# Parcial 3

Juan A. Guzman, Diego M. Lopez

22 de mayo de 2021

## 1. Calculo de trayectoria para nave exploratoria lunar

La NASA requiere dos estudiantes para realizar una pasantia en el departamento de objetos cercanos a la Tierra. Para elegir a los estudiantes se solicita una simulacion sencilla del problema de tres cuerpos de una nave que pueda fotografiar el lado oculto de la Luna. Yo sugeri a mis estudiantes del curso de Metodos Computacionales de la Universidad de los Andes como posibles candidatos; en quienes puedo depositar mi confianza.

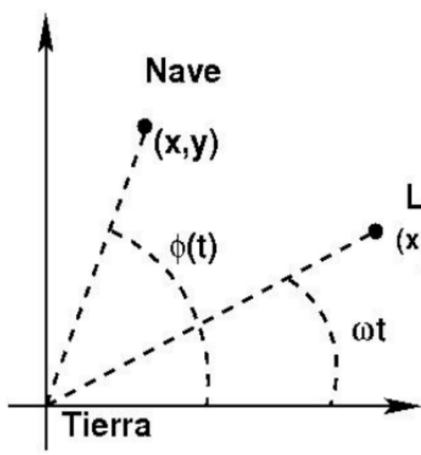


Figure 1: Diagrama de posiciones Nave-Luna

Para presentar sus propuestas sugiero la siguiente estrategia:

a) Vamos a suponer la Tierra inmovil y la Luna siguiendo una orbita circular cuya frecuencia angular es $\omega = 2{,}6617 \times 10^{-6} s^{-1}$. Esto evita integrar la ecuacion de la Luna, la cual es en realidad eliptica.

b) La simulacion sera realizada en el S.I. de unidades que resulta mas conveniente en el caso del sistema Tierra-Luna. El paso de integracion deben ser segundos de vuelo ($h \sim s$), pero se debe graficar cada 1000 pasos usando animation dado que el viaje a la Luna dura dias terrestres.

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$$
$$m_T = 5{,}9736 \times 10^{24} kg$$
$$r_T = 6{,}3781 \times 10^6 m$$
$$m_L = 0{,}07349 \times 10^{24} kg$$
$$r_L = 1{,}7374 \times 10^6 m$$
$$d = 3{,}844 \times 10^8 m$$

c) Muestre usando la Figura [1] que la distancia Nave-Luna esta dada por:
El angulo entre el radio Nave-Tierra y el radio Luna tierra esta dado por:

$$\alpha(t) = \phi(t) - \omega t$$

A partir de este angulo podemos usar el teorema del coseno para determinar la distancia Nave-Luna

$$r_L(r, \phi, t)^2 = r(t)^2 + d^2 - 2r(t)dcos(\alpha(t))$$

$$r_L(r, \phi, t) = \sqrt{r(t)^2 + d^2 - 2r(t)dcos(\phi(t) - \omega t)}$$

d) Usando esta distancia muestre que el Hamiltoniano de la nave esta dado por:
El lagrangiano del la nave esta dado por $L = T - V$, donde $V$, la energia cinética, esta dado como

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2)$$

y $V$, en este caso, el potencial gravitacional

$$V = -\frac{Gmm_T}{r} - \frac{Gmm_L}{r_L(r, \phi, t)}$$

luego $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = p_r = m\dot{r}$, similarmente $p_\phi = m\dot{\phi}r^2$

entonces el lagrangiano expresado en función de sus momentos es

$$L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + \frac{Gmm_T}{r} + \frac{Gmm_L}{r_L(r, \phi, t)}$$

Adicionalmente sabemos

$$p_r = m\dot{r}$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}$$

A partir de esto y recordando que el Hamiltoniano es la transformación de legendre del Lagrangiano tenemos:

$$H(q,p,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

$$\begin{aligned} H(r,\phi,t) &= p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L \\ &= p_r\frac{p_r}{m} + p_\phi\frac{p_\phi}{mr^2} - \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + \frac{Gmm_T}{r} + \frac{Gmm_L}{r_L(r,\phi,t)} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} \end{aligned}$$

e) Muestre que las ecuaciones de Hamilton, que son las ecuaciones de movimiento estan dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) + \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) - \frac{\partial}{\partial p_r}\left(G\frac{mm_T}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial p_r}\left(G\frac{mm_L}{r_L}\right) \\ &= \frac{p_r}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) + \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(G\frac{mm_T}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(G\frac{mm_L}{r_L}\right) \\ &= \frac{p_\phi}{mr^2} \end{aligned}$$

$$\dot{p_r} = -\frac{\partial H}{\partial r}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(G\frac{mm_T}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(G\frac{mm_L}{r_L}\right)$$
$$= \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - \frac{Gmm_L}{r_L^3}[r - dcos(\phi - \omega t)]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(G\frac{mm_L}{r_L}\right) = Gmm_L\frac{d}{dr}\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rdcos(\phi - \omega t)}}$$
$$= -\frac{Gmm_L}{2(r^2 + d^2 - 2rdcos(\phi - \omega t))^{\frac{3}{2}}}[2r - 2dcos(\phi - \omega t)]$$
$$= -\frac{Gmm_L}{r_L^3}[r - dcos(\phi - \omega t)]$$

$$\dot{p_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(G\frac{mm_T}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(G\frac{mm_L}{r_L}\right)$$
$$= -\frac{Gmm_L}{r_L^3}[rdsin(\phi - \omega t)]$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(G\frac{mm_L}{r_L}\right) = Gmm_L\frac{d}{d\phi}\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rdcos(\phi - \omega t)}}$$
$$= -\frac{Gmm_L}{2(r^2 + d^2 - 2rdcos(\phi - \omega t))^{\frac{3}{2}}}[2rdsin(\phi - \omega t)]$$
$$= -\frac{Gmm_L}{r_L^3}[rdsin(\phi - \omega t)]$$

Note que las dos primeras ecuaciones se refiere al momento lineal y angular de la nave y las segundas a la fuerza. Adicionalmente, este sistema de ecuaciones diferenciales no tiene solución analítica al ser no lineales. Este tipo de sistemas son de gran estudio numérico para establecer orbitas mas reales.

f) Para reducir el error de redondeo se puede definir nuevas variables normalizadas a la distancia lunar: $\tilde{r} = r/d$, $\phi$, $\tilde{p}_r = p_r/md$ y $\tilde{p}_\phi = p_\phi/md^2$. Muestre que el sistema se puede escribir como sigue:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \dot{\tilde{r}} = \tilde{p}_r \\
&2) \quad \dot{\phi} = \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}^2} \\
&3) \quad \dot{\tilde{p}}_r = \frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}^3} - \Delta[\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}'^3}(\tilde{r} - cos(\phi - \omega t))] \\
&4) \quad \dot{\tilde{p}}_\phi = -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}'^3} sin(\phi - \omega t)
\end{aligned}
$$

donde $\Delta \equiv Gm_T/d^3$, $\mu \equiv m_L/m_T$ y $\tilde{r}' \equiv \sqrt{1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}cos(\phi - \omega t)}$.

1) $\quad \dot{\tilde{r}} = \dot{r}/d$ por otro lado $\tilde{p}_r = \frac{m\dot{r}}{md} = \dot{\tilde{r}} = \dot{r}/d$ .Así $\dot{\tilde{r}} = \tilde{p}_r$

2) $\quad \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}^2} = \frac{m\dot{\phi}r^2}{md^2}\left(\frac{d^2}{r^2}\right) = \dot{\phi}$

3) primero notemos que $\tilde{r}' = \frac{r_L}{d}$, entonces $\dot{\tilde{p}}_r = \dot{p}_r/md$. En el inciso e se observo que $\dot{p_r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - \frac{Gmm_L}{r_L^3}[r - dcos(\phi - \omega t)]$ dividimos la expresión por $md$ , luego $\dot{p_r}/md = \frac{p_\phi^2}{m^2dr^3} - G\frac{mm_T}{mdr^2} - \frac{Gmm_L}{mdr_L^3}[r - dcos(\phi - \omega t)]$ organizando términos se llega a $\frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}^3} - \Delta[\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}'^3}(\tilde{r} - cos(\phi - \omega t))]$

4) $\dot{\tilde{p}}_\phi = \dot{p}_\phi/md^2$, en el inciso e se observó que $\dot{p}_\phi = -\frac{Gmm_L}{r_L^3}[rdsin(\phi - \omega t)]$, dividiendo por $md^2$

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{p}}_\phi &= \frac{\dot{p}_\phi}{md^2} \\
&= \frac{1}{md^2}\frac{Gm_L}{d^2r_L^3}[rdsin(\phi - \omega t)] \\
&= \frac{Gm_L}{d^4\tilde{r}'^3}[rsin(\phi - \omega t)]
\end{aligned}
$$

y asi finalmente

$$\dot{\tilde{p}}_\phi = -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}'^3} sin(\phi - \omega t)$$

g) Resolver el sistema de ecuaciones usando el algoritmo de Runge-Kutta 4 con las siguientes condiciones iniciales: El radio inicial es el radio terrestre $r = r_T$, $\phi$ es la latitud sobre el planeta, la velocidad inicial esta dada por: $\vec{v} = [vcos\theta, vsin\theta]$, no hay un método general para asignar $v$, $\theta$, $\phi$. La magnitud de la velocidad debe ser cercana a la velocidad de escape de la Tierra para que la nave se pueda poner en rumbo a la Luna. Ustedes deben ajustar los ángulos para lograr fotografiar el lado oculto de la luna; lanzando su misión cuando la Luna se encuentre en el Perigeo orbital. Finalmente, para asignar los momentos canónicos iniciales muestre lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_r^0 &= \frac{p_r}{md} = \frac{1}{d}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{d}\left(\frac{d\sqrt{x^2+y^3}}{dt}\right) = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{rd} \\
&= \tilde{v}cos(\theta-\phi) \\
\tilde{p}_\phi^0 &= \frac{p_\phi}{md^2} = \tilde{r}^2\frac{d}{dt}arctan(y/x) = \frac{\tilde{r}^2}{1+y^2/x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{\tilde{r}^2}{r^2}(\dot{y}x-y\dot{x}) = \tilde{r}\tilde{v}sin(\theta-\phi)
\end{aligned}$$

Note que estas expresiones son simplemente el momento lineal y el angular iniciales por unidad de masa de la nave espacial.