# Taller 1

Juan A. Guzman, Diego M. López
*Universidad de los Andes, departamento de física, Bogotá D.C, Colombia.*

## I.

1. La ecuacion de movimiento para una caida libre esta dada por:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

donde $y$ representa la posicion de la particula, $m$ su masa y $g$ es la aceleracion debida a la gravedad ($g = 9{,}8m/s^2$). Esta ecuacion esta sujeta a las condiciones iniciales ($y_0 = 0$, $v_0 = +50m/s$), que representan la posicion y velocidad iniciales respectivamente. La solucion analitica de esta ecuacion esta dada por:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Dibuje la posicion y velocidad como funcion del tiempo, iterando hasta que el sistema llegue hasta la posicion inicial.

Ahora asuma que el sistema esta sometido a una fuerza resistiva proporcional al cuadrado de la velocidad instantanea, tal que:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + \frac{1}{2}C\rho A v^2$$

donde $C = 0{,}8$ es un factor experimental asociado a la resistencia del aire, $\rho = 1{,}225kg/m^3$ es la densidad del aire y $A = \pi R^2$ es el area eficaz de la esfera (tomar inicialmente $R = 0{,}05m$).

a) Demuestre que la solucion analitica esta dada por:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\gamma^2}ln\left[\frac{cosh(tanh^{-1}(\frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}}))}{cosh(-\gamma\sqrt{g}t + tanh^{-1}(\frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}}))}\right]$$

$$v(t) = \frac{\sqrt{g}}{\gamma}tanh\left(-\gamma\sqrt{g}t + tanh^{-1}(\frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}})\right)$$

donde $\gamma = \sqrt{\frac{C\rho A}{2m}}$ es el parametro de amortiguamiento, con $m = 1kg$. Note que existe una restriccion cinematica en este sistema $-1 < \frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}} < +1$

$$v(t) = y\dot{(}t)$$

$$\ddot{y} = -g + \gamma^2\dot{y}^2$$

$$\dot{v} = -g + \gamma^2 v^2$$

$$\frac{\dot{v}}{\gamma^2 v^2 - g} = 1$$

$$\int \frac{dv}{\gamma^2 v^2 - g} = \int dt$$

$$\int \frac{dv}{(\gamma v - \sqrt{g})(\gamma v + \sqrt{g})} = t + c$$

$$\frac{A}{\gamma v - \sqrt{g}} + \frac{B}{\gamma v + \sqrt{g}} = \frac{1}{(\gamma v - \sqrt{g})(\gamma v + \sqrt{g})}$$

$$A\gamma v + A\sqrt{g} + B\gamma v - B\sqrt{g} = 1$$

$$A + B = 0$$

$$A = -B$$

$$A - B = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

$$B = -\frac{1}{2\sqrt{g}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\int \frac{1}{\gamma v - \sqrt{g}}dv - \int \frac{1}{\gamma v + \sqrt{g}}dv\right] = t + c$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\frac{ln(\gamma x - \sqrt{g})}{\gamma} - \frac{ln(\gamma x + \sqrt{g})}{\gamma}\right] = t + C$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}\gamma}ln\left(\frac{\gamma x - \sqrt{g}}{\gamma v + \sqrt{g}}\right) = t + C$$

$$\frac{1}{2}ln\left(\left[\frac{1+\frac{\gamma v}{\sqrt{g}}}{-(1-\frac{\gamma v}{\sqrt{g}})}\right]^{-1}\right)=\sqrt{g}\gamma t+\sqrt{g}\gamma C$$

$$-arctanh(\frac{\gamma v}{\sqrt{g}})=\sqrt{g}\gamma t+\sqrt{g}\gamma C$$

$$v(t)=\frac{\sqrt{g}}{\gamma}tanh\left(-\sqrt{g}\gamma t-\sqrt{g}\gamma C\right)$$

$$v(0)=v_0=\frac{\sqrt{g}}{\gamma}tanh\left(-\sqrt{g}\gamma C\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{g}\gamma}tanh^{-1}\left(\frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}}\right)=C$$

$$v(t)=\frac{\sqrt{g}}{\gamma}tanh\left(-\sqrt{g}\gamma t+tanh^{-1}\left(\frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}}\right)\right)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=v(t)$$

$$dy(t)=v(t)dt$$

$$y(t)-y_0=\int_0^t v(t)dt$$

$$y(t)-y_0=\int_0^t\frac{\sqrt{g}}{\gamma}tanh\left(-\sqrt{g}\gamma t+tanh^{-1}\left(\frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}}\right)\right)dt$$

$$y(t)=y_0-\frac{1}{\gamma^2}\,ln\left[cosh\left(-\sqrt{g}\gamma t+tanh^{-1}\left(\frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}}\right)\right)\right]\Bigg|_0^t$$

$$y(t)=y_0+\frac{1}{\gamma^2}ln\left[\frac{cosh(\frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}})}{cosh\left(-\sqrt{g}\gamma t+tanh^{-1}\left(\frac{\gamma v_0}{\sqrt{g}}\right)\right)}\right]$$

b) Dibuje la posicion y velocidad como funcion del tiempo en la misma grafica del caso ideal.

La velocidad en el caso ideal esta dado por

$$v(t)=\frac{d}{dt}y(t)=v_0-gt$$

c) ¿Cual es el tiempo de vuelo para ambos casos?

El tiempo de vuelo para el caso ideal es de aproximadamente 10.204s y el tiempo para el caso 27.705s.

d) Estudie el comportamiento del tiempo de vuelo como funcion de $C$.

## II.

1. (10 Puntos) Escriba en codigo que calcule los primeros 1000 numeros primos.
2. Dibuje los numeros en funcion de su posicion, es decir, 2 es el primero, 3 es el segundo, 5 es ... ¿Encuentra alguna regularidad en la grafica?
3. Genere los primeros 30 numeros de la serie de Fibonnaci. Use la sucesion para calcular el numero aureo $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}61803398$ (Opcionalmente, ¿Cual es el origen de este numero?).
4. Estime un error relativo $\epsilon=|\frac{|\text{Estimated}-\text{Real}|}{\text{Real}}$
5. Haga una grafica entre la precision ($\epsilon$) vs la cantidad de numeros generados en la sucesion. Adicionalmente, haga un ajuste polinomial para encontrar la dependencia. Esto deberia ser algo como: $\epsilon\propto\frac{1}{\sqrt{N}}$.

## III.

1. Bajar los datos disponibles en https://github.com/asegura4488/MetodosCompu2021/blob/main/Week2/Data/Hw_data.dat
2. Graficar los datos para visualizar la funcion.
3. Hacer un ajuste (usando scipy) a los datos para encontrar los parametros A y B:

$$f(t)=\frac{A}{1+e^{-Bt}}$$

## IV.

Modifique el codigo visto en clase para estimar automaticamente todas las raices reales del polinomio (importante para el ultimo punto):

$$f(x)=3x^5+5x^4-x^3$$

## V.

Para el siguiente punto, hacer el codigo en C++ y luego pintar en Python.

1. Usando $h=0{,}05$, estimar la derivada central de la funcion:

$$f(x)=x-sin(x)$$

a) En el punto $x = 0$

b) En el intervalo $-1 \leq x \leq 1$

c) Estimar el error en cada nodo y el error global de la aproximacion en el intervalo anterior.

2. Demuestre que la segunda derivada discreta puede tambien escribirse como:

$$\frac{df(x_j)}{dx^2} = \frac{f(x_{j+2}) - 2f(x_j) + f(x_{j-2})}{4h^2}$$

$$\frac{df(x_j)}{dx} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{2h}$$

$$\frac{d^2 f(x_j)}{dx^2} = \frac{d\frac{df(x_j)}{dx}}{dx} = \frac{\frac{df(x_j)}{dx}|_{(x_{j+1})} - \frac{df(x_j)}{dx}|_{(x_j)}}{2h}$$

$$\frac{d^2 f(x_j)}{dx^2} = \frac{1}{2h}\left[\frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{2h}|_{x_{j+1}} - \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{2h}\right]$$

$$\frac{d^2 f(x_j)}{dx^2} = \frac{1}{4h^2}\left[f(x_{j+1+1}) - f(x_{j+1}) - f(x_{j+1}) + f(x_j)\right]$$

Usando la funcion del punto anterior, compare el error punto a punto de ambas formulas. ¿Las dos definiciones son consistentes?

## VI.

1. Implementar la regla de Simpson 3/8 y $h = 0{,}01$ para estimar:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Compare los errores entre la regla de Simpson 1/3 y 3/8.

2. Dada la aproximacion de cuadratura gausiana:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

donde w, w1, ...wn son los coeficientes ponderados.

(a) Halle numericamente los ceros de los cuatro primeros polinomios de Legendre.

(b) Halle analiticamente el polinomio $p_2(x) = 1 + 2x + x^2$ en la base de Legendre.

(c) Calcule analiticamente las funciones de ponderacion ($w_k$) en la base de Legendre, para 3 y 4 puntos, es decir $n = 2, 3$ usando:

$$w_k = \frac{1}{\frac{d(P_{n+1}(x_k))}{dx}} \int_{-1}^1 \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k} dx$$

o bien usando:

$$w_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}$$

(d) Usando la libreria sympy de Python y la Ecuacion (12), calcular los pesos de ponderacion para los primeros 10 polinomios de Legendre. Compare que los resultados del paquete legendre.leggauss de Python.

(e) Estime la siguiente integral usando el metodo de cuadratura Gausiana:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 1} \approx 1{,}110721$$