

Taller 3

Juan A. Guzman, Diego M. López

12 de mayo de 2021

1. Colision de dos discos rigidos

La Figura [1] representa la colision de dos discos de masa m_1 y m_2 , y radios r_1 y r_2 respectivamente. El primer disco tiene una velocidad inicial \vec{u}_1 antes del choque y el segundo disco se encuentra en reposo $\vec{u}_2 = 0$. El parametro de impacto b , que es la distancia entre la direccion de la velocidad \vec{u}_1 y el centro del segundo disco; caracteriza la interaccion.

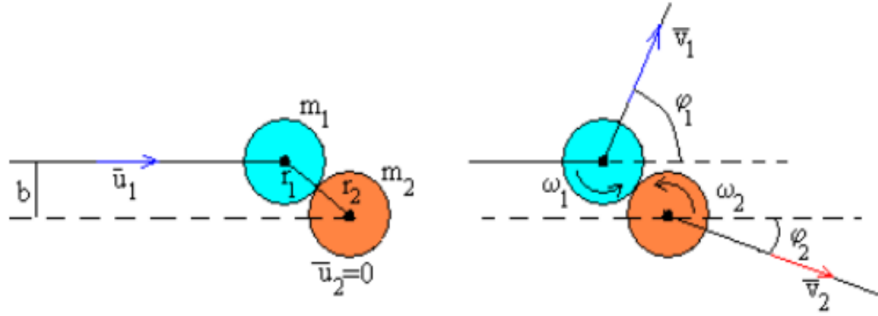


Figure 1: Esquema de colisión de dos discos rígidos.

a) De la conservacion del momento lineal demuestre que:

$$m_1 u_1 = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

$$0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}$$

de la conservación del momento lineal tenemos llamamos \vec{p}_i el momento lineal inicial y \vec{p}_f el momento lineal final

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

dividimos en componentes sus componentes, para la componente del momento en x obtenemos que $\vec{p}_{xi} = m_1 u_1$ y para $\vec{p}_{xf} = m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2$

haciendo la identificación como $v_{1x} = v_1 \cos \phi_1$ y $v_{2x} = v_2 \cos \phi_2$. Así

$$m_1 u_1 = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

para el momento lineal en y $p_{yi} = 0$ y para $p_{yf} = m_1 v_1 \sin \phi_1 - m_2 v_2 \sin \phi_2$ la identificación como $v_{1y} = v_1 \sin \phi_1$ y $v_{2y} = -v_2 \sin \phi_2$. Así

$$0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}$$

b) De la conservación del momento angular respecto del punto de contacto demuestre que (ver Figura [2]):

$$-m_1 r_1 u_1 = I_1 \omega_1 - m_1 r_1 (v_{1x} \sin \theta + v_{1y} \cos \theta)$$

$$0 = I_2 \omega_2 + m_2 r_2 (v_{2x} \sin \theta + v_{2y} \cos \theta)$$

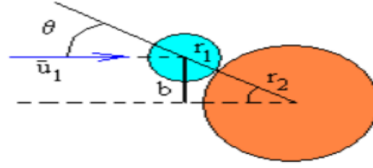


Figure 2: Esquema para la conservación del momentum angular.

el momento angular se define como

$$L = \vec{r} \times \vec{p} + I\omega_0 \quad (1)$$

de ahí es fácil ver que el momento angular inicial del disco de radio r_1 es $L_i = -m_1 r_1 u_1$ y el momento angular final es $L_f = I_1 \omega_1 - m_1 r_1 (v_{1x} \sin \theta + v_{1y} \cos \theta)$

luego $L_{1i} = L_{1f}$

$$-m_1 r_1 u_1 = I_1 \omega_1 - m_1 r_1 (v_{1x} \sin \theta + v_{1y} \cos \theta)$$

similaramente para el momento angular del disco de radio r_2 se obtiene la expresión

$$0 = I_2 \omega_2 + m_2 r_2 (v_{2x} \sin \theta + v_{2y} \cos \theta)$$

c) De la definición del coeficiente de restitución demuestre que:

$$e = - \frac{(v_{1x} \cos \theta - v_{1y} \sin \theta) - (v_{2x} \cos \theta - v_{2y} \sin \theta)}{u_1 \cos \theta}$$

d) Si no se considera deslizamiento de un disco respecto al otro en el punto de contacto P . Las velocidades de los discos en el punto P son iguales. Muestre que esta restriccion conduce a:

$$r_1\omega_1 + v_{1x}\sin\theta + v_{1y}\cos\theta = -r_2\omega_2 + v_{2x}\sin\theta + v_{2y}\cos\theta$$

Definamos $M = \frac{m_1}{m_2} = 1,5$, $I = kmr^2$ con $k = 1/2$ para un disco, $r_1 = 0,1cm$, $r_2 = 0,2cm$, el coeficiente de restitution parcialmente elastico ($e = 0,8$) y $\vec{u}_1 = 2m/s\hat{i}$. Variar el angulo ($0 < \theta < \pi/2$) de incidencia para describir algunos estados finales despues del choque.

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & -\cos\theta & 1 & 1 \\ 0 & M & 0 & 1 & 0 & 0 \\ M & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{2x} \\ v_{2y} \\ r_1\omega_1 \\ r_2\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mu_1 \\ eu_1\cos\theta \\ u_1\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Precesion de la orbita de Mercurio

Observaciones astronomicas realizadas en el siglo XIX mostraban que el perihelio de Mercurio que es el punto mas cercano al sol no era estatico, por el contrario, rota lentamente alrededor del sol. La influencia de los otros planetas no respondian completamente al valor de precesion observado y el perihelio de Mercurio avanza con una velocidad de precesion cercana a 43 segundos de arco por siglo. Fue la Relatividad General de Albert Einstein la teoria que dio una respuesta satisfactoria a dicho fenomeno. Esta teoria predice una correccion a la ley de gravitacion de Newton dada por:

$$\vec{F} = -\frac{GM_1M_2}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) \hat{r}$$

Para Mercurio $\alpha = 1,1 \times 10^{-8} au^2$. Dado el valor pequeño de α se requiere un alto nivel de precision para la integracion de la orbita en cada revolucion. Para encontrar dicho resultado se requiere una ligera modificacion al metodo de Verlet:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)(\Delta t)^2$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\vec{a}(t + \Delta t) + \vec{a}(t))$$

Los parametros de orbita para Mercurio son: $e = 0,205630$ y $a = 0,387098$. Inicializar la orbita en el afelio con:

$$\vec{r}(0) = [a(1 + e), 0]$$

$$\vec{v}(0) = [0, \sqrt{G \frac{1-e}{a(1+e)}}]$$

Demuestre las expresiones de la Ecuaciones (8) y (9). Usar un paso temporal del mismo orden de $\alpha \sim \Delta t$ para poder medir el efecto de la precesion. Genere al menos 10 orbitas alrededor del Sol guardando en un archivo de datos el tiempo en años terrestres que tarda mercurio en llegar al perihelio y el angulo de llegada que debe ser cercano a 180° . Usando el archivo de datos grafique 2 veces el angulo de llegada vs 2 veces el tiempo en años terrestre que le toma en llegar de nuevo al perihelio. La grafica que se obtiene es: (Hint: el perihelio es facil de encontrar dado que es el radio minimo a lo largo de la orbita, Be careful con la estrategia para calcular el angulo, ademas de convertir los grados por año a segundos de arco por siglo)

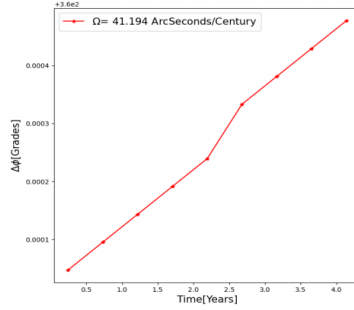


Figure 3: Ángulo que se desplaza el perihelio de Mercurio a lo largo de su movimiento alrededor del sol. Se han realizado 10 revoluciones para encontrar la velocidad de precesión, que tiene un error relativo $\approx 2\%$ con respecto al valor observado.

3. Tensor de Inercia de una estrella naciente

En un instante de tiempo una estrella naciente esta compuesta por un conjunto de masas unitarias ($m = 1kg$). Las posiciones de cada una de las particulas estan escritas en: <https://github.com/asegura4488/MetodosCompu2021/blob/main/Week10/data/CuerposCelestes.dat>

Para un sistema de N particulas con masa m_k y posiciones r_k , el tensor de inercia se define como:

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^N m_k ((r_k \cdot r_k) \mathbf{E} - r_k \otimes r_k)$$

donde \mathbf{E} es el tensor unitario $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$

a) Muestre que el tensor de inercia para esta estrella esta dado por:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1,1163 \times 10^4 & 2,0524 \times 10^0 & 7,4286 \times 10^{-1} \\ 2,0524 \times 10^0 & 8,9520 \times 10^3 & -2,3483 \times 10^3 \\ 7,4286 \times 10^{-1} & -2,3483 \times 10^3 & 4,2341 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Note que el tensor es simetrico $I_{ij} = I_{ji}$ como es esperado.

b) Encuentre los auto-valores y auto-vectores. Si dos valores propios son cercanos o iguales ¿Que interpretacion tienen los auto-valores respecto a las simetrias de este sistema?

c) Haga una grafica en 3D de las estrella, los auto-vectores de la estrella y las estrella sobre sus ejes principales. (ver Figura [4])

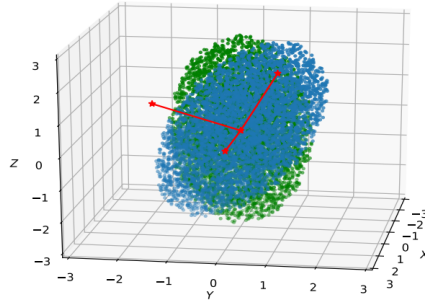


Figure 4: Estrella naciente: Puntos originales (azul), los ejes principales del cuerpo (rojo) y puntos sobre los ejes principales (verde.)

4. Series de Fourier

Demostrar (con rigor matematico) los siguientes teoremas:

1. Si $f(t)$ es continua cuando $-T/2 \leq t \leq T/2$ con $f(-T/2) = f(T/2)$, y si la derivada $f'(t)$ es continua por tramos y diferenciable; entonces la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

se puede diferenciar termino por termino para obtener:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 (-a_n \sin(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t))$$

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{df(t)}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{a_0}{2} \right) + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{d}{dt} (\cos(n\omega_0 t)) + b_n \frac{d}{dt} (\sin(n\omega_0 t)) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \sin(n\omega_0 t)(n\omega_0) + b_n \cos(n\omega_0 t)(n\omega_0)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n\omega_0) (-a_n \sin(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t))
\end{aligned}$$

2. Sea $f(t)$ continua por tramos en el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$ y sea $f(t+T) = f(t)$. Demostrar que la serie de Fourier se puede integrar termino por termino para obtener:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n (\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)) + a_n (\sin(n\omega_0 t_2) - \sin(n\omega_0 t_1))]$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_0}{2} dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) dt \\
&= \left[\frac{a_0 t}{2} \right]_{t_1}^{t_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{t_1}^{t_2} \cos(n\omega_0 t) dt + b_n \int_{t_1}^{t_2} \sin(n\omega_0 t) dt \right) \\
&= \frac{a_0(t_2 - t_1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[\frac{a_n}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 t) \right]_{t_1}^{t_2} - \left[\frac{b_n}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \right]_{t_1}^{t_2} \right) \\
&= \frac{(t_2 - t_1)a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} (a_n (\sin(n\omega_0 t_2) - \sin(n\omega_0 t_1)) - b_n (\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)))
\end{aligned}$$

Aplicacion numerica: Usar la serie de Fourier de $f(t) = t^2$ en el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$ y $f(t+2\pi) = f(t)$. Para estimar numericamente (Usando Python y la identidad de Parseval) la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

5. Transformada de Fourier

Descargue los datos de las manchas solares desde 1600. <https://github.com/asegura4488/MetodosCompu2021/blob/main/Week10/data/ManchasSolares.dat>. La columna 1 es el año, la segunda es el mes y la tercera es el número de manchas. Para encontrar el periodo de manchas desde 1900 (Figura [1]) solares uno de los posibles caminos es:

- Filtrar los datos a partir del año 1900.
- Quitar el valor medio de los datos para que la frecuencia esté centrada en cero.
- Calcular la transformada rápida de Fourier (`np.fft.fft`) y las frecuencias (`np.fft.fftfreq`).
- Encontrar la frecuencia dominante por año. Usar este valor para encontrar el periodo por año.
- Reproducir la Figura [5] usando solo la frecuencia dominante.

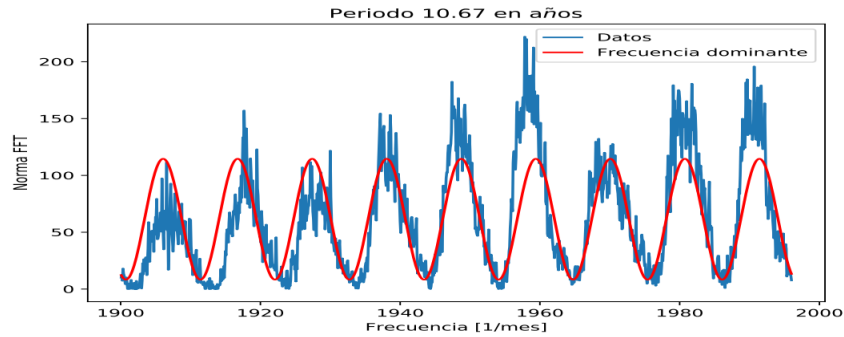


Figure 5: Frecuencia de manchas solares después de 1900.

6. Redes Neuronales

1. Modifique el código sobre redes neuronales escrito en C++ para entrenar una red neuronal sencilla. La red neuronal debe comportarse como una compuerta XNOR. Dicha compuerta tiene la siguiente tabla de verdad:

La red debe tener la topologia mas simple posible (un par de neuronas en un capa o dos neuronas en dos capas) y entrenada usando solo numeros aleatorios.

A	B	Output
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2. Derive analiticamente los terminos necesarios para la propagacion del error en una red neuronal.

$$\delta^L = \frac{\partial C}{\partial a^L} \frac{\partial a^L}{\partial z^L}$$

$$\delta^{L-1} = (\delta^L)^T W^L \frac{\partial a^{L-1}}{\partial z^{L-1}}$$

donde C es la funcion de costo (metrica) de la red.