

# Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

ANÁLISIS NUMÉRICO PARA LA OPTIMIZACIÓN NO-LINEAL

## RETO: TERREMOTOS QUE SACUDEN EDIFICIOS

*Francisco Javier Alvarado Chacón*

*Pedro Cervantes Lozano*

*Luz María González Ureña*

*Humberto Valadez Rangel*

Autores:

Francelio Uriel Rodriguez Garcia A01352663

Juan Pablo Valenzuela Dorado A00227321

Juan Pablo Bernal Lafarga A01742342

Alfredo Murillo Madrigal A01641791

Junio 2024

## Introducción

Los terremotos representan una de las amenazas naturales más devastadoras para la infraestructura urbana, especialmente en áreas con alta actividad sísmica. La energía liberada durante un terremoto puede generar movimientos violentos del suelo que se transmiten a las estructuras, causando desplazamientos y vibraciones significativas en los edificios. Estos movimientos pueden llevar a fallos estructurales severos, poniendo en riesgo la vida de los ocupantes y resultando en pérdidas económicas considerables. En respuesta a esta amenaza se han desarrollado diversas técnicas de ingeniería para mitigar los efectos sísmicos, entre las cuales se destacan los amortiguadores.

El objetivo de este reporte es analizar el comportamiento dinámico de un edificio de tres pisos sometido a fuerzas sísmicas, tanto en ausencia como en presencia de amortiguadores, se presenta un modelo matemático en la cual describe las interacciones entre las masas de los pisos, las constantes de rigidez de los resortes y las constantes de amortiguamiento. Este modelo se basa en las ecuaciones diferenciales que representan las fuerzas actuantes en cada piso y sus correspondientes aceleraciones, velocidades y desplazamientos.

## Terremotos Históricos

Los terremotos son fenómenos naturales que ocurren cuando se libera energía acumulada en la corteza terrestre debido al movimiento de las placas tectónicas, esta liberación de energía provoca ondas sísmicas que se propagan a través de la Tierra, causando movimientos bruscos del suelo. Los terremotos pueden variar en magnitud y profundidad, y sus efectos pueden ir desde leves temblores hasta devastadores desastres naturales que ocasionan daños masivos a la infraestructura y muertes de personas.

La mayoría de los terremotos se originan en las zonas de subducción, fallas transformantes y bordes

de placas tectónicas divergentes, la energía acumulada en estas áreas se libera de manera repentina cuando las rocas superan su límite de elasticidad, deslizándose bruscamente a lo largo de una falla. Este proceso genera ondas sísmicas primarias (P), secundarias (S) y superficiales, que se registran con sismógrafos y se miden en la escala de Richter o la escala de magnitud de momento.

**Chile, 22 de mayo de 1960.** El terremoto de Valdivia, ocurrido el 22 de mayo de 1960, es el terremoto de mayor magnitud registrado en la historia, con una magnitud de 9.5. Este sismo catastrófico duró aproximadamente 14 minutos y afectó gravemente a Valdivia, una ciudad ubicada en el sur de Chile. El impacto fue devastador: más de 2,000 personas perdieron la vida y la ciudad de Valdivia se hundió 4 metros bajo el nivel del mar. Las consecuencias del terremoto se sintieron en toda la región circundante, provocando tsunamis que afectaron diversas costas del Pacífico. Este evento resaltó la necesidad de implementar medidas más estrictas de construcción y preparación ante desastres naturales en Chile y en todo el mundo.

**Alaska, EE.UU., 28 de marzo de 1964.** El terremoto de Alaska, también conocido como el terremoto del Viernes Santo, ocurrió el 28 de marzo de 1964 y es el tercer terremoto de mayor magnitud registrado, con una magnitud de 9.2. El sismo sacudió las ciudades de Anchorage y Valdez durante cuatro minutos, causando una destrucción masiva en áreas clave de Anchorage. Aproximadamente 60 personas murieron como resultado del terremoto y los tsunamis subsiguientes. Alaska, reconocida como la región más sísmica de Estados Unidos, experimentó cambios significativos en sus prácticas de construcción y preparación para emergencias a raíz de este devastador evento.

**Ciudad de México, México, 19 de septiembre de 1985.** El terremoto de Ciudad de México de 1985, con una magnitud de 8.1, ocurrió el 19 de septiembre y duró alrededor de 1 minuto y 30 segundos. Este terremoto fue uno de los desastres más mortíferos en la historia moderna de México.

Según cifras del gobierno, hubo 3,692 víctimas mortales, aunque la Cruz Roja estimó que el número de muertos superó los 10,000. La destrucción fue extensa, con muchas construcciones colapsadas, incluyendo edificios relativamente nuevos. El impacto social y económico fue profundo, llevando a la implementación de nuevas reglas de construcción en la Ciudad de México y al desarrollo del Proyecto de Alerta Sísmica Mexicano. Este sistema de alerta temprana tiene como objetivo proporcionar advertencias para reducir el impacto de futuros terremotos, subrayando la importancia de la preparación y la resiliencia en zonas sísmicamente activas.

## Estado del Arte

- Detección y Monitoreo.
  - Redes de Sensores Sísmicos: Se han mejorado y ampliado las redes de sensores que detectan movimientos sísmicos en tiempo real. Estos sensores pueden identificar movimientos terrestres sutiles y proporcionar datos críticos para la predicción y el análisis de terremotos.
  - Alertas Tempranas: Sistemas como el Alerta Sísmica Mexicano y ShakeAlert en la costa oeste de Estados Unidos proporcionan alertas tempranas de terremotos, dando segundos cruciales para que las personas busquen refugio y se preparen.
- Análisis de datos.
  - Big Data y Machine Learning: El uso de grandes volúmenes de datos y algoritmos de machine learning ha mejorado la capacidad para predecir terremotos y entender mejor los patrones sísmicos. Estas tecnologías permiten el análisis de enormes conjuntos de datos de manera eficiente.
  - Modelos Sísmicos Avanzados: Se han desarrollado modelos computacionales avanzados que simulan el comportamiento de fallas y la propagación de ondas sísmicas,

lo que ayuda a entender mejor los procesos subyacentes y predecir el impacto de futuros terremotos.

- Ingeniería y Construcción.
  - Diseño Sismo-Resistente: La ingeniería estructural ha avanzado significativamente en el diseño de edificios que pueden soportar movimientos sísmicos. Esto incluye el uso de materiales más resistentes y técnicas de construcción innovadoras, como la base aislante y los disipadores de energía.
  - Retrofit Sísmico: La modernización de edificios existentes para mejorar su resistencia a los terremotos es una práctica cada vez más común, utilizando tecnologías modernas para reforzar estructuras antiguas.
- Investigación Geológica.
  - Estudios de Fallas: Investigaciones detalladas de fallas tectónicas proporcionan información valiosa sobre los ciclos sísmicos y las áreas de riesgo potencial.
  - Placas Tectónicas: Estudios continuos sobre la dinámica de las placas tectónicas ayudan a comprender mejor las causas de los terremotos y a identificar zonas de alta actividad sísmica.

## Control

Un sistema de control activo en un edificio es un conjunto avanzado de dispositivos y tecnologías diseñados para monitorear y ajustar la respuesta estructural del edificio en tiempo real, con el objetivo de mejorar su desempeño durante eventos sísmicos u otras cargas dinámicas. Estos sistemas representan una evolución significativa en la ingeniería civil y sismológica, proporcionando una solución pro-activa para proteger infraestructuras y salvar vidas.

Los sistemas de control activo incluyen sensores, actuadores y una unidad central de procesamiento. Los sensores, ubicados estratégicamente a lo largo

del edificio, detectan movimientos y vibraciones. Estos datos se transmiten a la unidad central de procesamiento, que analiza la información en tiempo real. Si se detecta un evento sísmico o una carga dinámica significativa, la unidad central envía señales a los actuadores. Estos actuadores, que pueden ser amortiguadores, masas de contrapeso o dispositivos similares, generan fuerzas contrarias a las fuerzas inducidas por el sismo, mitigando las vibraciones y desplazamientos.

La implementación de sistemas de control activo ofrece múltiples ventajas. Primero, mejora significativamente la resiliencia de los edificios ante terremotos, reduciendo el riesgo de daños estructurales y colapsos. Segundo, aumenta la seguridad de los ocupantes, proporcionando una respuesta inmediata y adaptativa a las perturbaciones sísmicas. Tercero, puede prolongar la vida útil de la estructura al minimizar el estrés y la fatiga acumulados. Además, estos sistemas pueden ser integrados en edificios nuevos o adaptados a estructuras existentes, ofreciendo flexibilidad en su aplicación.

## Modelo matemático de un edificio de 3 pisos

*Sin amortiguadores*

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_0 x_1 + k_1 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_1 (x_2 - x_1) + k_2 (x_3 - x_2) \\ m_3 x_3'' &= -k_2 (x_3 - x_2) \end{aligned}$$

*Con amortiguadores*

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_0 x_1 + k_1 (x_2 - x_1) - c_1 x_1' - c_2 (x_1' - x_2') \\ m_2 x_2'' &= -k_1 (x_2 - x_1) + k_2 (x_3 - x_2) - \\ &\quad c_2 (x_2' - x_1') - c_3 (x_2' - x_3') \\ m_3 x_3'' &= -k_2 (x_3 - x_2) - c_3 (x_3' - x_2') \end{aligned}$$

Donde:

$m_i$  son las masas de los  $i$ -pisos

$x_i''$  son las aceleraciones de los  $i$ -pisos

$x_i'$  son las velocidades de los  $i$ -pisos

$x_i$  son los desplazamientos de los  $i$ -pisos

$k_i$  son las constantes de resorte de los  $i$ -pisos

$c_i$  son las constantes de amortiguamiento de los  $i$ -pisos

## Representación en el espacio de estados

### Espacio de estados sin amortiguadores

Para obtener la representación de nuestro modelo matemático de un edificio de 3 pisos en el espacio de estados, seguimos los siguientes pasos:

- Definimos nuestro vector de estado y el vector de entrada como:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 = x_1 \\ z_2 = \dot{x}_1 \\ z_3 = x_2 \\ z_4 = \dot{x}_2 \\ z_5 = x_3 \\ z_6 = \dot{x}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = u$$

- Escribimos nuestro sistema de ecuaciones en términos  $\mathbf{z}$ :

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -\frac{k_0 + k_1}{m_1} z_1 + \frac{k_1}{m_1} z_3 \\ \dot{z}_4 &= \frac{k_1}{m_2} z_1 - \frac{k_1 + k_2}{m_2} z_3 + \frac{k_2}{m_2} z_5 \\ \dot{z}_6 &= \frac{k_2}{m_3} z_3 - \frac{k_2}{m_3} z_5 \end{aligned}$$

- Definimos las matrices de espacio de estados  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ :

La ecuación del sistema en forma de espacio de estados es  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u}$ , donde  $\mathbf{u}$  es el vector de entrada (Control).

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 = \ddot{z}_2 \\ \dot{z}_2 = \ddot{x}_1 \\ \dot{z}_3 = \ddot{z}_4 \\ \dot{z}_4 = \ddot{x}_2 \\ \dot{z}_5 = \ddot{z}_6 \\ \dot{z}_6 = \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{k_0+k_1}{m_1}z_1 + \frac{k_1}{m_1}z_3 \\ z_4 \\ \frac{k_1}{m_2}z_1 - \frac{k_1+k_2}{m_2}z_3 + \frac{k_2}{m_2}z_5 \\ z_6 \\ \frac{k_2}{m_3}z_3 - \frac{k_2}{m_3}z_5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, las matrices **A** y **B** son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_0+k_1}{m_1} & 0 & \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} & 0 & -\frac{k_2}{m_3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la representación en el espacio de estados de nuestro sistema es:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

donde:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_0+k_1}{m_1} & 0 & \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} & 0 & -\frac{k_2}{m_3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Espacio de estados con amortiguadores

Seguimos los mismos pasos que la representación del espacio de estados del modelo anterior. Seguimos los siguientes pasos:

- Definimos nuestro vector de estado y el vector de entrada como:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = u$$

- Escribimos nuestro sistema de ecuaciones en términos de primera y segunda derivada:

$$\ddot{z}_2 = -\frac{k_0+k_1}{m_1}z_1 + \frac{k_1}{m_1}z_3 - \frac{c_1+c_2}{m_1}z_2 + \frac{c_2}{m_1}z_4$$

$$\ddot{z}_4 = \frac{k_1}{m_2}z_1 - \frac{k_1+k_2}{m_2}z_3 + \frac{k_2}{m_2}z_5 - \frac{c_2+c_3}{m_2}z_4 + \frac{c_2}{m_2}z_2 + \frac{c_3}{m_2}z_6$$

$$\ddot{z}_6 = \frac{k_2}{m_3}z_3 - \frac{k_2}{m_3}z_5 + \frac{c_3}{m_3}z_4 - \frac{c_3}{m_3}z_6$$

- Definimos las matrices de espacio de estados **A** y **B**:

La ecuación del sistema en forma de espacio de estados es  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ , donde **u** es el vector de entrada (Control).

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \ddot{x}_1 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \ddot{x}_2 \\ \dot{z}_5 = z_6 \\ \dot{z}_6 = \ddot{x}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{k_0+k_1}{m_1}z_1 + \frac{k_1}{m_1}z_3 - \frac{c_1+c_2}{m_1}z_2 + \frac{c_2}{m_1}z_4 \\ \frac{k_1}{m_2}z_1 - \frac{k_1+k_2}{m_2}z_3 + \frac{k_2}{m_2}z_5 - \frac{c_2+c_3}{m_2}z_4 + \frac{c_2}{m_2}z_2 + \frac{c_3}{m_2}z_6 \\ \frac{k_2}{m_3}z_3 - \frac{k_2}{m_3}z_5 + \frac{c_3}{m_3}z_4 - \frac{c_3}{m_3}z_6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, las matrices **A** y **B** son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_0+k_1}{m_1} & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c_2}{m_1}z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{c_2+c_3}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_3}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} & -\frac{k_2}{m_3} & -\frac{c_3}{m_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la representación en el espacio de estados de nuestro sistema es:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

donde:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_0+k_1}{m_1} & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c_2}{m_1}z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{c_2+c_3}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_3}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} & -\frac{k_2}{m_3} & -\frac{c_3}{m_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Solución Analítica

$$X_1(s) = \frac{k_3 s m_3 x_{30} + k_2 s m_1 x_{10} + m_{22} s x_{20} (s^2 m_1 + k_1 + k_2) (s^2 m_3 + k_3)}{(s^2 m_1 + k_1 + k_2) (s^2 m_3 + k_3) (s^2 m_2 + k_2 + k_3) - k_3^2 - k_2^2}$$

$$X_2(s) = \frac{k_2 k_3 s m_3 x_{30} + k_2^2 s m_1 x_{10} + k_2 m_2 s x_{20} (s^2 m_1 + k_1 + k_2) (s^2 m_3 + k_3) + m_1 s x_{10} [(s^2 m_1 + k_1 + k_2) (s m_2^2 + k_1) (s^2 m_2 + k_2 + k_3) - k_3^2 - k_2^2]}{(s^2 m_1 + k_1 + k_2) [(s^2 m_1 + k_1 + k_2) (s^2 m_3 + k_3) (s^2 m_2 + k_2 + k_3) - k_3^2 - k_2^2]}$$

$$X_3(s) = \frac{k_2^2 s m_2 x_{30} + k_3 k_2 s m_1 x_{10} + k_3 m_2 s x_{20} (s^2 m_1 + k_1 + k_2) (s^2 m_3 + k_3) + m_3 s x_{30} [(s m_1 + k_1 + k_2) (s^2 m_3 + k_3) (s^2 m_2 + k_2 + k_3) - k_3^2 - k_2^2]}{(s^2 m_3 + k_3) [(s^2 m_1 + k_1 + k_2) (s^2 m_3 + k_3) (s^2 m_2 + k_2 + k_3) - k_3^2 - k_2^2]}$$

Donde las constantes  $x_{i0}$  son las condiciones iniciales homogéneas. Dándonos una solución particular para el caso donde el edificio tiene un desplazamiento inicial. Además, notemos que ninguno de los desplazamientos depende de los desplazamientos de otros pisos, solo depende del tiempo, y para escenarios posteriores, dependerá de la función de entrada (que será nuestro terremoto).

La forma de la solución para el desplazamiento de los 3 pisos de un edificio sin amortiguadores se obtuvo aplicando la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones diferenciales. Y cabe aclarar que debido a la complejidad que presenta calcular la transformada inversa de Laplace de la solución mostrada, es que se dejó en términos de  $s$ , es decir, en dominio de la transformada.

## Simulación

Para nuestra simulación de los modelos matemáticos, desarrollamos un script en MATLAB que proporciona una implementación detallada de la simulación y visualización del comportamiento dinámico de nuestro modelo para un edificio de tres pisos, con y sin amortiguamiento. En nuestro modelo, cada piso está representado como una masa conectada por resortes y amortiguadores, lo que nos permite modelar su respuesta a condiciones iniciales específicas. A continuación, se detallan los pasos realizados en MATLAB.

Primero, definimos los parámetros de nuestro sistema, incluyendo las masas de cada piso y las constantes de rigidez de los resortes. Estos parámetros son esenciales para determinar el comportamiento dinámico del sistema. En nuestro caso, definimos las masas con los siguientes valores y las constantes de

rigidez como se muestra a continuación:

**Masas:**

- $m_1 = 1000$
- $m_2 = 1000$
- $m_3 = 1000$

**Constantes de rigidez:**

- $c_1 = 100000$
- $c_2 = 80000$
- $c_3 = 50000$

Luego, construimos la matrices A y B que representan las ecuaciones de estado del sistema. Recordemos que la matriz A describe las relaciones entre las variables de estado (posiciones y velocidades) de cada masa, mientras que la matriz B establece como un vector de ceros debido a la falta de entradas de control externas.

La dinámica del sistema se modela mediante una función anónima que calcula la tasa de cambio de las variables de estado en función del tiempo y las propias variables de estado, multiplicando nuestra matriz A por el vector de estado actual. Las condiciones iniciales para las posiciones y velocidades de cada masa se establecieron previamente.

Definimos un intervalo de tiempo para la simulación y utilizamos la función ode45 para resolver las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de nuestro sistema.

Finalmente, visualizamos los resultados mediante gráficas que muestran los desplazamientos de cada masa en función del tiempo.

$x' = Ax$  | **Edificio**

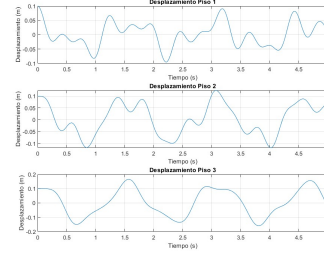


Figure 1: Modelo Sin amortiguamiento

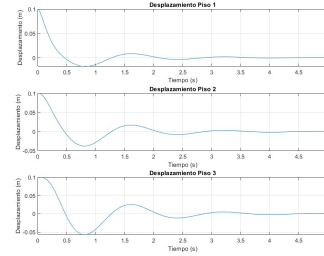


Figure 2: Modelo Con amortiguamiento

$x' = Ax + Bu$  | **Edificio con Control**

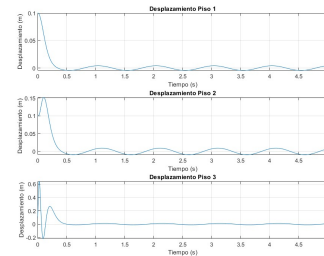


Figure 3: Modelo Sin amortiguamiento

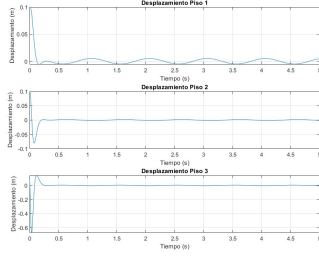


Figure 4: Modelo Con amortiguamiento

$x' = Ax + Bu + A\cos(wt) + B\sin(wt)$  | **Edificio con Control y Terremoto**

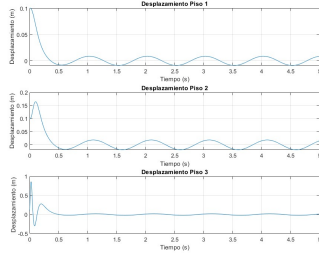


Figure 5: Modelo Sin amortiguamiento

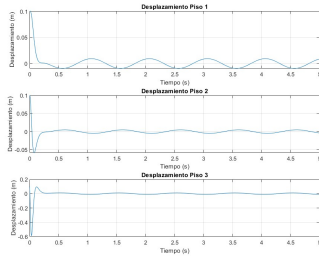


Figure 6: Modelo Con amortiguamiento

$x' = Ax + Bu + e^{-\alpha t} \cos(wt)$  | **Edificio con Control y Terremoto decreciente.**

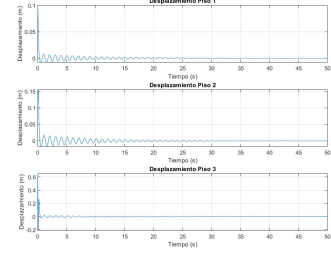


Figure 7: Modelo Sin amortiguamiento

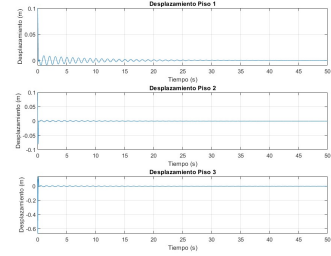


Figure 8: Modelo Con amortiguamiento

$x' = Ax + A\cos(wt)$  | **Edificio sin Control y Terremoto.**

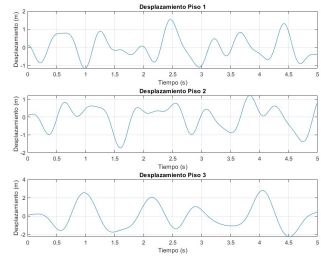


Figure 9: Modelo Sin amortiguamiento



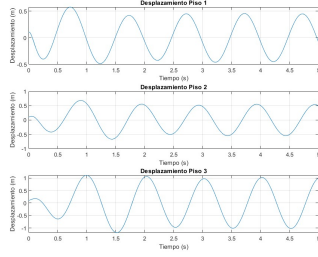


Figure 10: Modelo Con amortiguamiento

$x' = Ax + Bu + A \cos(wt) + \eta(0, 1) \mid$  **Edificio con Control, terremoto y ruido.**

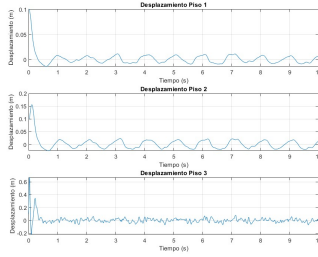


Figure 11: Modelo Sin amortiguamiento

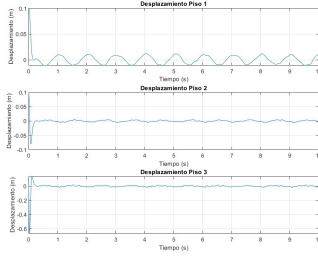


Figure 12: Modelo Con amortiguamiento

## Resultados

### • Edificio

#### – Sin amortiguadores

\* Desplazamiento Piso 1: Muestra un movimiento oscilatorio cuya amplitud varía con el tiempo. Este comportamiento es característico de un sistema sometido a una excitación armónica, donde las fuerzas intentan devolver el piso a su posición de equilibrio, pero debido a la inercia, el movimiento continúa de manera oscilatoria.

\* Desplazamiento Piso 2: El segundo piso también exhibe un comportamiento oscilatorio, pero con diferencias notables en comparación con el primer piso. La amplitud de las oscilaciones del segundo piso es distinta y presenta un desfase respecto al primer piso. Estas diferencias se deben a las interacciones entre los pisos, mediadas por las constantes de rigidez de los resortes. En este contexto, la energía se transfiere entre los pisos a través de los resortes, resultando en variaciones en los patrones de oscilación.

\* Desplazamiento Piso 3: El tercer piso presenta el mayor desplazamiento entre los tres pisos, lo cual es esperado en estructuras sometidas a una excitación en la base, como en un terremoto. A medida que la excitación sísmica viaja hacia arriba en el edificio, la falta de amortiguamiento provoca que la energía se acumule, resultando en mayores desplazamientos en los pisos superiores.

#### – Con amortiguadores

\* Desplazamiento Piso 1: Podemos ver que muestra que el desplazamiento inicial de  $0.1m$  decrece rápidamente, el sistema oscila alrededor del equilibrio, mostrando una tendencia amortiguada que eventualmente se estabiliza a lo largo del tiempo.

\* Desplazamiento Piso 2: Similar al primer piso, el segundo piso también

comienza con un desplazamiento inicial de  $0.1m$ , sin embargo, su comportamiento oscilatorio presenta una amplitud ligeramente mayor en comparación con el primer piso. La oscilación amortiguada es notable, con las oscilaciones disminuyendo en magnitud con el tiempo hasta que el sistema se estabiliza.

- \* Desplazamiento Piso 3: El tercer piso sigue igualmente una tendencia similar de oscilación amortiguada como pudimos observar en el segundo piso, aunque la amplitud de las oscilaciones parece ser la más alta entre los tres pisos al inicio, lo que sugiere una menor o mayor flexibilidad en este piso, sin embargo existe una disminución gradual en la amplitud de las oscilaciones hasta que el sistema se estabiliza.

- Edificio con Control

- Sin amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: Igualmente el desplazamiento inicial es de  $0.1m$ , podemos lograr observar una rápida disminución en el desplazamiento con pequeñas oscilaciones amortiguadas por el control a lo largo del tiempo, esto nos llega a indicar que el primer piso se logra estabilizar rápidamente debido al amortiguamiento.
- \* Desplazamiento Piso 2: Las oscilaciones en este piso también se amortiguan rápidamente, aunque podemos observar una ligera diferencial en la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones comparado con el primer piso. La influencia del piso superior y el control del sistema afectan el comportamiento del segundo piso.
- \* Desplazamiento Piso 3: En este piso, el desplazamiento inicial es mayor, alrededor de  $0.6$  metros, debido a la

fuerza externa aplicada. Se logra observar una amortiguación significativa pero que está más prolongada en comparación con los otros pisos. Las oscilaciones son más profundas inicialmente, pero disminuyen con el tiempo. Las oscilaciones son más pronunciadas inicialmente, pero disminuyen con el tiempo debido al amortiguamiento.

- Con amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: Podemos observar que las oscilaciones se amortiguan rápidamente y casi desaparecen dado a que se estabilizo por la presencia de amortiguadores en el modelo en los primeros segundo del tiempo simulado.
- \* Desplazamiento Piso 2: Las oscilaciones se amortiguan rápidamente y permanecen muy pequeñas a lo largo del tiempo simulado.
- \* Desplazamiento Piso 3: Podemos observar que el desplazamiento inicial del piso 3 es de  $60cm$  esto es debido a la suma de fuerzas del piso 1 y piso 2, sin embargo, el desplazamiento brusco dura relativamente poco, como se puede ver las oscilaciones se amortiguan significativamente y disminuyen rápidamente.

- Edificio con Control y Terremoto

- Sin amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: El desplazamiento disminuye rápidamente, alcanzando casi la estabilidad cerca de los  $2$  segundos. A partir de ahí, las oscilaciones son pequeñas, indicando que el control implementado es eficaz en reducir el desplazamiento del primer piso frente al terremoto.
- \* Desplazamiento Piso 2: Similar al primer piso, el desplazamiento del segundo piso se reduce significativamente

en el tiempo. A partir de los 2 segundos, las oscilaciones son pequeñas y el piso alcanza una estabilidad relativa.

- \* Desplazamiento Piso 3: El tercer piso tiene un desplazamiento inicial considerablemente alto, alcanzando casi 1 metro, y muestra una oscilación que va desde -0.5 metros hasta 0.5 metros. Aunque el desplazamiento inicial es mayor, el control reduce las oscilaciones de manera significativa. A partir de los 2 segundos, el sistema alcanza una estabilidad relativa, con oscilaciones menores, indicando nuevamente la efectividad del control en minimizar el desplazamiento del tercer piso.

– Con amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: El desplazamiento disminuye rápidamente y se estabiliza alrededor de los 2 segundos, con oscilaciones menores. Esto indica que la implementación de los amortiguadores mejora la estabilidad del primer piso en comparación con el modelo sin amortiguadores.
- \* Desplazamiento Piso 2: El segundo piso experimenta un desplazamiento inicial de aproximadamente 0.05 metros, que es menor en comparación con el modelo sin amortiguadores. El desplazamiento se reduce rápidamente y las oscilaciones se mantienen pequeñas a lo largo del tiempo. La estabilidad del segundo piso es mejorada significativamente por los amortiguadores, mostrando menos oscilaciones en comparación con el primer modelo.
- \* Desplazamiento Piso 3: El tercer piso muestra un desplazamiento inicial significativo, alcanzando aproximadamente 0.1 metros y una oscilación inicial hacia -0.5 metros. Las oscilaciones se reducen significativamente y el desplazamiento se estabiliza después de

los 2 segundos. Aunque el desplazamiento inicial es alto, el sistema de amortiguadores disminuye las oscilaciones y mejora la estabilidad del tercer piso.

• Edificio con Control y Terremoto decreciente

– Sin amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: El piso experimenta un desplazamiento oscilatorio debido al terremoto modelado por  $e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$ . La magnitud de estas oscilaciones disminuye rápidamente. La gráfica muestra que el desplazamiento decae exponencialmente, acercándose a cero en menos de 20 segundos. El desplazamiento se estabiliza en cero, indicando que el piso alcanza una condición de equilibrio donde las fuerzas del control contrarrestan las vibraciones remanentes.
- \* Desplazamiento Piso 2: Este piso experimenta mayores oscilaciones iniciales comparado con el primer piso. Sin embargo, estas oscilaciones también se atenúan rápidamente. Similar al primer piso, el desplazamiento del segundo piso disminuye exponencialmente, estabilizándose alrededor de cero antes de los 25 segundos.
- \* Desplazamiento Piso 3: El tercer piso muestra un desplazamiento inicial significativo, cercano a 0.6 metros. Este piso experimenta las mayores oscilaciones iniciales, lo cual es lógico ya que se encuentra más alejado del suelo y es más susceptible a los movimientos sísmicos. A pesar del gran desplazamiento inicial, la gráfica muestra que estas oscilaciones también se atenúan y el desplazamiento se estabiliza en cero antes de los 30 segundos.

– Con amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: Inmediatamente después del desplazamiento

inicial, el desplazamiento oscila ligeramente pero rápidamente disminuye. El desplazamiento se reduce de manera más rápida y efectiva que en el modelo sin amortiguadores, estabilizándose cerca de cero en menos de 10 segundos.

- \* Desplazamiento Piso 2: Las oscilaciones iniciales son pequeñas y se atenúan rápidamente. El desplazamiento se estabiliza cerca de cero en menos de 15 segundos, mostrando una amortiguación más efectiva en comparación con el modelo sin amortiguadores.
- \* Desplazamiento Piso 3: El tercer piso muestra un desplazamiento inicial cercano a 0.6 metros. Las oscilaciones iniciales son notables pero se atenúan de manera eficiente. El desplazamiento se estabiliza cerca de cero en menos de 20 segundos. Los amortiguadores mejoran notablemente la disipación de la energía del terremoto, reduciendo el desplazamiento inicial más rápidamente que en el modelo sin amortiguadores.

- Edificio sin Control y Terremoto

- Sin amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: Las oscilaciones no se amortiguan y se mantienen a lo largo del tiempo simulado. De hecho, parecen aumentar debido a la falta de amortiguamiento y la continua influencia de la fuerza externa.
- \* Desplazamiento Piso 2: Las oscilaciones no se amortiguan y también aumentan debido a la falta de control y amortiguamiento.
- \* Desplazamiento Piso 3: Las oscilaciones son más pronunciadas y no disminuyen. Se mantienen e incluso aumentan en amplitud a lo largo del tiempo simulado debido a la falta de amortiguamiento y control.

- Con amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: Las oscilaciones tienen una amplitud relativamente pequeña, reflejando los efectos de amortiguamiento y rigidez.
- \* Desplazamiento Piso 2: La amplitud de la oscilación es mayor que la del primer piso, lo que indica una diferencia en la respuesta dinámica debido a las interacciones entre pisos y los efectos de amortiguamiento.
- \* Desplazamiento Piso 3: Este piso tiene la mayor amplitud de oscilación, probablemente debido al efecto acumulativo de las fuerzas y el amortiguamiento de los pisos inferiores.

- Edificio con Control, Terremoto y Ruido

- Sin amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: Observamos de la presencia de oscilaciones significativas que se van reduciendo con el tiempo, pero de manera irregular debido al ruido gaussiano. Las oscilaciones presentan una disminución en amplitud, pero no alcanzan una estabilización completa dentro del período de simulación (10 segundos). El ruido gaussiano introduce variaciones aleatorias, que generan picos y valles irregulares en la gráfica. El sistema de control atenúa las oscilaciones con el tiempo, aunque de manera menos efectiva debido a la influencia del ruido.
- \* Desplazamiento Piso 2: Similar al primer piso, el segundo piso experimenta oscilaciones significativas, que se reducen en amplitud con el tiempo. Las oscilaciones son más notorias y se mantienen en un rango mayor de amplitud en comparación con el primer piso. La respuesta oscilatoria debido al terremoto es más pronunciada en el segundo piso, posiblemente debido a

la acumulación de efectos en los pisos superiores. El ruido gaussiano afecta de manera considerable, introduciendo variaciones irregulares en las oscilaciones.

- \* Desplazamiento Piso 3: Las oscilaciones son muy significativas y muestran una gran variabilidad, con amplitudes mayores y más irregulares. La amplitud de las oscilaciones es más grande y no muestra una clara tendencia a disminuir rápidamente. El tercer piso es el más sensible al terremoto y al ruido, reflejándose en oscilaciones más grandes y persistentes. El ruido gaussiano tiene un impacto considerable, haciendo que las oscilaciones sean altamente irregulares y difíciles de controlar. La capacidad del sistema de control para mitigar las oscilaciones es más limitada en este piso, resultando en desplazamientos que permanecen significativos durante todo el tiempo simulado.

– Con amortiguadores

- \* Desplazamiento Piso 1: Las oscilaciones iniciales son pronunciadas, pero la amplitud disminuye rápidamente, lo que indica un sistema bien amortiguado. Después de unos pocos segundos, el desplazamiento se estabiliza en torno a cero con pequeñas oscilaciones de baja amplitud, lo que sugiere que el sistema de control está funcionando eficazmente para reducir las vibraciones inducidas por la fuerza externa senoidal y el ruido.
- \* Desplazamiento Piso 2: La gráfica empieza con un desplazamiento negativo, reflejando la interacción dinámica entre los pisos. Las oscilaciones son menos pronunciadas que en el primer piso, lo que puede deberse a la amortiguación adicional proporcionada por los coeficientes de los amortiguadores.

- \* Desplazamiento Piso 3: Comienza con un desplazamiento inicial significativamente negativo, mayor que en los otros dos pisos. A pesar del gran desplazamiento inicial, la gráfica muestra una rápida estabilización del sistema, con oscilaciones que se atenúan rápidamente. Después del primer segundo, las oscilaciones son mínimas y se mantienen alrededor de un desplazamiento promedio constante, lo que indica que la respuesta del control y la amortiguación son efectivas para mantener la estabilidad del piso más alto.

## Discusión | Edificio de n-pisos.

### Modelo matemático.

$$\begin{aligned}
 m_1 x_1'' &= -k_0 x_1 + k_1 (x_2 - x_1) \\
 m_2 x_2'' &= -k_1 (x_2 - x_1) + k_2 (x_3 - x_2) \\
 m_3 x_3'' &= -k_2 (x_3 - x_2) + k_3 (x_4 - x_3) \\
 m_4 x_4'' &= -k_3 (x_4 - x_3) + k_4 (x_5 - x_4) \\
 m_5 x_5'' &= -k_4 (x_5 - x_4) + k_5 (x_6 - x_5) \\
 m_{n-1} x_{n-1}'' &= -k_{n-2} (x_{n-1} - x_{n-2}) + k_{n-1} (x_n - x_{n-1}) \\
 m_n x_n'' &= -k_{n-1} (x_n - x_{n-1})
 \end{aligned}$$

### Representación en el espacio de estados.

$$\mathbf{z}_{(2n \times 1)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ \vdots \\ z_n \\ \vdots \\ z_{2n-1} \\ z_{2n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{(2n \times 2n)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{k_0+k_1}{m_1} & 0 & \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_3} & 0 & \dots & \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{k_{n-1}}{m_n} & 0 & -\frac{k_{n-1}}{m_n} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El modelo se basa en la formulación de un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que describen el movimiento de cada piso del edificio. donde  $x_i$  es

el desplazamiento relativo del piso  $i$  con respecto al suelo,  $m_i$  es la masa del piso  $i$  y  $k_i$  es la rigidez del elemento estructural entre los pisos  $i$  e  $i - 1$ .

El modelo matemático propuesto proporciona una base sólida para entender y predecir el comportamiento sísmico de edificios de múltiples pisos, ofreciendo valiosas ideas para el diseño de estructuras resistentes a terremotos. Futuras investigaciones podrían enfocarse en considerar efectos no lineales y en la validación del modelo con datos experimentales y simulaciones más avanzadas.

## Conclusión

En este artículo donde hablamos acerca del reto "Terremotos que sacuden edificios", se logró desarrollar un modelo matemático para un edificio de tres pisos y se analizó su comportamiento dinámico tanto con como sin amortiguadores. Utilizando representaciones en el espacio de estados, se derivaron las ecuaciones diferenciales del sistema y se realizaron simulaciones numéricas para ver las respuestas ante condiciones iniciales específicas.

Los resultados de las simulaciones demostraron que, en ausencia de amortiguadores, las oscilaciones son más pronunciadas y significativas, lo cual puede llevar a daños estructurales significativos y arriesgar la seguridad del edificio y sus ocupantes. En contraste, la inclusión de amortiguadores reduce considerablemente las oscilaciones y ayuda a estabilizar la estructura más rápidamente, disipando la energía sísmica rápidamente.

Esto demuestra así la importancia de integrar sistemas de amortiguación en el diseño y construcción de edificios en zonas sísmicas. La implementación de tales sistemas no solo mejora la seguridad y estabilidad de las edificaciones durante un terremoto, sino que también minimiza el riesgo de daños estructurales graves resultando en menos pérdidas. Este análisis inicial es una gran herramienta para el futuro del proyecto, con el cual debemos tener como objetivo mejorar la resiliencia de las infraestructuras urbanas frente a eventos sísmicos.

## References

- [1] P. Virtanen et al., "SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python," *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261-272, 2020.
- [2] Santos Pantaleon Rodriguez Chuquimango, "Modelamiento Matemático de la Acción de los Terremotos sobre Edificios de Varios Pisos Usando Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden," Informe Final del Proyecto de Investigación, Universidad Nacional del Callao, Unidad de Investigación de la Facultad de Ingeniería Química, Callao, Perú, 2019.
- [3] F. De Ciencias, "Estudio de la respuesta no lineal de la estructura de un edificio a través de eventos sísmicos." Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias, Ciudad de México, 2012.
- [4] USGS, "Understanding Earthquakes: Hazard, Risk, and Resilience," USGS Earthquake Hazards Program, 2020.
- [5] FEMA, "Reducing the Risks of Nonstructural Earthquake Damage: A Practical Guide (FEMA E-74)," Federal Emergency Management Agency, 2021.
- [6] CENAPRED, "Sismos y su impacto en México: Lecciones del 19 de septiembre de 2017," Centro Nacional de Prevención de Desastres, 2018.