

# Proyecto Final de EDO

Juan Carlos Carmenate Díaz  
Email: juancarlosmatcom@gmail.com

Adián Miguel Sanamé León  
Email: titico0732@gmail.com

Jorge Luis Herrera Cecilia  
Email: herreraceciliajorgeluis@gmail.com

Sebastian González Alfonso  
Email: sebagonz106@gmail.com

10 de febrero de 2025

**Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana**

**Tema V:** Un acercamiento más profundo al método de Runge-Kutta.

## Resumen

Este proyecto tiene como objetivo realizar una comparación entre el método de Euler mejorado (que podría considerarse un Runge-Kutta de 2do orden) y el método de Runge-Kutta más utilizado por su versatilidad, el de 4to orden. Para ello se propuso la realización de una aplicación graficadora de las funciones soluciones de EDOs introducidas, que muestren el resultado de utilizar ambos métodos junto a la solución real explícita en caso de que pueda hallarse analíticamente.

## 1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son tan antiguas como el cálculo diferencial mismo y fueron abordadas por Isaac Newton desde épocas tan remotas como 1671 en su tratado sobre cálculo diferencial, presentando su solución mediante desarrollo en series infinitas. El comportamiento de la solución de una EDO se vuelve interesante para el caso no lineal, donde no es posible en general encontrar una solución analítica exacta. La solución de EDOs mediante métodos discretos es también una de las áreas más antiguas y exitosas del cómputo numérico.

Los problemas de valores iniciales o problemas de Cauchy son unos de los más comunes modelados con EDOs. La ecuación diferencial es usada para representar la evolución de una variable de estado en un proceso físico; el problema consiste en encontrar los valores que tomará dicha variable partiendo de un valor inicial  $y(x_0) = y_0$ .

El método de Euler es el más sencillo de los métodos de paso simple para resolver numéricamente el problema de Cauchy de primer orden. Fue formulado por Leonhard Euler (15-4-1707, Suiza - 18-9-1783, Rusia) en 1768 en la última sección de su *Institutiones Calculi*

*Integralis*. Aunque tiene detractores debido a la necesidad de tomar un paso muy pequeño para garantizar su convergencia, sirvió de base a métodos más complejos desarrollados por Runge, Heun y Kutta un siglo después.



Figura 1: Leonhard Euler



Figura 2: Carl Runge



Figura 3: Martin Kutta

Carl David Tolmé Runge fue un matemático, físico y espectroscopista alemán (30-8-1856 Bremen, Alemania - 3-1-1927, Göttingen, Alemania). Pasó los primeros años de su vida en La Habana, donde su padre Julius Runge ejercía como cónsul danés. En 1880 recibió su doctorado en matemática en Berlín, donde había estudiado con Karl Weierstrass. El cráter Runge de la Luna le debe su nombre.

Martin Wilhelm Kutta (3-11-1867 Pitschen, Polonia - 25-12-1944 Alemania), físico, matemático e ingeniero hidráulico alemán. Realizó sus estudios universitarios en la ciudad polaca de Breslau. Posteriormente, se dirigió a Múnich donde continuó sus estudios universitarios durante otros 4 años, para convertirse más tarde en colaborador de von Dyck. La idea de los hoy llamados métodos de Runge-Kutta tuvieron en realidad un contribuyente más, Heun, ya que fueron Runge (1895) y Heun (1900) quienes originalmente los construyeron, para luego ser elaborados más ampliamente y formulados en su expresión general por Kutta en 1901. Estos métodos incluyen pasos adicionales del método de Euler, para sustituirlos como aproximación del segundo argumento de la función  $f(x, y)$  de la parte derecha de la ecuación diferencial, logrando así fórmulas de cuadratura para integrar la ecuación diferencial, que hicieran más rápido el cálculo de la solución del Problema de Cauchy de primer orden.

## 2. Análisis del error y el orden

Primeramente se definirán los términos que se utilizarán en el análisis:

### 1. Error de discretización

El error de discretización es el error introducido al aproximar una función continua por un esquema numérico discreto. En el caso analizado, este error surge porque los métodos numéricos no resuelven la EDO exactamente, sino que la aproximan en puntos discretos.

Una EDO describe cómo cambia una función  $y(x)$  en términos de su derivada  $y'(x) = f(x, y)$ . Los métodos numéricos, como Runge-Kutta, aproximan la solución en puntos discretos  $x_n = x_0 + nh$ , donde  $h$  es el tamaño del paso. La aproximación introduce un error porque no se sigue exactamente la curva de la solución verdadera, sino que se usa una fórmula que depende del método.

En la práctica, el error de truncamiento local es la principal contribución al error de discretización, por lo que a menudo se usan de manera intercambiable. Sin embargo, también puede incluir otros tipos de errores, como errores de redondeo o errores debidos a la implementación del método.

## 2. Error local de truncamiento (ELT)

El error local de truncamiento es un tipo específico de error de discretización, y es el error que se comete en un solo paso del método, asumiendo que la solución exacta es conocida al inicio del paso. Matemáticamente, si  $y(x_n)$  es la solución exacta en la abscisa  $x_n$ , y  $y_{n+1}$  es la aproximación numérica en  $x_{n+1} = x_n + h$ , el error local de truncamiento se define como:

$$\tau_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1},$$

donde  $y_{n+1}$  se calcula usando el método numérico (en este caso, Runge-Kutta) y  $h$  es el tamaño del paso.

## 3. Error global

El error global es la acumulación de los errores locales a lo largo de todos los pasos del método, y depende del número de pasos  $N$  y del tamaño del paso  $h$ . Si  $y(x_N)$  es la solución exacta en la abscisa final  $x_N$ , y  $y_N$  es la aproximación numérica en  $x_N$ , el error global se define como:

$$E_N = y(x_N) - y_N.$$

# Análisis del error y el orden en el método de Runge-Kutta

Un método de Runge-Kutta de paso  $s$  tiene  $s$  etapas y un orden de convergencia  $p$ , que depende de la elección de los coeficientes del método. El orden de un método de Runge-Kutta se determina comparando la expansión en serie de Taylor de la solución exacta con la expansión en serie de Taylor de la solución numérica. El orden  $p$  es el mayor entero para el cual ambas expansiones coinciden hasta el término  $h^p$ .

El error local de truncamiento para un método de Runge-Kutta de orden  $p$  es:

$$\tau_{n+1} = Ch^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}),$$

donde  $C$  es una constante que depende de la EDO y del método.

El error global, después de  $N$  pasos con tamaño de paso  $h$ , es:

$$E_N = C'h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}),$$

donde  $C'$  es otra constante que depende de la EDO y del método.

Esta expresión representa la acumulación de los errores locales a lo largo de todos los pasos del método. Aunque el error local es  $\mathcal{O}(h^{p+1})$ , el error global es  $\mathcal{O}(h^p)$ .

Supongamos que integramos la EDO desde  $x_0$  hasta  $x_N = x_0 + Nh$ , donde  $N$  es el número de pasos. En cada paso, se comete un error local:

$$\tau_{n+1} = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Después de  $N$  pasos, el error global  $E_N$  es la suma de los errores locales:

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} \tau_{n+1}.$$

El número de pasos  $N$  está relacionado con el tamaño del paso  $h$  y el intervalo de integración  $T = x_N - x_0$ :

$$N = \frac{T}{h}.$$

Por lo tanto, el error global es:

$$E_N = N \cdot \mathcal{O}(h^{p+1}) = \frac{T}{h} \cdot \mathcal{O}(h^{p+1}) = \mathcal{O}(h^p).$$

Aunque el error local es  $\mathcal{O}(h^{p+1})$ , el error global es  $\mathcal{O}(h^p)$  porque el número de pasos  $N$  es inversamente proporcional a  $h$ . Esto significa que, al reducir  $h$ , el error global disminuye más lentamente que el error local. Sin embargo, como la constante  $C$  es desconocida, se hace necesario buscar una forma computable de calcular el error. Una forma muy utilizada en la práctica es el doble cómputo, que consiste en estimar la función en un punto, primero con un paso de tamaño  $h$ , y luego de tamaño  $h/2$  (de ahí doble cómputo). Se procede de la siguiente forma:

1. Se expresa el error en función de  $h$ :

$$\tau_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_h(x_{i+1}) = C(x_{i+1})h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}).$$

2. Se expresa el error en función de  $h/2$ :

$$\tau_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{h/2}(x_{i+1}) = C(x_{i+1})\left(\frac{h}{2}\right)^p + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}\right).$$

3. Se restan las expresiones y se despeja la constante:

$$C(x_{i+1}) \approx \frac{2^p (y_{h/2}(x_{i+1}) - y_h(x_{i+1}))}{(2^p - 1)h^p}.$$

4. Se sustituye el valor de  $C$  en la expresión inicial:

$$\tau_{i+1} \approx \frac{2^p (y_{h/2}(x_{i+1}) - y_h(x_{i+1}))}{2^p - 1}.$$

Esta última expresión constituye una estimación del error global de la solución aproximada  $y_h$  en el punto  $x$ , es computable y no requiere la evaluación de  $C$ .

### 3. Comparación entre Euler mejorado y Runge-Kutta de 4to orden

Como se verá posteriormente, ambos procedimientos numéricos constituyen casos particulares de métodos de Runge-Kutta de orden distinto, por lo que esta sección se centrará en analizar a estos métodos en general y concluirá con la comparación específica propuesta.

El fundamento de estos métodos consiste en calcular la nueva ordenada  $y_{n+1}$  adicionando a la anterior  $y_n$  un incremento  $\Delta y_n$  que coincida con el desarrollo en serie de Taylor de la solución exacta  $y(x_n + h)$  hasta el término de la derivada de orden  $s$ , pero que sólo use la primera derivada  $f$ , sin requerir la evaluación de derivadas superiores. El incremento  $\Delta y_n$  se obtiene como combinación lineal de valores de  $y' = f$ , que corresponden a la evaluación de  $f$  en  $s$  puntos del subintervalo  $[x_n, x_n + h]$ .

En su forma más general un método de Runge-Kutta puede escribirse de la siguiente manera, con  $s$  denotando la cantidad de etapas del método:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i K_i \quad , \quad (1)$$

$$K_i = f \left( x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2)$$

Los coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$  y  $c_i$  caracterizan completamente el método de Runge-Kutta. Por definición,

$$c_1 = 0, \quad 0 < c_i \leq 1, \quad i > 1 \quad \text{y} \quad c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}. \quad (3)$$

Si los elementos  $a_{ij}$  son nulos para  $j \geq i$ , con  $i = 1, 2, \dots, s$ , entonces cada  $K_i$  puede ser calculado de forma explícita en términos de cada uno de los  $i-1$  coeficientes  $K_1, \dots, K_{i-1}$ . En este caso estaremos en presencia de un método de Runge-Kutta explícito. En caso contrario, estaremos en presencia de un método de Runge-Kutta implícito en los que para calcular el coeficiente  $K_i$  es necesario resolver un sistema no lineal con  $s$  ecuaciones, pero estos no son objetivos del presente trabajo. El orden de un método de Runge-Kutta explícito de  $s$  etapas no puede ser mayor que  $s$ . Si  $h$  mantiene su valor a lo largo del procedimiento, se dice que el método es de paso fijo.

Los coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$  y  $c_i$  se determinan bajo la condición de que el desarrollo en serie de Taylor del valor aproximado  $y_{n+1}$  calculado coincida con el desarrollo en serie de Taylor hasta el término de orden  $s$  de la solución exacta, lo cual equivale a exigir que el incremento de Runge coincida con el incremento de Taylor. La diferencia entre ambos métodos radica en que mientras en Taylor el incremento se construye como combinación lineal de las  $s$  primeras derivadas de  $y$  evaluadas en  $x = x_n$ , en Runge-Kutta se construye como combinación lineal de las funciones  $K_i$ , es decir, de la función  $f$  evaluada en  $s$  puntos cuyas abscisas se encuentran en el intervalo  $[x_n, x_{n+1}]$ ; lo cual computacionalmente resulta más eficiente y justifica su vigencia un siglo después de ser propuesto.

Para  $s = 2$ , el incremento está definido por:

$$\Delta y_n = h(b_1 K_1 + b_2 K_2) \quad (4)$$

donde:

$$K_1 = f(x_n, y_n) \quad (5)$$

$$K_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} K_1) \quad (6)$$

Si se utiliza el desarrollo de Taylor en  $K_2$ , podemos llegar a la expresión:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 + b_2)f(x_n, y_n) + h^2 [b_2 (c_2 f_x + a_{21} f f_y)(x_n, y_n)] + O(h^3) \quad (7)$$

que al igualarla término a término con el desarrollo de Taylor de  $y_{n+1}$  en el punto  $x_n$  hasta el término de segundo orden:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n \quad (8)$$

nos queda, para una constante arbitraria  $\theta \geq \frac{1}{2}$

$$b_2 = \theta, \quad b_1 = 1 - \theta, \quad c_2 = a_{21} = \frac{1}{2\theta}. \quad (9)$$

Con  $\theta = \frac{1}{2}$  obtenemos la expresión conocida del método de Euler mejorado, pero para otros valores pueden obtenerse otras fórmulas de Runge-Kutta de 2do orden, todas con error de método o error de truncamiento del orden de  $h^3$  (ver sección 2).

Para un número mayor de etapas la deducción de la fórmula general es más engorrosa y usa herramientas numéricas que no son objetivo de este proyecto, por lo que se usará la fórmula general definida en (1) y (2) sin demostrar. Es común ver representados los coeficientes que aparecen en dicha expresión en la estructura conocida como arreglo de Butcher, donde  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_s)^T \in \mathbb{R}^s$  y  $c = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T \in \mathbb{R}^s$ :

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array}$$

o

$$\left( \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} \right)$$

Teniendo esto, particularicémoslo en los casos que más nos interesan:

#### 1. Método de Euler ( $s = 1, b_1 = 1$ ):

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

Fórmula de orden 1 basada en la regla de los rectángulos

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x.$$

2. **Método de Euler mejorado** ( $s = 2, b_1 = 0, b_2 = 1, a_{21} = c_2 = \frac{1}{2}$ ):

$$y_{n+1} = y_n + hf \left( x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right)$$

Fórmula de orden 2 basada en la regla del punto medio

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \Delta x$$

cuyo arreglo de Butcher sería:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

3. **Método clásico de Runge-Kutta** ( $s = 4$ ):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

donde:

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f \left( x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}K_1 \right)$$

$$K_3 = f \left( x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}K_2 \right)$$

$$K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3)$$

Fórmula de orden 4 basada en la regla de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] + O(h^5)$$

con error de método  $O(h^5)$ , que se obtiene a partir de un sistema de 11 condiciones para la determinación de las 13 incógnitas  $b_1, b_2, b_3, b_4; c_2, c_3, c_4; a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}$ . Existen varios arreglos de Butcher a partir de los cuales se obtienen métodos de Runge-Kutta de 4to orden. Sin embargo, este es el más comúnmente utilizado.

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Parámetro	Euler Mejorado	Runge-Kutta (4to orden)
Error de truncamiento o de método	Valor 1	Unidad 1
Error de discretización	Valor 2	Unidad 2
Cantidad de evaluaciones de la función para una misma cantidad de etapas	$2s$	$4s$

Cuadro 1: Comparación entre los métodos de Euler mejorado (EM) y Runge-Kutta de 4to orden (RK4)

En la tabla 1 puede apreciarse que en general RK4 es más preciso que EM, pues para valores pequeños de  $h$  ( $h < 1$ ) se cumple que  $h^4 < h^2$ . Sin embargo, debe valorarse la complejidad de utilizar RK4, puesto que para una misma cantidad de subintervalos necesita realizar el doble de las operaciones (i.e. evaluaciones en la función) que EM; aunque con algo de cuidado puede balancearse el tamaño del paso  $h$  con la cantidad de operaciones a realizar para obtener en RK4 una solución más acertada y a la vez más óptima.

Ninguno de los dos métodos anteriormente analizados está exento de errores y debe tenerse especial cuidado en funciones con asíntotas internas que llevan a la función a  $\pm\infty$  (o en funciones con cambios drásticos en los valores de su imagen en general), pues los más mínimos errores de cálculo debidos a la aritmética de punto flotante utilizada en el aparato de cómputo sobre el que se trabaja pueden alterar considerablemente los resultados.

## 4. Resolución de problemas propuestos

### 4.1. Revisión de números famosos, por última vez

Los siguientes problemas describen los números

$$e \approx 2,71828182846, \quad \ln 2 \approx 0,69314718056, \quad \text{y} \quad \pi \approx 3,14159265359$$

como valores específicos de ciertos problemas de valor inicial. En cada caso, aplicar el método de Runge-Kutta con  $n = 10, 20, 40, \dots$  subintervalos (duplicando  $n$  en cada ocasión). ¿Cuántos subintervalos son necesarios para obtener, en la sucesión duplicada, el valor correcto del número buscado redondeado a 9 cifras decimales?

1. El número  $e = y(1)$ , donde  $y(x)$  es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 1.$$

2. El número  $\ln 2 = y(2)$ , donde  $y(x)$  es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(1) = 0.$$



3. El número  $\pi = y(1)$ , donde  $y(x)$  es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{1+x^2}, \quad y(0) = 0.$$

Se realizará un acercamiento común a los problemas propuestos a partir de que se desea el valor de cada constante con 9 cifras significativas correctas, o sea, que el valor del error en el método sea menor que  $10^{-9}$ . Como en RK4 el error es  $O(h^4)$ , podemos hacer  $Ch^4 < 10^{-9}$  y calcular el valor de  $h$  para el que se cumple la desigualdad, estimando un valor para  $C$  (aunque sabemos que depende del comportamiento de la función en el intervalo). Por ejemplo, para  $Ch^4 = 10^{-10}$  y  $C \leq 1$ , vemos que 320 subintervalos es una respuesta válida ( $h \approx 0,0031$ ).

Sin embargo, comprobando en la aplicación desarrollada, vemos que para este valor solo se alcanza una precisión de 7 cifras significativas, e incluso menos en algunos casos, lo cual puede deberse a errores cometidos por aproximaciones necesarias para representar los resultados en la aritmética de punto flotante en la que opera el ordenador, ya que el paso utilizado es muy pequeño. Para  $n = 40$  sí se obtiene la precisión deseada, con un paso  $h = 0,025$ .

## 4.2. Problema 29 página 143

Considere un proyectil disparado verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 49 m/s. Debido a la resistencia del aire lineal, la función de velocidad  $v = \frac{dy}{dt}$  satisface el problema de valor inicial:

$$\frac{dv}{dt} = -0,04v - 9,8, \quad v(0) = 49$$

con solución exacta  $v(t) = 294e^{-t/25} - 245$ .

- (a) Utilice una implementación del método de Runge-Kutta en una calculadora o computadora para aproximar  $v(t)$  en el intervalo  $0 \leq t \leq 10$ , utilizando tanto  $n = 100$  como  $n = 200$  subintervalos. Despliegue los resultados en intervalos de 1 segundo. ¿Las dos aproximaciones, cada una redondeada a 4 cifras decimales, coinciden una con otra y con la solución exacta?
- (b) Utilice ahora los datos de la velocidad del inciso (a) para aproximar  $y(t)$  en el intervalo  $0 \leq t \leq 10$  empleando  $n = 200$  subintervalos. Demuestre los resultados en intervalos de 1 segundo. Estos valores de posición aproximados, cada uno redondeado a 2 cifras decimales, coinciden con la solución exacta:

$$y(t) = 7350(1 - e^{-t/25}) - 245t?$$

- (c) Si no se contara con la solución exacta, explique cómo se podría usar el método de Runge-Kutta para aproximar cercanamente los tiempos de ascenso y descenso del proyectil y la altura máxima que alcanza.

Utilizando una vía similar a la vista en el problema anterior, acotaremos el error por  $10^{-4}$ . Sustituyendo en la inecuación los valores dados para  $h$  (0,1 y 0,05), veremos que para obtener la precisión deseada la constante debe ser menor que  $10^4$  y  $20^4$  respectivamente, lo cual es probable. Al comprobar dichas conclusiones en la aplicación, se puede apreciar

<b>x</b>	<b>n=100</b>	<b>n=200</b>	<b>Solución</b>
0	49	49	49
1	37.47209511080722	37.47209511078451	37.472095110783016
2	26.396205837717407	26.396205837673794	26.39620583767089
3	15.754608394911296	15.754608394848466	15.754608394844297
4	5.530273956151944	5.530273956071464	5.530273956066139
5	-4.29315859497028	-4.293158595066927	-4.293158595073351
6	-13.731408846314487	-13.731408846425907	-13.731408846433283
7	-22.79958001188354	-22.799580012008423	-22.79958001201672
8	-31.51218310018865	-31.512183100325764	-31.512183100334852
9	-39.883160134958814	-39.88316013510703	-39.88316013511687
10	-47.92590646535333	-47.92590646551154	-47.92590646552205

Cuadro 2: Resultados numéricos

que ambos resultados (utilizando  $n = 100$  y  $n = 200$  respectivamente) mantienen hasta 9 cifras significativas correctas al compararlos con la evaluación en la ecuación solución.

Para obtener los valores de  $y(t)$  en el intervalo  $0 \leq t \leq 10$  debe usarse que  $y = \frac{dv}{dt}$ . Puede sustituirse en la expresión inicial para resolver una EDO de segundo orden o sustituirse en la solución conocida, y resolverse de la manera tratada en este proyecto. Sin embargo, es posible hacer uso de los valores de velocidad hallados, asumiendo un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) para poder calcular  $y(t) = \Delta v(t) * t$ .

De no contarse con la solución exacta, puede usarse el método de Runge-Kutta para buscar el valor de  $t$  que hace 0 la función velocidad, viéndose este momento como punto de cambio entre el ascenso y el descenso. Una vez identificado este valor de tiempo, la altura máxima puede calcularse directamente gracias a que la resistencia del aire es despreciable, asumiendo que el movimiento del proyectil es uniformemente acelerado (MRUA), con la ecuación:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

## 5. Conclusiones

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) son esenciales en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería porque describen fenómenos dinámicos, como el movimiento de cuerpos, la transferencia de calor, y la dinámica de poblaciones. Sin embargo, muchas veces estas ecuaciones no tienen soluciones analíticas exactas, por lo que necesitamos recurrir a métodos numéricos. Estos métodos permiten aproximar la solución de las EDOs con un nivel de precisión ajustable, lo cual es crucial para modelar y entender fenómenos complejos.

En este proyecto fueron tratados los métodos de Runge-Kutta, y se pudo llegar a las siguientes conclusiones a partir de la comparación realizada entre Euler Mejorado y RK4:

1. RK4 es un método de cuarto orden, lo que significa que el error global es proporcional a  $h^4$ . Esto lo hace significativamente más preciso que el Método de Euler Mejorado, que es de segundo orden (error global proporcional a  $h^2$ ).
2. El Método de Euler Mejorado puede volverse inestable para pasos de tiempo grandes ( $h$ ) en problemas con ecuaciones diferenciales rígidas; mientras que RK4 maneja

mejor estas situaciones, haciéndolo ideal para problemas que requieren alta precisión, como en la mecánica celeste, simulaciones de fluidos, o cualquier sistema dinámico donde los errores acumulados puedan ser significativos.

3. Aunque RK4 es más preciso, requiere cuatro evaluaciones de la función por paso de tiempo, en comparación con las dos evaluaciones del Método de Euler Mejorado. Esto implica un mayor costo computacional por paso. Sin embargo, debido a su mayor precisión, RK4 a menudo puede alcanzar una precisión dada con un número menor de pasos, lo que puede compensar su mayor costo por paso en términos de tiempo total de ejecución.
4. El Método de Euler Mejorado es más adecuado para problemas simples o cuando la precisión no es crítica, ya que es computacionalmente menos costoso. Su implementación es más sencilla y requiere menos líneas de código, lo que lo hace atractivo para aplicaciones rápidas o prototipos.

Los métodos de Runge-Kutta ofrecen una ventaja sobre el algoritmo de Taylor, pues evitan el cálculo y la evaluación de las derivadas superiores realizando  $s$  evaluaciones de la primera derivada. Sin embargo, no proveen una forma de estimar el error realizado en la evaluación y necesitan de un paso  $h$  suficientemente pequeño para mantenerse estables.

## Referencias

- [1] León Mecías, Angela M. *Notas de Clases*. 2022.
- [2] EDWARDS, C. HENRY; PENNEY, DAVID E. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición*. PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009