Universidad Sergio Arboleda
Disciplina: Matemáticas
Profesor: Diego Villamizar

Matemáticas Discretas
Juan Sebastián Caballero Bernal

23 Septiembre 2022

Principio de inclusión-exclusión

Si recordamos lo trabajado en clase, cuando tenemos dos conjuntos finitos A, B y dichos conjuntos son disyuntos entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Pero la cosa cuando dichos dos conjuntos no son disyuntos. En general, de manera intuitiva, cuando se cuentan los elementos de A y los elementos de B, los elementos que están en ambos conjuntos se han contado dos veces, por lo que es necesario excluirlos. En general, se tendrá:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Luego, dentro de este contexto, sería útil generalizar esta formula a tres conjuntos, cuatro conjuntos, y hasta n conjuntos. Sin acudir a la demostración formal, esto es conocido como el Principio de inclusión-exclusión:

Teorema — Principio de inclusión-exclusión. Sea $\{A_i\}_{i\in[n]}$ una colección de conjuntos, para el cardinal de la unión de los conjuntos se tendrá:

$$\left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{X\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{x\in X} A_x\right|$$

Aplicaciones del Principio de inclusión-exclusión

Desarreglos

Un problema interesante en combinatoria es el problema de desarreglos, el cúal tiene que ver con funciones biyectivas y el principio de inclusión-exclusión. Para ello, empezaremos viendo que es un desarreglo:

Definición — Desarreglo. Sea $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ una permutación, se dice que σ es un desarreglo si y solo si $\sigma(i) \neq i$ para todo $i \in [n]$.

Por ejemplo, para $n = 3$ los desarreglos en $\mathfrak{S}_n$ serán las permutaciones:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El problema en general, es determinar el número de desarreglos en general para $\mathfrak{S}_n$. Para ello, introduceremos la siguiente notación:

Notación. *Al conjunto de desarreglos en $\mathfrak{S}_n$ se denotará como $\mathbb{D}_n$. Además, se define el siguiente conjunto para efectos del ejercicio:*

$$A_i := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(i) = i\}$$

Para todo $i \in [n]$.

Si quisieramos determinar el número de desarreglos en $\mathfrak{S}_n$ es más conveniente determinar cúales permutaciones no son desarreglos y descartarlas. Es decir:

$$\mathbb{D}_n = |\mathfrak{S}_n| - \left| \bigcup_{i \in [n]} A_i \right|$$

Y es aquí donde conviene usar el principio de inclusión y exclusión para determinar el cardinal del segundo conjunto mostrado.

$$\left| \bigcup_{i \in [n]} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{X \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{x \in X} A_x \right|$$

El siguiente paso es entender que signfica $\left|\bigcap_{x \in X} A_x\right|$ en dicha sumatoria. Por ejemplo, hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Para A_i solo tenemos un elemento fijo dentro de la permutación, por lo que tendremos $n - 1$ elementos para permutar en la función, por lo que $|A_i| = (n-1)!$.
- Para A_i y A_j de forma que $i \neq j$, tendremos dos elementos fijos y entonces serán $n-2$ elementos para permutar, por lo que $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$.
- En general, para $\left|\bigcap_{x \in X} A_x\right| = (n-k)!$ para $X \in \binom{[n]}{k}$, teniendo en cuenta que dado eso, $|X| = k$.

Luego, la formula anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{X\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{x\in X} A_x\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{X\in\binom{[n]}{k}} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot (n-k)! \sum_{X\in\binom{[n]}{k}} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot (n-k)! \cdot \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot (n-k)! \cdot \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot \frac{n!}{k!}
\end{aligned}$$

Y luego tendremos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_n &= |\mathfrak{S}_n| - \left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}n!}{k!} \\
&= n! + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}n!}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}n!}{k!}
\end{aligned}$$

Desarreglos Parte 2

Fue interesante el ejercicio anterior, pero ahora vamos a centrarnos en algo más complejo donde los desarreglos serán utiles.

> **Definición — Conjunto de puntos fijos.** Para dos números enteros no negativos n, k se define:
>
> $$\mathbb{A}_{n,k} := \{\pi \in \mathfrak{S}_n | \text{La cantidad de puntos fijos de } \pi \text{ es } k\}$$

Por ejemplo, para $n = 4$ y $k = 2$ se tendrá:

$$\mathbb{A}_{4,2} = \{(1,2,4,3),(1,4,3,2),(1,3,2,4),(4,2,3,1),(3,2,1,4),(2,1,3,4)\}$$

El problema es determinar $|\mathbb{A}_{n,k}$ en general. Para ello, tomaremos pequeños problemas y los analizaremos:

- $|\mathbb{A}_{n,0}| = |\mathbb{D}_n|$ ya que el no tener puntos fijos es el mismo conjunto de desarreglos.
- $|\mathbb{A}_{n,n}| = 1$ ya que la única permutación que tiene n puntos fijos es la permutación identidad.
- $|\mathbb{A}_{n,n-1}| = 0$ ya que al fijar $n-1$ puntos solo quedará un elemento cuya imagen tendrá que ser el mismo para ser una permutación, por lo que tendrá n puntos fijos en realidad.
- $|\mathbb{A}_{n,k}| = \binom{n}{k} \cdot |\mathbb{D}_{n-k}|$ ya que para escoger los k puntos fijos se tienen $\binom{n}{k}$ opciones y el resto de puntos al no poder ser fijos serán $|\mathbb{D}_{n-k}|$ opciones.

De esto mismo, se deriva una formula alternativa para $n!$. Primero, se tiene la sigiente igualdad:

$$\bigcup_{0\leq k\leq n} \mathbb{A}_{n,k} = \mathfrak{S}_n$$

La primera inclusión es evidente, por lo que se demostrará la otra desigualdad:

$\subseteq$) Suponga que $\sigma \in \bigcup_{0\leq k\leq n} \mathbb{A}_{n,k}$, por defininción para algún k tal que $0 \leq k \leq n$ se tendrá que $\sigma \in \mathbb{A}_{n,k}$ y por defininción $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

$\supseteq$) Suponga que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, entonces por definición σ es una biyección y tendrá k puntos fijos con $0 \leq k \leq n$ de forma que $\sigma \in \mathbb{A}_{n,k}$ para algún k y por tanto $\sigma \in \bigcup_{0\leq k\leq n} \mathbb{A}_{n,k}$.

Notese que para $i \neq j$ se tendrá que $A_i \cap A_j = \emptyset$ por lo que se podrá aplicar lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\bigcup_{0\leq k\leq n} \mathbb{A}_{n,k}| &= \sum_{k=0}^{n} |\mathbb{A}_{n,k}| \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot |\mathbb{D}_{n-k}| \end{aligned}$$

Y luego es interesante notar que:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot |\mathbb{D}_{n-k}|$$

Gracias a la igualdad de conjuntos determinada anteriormente.