Formulación de un problema de empaque 3D (5x5x5)

Consideremos una caja de dimensiones $5 \times 5 \times 5$ (largo, ancho y alto). Tenemos un conjunto de 12 piezas, de dos tipos:

- 6 piezas de dimensiones $1 \times 2 \times 4$,
- 6 piezas de dimensiones $2 \times 2 \times 3$.

Sea $P = \{1, 2, \ldots, 12\}$ el índice de piezas, donde $p \in P$ indica una pieza concreta. A cada pieza p le corresponde un conjunto de orientaciones posibles O_p. Por ejemplo:

$$|O_p| = \begin{cases} 6 & \text{si la pieza es de } 1 \times 2 \times 4, \\ 3 & \text{si la pieza es de } 2 \times 2 \times 3. \end{cases}$$

En una orientación $o \in O_p$, la pieza p ocupa dimensiones $(d^x_{p,o},\ d^y_{p,o},\ d^z_{p,o})$ en la caja. Las coordenadas discretas de la esquina "inferior-izquierda-trasera" donde se ubica la pieza se denotan por (x, y, z) con:

$$0 \ \le\ x\ \le\ 5 - d^x_{p,o}, \quad 0\ \le\ y\ \le\ 5 - d^y_{p,o}, \quad 0\ \le\ z\ \le\ 5 - d^z_{p,o}.$$

Variables de decisión

Definimos la siguiente variable binaria:

$$X_{p,o,x,y,z} \ = \ \begin{cases} 1, & \text{si la pieza } p \text{ se coloca en la orientación } o \text{ con esquina} \\ & \quad \text{en la posición } (x, y, z), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Función objetivo

Este es un problema de pura factibilidad (ubicar todas las piezas sin solapamiento), de modo que, en este caso, podemos *minimizar* 0 (o equivalentemente no tener una función objetivo distinta de la factibilidad). Formalmente:

$$\text{Minimizar} \quad 0.$$

Restricciones

1) Cada pieza se ubica exactamente una vez.

$$\sum_{o \in O_p} \sum_{x=0}^{5-d^x_{p,o}} \sum_{y=0}^{5-d^y_{p,o}} \sum_{z=0}^{5-d^z_{p,o}} X_{p,o,x,y,z} \ = \ 1 \quad \forall\, p \in P.$$

2) No superposición. Sea una celda (cx, cy, cz) de la caja, con $0 \le cx < 5$, $0 \le cy < 5$, $0 \le cz < 5$. Ninguna celda puede ser ocupada por más de una pieza. Luego:

$$\sum_{p \in P} \sum_{o \in O_p} \sum_{\substack{x,y,z \\ x \le cx < x + d^x_{p,o} \\ y \le cy < y + d^y_{p,o} \\ z \le cz < z + d^z_{p,o}}} X_{p,o,x,y,z} \ \ \le\ 1 \quad \forall\, (cx, cy, cz).$$

Dicho de otro modo, para cada celda (cx, cy, cz), se suman todas las variables que implican que la pieza p *cubre* dicha celda en esa orientación y posición. Esa suma no puede exceder 1.

3) Dominio de las variables.

$$X_{p,o,x,y,z} \in \{0,1\} \quad \forall\, p, o, x, y, z.$$

Esta formulación corresponde a un *problema de Programación Entera Mixta* (en este caso, entera binaria) que busca una configuración factible de todas las piezas dentro de la caja $5 \times 5 \times 5$ sin superponerlas.