jwt} dw = f(t)$ $\Longrightarrow$ transformada inversa de Fourier

$\mathcal{F}[f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, e^{\cdot -j\Omega n} = F(\Omega)$ $\Longrightarrow$ transformada de Fourier para tiempo discreto

$f(n) = \mathcal{F}^{-1}[F(\Omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(\Omega)\, e^{\cdot j\Omega n} d\Omega$ $\Longrightarrow$ transformada inversa de Fourier

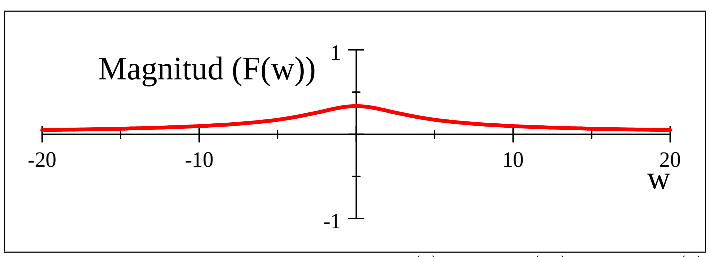
Ejemplo1: Hallar la transformada de Fourier de la señal $f(t) = e^{-at}\mu(t)$ con $a \geq 0$.

solución:

$\mathcal{F}[e^{-at}\mu(t)] = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{\cdot -jwt} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+jw)t} dt$

$\mathcal{F}[e^{-at}\mu(t)] = \left[-\frac{e^{-at}e^{\cdot -jwt}}{a+jw}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+jw}$

$f(t) = e^{-at}\mu(t)$ entonces su espectro es $\left\|\frac{1}{a+jw}\right\| = \frac{\|1\|}{\|a+jw\|} = \frac{1}{\sqrt[2]{w^2+a^2}}$



Propiedad de Simetria: Si $f(t) \longleftrightarrow F(w) \Longrightarrow F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-w)$

$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\cdot -jwt} dt = F(w)$

$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{\cdot jwt} dw = f(t)$

$t \longleftarrow -w$ $\qquad$ $w \longleftarrow t$

$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{\cdot -jtw} dt$

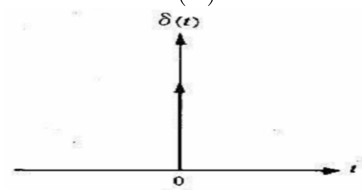
$2\pi f(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{\cdot -jtw} dt = \mathcal{F}[F(t)]$

$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-w)$

entonces $f(t) \longleftrightarrow F(w) \Longrightarrow F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-w)$

Ejemplo1. Hallar la transformada de Fourier de la señal $F(t) = 1$.

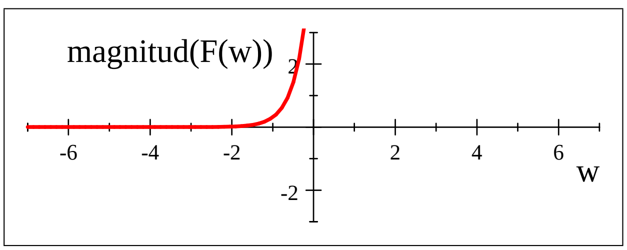
solución: $F(w)=1$ $\mathcal{F}[\delta(t)]=1$ $f(t)=\delta(t)$



$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(-w)=2\pi\delta(w)$
$F(t)=1 \longrightarrow \|2\pi\delta(w)\|=2\pi\delta(w) \rightarrow$ Espectro

Ejemplo2: Hallar la transformada de Fourier de la señal $F(t)=\frac{1}{3+jt}$.
solución:
$\mathcal{F}\left[\frac{1}{3+jt}\right]=2\pi e^{3w}\mu(-w)$
$F(t)=\frac{1}{3+jt}$ $F(w)=\frac{1}{3+jw}$ $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{3+jw}\right]=e^{-3t}\mu(t)$
$\mathcal{F}\left[\frac{1}{3+jt}\right]=2\pi e^{3w}\mu(-w)$

Espectro: $\longrightarrow$ $\left\|2\pi e^{3w}\mu(-w)\right\|=2\pi e^{3w}\mu(-w)$



Corrimiento en el Tiempo:

$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=e^{-jwt_0}F(w)$
Prueba: $r=t-t_0$ $t=r+t_0$ $dt=dr$
$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t_0)\,e^{\cdot-jtw}dt$
$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(r)\,e^{\cdot-jw(r+t_0)}dr=\int_{-\infty}^{\infty}f(r)\,e^{\cdot-jwr}e^{\cdot-jwt_0}dr$
$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=e^{\cdot-jwt_0}\int_{-\infty}^{\infty}f(r)\,e^{\cdot-jwr}dr$
$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=e^{-jwt_0}F(w)$

Corrimiento en la Frecuencia.

$\mathcal{F}\left[e^{jw_0t}f(t)\right]=\mathcal{F}[f(t)]_{w\longrightarrow w-w_0}=F(w-w_0)$
Prueba:
$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{\cdot-jwt}dt$ $f(t)\longleftrightarrow F(w)$
$F(w-w_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{\cdot-j(w-w_0)t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jw_0t}f(t)\,e^{\cdot-jwt}dt$

$F\left(w-w_0\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{jw_0t}f\left(t\right)\right)e^{\cdot -jwt}dt$ $\qquad e^{jw_0t}f\left(t\right) \longleftrightarrow F\left(w-w_0\right)$

$\mathcal{F}\left[e^{jw_0t}f\left(t\right)\right] = \mathcal{F}\left[f\left(t\right)\right]_{w\longrightarrow w-w_0} = F\left(w-w_0\right)$

Transformada de Fourier de Convolución

$\mathcal{F}\left[f\left(t\right)*g\left(t\right)\right] = F\left(w\right)G\left(w\right)$

Prueba: $\quad f\left(t\right)*g\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty}f\left(\tau\right)g\left(t-\tau\right)d\tau$

$\mathcal{F}\left[f\left(t\right)*g\left(t\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\tau\right)g\left(t-\tau\right)d\tau e^{\cdot -jwt}dt$

$\mathcal{F}\left[f\left(t\right)*g\left(t\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}f\left(\tau\right)d\tau\int_{-\infty}^{\infty}g\left(t-\tau\right)e^{\cdot -jwt}dt$

$\mathcal{F}\left[f\left(t\right)*g\left(t\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}f\left(\tau\right)d\tau\mathcal{F}\left[g\left(t-\tau\right)\right]$

$\mathcal{F}\left[f\left(t\right)*g\left(t\right)\right] = G\left(w\right)\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\tau\right)e^{-jw\tau}d\tau$

$\mathcal{F}\left[f\left(t\right)*g\left(t\right)\right] = G\left(w\right)F\left(w\right)d$

Transformada de Fourier de Derivada

$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\left(t\right)\right] = \left(jw\right)^nF\left(w\right)$

Transformada de Fourier del Producto

$\mathcal{F}\left[f\left(t\right)g\left(t\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[F\left(w\right)*G\left(w\right)\right]$

Tarea de repaso:

Hallar la transformada de Fourier y graficar el espectro de las siguientes señales:

a). $f\left(t\right) = \cos(t)$

b).$f\left(t\right) = e^{a|t|}$ con a positivo

c). $f\left(t\right) = \frac{t^2sen(t)}{5+t^2}$

c). $f\left(n\right) = \begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ En este ejercicio hallan la transformada de Fourier y la transformada Discreta Fourier.

d) Repasar las propiedades transformada de Fourier de una integral y derivada de una transformada de Fourier.

e) Repasar las propiedades transformada de Fourier de tiempo discreto.

Caracteristicas Espectrales de los Procesos Aleatorios

$x_T\left(t\right) = \left\{\begin{array}{cc} x\left(t\right) & -T<t<T \\ 0 & \text{en otro caso}\end{array}\right\}$

$X_T\left(w\right) = \int_{-T}^{T}x\left(t\right)e^{-jwt}dt$

Energia $\longrightarrow$ $E = \int_{-T}^{T} x(t)^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} |X_T(w)|^2\, dw$ $\longrightarrow$ *Identidad de Parseval*

$P = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)^2\, dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{|X_T(w)|^2}{2\pi} dw$ *Potencia*

$P = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{|X_T(w)|^2}{2T} dw$
$P_{XX} = \mathbf{A}\left[\mathbf{E}\left(x(t)^2\right)\right]$ *Potencia media*
$P_{XX} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left(x(t)^2\right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{E\left(|X_T(w)|^2\right)}{2T} dw$
$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{E\left(|X_T(w)|^2\right)}{2T} dw$
$\psi_{xx}(w) = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{E\left(|X_T(w)|^2\right)}{2T}$ $\longrightarrow$ *DSP*

Densidad Espectral de Potencia (DSP):

$\psi_{xx}(w) = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{E\left(|X_T(w)|^2\right)}{2T}$ $\longrightarrow$ *DSP*

$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{xx}(w)\, dw = \mathbf{A}\left[E\left(x(t)^2\right)\right]$ $\longrightarrow$ *Potencia media*

Propiedades de la DSP:

1). $\psi_{xx}(w) = \psi_{xx}(-w)$
2). $\psi_{xx}(w) \geq 0$
3). $\psi_{xx}(w)$ es real.
4). $\psi_{x'x'}(w) = w^2\psi_{xx}(w)$ con $x' = \frac{dX}{dt}$
5). $\mathbf{A}[R_{XX}(t, t+\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{xx}(w)\, e^{jw\tau} dw$ $\longrightarrow$ $\mathbf{A}[R_{XX}(t, t+\tau)] = \mathcal{F}^{-1}(\psi_{xx}(w))$
6). $\psi_{xx}(w) = \mathcal{F}(\mathbf{A}[R_{XX}(t, t+\tau)])$

Si el proceso $X(t)$ es *WSS* entonces $\mathbf{A}[R_{XX}(t, t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$ entonces:
$\psi_{xx}(w) = \mathcal{F}(R_{XX}(\tau))$ $\longrightarrow$ *Teorema de Wiener Kintchine*
$R_{XX}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(\psi_{xx}(w))$.

Ejemplo1: Hallar la *potencia media* y la *densidad espectral de potencia* del proceso

$$X(t) = A\cos(w_0 t + \Phi) \quad , \quad \Phi \backsim U(0, 2\pi).$$

solución: $\psi_{xx}(w) = \mathcal{F}(\mathbf{A}[R_{XX}(t, t+\tau)])$

$R_{XX}(t, t+\tau) = E(A\cos(w_0 t + \Phi)\, A\cos(w_0 t + w_0\tau + \Phi))$
$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{A^2}{2}E(\cos(2w_0 t + w_0\tau + 2\Phi) + \cos(w_0\tau))$
$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{A^2}{2}E(\cos(2w_0 t + w_0\tau + 2\Phi)) + \frac{A^2}{2}E(\cos(w_0\tau))$
$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(w_0\tau) + \frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2w_0 t + w_0\tau + 2\Phi)\, d\Phi$
$R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(w_0\tau) + \frac{A^2}{8\pi}\left[sen(2w_0 t + w_0\tau + 2\Phi)\right]_0^{2\pi}$

$R_{XX}(t,t+\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(w_0\tau) + \frac{A^2}{8\pi}\left[sen\left(2w_0t + w_0\tau + 2\Phi\right)\right]_0^{2\pi}$
$R_{XX}(t,t+\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(w_0\tau)$
$\overline{X} = E\left(A\cos\left(w_0t+\Phi\right)\right) = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(w_0t+\Phi\right)d\Phi$
$\overline{X} = \frac{A}{\pi}\left[sen\left(w_0t+\Phi\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{A}{2\pi}\left[sen\left(w_0t+2\pi\right) - sen\left(w_0t\right)\right]$
$\overline{X} = 0$
Como $X(t)$ es WSS entonces $\psi_{xx}(w) = \mathcal{F}\left(R_{XX}(\tau)\right)$
$\psi_{xx}(w) = \mathcal{F}\left(\frac{A^2}{2}\cos(w_0\tau)\right) = \frac{A^2}{2}\mathcal{F}\left(\cos(w_0\tau)\right)$
$\psi_{xx}(w) = \frac{A^2}{4}\mathcal{F}\left(e^{jw_0\tau}\right) + \frac{A^2}{4}\mathcal{F}\left(e^{-jw_0\tau}\right)$
$\psi_{xx}(w) = \frac{A^2}{4}\left[\mathcal{F}(1)\right]_{w\longrightarrow w-w_0} + \frac{A^2}{4}\left[\mathcal{F}(1)\right]_{w\longrightarrow w+w_0}$
$\psi_{xx}(w) = \frac{A^2}{4}\left[2\pi\delta\left(w-w_0\right)\right] + \frac{A^2}{4}\left[2\pi\delta\left(w+w_0\right)\right]$
$\psi_{xx}(w) = \frac{\pi A^2}{2}\delta\left(w-w_0\right) + \frac{\pi A^2}{2}\delta\left(w+w_0\right)$
$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{xx}(w)\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi A^2}{2}\delta\left(w-w_0\right)\right)dw + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi A^2}{2}\delta\left(w+w_0\right)\right)dw$
$P_{XX} = \frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(w-w_0\right)dw + \frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(w+w_0\right)dw$
$P_{XX} = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4}$
$P_{XX} = \frac{A^2}{2}$

Tarea.

1) Hallar la potencia media y la densidad espectral de potencia del proceso $X(t)$ sin el uso de la transformada de Fourier, siendo $X(t) = A\cos\left(w_0t+\Phi\right)$, $\Phi \backsim U(0,2\pi)$.

$P_{XX} = \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\left(x(t)^2\right)dt$
$\psi_{xx}(w) = \lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{E\left(\lvert X_T(w)\rvert^2\right)}{2T}$
$X_T(w) = \int_{-T}^{T}x(t)\,e^{-jwt}dt$
$\lvert X_T(w)\rvert^2 = X_T(w)\,\overline{X_T(w)}$

2). Sea el proceso $X(t) = 3e^{-t\Theta}$ con $\Theta \backsim Exp(2)$. Determine las caracteristicas estadisticas de $X(t)$: $\overline{X}$, σ_X^2, P_X, $R_{XX}(t,t+\tau)$, $C_{XX}(t,t+\tau)$ y ρ.

3). Verificar si el proceso $X(t)$ del ejercicio 2 es: no correlacionado, ruido blanco , WSS, ergodico y estacionario de orden uno.

4) Hallar la potencia media y la densidad espectral de potencia del proceso $X(t)$ del ejercicio 2.

$\psi_{xx}(w) = \mathcal{F}\left(\mathbf{A}\left[R_{XX}(t,t+\tau)\right]\right)$
$\mathbf{A}\left[R_{XX}(t,t+\tau)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left(\psi_{xx}(w)\right)$
Si $X(t)$ es WSS se tiene que:
$\psi_{xx}(w) = \mathcal{F}\left(R_{XX}(\tau)\right) \longrightarrow$ *Teorema de Wiener Kintchine*
$R_{XX}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left(\psi_{xx}(w)\right)$.

Procesos Aleatorios Discretos

T_s : periodo de muestreo $\qquad f_s = \frac{1}{T_s}$: frecuencia de muestreo

$R_{X_sX_s}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{XX}(nT_s)\,\delta(\tau - nT_s) \quad \longrightarrow$ Discretización de función de autocorrelación.

$R_{XX}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,x(n+k)$ $\qquad$ Autocorrelación Discreta.

$R_{XY}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,y(n+k)$ $\qquad$ Correlación Cruzada Discreta.

$\psi_{x_sx_s}(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XX}(mT_s)\,e^{-jmwT_s}$ $\qquad w_s = \frac{2\pi}{T_s}$

$\Omega = wT_s \qquad \longrightarrow$ $\qquad$ Frecuencia continua para procesos discretos.

$\psi_{x_sx_s}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XX}(m)\,e^{-jm\Omega} \qquad \longrightarrow \quad DSP$

$R_{XX}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{2\pi}} \psi_{x_sx_s}(\Omega)\,e^{jm\Omega}d\Omega$

Transformada Discreta y Rapida de Fourier (DFT, FFT)

$\Omega_k = k\Omega_0$ $\quad$ Frecuencia Discretizada con k entero.
N : periodo o tamaño de la señal o función de correlación.
$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ $\qquad$ Frecuencia fundamental.
$\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$
$f = \frac{kf_s}{N}$ $\quad$ equivalencia en frecuencia del k-esímo punto de la FFT
$\psi_{x_sx_s}(\Omega) = \sum_{=m-\infty}^{\infty} R_{XX}(m)\,e^{-jm\Omega}$
$\psi_{xx}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} R_{XX}(m)\,e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}$ $\qquad W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$

$\psi_{xx}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} R_{XX}(m)\,W_N^{mk}$
$R_{XX}(m) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \psi_{xx}(k)\,W_N^{-mk}$

Transformada Rapida de Fourier (FFT):

$N = 2^m$
Si $N = 2$ $\qquad W_2 = e^{\frac{-j2\pi}{2}} = -1$
$\psi_{xx}(k) = \sum_{m=0}^{1} R_{XX}(m)\,(-1)^{mk}$
$\psi_{xx}(0) = \sum_{m=0}^{1} R_{XX}(m)\,(-1)^{m(0)} = \sum_{n=0}^{1} R_{XX}(m)$
$\psi_{xx}(0) = R_{XX}(0) + R_{XX}(1)$
$\psi_{xx}(1) = \sum_{m=0}^{1} R_{XX}(m)\,(-1)^{n} = R_{XX}(0) - R_{XX}(1)$
$\psi_{xx}(k) = \begin{bmatrix}\psi_{xx}(0)\\ \psi_{xx}(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_{XX}(0) + R_{XX}(1)\\ R_{XX}(0) - R_{XX}(1)\end{bmatrix}$
$\psi_{xx}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} R_{XX}(m)\,W_N^{mk}$ $\qquad W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$ $\qquad W_N^2 = \left(e^{\frac{-j2\pi}{N}}\right)^2 = e^{\frac{-j4\pi}{N}} = e^{\frac{-j2\pi}{\frac{N}{2}}} = W_{\frac{N}{2}}$
$R_G(m) = R_{XX}(2m) \qquad \longrightarrow$ tamaño $\frac{N}{2}$

$R_F\left(m\right)=R_{XX}\left(2m+1\right)\quad\longrightarrow$ tamaño $\frac{N}{2}$

$R_G\left(m\right) = \left\{\begin{array}{cc} R_{G_2}\left(m\right), \quad 0\leq m\leq \frac{N}{4} & \text{puntos pares} \\ R_{G_1}\left(m\right), \quad 0\leq m\leq \frac{N}{4} & \text{puntos impares}\end{array}\right\}\qquad R_{G_2}\left(n\right) = R_G\left(2n\right)$

$R_{G_1}\left(m\right) == R_G\left(2m+1\right)$

$R_F\left(m\right) = \left\{\begin{array}{cc} R_{F_2}\left(m\right), \quad 0\leq m\leq \frac{N}{4} & \text{puntos pares} \\ R_{F_1}\left(m\right), \quad 0\leq m\leq \frac{N}{4} & \text{puntos impares}\end{array}\right\}$

$R_{G_2}\left(m\right) = \left\{\begin{array}{cc} R_{G_{22}}\left(m\right), \quad 0\leq m\leq \frac{N}{8} & \text{puntos pares} \\ R_{G_{21}}\left(m\right), \quad 0\leq m\leq \frac{N}{8} & \text{puntos impares}\end{array}\right\}$

$\psi_{xx}\left(k\right)=\sum_{m=0}^{N-1}R_{XX}\left(m\right)W_N^{km}$

$\psi_{xx}\left(k\right)=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}R_{XX}\left(2m\right)W_N^{2km}+\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}R_{XX}\left(2m+1\right)W_N^{(2m+1)k}$

$\psi_{xx}\left(k\right)=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}R_G\left(m\right)\left(W_N^2\right)^{nk}+W_N^k\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}R_F\left(m\right)\left(W_N^2\right)^{nk}$

$\psi_{xx}\left(k\right)=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}R_G\left(m\right)W_{\frac{N}{2}}^{mk}+W_N^k\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}R_F\left(m\right)W_{\frac{N}{2}}^{mk}$

$\psi_{xx}\left(k\right)=R_G\left(k\right)+W_N^kR_F\left(k\right)$

$R_G\left(k\right)=R_{G_2}\left(k\right)+W_{\frac{N}{2}}^kR_{G_1}\left(k\right)$

$R_F\left(k\right)=R_{F_2}\left(k\right)+W_{\frac{N}{2}}^kR_{F_1}\left(k\right)$

$R_{G_2}\left(k\right)=R_{G_{22}}\left(k\right)+W_{\frac{N}{4}}^kR_{G_{21}}\left(k\right)$

Ejemplo1: Hallar la FFT de la función de autocorrelación $R_{XX}\left(m\right)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

solución: $N=4 \qquad W_4=e^{\frac{-j2\pi}{4}}=-j$

$R_G\left(m\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \qquad R_F\left(m\right)=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$

$R_G\left(k\right)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix} \qquad R_F\left(k\right)=\begin{bmatrix}0 & -2\end{bmatrix}$

$\psi_{xx}\left(k\right)=R_G\left(k\right)+W_4^kR_F\left(k\right)$

$$\psi_{xx}\left(k\right)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\left(-j\right)^k\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1+2j\\1\\-1-2j\end{bmatrix}$$

Tarea de Repaso.

1). Hallar la densidad espectral de potencia y hacer la grafica del espectro de potencia de un proceso $X\left(n\right)$ que tiene función de autocorrelación $R_{XX}\left(m\right)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.