Universidad Sergio Arboleda
Disciplina: Matemáticas
Profesor: Diego Villamizar

Matemáticas Discretas
Juan Sebastián Caballero Bernal

28 Septiembre 2022

Funciones sobreyectivas

Formula mediante Inclusión-Exclusión

Una manera de determinar funciones sobreyectivas es mediante el principio de inclusión-exclusión. Para $S_{n,k}$ definido como el conjunto de funciones $f : [n] \to [k]$ de forma que f es sobreyectiva, recordemos que en general el conjunto de las funciones $f : [n] \to [k]$ es $[k]^{[n]}$ y tiene cardinal k^n. Luego, si queremos determinar el número de funciones que no son sobreyectivas podremos determinar el siguiente conjunto:

$$A_i := \{f \in [k]^{[n]} : i \notin f([n])\}$$

Para todo $i \in [k]$, lo que en pocas palabras significa determinar que elementos no reciben image+n en ciertas funciones y denotarlas. Luego, el conjunto de todas las funciones que no entran en esta categoría será:

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

Luego, el cardinal de esta unión será:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{X \in \binom{[n]}{i}} \left|\bigcap_{x \in X} A_x\right|$$

Por lo que el siguiente paso será determinar los elementos de las intersecciones:

- Para $|A_1|$ pensemos que tenemos una función de $f : [n] \to [k]$ pero que $1 \notin f([n])$. Luego, esto sería tener una función sobreyectiva si no estuviera el 1 en $[k]$, lo que al final viene siendo una función que va de $[n]$ a un conjunto de $k-1$ elementos, por lo que el cardinal será $(k-1)^n$.
- Para $|A_2|$ pensemos que tenemos una función de $f : [n] \to [k]$ pero que $2 \notin f([n])$. Luego, esto sería tener una función sobreyectiva si no estuviera el 2 en $[k]$, lo que al final viene siendo una función que va de $[n]$ a un conjunto de $k-1$ elementos, por lo que el cardinal será $(k-1)^n$.

- Para $|A_1 \cap A_2|$ tendremos una función $f : [n] \to [k]$ que sería sobreyectiva si $1, 2 \notin [k]$. Pero de nuevo, esto no dice nada acerca de la función y en general lo que tenemos es una función de $[n]$ hacía un conjunto de $k-2$ elementos, por lo que su cardinal será $(k-2)^n$.

- En general, para $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i|$ tendremos una función que va de $[n]$ hacía un conjunto de $k-i$ elementos, por lo que su cardinal será en sí $(k-i)^n$.

Luego, reemplazando esto en nuestra formula:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{X \in \binom{[n]}{i}} (k-i)^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot (k-i)^n \cdot \sum_{X \in \binom{[n]}{i}} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \binom{n}{i} \cdot (k-i)^n
\end{aligned}$$

Y luego si a todo el conjunto de funciones le extraemos el conjunto de funciones que no son sobreyectivas obtendremos:

$$\begin{aligned}
\left|[k]^{[n]} - \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| &= k^n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \binom{n}{i} \cdot (k-i)^n \\
&= k^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \cdot \binom{n}{i} \cdot (k-i)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \cdot \binom{n}{i} \cdot (k-i)^n
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$|S_{n,k}| = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n$$

Números de Stirling de segundo orden

Ahora que entramos a contar funciones sobreyectivas, podemos pensar en ellas como una partición donde cada conjunto de la partición representa elementos que van a la misma imagen. Por ejemplo, para la función:

$$f : [3] \to [2]$$

De modo que $f(1) = f(3) = 1$ y $f(2) = 2$ tendremos la partición $\{\{1,3\},\{2\}\}$ donde $1, 3$ están en el mismo conjunto dado que van a la misma imagen y por ello 2 está en otro conjunto, puesto que va a un elemento diferente. Es obvio que este conjunto es una partición de $[3]$, y nos da información importante sobre la función. Antes de seguir, vamos a introducir algunas defenciones:

Definición — Orden cánonico o estandar. Sea $\pi \vdash X$ una partición, entonces se define el orden cánonico de π como una enumeración de sus elementos de forma que para:

$$\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

Donde $\min(B_1) \leq \min(B_2) \leq \cdots \leq \min(B_n)$.

Esta herramienta del orden estandar nos permitirá interactuar fácilmente con permutaciones, pero también es útil de manera similar a como definimos el conjunto $\binom{[n]}{k}$ y $\mathfrak{S}_n$ definir un conjunto de particiones para $[n]$.

Definición — Conjunto de particiones y número de Stirling de segundo orden. Sean $n, k \in \mathbb{Z}$ de forma que $k \leq n$ definimos el conjunto:

$$\left\{ {[n] \atop k} \right\} := \{\pi \subseteq \mathcal{P}([n]) : \pi \vdash [n] \wedge |\pi| = k\}$$

Es decir, el conjunto de particiones de $[n]$ que posee k elementos. El cardinal de este conjunto denotado por $\left\{ {n \atop k} \right\}$ se denomina número de Stirling de segundo orden.

¿Perfecto! Podríamos hacer entonces una biyección entre $S_{n,k}$ y $\left\{ {[n] \atop k} \right\}$ de no ser por un pequeño detalle. Si tengo una función $f : [3] \to [2]$ de forma que $f(1) = f(2) = 1$ y $f(3) = 2$ y además tengo una función $g : [3] \to [2]$ de forma que $g(1) = g(2) = 2$ y $g(3) = 1$, con f y con g podría generar la misma partición en orden estandar, aún cuando poseen imagenes diferentes. Es por eso que dentro del juego tiene que entrar algo que me permita decir a donde mandar cada elemento y eso es una permutación. Por ejemplo, para f podríamos tener la partición $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ y la permutación $(1, 2)$ diciendo que a los elementos de $\{1, 2\}$ los mando a 1 y al elemento de $\{3\}$ lo mando a 2. Luego, para g tendremos la partición $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ y la permutación $(2, 1)$ de forma que a los elementos de $\{1, 2\}$ los mando a 2 y al elemento de $\{3\}$ lo mando a 1. Con esto en mente, probaremos el siguiente teorema:

Teorema Para $n, k \in \mathbb{Z}$ con $k \leq n$:

$$S_{n,k} \cong \left\{ {[n] \atop k} \right\} \times \mathfrak{S}_k$$

Demostración. Para hacer esta demostración tomaremos dos funciones φ y ψ de forma que sean inversas. Empecemos definiendo:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & S_{n,k} & \to & \left\{ {[n] \atop k} \right\} \times \mathfrak{S}_k \\ & f & \mapsto & (\pi, \sigma) \end{array}$$

Definiendo:

- π como una partición en orden estandar donde $\pi = \{B \subseteq [n] : f^{-1}(\{i\}) = B$, para algún $i \in [n]\}$. Es decir, π es una partición de los elementos que tienen la misma imagen. Esta partición en orden estandar estará enumerada como $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$(£Por que se asegura que tiene k elementos?)

- σ es definida por:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & [k] & \to & [k] \\ & i & \mapsto & j \end{array}$$

  Si y solo si $f(B_i) = j$ o en otras palabras que para todo $x \in B_i$, $f(x) = j$.

Luego, definimos la función inversa como:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \left\{ {[n] \atop k} \right\} \times \mathfrak{S}_k & \to & S_{n,k} \\ & (\pi, \sigma) & \mapsto & f \end{array}$$

De forma que la función f se define por como $f : [n] \to [k]$ donde $f(B_i) = \{\sigma(i)\}$ para todo $B_i \in \pi$, o en otras palabras, que $f(x) = \sigma(i)$ si y solo si $x \in B_i$ (£Por qué esta será una función sobreyectiva?).

Con esto en mente, es hora de demostrar que ambas funciones son inversas:

- Tome $f \in S_{n,k}$, queremos demostrar que $(\psi \circ \varphi)(f) = f$. Para ello, sabemos que $\varphi(f) = (\pi_f, \sigma_f)$. Luego, $\psi(\pi_f, \sigma_f) = g$ siendo g una función sobreyectiva de $[n]$ a $[k]$. Queremos demostrar entonces que $f = g$. Ya tenemos que tienen el mismo dominio y codominio, por lo que basta probar que poseen la misma regla de asignación. Sea $a \in [n]$, entonces $g(a) = \sigma(i)$ para algún para algún $i \in [k]$ haciendo que $a \in B_i$ por defineción, pero entonces $\sigma(i) = f(a)$ dado que $a \in B_i$ y $\sigma(i) = f(x)$ para todo $x \in B_i$ por definción de σ_f por lo que $g(a) = f(a)$. Luego, $(\psi \circ \varphi)(f) = f$.

- Tome $(\pi, \sigma) \in \left\{ {[n] \atop k} \right\} \times \mathfrak{S}_k$, queremos demostrar que $(\varphi \circ \psi)(\pi, \sigma) = (\pi, \sigma)$. Para ello, note que $\psi(\pi, \sigma) = g$ siendo $g : [n] \to [k]$ una función sobreyectiva. Luego, $\varphi(g) = (\pi', \sigma')$ y lo importante es demostrar que $\pi = \pi'$ y $\sigma = \sigma'$. Para lo primero, recordemos que $|\pi| = |\pi'| = k$, y luego hace falta solo demostrar que $\pi' \subseteq \pi$ para demostrar que son iguales(£Por qué?).

  Suponga entonces que $B \in \pi'$, por lo que por definción $g^{-1}(\{i\}) = B$ para algún $i \in [k]$. Luego, también sabemos que por definción de g, si $g(B) = \{i\}$ entonces $i = \sigma(j)$ para algún $j \in [k]$, por lo que en realidad $B := B_k$ bajo la númeración estandar y luego dado que $B_k \in \pi$ entonces $B \in \pi$. Por tanto, concluimos que $\pi = \pi'$.

Ahora, si queremos demostrar que $\sigma = \sigma'$, ya tenemos asegurado que son funciones con el mismo dominio y codominio. Luego, para $i \in [k]$ tendremos que $\sigma'(i) = j$ si y solo si $g(B_i) = \{j\}$. Pero por definción de g, eso quiere decir que $g(B_i) = \{\sigma(i)\}$, por lo que $\sigma(i) = j$ y concluimos que $\sigma(i) = \sigma'(i)$.

Por lo tanto la composición de ambas funciones es la identidad de cada dominio y esto nos permite ver que son inversas, lo que implica que son funciones biyectivas y por tanto $S_{n,k} \cong \left\{ {[n] \atop k} \right\} \times \mathfrak{S}_k$. ■

Formula para números de Stirling

Ya que sabemos que los dos conjuntos están en biyección, tendremos la siguiente igualdad:

$$
\begin{aligned}
|S_{n,k}| &= \left| \left\{ {[n] \atop k} \right\} \times \mathfrak{S}_k \right| \\
|S_{n,k}| &= \left| \left\{ {[n] \atop k} \right\} \right| \cdot |\mathfrak{S}_k| \\
\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n &= \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot k! \\
\left\{ {n \atop k} \right\} &= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n
\end{aligned}
$$

Teorema del Binomio...Otra vez

Increible! Para cerrar esta sección, enunciaremos el teorema del Binomio visto anteriormente para una resta de dos números y veremos como este concepto permite extender el teorema a racionales.

Teorema — Teorema del binomio Parte 2. Sean $x, y \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ y $n \geq 0$ entonces:

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k y^k \cdot x^{n-k}$$

Demostración. Sin perdida de generalidad suponga que $y \leq x$. Suponga que $X \cong [x]$ y $Y \cong [y]$, y que $Y \subseteq X$. Luego:

$$(x-y)^n = |X \setminus Y|^n$$

Luego, si designamos:

$$A_i := \{z \in X^n | z_i \in Y\}$$

Podremos notar que $(X \setminus Y)^n = X^n \setminus \bigcup_{i\in[n]} A_i$ y usando el principio de inclusión y exclusión:

$$|(X \setminus Y)^n| = x^n - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{X\in\binom{[n]}{i}} \left|\bigcap_{x\in X} A_x\right|$$

Analizando un poco las intersecciones tendremos:

- $|A_i|$ será un conjunto donde la i-esima componente de cada elemento pertence a Y y el resto de componentes pertenecen a X en general. Dado eso, para la primera componente habrán y opciones y para cada una de las restantes, x opciones. Por tanto $|A_i| = y \cdot x^{n-1}$.

- $|A_i \cap A_j|$ con $i \neq j$ será un conjunto donde la i-esima y la j-esima componente de cada elemento sean elementos de Y y el resto pertenecerán a X en general. Por ello, en cada componente donde el elemento pertenece a Y habrán y opciones para escoger el elemento, y en el resto, x opciones. Por tanto $|A_i \cap A_j| = y^2 \cdot x^{n-2}$.

- $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|$ será un conjunto donde la primeras k componentes de sus elementos pertenecen a Y y por tanto el resto pertenencen en general a X. Luego, para dichas componentes hay y opciones y para el resto x por lo que $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| = y^k \cdot x^{n-k}$, lo que aplica para cualquier intersección de k conjuntos de la forma A_i.

Reemplazando en la formula que tenemos:

$$
\begin{aligned}
|(X \setminus Y)^n| &= x^n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{X \in \binom{[n]}{i}} \left| \bigcap_{x \in X} A_x \right| \\
&= x^n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{X \in \binom{[n]}{i}} y^k \cdot x^{n-k} \\
&= x^n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot y^k \cdot x^{n-k} \cdot \sum_{X \in \binom{[n]}{k}} 1 \\
&= x^n - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot y^k \cdot x^{n-k} \\
&= x^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \cdot \binom{n}{k} y^k \cdot x^{n-k} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \cdot \binom{n}{k} \cdot y^k \cdot x^{n-k}
\end{aligned}
$$

■

Luego, tendremos que:

$$
(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k y^k \cdot x^{n-k}
$$

Como pequeño corolario, podremos extender a todo número entero y racional el teorema del binomio.

Corolario Para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ y $n \geq 0$ tendremos que el Teorema del binomio en general es valido.

Demostración. Para derivar las formulas y la validez del teorema, en el caso de $\mathbb{Z}$ use las dos partes del teorema por casos y factorizando -1 en caso de ser necesario. Para $\mathbb{Q}$ exprese $x = \frac{a}{b}$ y $y = \frac{c}{d}$, aplique la suma de fracciones y busque aplicar el teorema del binomio unicamente en la suma de un entero. ■