Universidad Sergio Arboleda
Disciplina: Matemáticas
Profesor: Fabio Molina

Calculo Integral
Juan Sebastián Caballero Bernal

27 Septiembre 2022

Funciones iguales

Anteriormente hemos visto un teorema muy importante y como dicho teorema nos ayuda a generar resultados como un criterio para minimos y máximos. La idea de funciones iguales hasta orden n busca generalizar este concepto más allá de los Polinomios de Taylor, pero a su vez nos dará una herramienta potente para trabajar de nuevo.

Definición — Funciones iguales de orden n. Sean f y g dos funciones de variable real, diremos que f es igual a g hasta orden n en a si y solo si:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} = 0$$

Para $0 \leq k \leq n$.

Esta definición es una generalización del teorema sobre limite de la diferencia del Polinomio de Taylor y su función. En general, esta definición resultar ser útil para cualquier tipo de funciones, puesto que más adelante nos permitirá generar más fácilmente una formula para polinomios de Taylor.

Igualdad entre Polinomios

Con todo en orden, es hora de probar un teorema que de primera vista parece evidente pero que vendrá de ayuda más adelante:

Teorema Sean P y Q dos polinomios de variable real con grado menor o igual que n, de forma que P es igual hasta orden n a Q en un punto c. Podemos concluir que $P = Q$.

Demostración. Para esto, tengamos en cuenta que si son iguales hasta orden n podremos de forma recursiva con el orden del limite. Por ejemplo, si $P(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n$

y $Q(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + b_n(x-c)^n$ tendremos para cuando $k = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} \frac{P(x)-Q(x)}{(x-c)^0} &= \lim_{x\to c} P(x) - Q(x) \\
&= \lim_{x\to c} \left[(a_0 - b_0) + \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)(x-c)^i \right] \\
&= a_0 - b_0 = 0
\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $a_0 = b_0$. Luego, si $k = 1$ tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} \frac{P(x)-Q(x)}{x-c} &= \lim_{x\to c} \frac{(a_0-b_0) + (a_1-b_1)(x-c) + \sum_{i=2}^{n}(a_i-b_i)(x-c)^i}{x-c} \\
&= \lim_{x\to c} \frac{(a_1-b_1)(x-c)}{x-c} + \frac{1}{x-c} \cdot \sum_{i=2}^{n}(a_i-b_i)(x-c)^i \\
&= \lim_{x\to c}(a_1-b_1) + \sum_{i=2}^{n}(a_i-b_i)(x-c)^{i-1} \\
&= a_1 - b_1 = 0
\end{aligned}$$

Por lo que ahora $a_1 = b_1$. En general si continuamos con este proceso iterativamente, para k en general tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} \frac{P(x)-Q(x)}{(x-c)^k} &= \lim_{x\to c} \frac{\sum_{i=0}^{k-1}(a_i-b_i)(x-c)^i + (a_k+b_k)(x-c)^k + \sum_{i=k+1}^{n}(a_i-b_i)(x-c)^i}{(x-c)^k} \\
&= \lim_{x\to c} \frac{(a_k-b_k)(x-c)^k}{(x-c)^k} + \frac{1}{(x-c)^k} \sum_{i=k+1}^{n} (a_i-b_i)(x-c)^i \\
&= \lim_{x\to c}(a_k-b_k) + \sum_{i=k+1}^{n} (a_i-b_i)(x-c)^{i-k} \\
&= a_k - b_k = 0
\end{aligned}$$

Por lo que en general $a_k = b_k$ lo que nos permite concluir que $P = Q$. ■

Este teorema, tan bello y *relativamente* sencillo de probar da paso a un corolario que nos dará información sobre el Polinomio de Taylor:

> **Corolario** Sea f una función de forma que $P_{n,a,f}$ existe y además existe un polinomio P de forma que f es igual hasta orden n en a P en a, entones $P = P_{n,a,f}$.

Demostración. Dado que ya se ha demostrado que el polinomio de Taylor de orden n para f en a es igual hasta orden n a f en a, tendremos:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^k} = 0$$

Para cualquier k entre 0 y n. Luego, tendremos por hipotesís:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k} = 0$$

Igualando ambas expresiones:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^k} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k} \\
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^k} - \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k} &= 0 \\
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^k} - \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^k} &= 0 \\
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n,a,f}(x)-f(x)+P(x)}{(x-a)^k} &= 0 \\
\lim_{x\to a} \frac{P(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^k} &= 0
\end{aligned}$$

Por lo que P es igual hasta orden n a $P_{n,a,f}$ y por el teorema anterior tendremos que $P = P_{n,a,f}$. ■

R La prueba anterior refleja un poco sobre la naturaleza de la relación *Ser igual hasta orden n en a a...* Con un poco más de esfuerzo se puede demostrar que la relación es una relación de equivalencia(Reflexiva, Simetrica y Transitiva).

■ **Ejemplo** Recordemos que determinar el polinomio de Taylor para la función $f(x) = \arctan(x)$ era un proceso tedioso. Aquí miraremos una forma de determinar de manera más *directa* dicho polinomio de Taylor para $a = 0$.

Empecemos notando que $\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$, y dentro de la expresión de adentro podremos realizar una división síntetica para terminar con algo así:

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x 1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt \\
&= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt
\end{aligned}$$

Ahora, notese que en la última expresión tenemos un polinomio con una integral. Si la integral tiende a 0 habremos encontrado el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ para $\arctan(x)$. Por ello, analizar la expresión será importante.

Notese que:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt &\leq \left|\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \\ &= \left|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1}dt\right| \\ &= \left|\int_0^x t^{2n+2}dt\right| \\ &= \left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right| \\ &= \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}\end{aligned}$$

Luego, sin importar el valor de x se puede tomar n suficientemente grande para hacer que $\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ tienda a 0 con lo que $\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt$ tenderá a 0 y luego, es evidente que $\arctan(x)$ y el Polinomio escrito son iguales hasta orden n en 0. Por tanto:

$$P_{2n+1,0,f}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

E incluso esto permite determinar los valores para las derivadas de $\arctan(x)$ evaluadas en 0 con la siguiente formula(£Por qué?):

$$\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}\arctan(x) = (-1)^k\frac{k!}{2k+1}$$

∎

Inicios de la formula para el polinomio de Taylor

Recordemos que nuestra meta es encontrar una forma sencilla de determinar un polinomio de Taylor. Pues, dentro de un ejercicio practico podremos hacer algo así.

Para $\int_a^x \frac{d}{dx}f(t)dt$ al evaluarse por el *Teorema fundamental del cálculo* tendremos:

$$\int_a^x \frac{d}{dx}f(t)dt = f(x) - f(a)$$

Luego, despejando $f(x)$ tendremos:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \frac{d}{dx}f(t)dt$$

Notese en este punto que $f(a)$ es el Polinomio de grado 0 en a para f. Luego, si integramos por partes haciendo que $u = \frac{d}{dx}f(t)$ y $dv = dt$, para que tengamos que $du = \frac{d^2}{dx^2}f(t)dt$ y $v = t - x$(£Por qué no aplicar $v = t$?), tendremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x \frac{d}{dx} f(t)dt \\ &= f(a) + \left(\frac{d}{dx} f(t)(t-x)|_a^x \right) + \int_a^x (x-t)\frac{d^2}{dx^2} f(t)dt \\ &= f(a) + \frac{d}{dx} f(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)\frac{d^2}{dx^2} f(t)dt \end{aligned}$$

Lo que viene siendo el polinomio de Taylor de grado 1 junto con otra integral. Este proceso recursivo nos llevará más adelante a una formula bonita y elegante para determinar en general el polinomio de Taylor.