Final

Juan A. Guzman, Diego M. López

6 de junio de 2021

1. 2D Navier-Stokes equations

(a) Consideraciones Teoricas de las ecuaciones hidrodinamicas:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

Estas ecuaciones describen la dinamica de fluidos incompresibles en terminos del campo de velocidades, el campo de presiones y densidad. Definimos una funcion potencial llamada funcion de corriente $\vec{u}(x)$, de modo que podemos calcular el campo de velocidades a traves de una operacion vectorial (Analoga al magnetismo).

$$\vec{v} := \nabla \times \vec{u}(x)$$

Esta definicion satisface automaticamente la ecuacion de continuidad dado que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$. Para un fluido que puede moverse en dos dimensiones, solo requerimos la componente z de la funcion de corriente ($u \equiv u_z$). Por tanto, el campo de velocidades puede ser calculado:

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Las superficies de nivel donde $u(x, y) = C$ son las lineas de corriente.

(b) Definimos otro campo vectorial denominado vorticidad:

$$\vec{w} := \nabla \times \vec{v}(x)$$

como el campo de velocidades no cambia en la direccion z, tenemos:

$$w_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Muestre que la vorticidad se relaciona con la funcion de corriente a traves de:

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{u}$$

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \nabla \times \nabla \times \vec{u} \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j(\nabla \times \vec{u})_k \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}\partial_l u_m \\
&= epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l u_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l u_m \\
&= \delta_{il}\delta_{jm}\partial_j\partial_l u_m - \delta_{im}\delta_{jl}\partial_j\partial_l u_m \\
&= \partial_m\partial_i u_m - \partial_l\partial_l u_i \\
&= \partial_i\partial_m u_m - \partial_l^2 u_i \\
&= \partial_i(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2\vec{u} \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2\vec{u}
\end{aligned}$$

Estas relaciones se reducen a una ecuacion de tipo Poisson (Note que la vorticidad es el termino fuente de la funcion de corriente)

$$\nabla^2\vec{u} = -\vec{w}$$

Aplicando el operador rotacional las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden escribir como (No realizar este paso, es complejo!):

$$\nu\nabla^2\vec{w} = [(\nabla \times u) \cdot \nabla]\vec{w}$$

donde ν es la viscosidad del fluido. Entonces debemos resolver simultaneamente un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas (un reto analitico imposible hasta el momento):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -w \tag{1}$$

$$\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2}$$

(c) Aplicando el metodo de diferencias finitas muestre que estas ecuaciones quedan discretizada como:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + h^2 w_{i,j}) \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
w_{i,j} &= \frac{1}{4}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) \\
&- \frac{R}{16}([u_{i,j+1} - u_{i,j-1}][w_{i+1,j} - w_{i-1,j}]) \\
&+ \frac{R}{16}([u_{i+1,j} - u_{i-1,j}][w_{i,j+1} - w_{i,j-1}])
\end{aligned} \tag{4}
$$

donde $R = \frac{V_0 h}{\nu}$ es el numero de Reynolds del lattice, V_0 es la velocidad del fluido en una de las fronteras y h es el paso de discretizacion.

resolvemos 1 y 2 en un $N_x \times N_y$ cuadricula de espacio uniforme h con

$$x = i\Delta x = ih$$

$i = 0, ...N_x$, $y = j\Delta y = jh$, $j = 0, ..., N_y$ gracias a la simetría del problema podemos hacer la siguiente aproximación para los Laplacianos de u y w, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

igualmente para la primera derivada

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}\frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h}$$

la forma diferencial de la ecuación de Navier-Stokes de vorticidad 1 se convierte en

$$
\begin{aligned}
u_{i,j} &= \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + h^2 w_{i,j}) \\
w_{i,j} &= \frac{1}{4}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) \\
&- \frac{R}{16}([u_{i,j+1} - u_{i,j-1}][w_{i+1,j} - w_{i-1,j}]) \\
&+ \frac{R}{16}([u_{i+1,j} - u_{i-1,j}][w_{i,j+1} - w_{i,j-1}])
\end{aligned}
$$

$R = \frac{1}{\nu} = \frac{V_0 h}{\nu}$

2. Condiciones a la frontera

Leer la seccion 19.9.2 (Boundary Conditions for a Beam) del libro de Landau, para entender y ajustar las condiciones de frontera de esta simulacion.

Muestre que la vorticidad en las fronteras del obstaculo se puede escribir como:

$$w_{i,j}|_{\text{right}} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h^2}$$

$$w_{i,j}|_{\text{left}} = \frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{h^2}$$

Debido a la viscosidad, en la fronteras del obstáculo la velocidad debe ser cero. Por tanto, la función del corriente debe anularse. En el interior del obstáculo tanto la función de corriente como la vorticidad deben ser nulas. La Tabla [1] resume las condiciones de frontera para el volumen de control y para el obstáculo interior.

3. Parametros de la simulacion

Para correr la simulacion se recomienda usar los siguientes parametros: $V_0 = 1m/s$, $\nu = 0{,}2m^2/s$. El paso espacial fue elegido en un lattice de $1 \times 1m^2$ con $N = 51$ puntos en cada lado (entonces $h = 0{,}02$). Adicionalmente, los limites del obstaculo se fijaron entre los puntos $(5, 5)$ y $(25, 30)$. Usar como parametro de sub-relajacion $\omega \leq 0{,}9$ por conveniencia. Las Figuras [1, 2, 3] representan la solucion para la funcion corriente, la vorticidad y las lineas de corriente del campo de velocidades respectivamente.

-	Izquierda	Derecha	Abajo	Arriba
		Obstaculo		
$u(x,y)$	0	0	0	0
$\frac{\partial u}{\partial x}$	-	-	-	-
$\frac{\partial u}{\partial y}$	-	-	-	-
$w(x,y)$	$-2(\frac{u_{i-1,j}-u_{i,j}}{h^2})$	$-2(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h^2})$	$-2(\frac{u_{i,j-1}-u_{i,j}}{h^2})$	$-2(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h^2})$
$\frac{\partial w}{\partial y}$	-	-	-	-
$\frac{\partial w}{\partial y}$	-	-	-	-
		Volumen de Control		
$u(x,y)$	0	0	0	0
$\frac{\partial u}{\partial x}$	0	0	0	0
$\frac{\partial u}{\partial y}$	-	-	-	V_0
$w(x,y)$	0	0	0	0
$\frac{\partial w}{\partial y}$	-	0	-	-
$\frac{\partial w}{\partial y}$	-	-	-	-

Cuadro 1: Condiciones de frontera para la funcion corriente y vorticidad

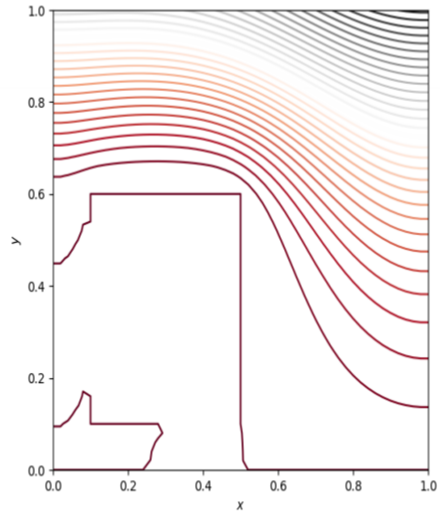

Figura 1: Funcion corriente en la region solucion. El comando usado es plt.contour().

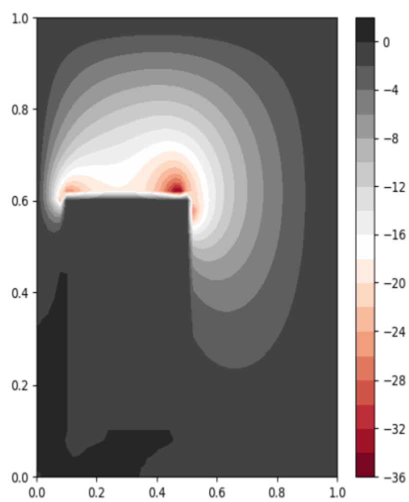

Figura 2: Vorticidad en la region solucion. El comando usado es plt.contour().

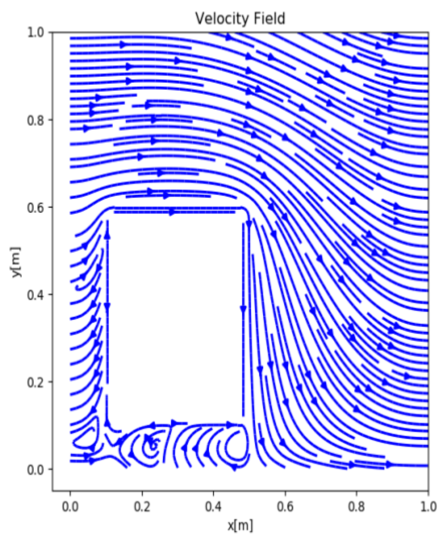

Figura 3: Lineas de corriente en la region solucion. El comando usado es plt.streamplot()