Universidad Sergio Arboleda
Disciplina: Matemáticas
Profesor: Fabio Molina

Cálculo Integral
Juan Sebastián Caballero Bernal

Taller 3

Sección 10.4

En los siguientes ejercicios, una secuencia $\{f(n)\}$ es definida por la formula dada. En cada caso, determinar si la secuencia converge o diverge, y dado el caso, determinar el limite la serie.

1. $f(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Note que algunos valores de la secuencia son:

- $f(1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $f(2) = \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = -1$
- $f(3) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
- $f(4) = \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 1$

Y la secuencia siempre oscilara entre estos valores dependiendo para cada n de $n \mod 4$. Luego, no existe un limite definido para el cúal la secuencia converga.

2. $f(n) = \frac{n}{2^n}$

Esta secuencia es una secuencia monotona, dado que es decreciente. Esto puede ser fácilmente demostrado tomando:

$$
\begin{aligned}
1 &\leq n \\
n+1 &\leq n+n \\
n+1 &\leq 2n \\
n+1 &\leq \frac{n}{2^n} \cdot 2^{n+1} \\
\frac{n+1}{2^{n+1}} &\leq \frac{n}{2^n}
\end{aligned}
$$

Note que el único caso donde se tiene la igualdad es con $n = 1$. Luego, dado que la serie es acotada inferiormente por 0 tiene un valor de convergencia. Dicho valor, llega a ser 0.

(3) $f(n) = \frac{n^{\frac{2}{3}}\sin(n!)}{n+1}$

Note que esta sucesión converge a 0, esto por el comportamiento de la sucesión $\{\frac{1}{n+1}\}$ que tiende a 0, la sucesión $\{sin(n!)\}$ oscila entre 1 y -1, y la sucesión $\{n^{\frac{2}{3}}\}$ en su comportamiento aunque es creciente, dicho crecimiento cada vez es menor y menor, por lo que al combinar mediante un producto las 3 funciones, es fácil notar que el valor de la función recae principalmente en $\{\frac{1}{n+1}\}$ y dado que converge a 0, entonces la sucesión entera converge a 0.

(4) $f(n) = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$ Si dividimos por 3^n en el numberador y en el denominador:

$$\begin{aligned}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} &= \frac{1+\frac{(-2)^n}{3^n}}{3+\frac{(-2)^{n+1}}{3^n}} \\ &= \frac{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{3-2\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\end{aligned}$$

Y dado que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n = 0$ podemos concluir que la sucesión converge a $\frac{1}{3}$.

(5) $f(n) = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

Gracias a las formulas dadas en la sección 10,2 es fácil determinar que esta secuencia converge y además, converge a e^2.

Cada una de las siguientes series es convergente. Mediante la definición formal, determine valores de N que cumplen la definición para $\epsilon = 1, 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, 0{,}0001$.

(6) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Para esto, note que la sucesión converge a 1. Por lo que si partimos desde la definición, donde se tiene que cumplir que $|a_n - L| < \epsilon$ tendremos:

$$\begin{aligned}|a_n - L| &= \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \\ &= \left|\frac{-1}{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &< \frac{1}{n} < \epsilon\end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

Por lo que servirá N tal que $N > \frac{1}{\epsilon}$. Por lo que para cada valor tendremos:

- Para $\epsilon = 1$ servirá $N = 2$

- Para $\epsilon = 0{,}1$ servirá $N = 11$
- Para $\epsilon = 0{,}01$ servirá $N = 101$
- Para $\epsilon = 0{,}001$ servirá $N = 1001$
- Para $\epsilon = 0{,}0001$ servirá $N = 10001$

7 $a_n = (-1)^n \left(\frac{9}{10}\right)^n$ Note que la sucesión converge a 0. Por lo que si partimos desde la definición, donde se tiene que cumplir que $|a_n - L| < \epsilon$ tendremos:

$$\begin{aligned}
|a_n - L| &= \left|(-1)^n \frac{9^n}{10^n} - 0\right| \\
&= \left|(-1)^n \frac{9^n}{10^n}\right| \\
&= \frac{9^n}{10^n} \\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^n < \epsilon
\end{aligned}$$

Luego, podremos reducir la expresión anterior a:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{9}{10}\right)^n &< \epsilon \\
\left(\frac{10}{9}\right)^n &> \frac{1}{\epsilon} \\
\ln\left(\left(\frac{10}{9}\right)^n\right) &> \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \\
n \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right) &> \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \\
n &> \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)}
\end{aligned}$$

Por lo que servirá N tal que $N > \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)}$. Por lo que para cada valor tendremos:

- Para $\epsilon = 1$ servirá $N = 1$
- Para $\epsilon = 0{,}1$ servirá $N = 22$
- Para $\epsilon = 0{,}01$ servirá $N = 44$
- Para $\epsilon = 0{,}001$ servirá $N = 65$
- Para $\epsilon = 0{,}0001$ servirá $N = 88$

8 Si α es un número real y n es un entero no negativo, el coeficiente binomial $\binom{\alpha}{n}$ se define por:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(a) Cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$ demuestre que:

$$\binom{\alpha}{1} = -\frac{1}{2}, \binom{\alpha}{2} = \frac{3}{8}, \binom{\alpha}{3} = -\frac{5}{16}, \binom{\alpha}{4} = \frac{35}{128}, \binom{\alpha}{5} = -\frac{63}{256}$$

Demostración. Para ello vamos a aplicar directamente la definición dada para cada valor de n.

- $n = 1$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{1} &= \frac{\alpha}{1!}\\ &= \alpha = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

- $n = 2$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{2} &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\\ &= \frac{\frac{3}{4}}{2}\\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

- $n = 3$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{3} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}\\ &= \frac{-\frac{15}{8}}{6}\\ &= -\frac{15}{8\cdot 6}\\ &= -\frac{5}{16}\end{aligned}$$

- $n = 4$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{4} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)}{24} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{24} \\ &= \frac{\frac{15\cdot 7}{16}}{24} \\ &= \frac{15\cdot 7}{16\cdot 24} \\ &= \frac{35}{128}\end{aligned}$$

- $n = 5$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{5} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{5!} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)\left(-\frac{1}{2}-4\right)}{120} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)}{120} \\ &= \frac{\frac{15\cdot 7\cdot 9}{32}}{120} \\ &= \frac{15\cdot 7\cdot 9}{32\cdot 120} \\ &= -\frac{63}{256}\end{aligned}$$

$\square$

(b) Sea $a_n = (-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}$. Demostrar que $a_n > 0$ y que $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Note que $-\frac{1}{2}-k < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, si n es par, entonces tendremos un número par de terminos de la forma $-\frac{1}{2}-k$ para $0 \leq k \leq -n+1$, por lo que el producto de todos estos terminos será positivo, y dado que n es par, entonces $(-1)^n$ será 1. Por lo que $a_n > 0$. Si n es impar, entonces tendremos una cantidad impares de terminos, por lo que su producto será un número negativo, pero dado que $(-1)^n$ será (-1) el termino de la sucesión en general será positivo. Es decir, siempre $a_n > 0$.

Para demostrar que $a_{n+1} < a_n$ es suficiente con notar que $a_{n+1} = a_n \cdot \left(\frac{\alpha-n+2}{n+1}\right)$. Antes de seguir, demostraremos una desigualdad importante para esto(Notaremos a $-\frac{1}{2}$ como α):

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-n+2}{n+1} &= \frac{\alpha+3-(n+1)}{n+1}\\ &= \frac{\alpha+3}{n+1}-1\\ &= \frac{-\frac{1}{2}+3}{n+1}-1\\ &= \frac{\frac{5}{2}}{n+1}-1\\ &= \frac{5}{2n+2}-1<1\end{aligned}$$

Luego, tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-n+2}{n+1} &< 1\\ a_n\cdot\frac{a-n+2}{n+1} &< a_n\\ a_{n+1} &< a_n\end{aligned}$$

$\square$

Sección 10.9

Cada una de las siguientes series es una serie telescopica o geometrica, o alguna serie relacionada cuya suma parcial puede ser simplificada. Demostrar que la serie converge al limite indicado.

9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\\ &= \frac{1}{2}+1\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

Para empezar, vamos a descomponer la expresión $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ usando fracciones parciales.

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{\sqrt{n+1}}$$
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = A\sqrt{n+1} + B\sqrt{n}$$

De esto, podemos deducir que $A = 1$ y $B = -1$. Por tanto, tendremos que:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Por lo que tendremos la siguiente suma telescopica:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$

Empecemos por reducir la expresión con la ayuda de sumas parciales. Tendremos entonces la siguiente derivación:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$
$$2n+1 = A(n+1) + B(n)$$

De donde saldrá que $A = B = 1$ y por tanto:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

Luego, combinando con $(-1)^{n-1}$ tendremos:

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^{n}}{n+1}\end{aligned}$$

Lo que nos muestra que podemos usar las propiedades de una serie telescopica:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^{n}}{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{1-1}}{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

12 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+n)\right]}{\log(n^n)\log(n+1)^{n+1}} = \log_2(\sqrt{e})$

Desarrollando como sigue la serie original:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+n)\right]}{\log(n^n)\log(n+1)^{n+1}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log(n+1)}{n\log(n)(n+1)\log(n+1)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)+\log(n+1)}{n\log(n)(n+1)\log(n+1)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)\log(n+1)-n\log(n)}{n\log(n)(n+1)\log(n+1)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\end{aligned}$$

Y dado que es una suma telescopica tendremos entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} &= \frac{1}{2\log(2)} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log(n)} \\ &= \frac{1}{2\log(2)} - 0 \\ &= \frac{\log(e)}{2\log(2)} \\ &= \frac{\log(\sqrt{e})}{\log(2)} \\ &= \log_2(\sqrt{e})\end{aligned}$$

Usando la serie geometrica, y modificando con operaciones en ella, desarrollar las siguientes formulas:

13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

Para ello, tomaremos la serie geometrica original y derivaremos y multipliquemos por x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Volviendo a derivar y multiplicando por x

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Y volviendo a repetir el proceso una ultima vez tendreos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1} = \frac{(1-x)^3(1+2x)+3(x+x^2)(1-x)^2}{(1-x)^6}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1} = \frac{(1-x)(1+2x)+3(x+x^2)}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1} = \frac{1-x+2x-2x^2+3x^2+3x}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1} = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log \frac{1}{1-x}$

Partiendo desde la serie geometrica e integrando tendremos:

$$\begin{aligned}
\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx &= \int \frac{1}{1-x} \, dx \\
\sum_{n=0}^{\infty} \int x^n \, dx &= \int \frac{1}{1-x} \, dx \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} &= -\log(1-x) + C \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} &= \log\left(\frac{1}{1-x}\right) + C
\end{aligned}$$

Si se reemplaza $x = 0$ podremos determinar fácilmente que $C = 0$, por lo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log \frac{1}{1-x}$$

15 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$

Empezaremos desde la serie geometrica con un cambio de variable y derivaremos 3 veces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-3}^{\infty} x^{n+3} &= \frac{1}{1-x} \\
\sum_{n=-2}^{\infty} (n+3) x^{n+2} &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) x^{n+1} &= \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} \\
\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) x^{n+1} &= \frac{2}{(1-x)^3} \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) x^n &= 2\frac{3(1-x)^2}{(1-x)^6} \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) x^n &= 3!\frac{1}{(1-x)^4} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} x^n &= \frac{1}{(1-x)^4}
\end{aligned}$$

16 Dado que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ para todo x, encontrar la suma de la siguiente serie, asumiendo que está permitido manipular series infinitas como si fueran sumas finitas.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

Operaremos como prosigue:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!} &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}+1\\ &= 1\end{aligned}$$

17 Dado que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ demostrar:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$$

Para esto, vamos a derivar y multiplicar por x dos veces en la siguiente expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=e^x$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}=xe^x$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{n!}=e^x(x+1)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=e^x(x^2+x)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=e^x(x^2+x)$$

Sección 10.14

Verificar si las siguientes series convergen o divergen y dar una justificación.

18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}$

La serie converge. Para demostrarlo, tome $\{b_n\}$ donde $b_n=\frac{n^{\epsilon}}{n^{\frac{3}{2}}}$, con $\epsilon<\frac{1}{2}$. Note que b_n genera una serie p y es convergete dado que $\frac{3}{2}-\epsilon>1$. Luego, si hacemos el limite de los terminos de ambas sucesiones:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^{\epsilon}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n\cdot n^{\epsilon}\cdot(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\sqrt{n}\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n\cdot n^{\epsilon}\cdot(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n^{\epsilon}(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2-n}}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\log(4n+1)}{n^{\epsilon}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\log(4n+1)}{n^{\epsilon}} \\
&= \sqrt{2}\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Luego, gracias a esto, podemos concluir que la convergencia de b_n implica la convergencia de a_n(La nota luego del Teorema 10.9 en el libro de Apostol).

19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

Usaremos el criterio de la integral. Para ello, note primero que si desarrollamos una integral por partes con $u = x$ y $dv = 2^{-x}dx$, obtieniendo que $du = dx$, $v = -\frac{2^{-x}}{\log(2)}$:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{2^x}\,dx &= \int \frac{x}{2^x}\,dx + \int 2^{-x}\,dx \\
&= \frac{-x2^{-x}}{\log(2)} + \frac{1}{\log(2)}\int 2^{-x}\,dx - \frac{2^{-x}}{\log(2)} \\
&= \frac{-x2^{-x}}{\log(2)} - \frac{2^{-x}}{\log^2(2)} - \frac{2^{-x}}{\log(2)}
\end{aligned}
$$

Por lo que al hacer la integral impropia para la serie tendremos:

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{x+1}{2^x}\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-x2^{-x}}{\log(2)} - \frac{2^{-x}}{\log^2(2)} - \frac{2^{-x}}{\log(2)}\Big|_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n2^{-n}}{\log(2)} - \frac{2^{-n}}{\log^2(2)} - \frac{2^{-n}}{\log(2)} + \frac{1}{2\log(2)} + \frac{1}{2\log^2(2)} + \frac{1}{2\log(2)} \\
&= \frac{1}{\log(2)} + \frac{1}{2\log^2(2)}
\end{aligned}
$$

Por lo que dado que la integral converge, la serie también lo hace.

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2}$

Esta serie converge gracias al criterio de comparación directa, puesto que:

$$|\sin(nx)| \leq 1$$
$$\frac{|\sin(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Y dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge dado que es una serie p con $p > 1$, entonces la serie que queriamos comprobar converge.

(21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Si aplicamos el criterio de comparación por limite con la serie $\frac{1}{n}$ tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo que dado que $\frac{1}{n}$ genera una serie divergente, la otra serie también será divergente.

(22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$

Si aplicamos el criterio de comparación directa, con el siguiente hecho:

$$\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 1$$
$$n\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq n$$
$$\frac{n\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$$

Y gracias a que sabemos que $\frac{n}{2^n}$ genera una serie convergente, entonces la serie original que deseabamos comparar, es convergente.

(23) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ Si integramos la función dada abajo, haciendo que $u = x^2$ y $du = 2xdx$ entonces:

$$\begin{aligned}
\int xe^{-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int e^{-u}du \\
&= -\frac{1}{2}e^{-u} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2}
\end{aligned}$$

Y haciendo el limite de la integral impropia:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_1^n xe^{-x^2}\,dx &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2e^{x^2}}\Big|_1^n \\ &= \lim_{n=\infty} -\frac{1}{2e^{n^2}}+\frac{1}{2e} \\ &= \frac{1}{2e}\end{aligned}$$

Y dado que la integral converge, entonces la serie converge.

24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$

Note que la integral anterior posee una función que es decreciente, por lo que el area de la curva entre 0 y $\frac{1}{n}$ irá disminuyendo. Luego, tendremos que:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx &\leq \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &< \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Y dado que llegamos a una serie p que converge, ya que $p>1$, entonces la serie original converge.

Sección 10.16

Determinar si las siguientes series son convergentes o no, y dar una justificación.

25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ Si aplicamos el criterio de la razón a la serie:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n 2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}2^n n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{2}{e}\end{aligned}$$

Y dado que $\frac{2}{e}<1$ entonces la serie converge.

26 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$ Si aplicamos el criterio de la razón a esta serie:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{2n+2}}}{\frac{n!}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot 2^n}{n!\cdot 2^{2n+2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Por lo que la serie actualmente diverge.

27 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$ Si aplicamos el test de la raíz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} - 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} - \lim_{n\to\infty} 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y dado que $0 < 1$ entonces la serie converge.

28 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - e^{-n^2}$ Sabemos de por sí que la serie $\frac{1}{n}$(La serie armonica) es divergente. Luego, aplicando el criterio de la raiz sobre la serie e^{-n^2}:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(e^{-n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(e^{-n^2\cdot\frac{1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que dicha serie converge, de lo que concluimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - e^{-n^2}$ diverge, ya que si no, la serie armonica convergería.

29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

Para determinar la convergencia de esta serie, aplicaremos el criterio de la raíz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^{\frac{1}{n^2}}}{\frac{n+1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot n^{\frac{1}{n^2}}}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}} \\
&= \infty \cdot 1 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Por lo que la serie diverge dado que el limite es mayor que 1.

Sección 10.20

Determinar la convergencia o divergencia de las series dadas. En caso de que la serie converja, determinar si la serie converge absolutamente o condicionalmente.

30 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

Si aplicamos el criterio de la raíz a la serie $\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+100}{3n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{100}{n}}{3+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

Por lo que la serie converge absolutamente, y por tanto tambień la serie alternante converge.

31 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

Para ello, note que el limite de la sucesión es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Por lo que gracias al criterio de convergencia, la serie no converge, y por tanto la serie de terminos en valor absoluto tambień diverge.

32 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{1+n^2}$ Para ello, note que el limite de la sucesión es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n^2}{1+n^2}\neq 0$$

Ya que para valores pares el limite de la sucesión será 1 y para valores impares será -1. Por lo que gracias al criterio de convergencia, la serie no converge, y por tanto la serie de terminos en valor absoluto tambień diverge.

33 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ Para ello, note que el limite de la sucesión es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\neq 0$$

dado que el limite en valor absoluto tiende a ∞ y con $(-1)^n$ oscila entre $-\infty$ e ∞. Por lo que gracias al criterio de convergencia, la serie no converge, y por tanto la serie de terminos en valor absoluto tambień diverge.

34 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{37}}{(n+1)!}$

Si aplicamos el criterio de la razón a la serie absoluta tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{37}}{(n+2)!}}{\frac{n^{37}}{(n+1)!}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+1)^{37}}{(n+2)!n^37}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^37}{(n+2)n^{37}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{37}\\
&= 0\cdot 1\\
&= 0<1
\end{aligned}$$

Por lo que la serie converge absolutamente, y por tanto, también converge de forma alternante.

35 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arctan\frac{1}{2n+1}$

Si comprobamos la convergencia de la secuencia:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\arctan\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\\
&= \arctan 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que por el criterio de Leibniz, la serie converge condicionalmente. Luego, si la serie absoluta la comparamos con la serie $\frac{1}{2n}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(2n+1)^2}}{\frac{-1}{2n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2}{4n^2+4n+2}}{\frac{-1}{2n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{2n^2+2n+1}}{\frac{-1}{2n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{2n^2+2n+1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Por lo que por el criterio de comparación de limites, ambas series convergen o ambas divergen. Y por tanto la serie diverge en valor absoluto.

36 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

La serie converge condicionalmente ya que la sucesión de terminos es decreciente y:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} e - \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= e - e \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo que es valido aplicar el criterio de Leibniz. Luego, si aplicamos el criterio de comparación por limite con la serie armonica tendremos:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = \frac{e}{2}
$$

Por lo que dado que la serie armonica diverge, entonces la serie original diverge, por lo que la serie solo converge condicionalmente.

37 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$

Podemos usar el criterio de comparación por limites, con la serie $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ de forma que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= 1^{\frac{3}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Y dada que la serie $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ es una serie p con $p > 1$, es convergente, entonces la serie original converge absolutamente.

Sección 10.24

En los siguientes ejercicios testear la convergencia de la integral impropia.

38 $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$

Si se hace comparación con la integral $\int_0^\infty \frac{1}{x}$ tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Y dado que la integral impropia de $\frac{1}{x}$ diverge, entonces la integral original diverge.

39 $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

Si lo comparamos con la integral $\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}}{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x}\sqrt{x^4+x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \qquad = 0
\end{aligned}$$

Y dado que la integral $\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ converge, la otra integral impropia también converge.

40 $\int_{0+}^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Primero, computemos la integral dada abajo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int e^{-u}\,du \\
&= -2e^{-u} + C \\
&= -2e^{-\sqrt{x}} + C
\end{aligned}$$

Y luego, aplicando la definición de la integral impropia:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to\infty}} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_a^b \\
&= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to\infty}} -2e^{-\sqrt{b}} + 2e^{\sqrt{a}} \\
&= -2\cdot 0 + 2\cdot e^0 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Por lo que la integral converge, y además converge a 2.

41 $\int_{0+}^{1-} \frac{\log x}{1-x}\,dx$

Note que $\int_{0+}^{1} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ es convergente. Esto dado que si se hace la integral indefinida obtendremos:

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}$$

Por lo que al evaluar el limite tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}|_a^1 &= \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{1}\log 1 - 4\sqrt{1} - 2\sqrt{a}\log a + 4\sqrt{a} \\
&= \lim_{a\to 0^+} -4 - 2\sqrt{a}\log a + 4\sqrt{a} \\
&= -4
\end{aligned}$$

Luego, si aplicamos el criterio de comparación por limite tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log x}{1-x}}{\frac{\log x}{\sqrt{x}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1-x} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que la convergencia de $\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ nos permite concluir la convergente de la integral original.

42 $\int_{0+}^{1-} \frac{dx}{\sqrt{x}\,\log x}$

Note que si se hace una sustitución en la integral de forma que $u = \sqrt{x}$ y $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ entonces la integral indefinida será:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\log x} &= 2\int \frac{1}{\log u^2}\,du \\
&= 2\int \frac{1}{2\log u}\,du \\
&= \int \frac{1}{\log u}\,du
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $\log(u) < u$ entonces $\frac{1}{\log(u)} > \frac{1}{u}$, y como $\frac{1}{u}$ genera una integral impropia divergente. Luego, por el criterio de comparación directa, la integral original diverge.

43 Para un valor real de C la integral:

$$\int_2^\infty \left(\frac{Cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$$

Si desarrollamos la integral:

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{(2x+1)Cx - (x^2+1)}{(x^2+1)(2x+1)}\, dx &= \int_2^\infty \frac{2Cx^2 + Cx - (x^2+1)}{(x^2+1)(2x+1)}\, dx \\
&= \int_2^\infty \frac{2Cx^2 + Cx - x^2 + 1}{(x^2+1)(2x+1)}\, dx \\
&= \int_2^\infty \frac{2Cx^2 + Cx - x^2 + 1}{(x^2+1)(2x+1)}\, dx \\
&= \int_2^\infty \frac{(2C-1)x^2 + Cx + 1}{(x^2+1)(2x+1)}\, dx
\end{aligned}$$

Y si aplicamos el criterio de comparación con la integral $\int_2^\infty \frac{1}{x}\, dx$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2C-1)x^2+Cx+1}{(x^2+1)(2x+1)}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2C-1)x^3 + Cx^2 + x}{(x^2+1)(2x+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2C-1)x^3 + Cx^2 + x}{2x^3 + x^2 + 2x + 1}
\end{aligned}$$

Para que luego el criterio no sea valido, es necesario que $2C - 1 = 0$, por lo que $C = \frac{1}{2}$. Luego, reemplazando en la integral original:

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \left(\frac{Cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx &= \int_2^\infty \left(\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{x}{x^2+1}\, dx - \int_2^\infty \frac{1}{2x+1}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_2^n \frac{x}{x^2+1}\, dx - \int_2^n \frac{1}{2x+1}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\log(2n+1) - \frac{1}{2}\log(5) - \frac{1}{4}\log(n^2+1) + \log(5) \\
&= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} 2\log(2n+1) - \log(5) - \log(n^2+1) + 2\log(5) \\
&= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n^2+1}{(2n+1)^2}\right) + \log(5) \\
&= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n^2+1}{4n^2+4n+1}\right) + \log(5) \\
&= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{4}}\right) + \log(5) \\
&= \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) + \log(5) \\
&= \frac{1}{4}\log\left(\frac{5}{4}\right)
\end{aligned}$$

Sección 11.13

Para cada una de las series de potencias determinar el conjunto de todos los números reales x para los cuales converge, y determinar la suma de la serie.

44 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

Reescribiendo la serie:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Y dado que es una serie geometrica, para que sea convergente, $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, por lo que $|x| < 3$. Y evaluando bajo esta condición:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{x-3}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x-3} \\
&= \frac{1}{x-3}
\end{aligned}$$

45 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}x^n$

Si aplicamos el criterio de la razón a la serie, tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}x^{n+1}}{(-2)^n\cdot\frac{n+2}{n+1}x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}x^{n+1}(n+3)(n+1)}{(-2)^n x^n(n+2)(n+2)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}\right|\cdot|-2x| \\
&= |-2x| < 1
\end{aligned}$$

Por lo que $|x| < \frac{1}{2}$. Si $x = \frac{1}{2}$ o $x = -\frac{1}{2}$ tendremos series que son divergentes ya que sus terminos no convergen a 0. Luego, el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Tendremos luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{n+2}{n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^n(n+1)}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n + \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

Para evaluar la segunda suma, derivaremos y luego integraremos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^{n+1}}{n+1} \\
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}(-2x)^n \\
&= \frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{1+2x} \\
\frac{1}{2x}\int_0^x \frac{1}{1+2t}\,dt &= \frac{1}{4x}\left[\log(1+2x)-\log(1)\right]+C \\
&= \frac{\log(1+2x)}{4x}+C
\end{aligned}$$

Se puede comprobar que $C = 0$ haciendo $x = 0$. Luego, la serie original quedará:

$$\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{1+2x} + \frac{\log(1+2x)}{4x}$$

46 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$

Si aplicamos el criterio de la razón en la serie tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n x^n}{n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}\cdot n}{2^n x^n\cdot(n+1)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot|2x| \\
&= |2x|
\end{aligned}$$

Por lo que $|2x|<1$ de lo que deducimos que $|x|<\frac{1}{2}$. Si $x=\frac{1}{2}$ tendremos la serie armonica, que es divergente. Si $x=-\frac{1}{2}$ tendremos la serie armonica alternante que es convergente. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Si derivamos y luego integralos la serie tendremos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n} \\
\frac{d}{dx}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(2x)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n \\
&= \frac{1}{1-2x} \\
\int_0^{\infty}\frac{1}{1-2t}dt &= -\frac{\log(1-2x)}{2}+C
\end{aligned}$$

Si se hace $x=0$ es facil ver que $C=0$. Por lo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n} = -\frac{\log(1-2x)}{2}$$

47 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$

Para esto, aplicamos primero el criterio de la razón. Así tendremos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)x^{2n+2}2^{2n}}{(-1)^n(2n+3)x^{2n}2^{2n+2}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\left|\frac{x}{2}\right|^2 \\
&= \left|\frac{x}{2}\right|^2
\end{aligned}$$

Y para que $\left|\frac{x}{2}\right|^2<1$ tendremos que $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, lo que implica que $|x|<2$. Para $x=2$ y para $x=-2$ tendremos una serie alternante cuyos terminos convergen a 0 y es decreciente, por lo que son convergentes. Luego, el intervalo de convergencia es $[-2,2]$. Si derivamos e integramos la serie:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{4}{x^2+4} \\
4\int_0^x \frac{1}{t^2+4}dt &= 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

Haciendo $x=0$ es facil ver que $C=0$. Luego, tendremos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

48 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)!}$

Si aplicamos el test de la razón a esta serie tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+4)!}}{\frac{x^n}{(n+3)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+3)!}{x^n(n+4)!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que para todo $x\in\mathbb{R}$, la serie es convergente. Si $x=0$ es fácil ver que la serie converge a 0. Para $x\neq 0$ tendremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)!} &= \sum_{k=3}^{\infty}\frac{x^{k-3}}{k!} \\
&= \frac{1}{x^3}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \\
&= \frac{1}{x^3}\left[\sum_{k=3}^{\infty}\frac{x^k}{k!}+1-1+x-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{x^3}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-1-x-\frac{x^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{x^2}\left[e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right]
\end{aligned}$$

49 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$

Si aplicamos el criterio de la razón tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+3)!}}{\frac{(x-1)^n}{(n+2)!}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}(n+2)!}{(x-1)^n(n+3)!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{n+3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que la serie es convergente para todo $n \in \mathbb{R}$. Luego, si $x \neq 1$ tendremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{k-2}}{k!} \\
&= \frac{1}{(x-1)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} \\
&= \frac{1}{(x-1)^2} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} + (x-1) + 1 - (x-1) - 1 \right] \\
&= \frac{1}{(x-1)^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} - (x-1) - 1 \right] \\
&= \frac{1}{(x-1)^2} \left[e^{x-1} - (x-1) - 1 \right]
\end{aligned}$$

En el caso en que $n = 1$ todos los terminos serán 0 a excepción del primero, por lo que la suma converge a $\frac{1}{2}$.

En los siguientes ejercicios se da la representación de funciones mediante series de potencias de x. Asuma la existencia de esta expansión, verifique que los coeficientes tienen la forma dada y demostrar que la serie converge para los valores de x indicados.

50 $\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ para $|x| < 2$.

Si partimos del lado izquierdo, podemos reescribirlo como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2-x} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2-x}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Note que esto es en realidad el limite de convergencia de una serie geometrica, por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Lo que argumenta, además, el porqué dicha igualdad es valida para $|x| < 2$ ya que en ese caso $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, haciendo la serie geometrica convergente.

51 $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Recordemos la identidad del ángulo triple para el seno:

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\
4\sin^3 x &= 3\sin x - \sin(3x) \\
\sin^3 x &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)
\end{aligned}$$

Y si usamos la expansión del seno podremos determinar que:

$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n-2}x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - (-1)^{n+1}\frac{3^{2n-2}x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{3^{2n-2}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right] \\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{x^{2n-1}-3^{2n-2}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right] \\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{x^{2n-1}-3^{2n-2}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{x^{2n-1}(1-3^{2n-2})}{(2n-1)!}\right] \\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{x^{2n-1}(1-3^{2n-2})}{(2n-1)!}\right] \\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left[\frac{x^{2n-1}(3^{2n-2}-1)}{(2n-1)!}\right] \\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\left[\frac{x^{2n-1}(3^{2n-2}-1)}{(2n-1)!}\right] \\
&= \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{x^{2k+1}(3^{2k}-1)}{(2k+1)!}\right] \\
&= \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}(3^{2k}-1)}{(2k+1)!} \\
&= \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^{2k}-1}{(2k+1)!}x^{2k+1}
\end{aligned}
$$

Para demostrar que es convergente en todo x, se puede usar el test de la razón:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}\frac{3^{2n+1}-1}{(2n+3)!}x^{2n+3}}{(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}(3^{2n+1}-1)(2n+1)!}{x^{2n+1}(3^{2n}-1)(2n+3)!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2(3-\frac{1}{3^{2n}})}{(1-\frac{1}{3^{2n}})(2n+3)(2n+2)}\right| \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo que al ser dicho limite menor que 1, la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

52 $\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$ para $|x| < \frac{1}{2}$

Si empezamos desde el lado derecho tendremos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n &= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(-2x)^n\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[x\sum_{k=0}^{\infty}x^n + (2x)\sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^n\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{x}{1-x}+\frac{2x}{1+2x}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{x(1+2x)+2x(1-x)}{(1-x)(1+2x)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\left[\frac{x+2x^2+2x-2x^2}{1-x+2x-2x^2}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{3x}{1+x-2x^2}\right] \\
&= \frac{x}{1+x-2x^2}
\end{aligned}
$$

Es fácil corroborar que esto solo es verdad para $|x| < \frac{1}{2}$ ya que es una condición necesaria y suficiente para que ambas series geometricas que hemos desarrollado puedan converger.

53 $\frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right] x^n$

Si partimos del lado derecho, podremos hacer lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right] x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+\frac{x}{6}} \\
&= \frac{1}{1-x} + \frac{6}{x+6} \\
&= \frac{x+6+6-6x}{(x+6)(1-x)} \\
&= \frac{12-5x}{x+6-x^2-6x} \\
&= \frac{12-5x}{6-5x-x^2}
\end{aligned}
$$

Luego, es fácil ver que para que ambas series que desarrollamos sean convergentes, $|x| < 1$ y $|x| < 6$, por lo que es necesario que $|x| < 1$.

Sección 11.16

En los siguientes ejercicios, se usa una serie de potencias para definir una función. Determinar los intervalos de convergencia y demostrar que satisface la ecuación diferencial indicada.

54 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ y $xy'' + y' - y = 0$.

Si se aplica el test de la razón tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{x^n}{(n!)^2}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n!)^2}{x^n((n+1)!)^2}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, si derivamos la función:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} \\
\frac{d^2}{dx^2}f(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2}
\end{aligned}$$

Por lo que si evaluamos la expresión del lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
xy'' + y' - y &= x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} + 1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}(n-1+1)}{(n!)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{(n!)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2x^n}{((n+1)!)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

55 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$ y $y'' + 4y = 0$.

Para empezar, usaremos el criterio de la razón:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+2}x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+2}x^{2n+2}(2n)!}{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}(2n+2)!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4x^2}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando la función:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}(2n)(2n-1)x^{2n-2}}{(2n)!}$$

Y manipulando la ecuación:

$$\begin{aligned}
y'' + 4y &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}(2n)(2n-1)x^{2n-2}}{(2n)!} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+2}x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+2}x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+2}x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+2}x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+2}x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{-(2^{2n+2}x^{2n}) + (2^{2n+2}x^{2n})}{(2n)!}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

56 $f(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $y'' = 9(y-x)$.

Si aplicamos el test de la razón:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(3x)^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x)^{2n+3}(2n+1)!}{(3x)^{2n+1}(2n+3)!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(3x)^2}{(2n+3)(2n+2)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que la serie será convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, si derivamos la función:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1} \cdot (2n+1)(2n)x^{2n-1}}{(2n+1)!} \\
&= 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+2}x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= 9 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Luego, si partimos del lado derecho de la igualdad:

$$\begin{aligned}
9(y-x) &= 9\left[x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - x\right] \\
&= 9\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= 3^2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{d^2}{dx^2}f(x)
\end{aligned}$$

Las funciones:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}, \qquad J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

Son llamadas *funciones de Bessel de primer tipo* de orden 0 y 1 respectivamente. Estas funciones suelen aparecer en varios problemas en matemáticas puras y aplicadas. Demostrar:

57 Ambas series convergen para todo $x \in \mathbb{R}$

Demostración. Para J_0 aplicaremos el criterio de la razón:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{((n+1)!)^2 2^{2n+2}}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}(n!)^2 2^{2n}}{x^{2n}((n+1)!)^2 2^{2n+2}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{4(n+1)^2}\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y si hacemos lo mismo para J_1 entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(n+1)!(n+2)!2^{2n+3}}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}n!(n+1)!2^{2n+1}}{x^{2n+1}(n+1)!(n+2)!2^{2n+3}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{4(n+1)(n+2)}\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que ambas series convergen para todo $x \in \mathbb{R}$. □

58 Demostrar que $J_0'(x) = -J_1(x)$

Demostración. Si derivamos $J'0(x)$ tendremos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}J_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2nx^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(n-1)!n!2^{2n-1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}} \\
&= (-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}} \\
&= -J_1(x)
\end{aligned}$$

□