- Métodos computacionales:
  Alejandro Segura

- **Parcial 3**
  La entrega en SICUA es máximo a las **11:00 pm del 21 de Mayo de 2021**, la cuál debe tener el siguiente formato:

  a) Incluir el código Notebook (.ipynb) y las demostraciones en formato `pdf`.

  b) Guardar la información en una carpeta llamada Parcial2_Nombre1_Nombre2

  c) Comprimir en formato `zip` la carpeta para tenga el nombre final Parcial2_Nombre1_Nombre2.zip

# 1 Cálculo de trayectoria para nave exploratoria lunar

1. **(100 Puntos)** La NASA requiere dos estudiantes para realizar una pasantía en el departamento de objetos cercanos a la Tierra. Para elegir a los estudiantes se solicita una simulación sencilla del problema de tres cuerpos de una nave que pueda fotografiar el lado oculto de la Luna. Yo sugerí a mis estudiantes del curso de Métodos Computacionales de la Universidad de los Andes como posibles candidatos; en quienes puedo depositar mi confianza.

   Para presentar sus propuestas sugiero la siguiente estrategia:

   a) Vamos a suponer la Tierra inmóvil y la Luna siguiendo una órbita circular cuya frecuencia angular es $\omega = 2.6617 \times 10^{-6}\ s^{-1}$. Esto evita integrar la ecuación de la Luna, la cuál es en realidad elíptica.

   b) La simulación será realizada en el S.I. de unidades que resulta más conveniente en el caso del sistema Tierra-Luna. El paso de integración deben ser segundos de vuelo ($h \sim s$), pero se debe graficar cada 1000 pasos usando `animation` dado que el viaje a la Luna dura días terrestres.

$$
\begin{aligned}
G &= 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2} \\
m_T &= 5.9736 \times 10^{24}\ kg \\
r_T &= 6.3781 \times 10^{6}\ m \\
m_L &= 0.07349 \times 10^{24}\ kg \\
r_L &= 1.7374 \times 10^{6}\ m \\
d &= 3.844 \times 10^{8}\ m
\end{aligned} \tag{1}
$$

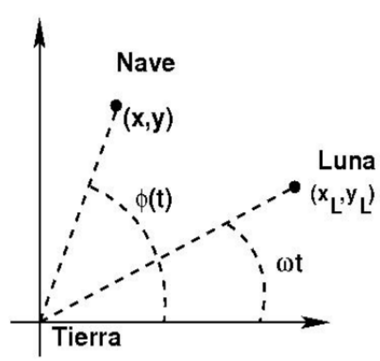


Figure 1: Diagrama de posiciones Nave-Luna

c) Muestre usando la Figura [1b] que la distancia Nave-Luna está dada por:

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{r(t)^2 + d^2 - 2r(t)dcos(\phi - \omega t)} \tag{2}$$

d) Usando esta distancia muestre que el Hamiltoniano de la nave está dado por:

$$H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} \tag{3}$$

donde $L$ es la energía cinética menos la energía potencial de la nave en coordenadas polares.

e) Muestre que las ecuaciones de Hamilton, que son las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\
\dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \\
\dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3}[r - dcos(\phi - \omega t)] \\
\dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3} rdsin(\phi - \omega t)
\end{aligned} \tag{4}$$

Note que las dos primeras ecuaciones se refiere al momento lineal y angular de la nave y las segundas a la fuerza. Adicionalmente, este sistema de ecuaciones diferenciales no tiene solución analítica al ser no lineales. Este tipo de sistemas son de gran estudio numérico para establecer órbitas más reales.

f) Para reducir el error de redondeo se pueden definir nuevas variables normalizadas a la distancia lunar: $\tilde{r} = r/d$,$\phi$,$\tilde{p}_r = p_r/md$ y $\tilde{p}_\phi = p_\phi/md^2$. Muestre que el sistema se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{r}} &= \tilde{p}_r, \\
\dot{\phi} &= \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}^2}, \\
\dot{\tilde{p}}_r &= \frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}^3} - \Delta\left\{\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}'^3}[\tilde{r} - cos(\phi - \omega t)]\right\} \\
\dot{\tilde{p}}_\phi &= -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}'^3} sin(\phi - \omega t)
\end{aligned} \tag{5}$$

donde $\Delta \equiv Gm_T/d^3$, $\mu \equiv m_L/m_T$ y $\tilde{r}' \equiv \sqrt{1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}cos(\phi - \omega t)}$.

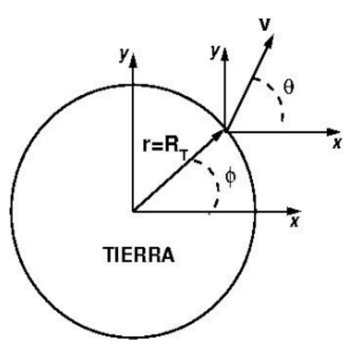


Figure 2: Diagrama de lanzamiento de la nave espacial desde la Tierra

g) Resolver el sistema de ecuaciones usando el algoritmo Runge-Kutta 4 con las siguientes condiciones iniciales: El radio inicial es el radio terrestre $r = r_T$, $\phi$ es la latitud sobre el planeta, la velocidad inicial está dada por: $\vec{v} = [vcos(\theta), vsen(\theta)]$ no hay un método general para asignar $v, \theta, \phi$. La magnitud de la velocidad debe ser cercana la velocidad de escape de la Tierra para que la nave se pueda poner rumbo a la Luna. Ustedes deben ajustar los ángulos para lograr fotografiar el lado oculto de la Luna; lanzando su misión cuando la Luna se encuentre en el Perigeo orbital. Finalmente, para asignar los momentos canónicos iniciales muestre lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_r^0 &= \frac{p_r}{md} = \frac{1}{d}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{d}\left(\frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{dt}\right) = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{rd} \\
&= \tilde{v}cos(\theta-\phi) \\
\tilde{p}_\phi^0 &= \frac{p_\phi}{md^2} = \tilde{r}^2\frac{d}{dt}arctan(y/x) = \frac{\tilde{r}^2}{1+y^2/x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{\tilde{r}^2}{r^2}(\dot{y}x-y\dot{x}) = \tilde{r}\tilde{v}sin(\theta-\phi)
\end{aligned} \qquad (6)
$$

Note que estas expresiones son simplemente el momento lineal y angular iniciales por unidad de masa de la nave espacial.