- Métodos computacionales:
  Alejandro Segura

- **Examen Final 2021-1**
  La entrega en SICUA es máximo a las **11:00 pm del Viernes 4 de Junio de 2021**, debe incluir el Notebook (.ipynb) con los nombres completos de cada integrante del grupo de trabajo.

# 1 2D Navier-Stokes equations

1. **(100 Puntos)** Consideraciones Teóricas de las ecuaciones hidrodinámicas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \quad (1) \\ (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2) \end{aligned}$$

   Estas ecuaciones describen la dinámica de fluidos incompresibles en términos del campo de velocidades, el campo de presiones y densidad. Definimos una función potencial llamada función de corriente $\vec{u}(x)$, de modo que podemos calcular el campo de velocidades a través de una operación vectorial (Análoga al magnetismo).

$$\vec{v} := \nabla \times \vec{u}(x), \quad (3)$$

   Esta definición satisface automáticamente la ecuación de continuidad dado que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$. Para un fluido que puede moverse en dos dimensiones, solo requerimos la componente $z$ de la función de corriente ($u \equiv u_z$). Por tanto, el campo de velocidades puede ser calculado:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ v_y &= -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (4) \end{aligned}$$

   Las superficies de nivel donde $u(x, y) = C$ son las líneas de corriente.

2. Definimos otro campo vectorial denominado vorticidad:

$$\vec{w} := \nabla \times \vec{v}(x), \quad (5)$$

   como el campo de velocidades no cambia en la dirección $z$, tenemos:

$$w_z = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (6)$$

   Muestre que la vorticidad se relaciona con la función de corriente a través de:

$$\vec{w} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u} \quad (7)$$

   Estas relaciones se reducen a una ecuación de tipo Poisson (Note que la vorticidad es el término fuente de la función de corriente).

$$\nabla^2\vec{u} = -\vec{w} \tag{8}$$

Aplicando el operador rotacional las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden escribir como (No realizar este paso, es complejo!):

$$\nu\nabla^2\vec{w} = [(\nabla\times u)\cdot\nabla]\vec{w} \tag{9}$$

donde $\nu$ es la viscosidad del fluido. Entonces debemos resolver simultáneamente un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas (un reto analítico imposible hasta el momento):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= w \\ \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{10}$$

La no-linealidad de esta ecuaciones proviene de los productos de las derivadas de $u$ y $w$.

3. Aplicando el método de diferencias finitas muestre que estas ecuaciones quedan discretizadas como:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\Big(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + h^2 w_{i,j}\Big) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} w_{i,j} &= \frac{1}{4}\Big(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}\Big) \\ &\quad -\frac{R}{16}\Big([u_{i,j+1} - u_{i,j-1}][w_{i+1,j} - w_{i-1,j}]\Big) \\ &\quad +\frac{R}{16}\Big([u_{i+1,j} - u_{i-1,j}][w_{i,j+1} - w_{i,j-1}]\Big) \end{aligned} \tag{12}$$

donde $R = \frac{V_0 h}{\nu}$ es el número de Reynolds del lattice, $V_0$ es la velocidad del fluido en una de las fronteras y $h$ es el paso de discretización.

# 2 Condiciones a la frontera

Leer la sección 19.9.2 (Boundary Conditions for a Beam) del libro de Landau, para entender y ajustar las condiciones de frontera de esta simulación.

1. Muestre que la vorticidad en las fronteras del obstáculo se puede escribir como:

$$\begin{aligned} w_{i,j}\big|_{right} &= -2\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h^2} \\ w_{i,j}\big|_{left} &= -2\frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{h^2} \end{aligned} \tag{13}$$

Debido a la viscosidad, en la fronteras del obstáculo la velocidad debe ser cero. Por tanto, la función del corriente debe anularse. En el interior del obstáculo tanto la función de corriente como la vorticidad deben ser nulas. La Tabla [1] resume las condiciones de frontera para el volumen de control y para el obstáculo interior.

# 3 Parámetros de la simulación

1. Para correr la simulación se recomienda usar los siguientes parámetros: $V_0 = 1\ m/s$, $\nu = 0.2\ m^2/s$. El paso espacial fue elegido en un lattice de $1\times 1\ m^2$ con $N = 51$ puntos en cada lado (entonces $h = 0.02$). Adicionalmente, los límites del obstáculo se fijaron entre los puntos $(5,5)$ y $(25,30)$. Usar como parámetro de sub-relajación $\omega \leq 0.9$ por conveniencia. Las Figuras [1,2,3] representan la solución para la función corriente, la vorticidad y las líneas de corriente del campo de velocidades respectivamente.

Table 1: Condiciones de frontera para la función corriente y vorticidad

| - | Izquierda | Derecha | Abajo | Arriba |
|---|---|---|---|---|
| | | Obstaculo | | |
| $u(x,y)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\partial u}{\partial x}$ | - | - | - | - |
| $\frac{\partial u}{\partial y}$ | - | - | - | - |
| $w(x,y)$ | $-2(\frac{u_{i-1,}-u_{i,j}}{h^2})$ | $-2(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h^2})$ | $-2(\frac{u_{i,j-1}-u_{i,j}}{h^2})$ | $-2(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h^2})$ |
| $\frac{\partial w}{\partial x}$ | - | - | - | - |
| $\frac{\partial w}{\partial y}$ | - | - | - | - |
| | | Volumen de Control | | |
| $u(x,y)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\partial u}{\partial x}$ | 0 | 0 | - | - |
| $\frac{\partial u}{\partial y}$ | - | - | - | $V_0$ |
| $w(x,y)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\partial w}{\partial x}$ | - | 0 | - | - |
| $\frac{\partial w}{\partial y}$ | - | - | - | - |

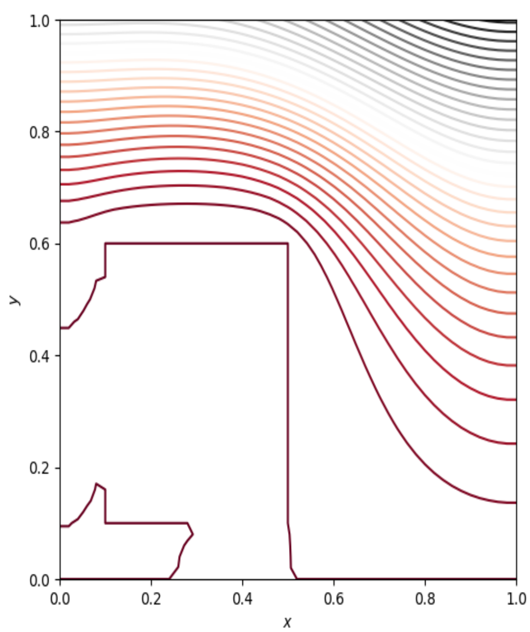


Figure 1: Función corriente en la región solución. El comando usado es `plt.contour()`.

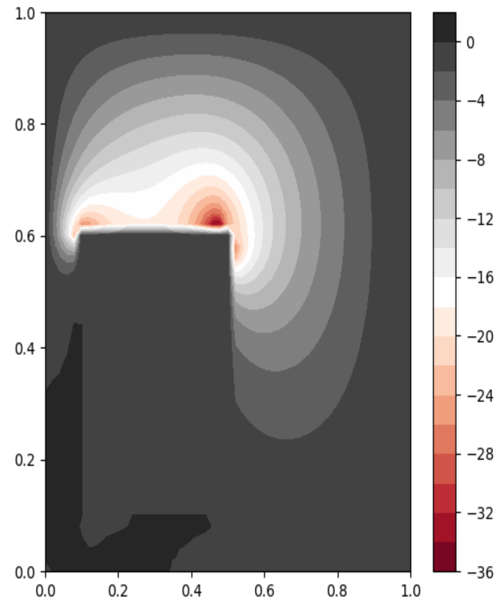


Figure 2: Vorticidad en la región solución. El comando usado es `plt.contour()`.

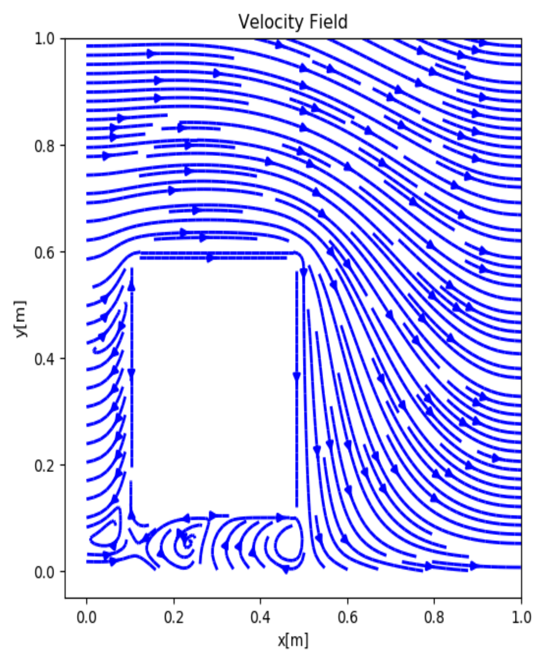


Figure 3: Lineas de corriente en la región solución. El comando usado es `plt.streamplot()`