Universidad Sergio Arboleda
Disciplina: Matemáticas
Profesor: Diego Villamizar

Matemáticas Discretas
Juan Sebastián Caballero Bernal

Taller 2

(1) Encuentre la cantidad de enteros $n \in [10^{30}]$ tales que existe $x \in \mathbb{Z}$ que satisface que $x^2 = n$ o $x^3 = n$ o $x^5 = n$

Demostración. Defina los siguientes conjuntos:

$$E_2 = \{n \in [10^{30}] : \exists x \in \mathbb{Z} | x^2 = n\}$$
$$E_3 = \{n \in [10^{30}] : \exists x \in \mathbb{Z} | x^3 = n\}$$
$$E_5 = \{n \in [10^{30}] : \exists x \in \mathbb{Z} | x^5 = n\}$$

Luego el cardinal de dichos conjuntos y sus intersecciones será:

- $|E_2| = 10^{15}$, ya que si $n \in E_2$ entonces existe un $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = n$. Dicho x^2 no puede ser mayor que 10^30 por lo que:

$$x^2 \geq 10^{30}$$
$$x \geq 10^{15}$$

  De manera similar podemos concluir que $|E_3| = 10^{10}$ y $|E_5| = 10^6$.

- $|E_2 \cap E_3| = 10^5$ ya que si $n \in E_2 \cap E_3$ entonces se puede expresar n como x^6 para algún $x \in \mathbb{Z}$, y luego similar a lo que se dedujo anteriormente tendremos que $|E_2 \cap E_3| = 10^5$, $|E_2 \cap E_5| = 10^3$, $|E_3 \cap E_5| = 10^2$ y $|E_2 \cap E_3 \cap E_5| = 10$.

Por lo que usando el *Principio de Inclusión-Exclusión* tendremos:

$$\begin{aligned} |E_2 \cup E_3 \cup E_5| &= |E_2| + |E_3| + |E_5| - |E_2 \cap E_3| - |E_2 \cap E_5| - |E_3 \cap E_5| + |E_2 \cap E_3 \cap E_5| \\ &= 10^{15} + 10^{10} + 10^6 - 10^5 - 10^3 - 10^2 + 10 \\ &= 1000010000898910 \end{aligned}$$

Por lo que la cantidad de enteros en $[10]^{30}$ que cumplen esa condición es 1000010000898910. □

(2) Pruebe, usando una biyección, que $\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n - 2}{2}$.

Hint: A los números del 1 al n asóciele un número 1 o 2 dependiendo de su bloque.

Demostración. Esto será equivalente a demostrar que:

$$\left\{ n \atop 2 \right\} \times 2 + 2 = 2^n$$

Por lo que podremos escoger conjuntos que representen estos números de para demostrar esta igualdad. Para ello, demostraremos que:

$$\left(\left\{ [n] \atop 2 \right\} \times \{1,2\} \right) \cup \{1,2\} \cong \{1,2\}^{[n]}$$

Para ello, definiremos una función φ como:

$$\varphi : \quad \left(\left\{ {[n] \atop 2} \right\} \times \{1,2\} \right) \cup \{1,2\} \quad \to \quad \{1,2\}^{[n]}$$

Donde para un elemento $a \in \left(\left\{ {[n] \atop 2} \right\} \times \{1,2\} \right) \cup \{1,2\}$ definimos su imagen dependiendo de su estructura:

$$\varphi(a) = \begin{cases} f_a(x) = 1 \text{ para todo } x \in [n], & a = 1 \\ f_a(x) = 2 \text{ para todo } x \in [n], & a = 2 \\ f_a(x) = i \text{ si y solo si } x \in B_i, & a = (\pi, 1) \\ f_a(x) = i \text{ si y solo si } x \notin B_i, & a = (\pi, 2) \end{cases}$$

Podemos demostrar que esta función es una biyección como:

- **Inyectividad:** Supongamos que existen $a, b \in \left(\left\{ {[n] \atop 2} \right\} \times \{1,2\} \right) \cup \{1,2\}$ de forma que $\varphi(a) = \varphi(b)$, por lo que las funciones f_a y f_b que genera φ deben ser la misma. Luego, $f_a^{-1}(\{1\}) = f_b^{-1}(\{1\})$ y $f_a^{-1}(\{2\}) = f_b^{-1}(\{2\})$, por lo que los denotaremos como $f^{-1}(\{1\})$ y $f^{-1}(\{2\})$. Es evidente que ambos no pueden ser vacíos al tiempo, pero si uno solo de ellos. Luego, tendremos varios casos:
  - Si $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ entonces quiere decir que para todo $x \in [n]$, $f(x) = 2$. Luego, no es posible que $a = 1$ puesto que entonces $\varphi(a)$ generará una función de forma que a todos los elementos les asigna 1, y de igual manera no puede ser una tupla de la forma $(\pi, 1)$ o $(\pi, 2)$ ya que entonces B_1 o B_2 serán vacíos contradiciendo el hecho de que π es una partición, por lo que $a = 2$. Con un razonamiento similar se demuestra que $b = 2$ y por tanto $a = b$.
  - Si $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$ se puede usar un argumento similar para deducir que $a = b = 1$.
  - Si $f^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$ y $f^{-1}(\{2\}) \neq \emptyset$, entonces dado que se involucran dos particiones, tendremos la partición $A = \{A_1, A_2\}$ y $B = \{B_1, B_2\}$ en orden canónico y correspondientes a los objetos a, b. Ahora, si $1 \in f^{-1}(\{1\})$ entonces bajo los posibles escenarios solo es posible que $f(x) = i$ si y solo si $x \in B_i$ y dado que ambas particiones están ordenadas

en orden canónico $f(A_1) = f(B_1) = \{1\}$ y $f(A_2) = f(B_2) = \{2\}$ para $A_1, A_2 \in \pi_a$ y $B_1, B_2 \in \pi_b$, y entonces $a = (\pi_a, 1)$ y $b = (\pi_b, 1)$. Ahora, supongamos que $x \in A_1$, por tanto $f_a(x) = 1$ pero a la vez $f_b(x) = 1$ y por la defínción de la función entonces $x \in B_1$ y viceversa, por lo que $A_1 = B_1$, y de manera similar se prueba que $A_2 = B_2$, por lo que $\pi_1 = \pi_2$, por lo que $a = b$. Para cuando $1 \notin f^{-1}(\{1\})$ y concluir que $a = b$ se usa el mismo argumento pero con $(\pi_1, 2)$ y $(\pi_2, 2)$.

- **Sobreyectividad:** Para las funciones que asigan todos los elementos a 1 o a 2 están los elementos 1 y 2 en el dominio para generar estas funciones. Si f es una función de forma que $f^{-1}(\{1\})$ y $f^{-1}(\{2\})$ son no vacíos, entonces generaremos el conjunto:

$$\pi := \{f^{-1}(\{i\}) | i \in \{1, 2\}\}$$

Y enumeraremos π de forma que $\pi = \{B_1, B_2\}$ si y solo si $\min(B_1) < \min(B_2)$, y no es díficil ver que $\pi \in [n]2$. Definiermos entonces x como:

$$x := \begin{cases} (\pi, 1), & 1 \in f^{-1}(\{1\}) \\ (\pi, 2), & 1 \notin f^{-1}(\{1\}) \end{cases}$$

Y es fácil que $\varphi(x) = f$, por lo que la función es sobreyectiva.

Luego, la función definida es biyectiva y por tanto:

$$\left(\left\{ {[n] \atop 2} \right\} \times \{1, 2\} \right) \cup \{1, 2\} \cong \{1, 2\}^{[n]}$$

Y tendremos que:

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} \times 2 + 2 = 2^n$$

□

(3) Use el punto 2. para hallar una fórmula parecida para $\left\{ {n \atop 3} \right\}$.

(4) Sea B_n una sucesión definida por

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \text{ para } n \geq 1,$$

y $B_0 = 1$. Argumente que B_n es la cantidad de particiones de $[n]$. Pruebe que

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k},$$

y concluya que B_n es la cantidad de relaciones de equivalencia sobre $[n]$.

Hint: Considere el bloque donde está $n + 1$ y quíteselo a la partición.

Demostración. Denomine como P_n como el conjunto de todas las particiones de $[n]$. Luego, podemos demostrar que:

$$\bigcup_{i\in[n]} \left\{ {[n] \atop i} \right\} = P_n$$

Es evidente que $\bigcup_{i\in[n]} \left\{ {[n] \atop i} \right\} \subseteq P_n$. Luego, si $\pi \in P_n$ es claro que por defininción $\pi \neq \emptyset$ y π es un conjunto finito, por lo que debe existir $i \in [n]$ tal que $|\pi| = i$(Si no fuera así y tuvieramos que $i > n$ entonces $\pi = \emptyset$), y por definción $\pi \in \bigcup_{i\in[n]} \left\{ {n \atop i} \right\}$, por lo que ambos conjuntos son iguales. Es evidente que si $i, j \in [n]$ y $i \neq j$ entonces $\left\{ {[n] \atop i} \right\} \cap \left\{ {[n] \atop j} \right\} = \emptyset$ puesto que un conjunto no puede poseer dos cardinales distinos al tiempo. Luego, el cardinal de la unión de los conjuntos será:

$$\begin{aligned}
\left| \bigcup_{i\in[n]} \left\{ {[n] \atop i} \right\} \right| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \left\{ {[n] \atop k} \right\} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}
\end{aligned}$$

Pero dicho cardinal también será el cardinal de P_n y al tiempo es por defininción del problema B_n, por lo que $|P_n| = B_n$.

Para cada partición π vamos a definir S como el conjunto $S \in \pi$ tal que $n+1 \in S$, y definiremos las funciones $T : [n] \to [n - |S|]$ de forma que:

$$T(x) = \begin{cases} x, & x \leq n - |S| - 1 \\ x - |S| - 1, & x \geq n - |S| - 1 \end{cases}$$

Y la función $R : \mathbb{P}([n]) \to \mathbb{P}([n - |S| - 1])$ definida por:

$$R(B) = \{T(x) : x \in B\}$$

Por lo que $\phi := \{R(B) : B \in \pi \wedge B \neq S\}$Y luego definiremos la función $\varphi : P_{n+1} \to \bigcup\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times P_{n-i}$ de forma que:

$$\varphi(\pi) = (S \setminus \{n+1\}, \phi)$$

Esta función es una biyección, pero para demostrarla definiremos la función $\psi : \bigcup\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times P_{n-i} \to P_{n+1}$ de forma que:

$$\psi(S, \phi) = \phi' \cup \{S \cup \{n+1\}\}$$

definiendo $\phi' = \{x : T(x) \in \phi\}$ Luego, componiendo ambas funciones:

- $(\psi(\varphi))(\pi) = \psi(S \setminus \{n+1\}, \phi)$, y queremos demostrar que la partición generada por ψ será π. Para ello, recordemos que $(S \setminus \{n+1\}) \cup \{n+1\} = S$. Luego, al unir S al conjunto ϕ' generará de nuevo la partición π.
- $(\varphi(\psi(S, \phi)) = \varphi(\pi)$ y queremos demostrar que π generará S y ϕ. Dada la definición de π sabemos que $(S \cup \{n+1\}) \setminus \{n+1\} = S$ y para entender que ϕ' es la partición generada por π, basta entender que ϕ' es generada por la función inversa de R, y al volver a aplicarse dentro de π, vuelve a generar ϕ. Por tanto, $\varphi(\pi) = (S, \phi)$.

Otra forma es definir una biyección donde a cada partición π de $[n+1]$ le asignaremos una pareja ordenada definida $(S \setminus \{n+1\}, \pi \setminus \{S\})$ donde:

- S se define como el conjunto que pertenece a π de forma que $n+1 \in S$(Garantizado por las propiedades de una partición)
- $\pi \setminus \{S\}$ es una partición del conjunto $[n] \setminus S$, el cual tiene cardinal $n-k$ cuando $|S| = k+1$ con $0 \leq k \leq n$. (Esto por la inclusión de $n+1$ en el conjunto S pero no en la partición)

Es fácil ver que la función es inyectiva ya que si para dos particiones π_1 y π_2 la imagen es la misma, es decir $(S_1 \setminus \{n+1\}, \pi_1 \setminus \{S_1\}) = (S_2 \setminus \{n+1\}, \pi_2 \setminus \{S_2\})$ entonces por la propiedad:

> Si A, B, C son conjuntos sales que $A \setminus C = B \setminus C$ entonces $A = B$

se puede concluir que $S_1 = S_2$ y luego que $\pi_1 = \pi_2$. Para ver la función es sobreyectiva solo hace falta ver que dado un conjunto $S \in \binom{[n]}{k}$ y una partición π de $[n] \setminus S$ podremos determinar una partición $\pi \cup \{S \cup \{n+1\}\}$ de forma que su imagen es (S, π) de manera sencilla.

Para concluir que B_n es la cantidad de relaciones de equivalencia sobre $[n]$ basta recordar que toda partición de un conjunto genera una relación de equivalencia y toda relación de equivalencia genera una partición, y dado que B_n es el número de particiones sobre $[n]$ entonces B_n será también el número de relaciones de equivalencia sobre $[n]$. $\square$

5 Denote por D_n el número de desarreglos en $[n]$. O sea

$$D_n = |\{\pi \in \mathfrak{S}_n : \pi(i) \neq i \text{ para todo } i \in [n]\}|.$$

Defina $D_0 = 1$. Pruebe que para $n \geq 2$ se tiene que

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

Demostración. Para esto, tenga en cuenta que $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ y que $\mathbb{D}_[n-1]\times[n]$ está en biyección con las permutaciones en $[n]$ que poseen 1 punto fijo(Notese por $A_{n,k}$). Fijese que:

$$\begin{aligned}(n-1)(D_{n-1}+D_{n+2}) &= |[n-1]\times(\mathbb{D}_{n-1}\cup\mathbb{D}_{n-2}| \\ &= |([n-1]\times\mathbb{D}_{n-1})\cup([n-1]\times\mathbb{D}_{n-2})| \\ &= |([n-1]\times\mathbb{D}_{n-1})\cup A_{n-1,1}|\end{aligned}$$

Defina ahora una función $\varphi:\mathbb{D}_n\to([n-1]\times\mathbb{D}_{n-1})\cup A_{n-1,1}$ de forma que para $\pi\in\mathbb{D}_n$ definiremos una biyección $\sigma_\pi:[n-1]\to[n-1]$ tal que:

$$\sigma_\pi(k)=\begin{cases}\pi(n), & k=\pi^{-1}(n)\\ \pi(k), & k\neq\pi^{-1}(n)\end{cases}$$

Y podremos definir:

$$\varphi(\pi)=\begin{cases}(\pi^{-1}(n),\sigma_\pi), & \sigma_\pi\in\mathbb{D}_{n-1}\\ \sigma_\pi, & \sigma_\pi\notin\mathbb{D}_{n-1}\end{cases}$$

Note que si σ_π no es un desarreglo de $\mathbb{D}_{n-1}$ entonces tiene que pertenecer a $A_{n-1,1}$ ya que si tuviera más de un punto fijo, π no sería un desarreglo.

- **Inyectividad:** Note que ambos casos son mutuamente excluyentes ya que los conjuntos son disyuntos y no es posible que una pareja ordenada sea al tiempo una biyección. Para el caso donde para dos desarreglos $\pi_1,\pi_2\in\mathbb{D}_n$ tales que $\varphi(\pi_1)=\varphi(\pi_2)=\sigma_{\pi_1}=\sigma_{\pi_2}$. Luego, para todo $k\neq\pi_1^{-1}$ y $k\neq\pi_2^{-1}$ tendremos que $\sigma_{\pi_1}(k)=\pi_1(k)=\sigma_{\pi_2}(k)=\pi_2(k)$. Además, es descartable que $k\neq\pi_1^{-1}$ y $k=\pi_2^{-1}$ ya que esto implicaría que $\pi_1(n)=\pi_2(k)$ lo que haría que $k=n$ y π_1 dejará de ser un desarreglo. Por esa razón concluiremos que $\pi_1(n)=\pi_2(n)$ y dado que para todo $i\in[n]$, $\pi_1(i)=\pi_2(i)$ entonces $\pi_1=\pi_2$. Mediante un argumento similar concluiremos que $\pi_1=\pi_2$ cuando $\varphi(\pi_1)=\varphi(\pi_2)=(\pi_1^{-1}(n),\sigma_{\pi_1})=(\pi_2^{-1}(n),\sigma_{\pi_2})$ tendremos que $\pi_1=\pi_2$, por lo que la función es sobreyectiva.
- **Sobreyectividad:** Para una pareja ordenada (i,σ) de $[n-1]\times\mathbb{D}_{n-1}$ podremos construir una biyección $\pi:[n]\to[n]$ definida por:

$$\pi(k)=\begin{cases}n, & k=i\\ \sigma(i), & k=n\\ \sigma(k), & k\neq i\wedge k\neq n\end{cases}$$

Fijese que luego por la definición de π, $\pi^{-1}(n) = i$ y por la definición de σ_π tendremos que $\sigma(k) = \sigma_\pi(k)$ para todo k, por lo que $\varphi(\pi) = (i, \sigma)$. Ahora, si tomamos una permutación σ en $A_{n-1,1}$ y denominamos i su punto fijo defina $\pi : [n] \to [n]$ como:

$$\pi(k) = \begin{cases} n, & k = i \\ i, & k = n \\ \sigma(k), & k \neq i \wedge k \neq n \end{cases}$$

Y por la propia definición de π, tendremos que $\varphi(\pi) = \sigma$. Concluimos entonces que la función es sobreyectiva.

Luego, la función será biyectiva y por tanto:

$$D_n = (n-1)\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right)$$

$\square$

(6) Pruebe que si X es un conjunto finito, entonces

$$\sum_{x \in X} 1 = |X|.$$

Demostración. Si X es un conjunto finito entonces $X \cong [n]$, es decir $|X| = n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Luego, defina:

$$A_i := \{i\}$$

para todo $i \in [n]$. Ningúno de estos conjuntos es vacío, si $i \neq j$ es evidente que $A_i \cap A_j = \emptyset$ y demostraremos que la unión de todos estos conjunto es $[n]$.

$\subseteq$) Si $x \in \bigcup_{i \in [n]} A_i$ entonces $x \in A_i$ para algún $i \in [n]$, pero por la definición de A_i tiene que pasar que $x = i$ y por tanto $x \in [n]$.

$\supseteq$) Si $x \in [n]$ entonces tendremos definido $A_x = \{x\}$, y luego dado que $x \in A_x$ entonces $x \in \bigcup_{i \in [n]} A_i$.

Por lo la colección $\{A_i\}_{i \in [n]}$ es una partición de $[n]$ y por tanto la suma de los cardinales de estos conjuntos será el cardinal de $[n]$, es decir n. Pero note que $|A_i| = 1$ para todo $i \in [n]$, y dado que son disyuntos 2 a 2:

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= |[n]| \\ &= |X| \\ &= n\end{aligned}$$

$\square$

(7) Pruebe que si $m \leq n$, entonces

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 0.$$

Hint: Separe el término $k = 0$ de la suma y considere $A_i = \{B \in \binom{[n]}{m} : i \in B\}$. Use incl-excl.

Demostración. Para esta demostración, empezaremos definiendo justamente el siguiente conjunto:

$$A_i := \{B \in \binom{[n]}{m} : i \in B\}$$

Para todo $i \in [n]$. Luego, nos gustaría usar *Principio de inclusión-exclusión* por lo que nuestro objetivo será determinar el cardinal de $\bigcap_{x\in X} A_x$ si $X \in \binom{n}{k}$.

- Para empezar, de manera intuitiva para A_1, tenemos que todo conjunto en A_1 incluye a 1 como su elemento. Luego, sabemos que si $B \in A_1$ entonces $|B| = m$. Para determinar el cardinal de A_1, ya sabemos que $1 \in B$ por lo que en realidad estamos organizando conjuntos de $m - 1$ elementos que no son fijos, y aunque los elementos de B son de $[n]$, dado que 1 ya es un elemento, y en un conjunto no hay elementos repetidos, tendremos que seleccionarlos de $[n] \setminus \{1\}$, lo que al final nos da a concluir que $|A_1| = \binom{n-1}{m-1}$. De manera similar podemos determinar que para cualquier A_i, su cardinal es $\binom{n-1}{m-1}$.
- Para $A_1 \cap A_2$, tenemos conjuntos B donde es fijo que $1 \in B$ y $2 \in B$. De nuevo, $|B| = m$, aunque dado que todos estos conjuntos poseen m elementos y dos de ellos son fijos, nos importa en sí escoger $m - 2$ elementos, y dado que $1, 2 \in B$ y no queremos elementos repetidos, entonces tendremos que tomarlos de $[n] \setminus \{1, 2\}$. Luego, podremos concluir que $|A_1 \cap A_2| = \binom{n-2}{m-2}$, y en general para $i, j \in [n]$ tal que $i \neq j$, tendremos que $|A_i \cap A_j| = \binom{n-2}{m-2}$.
- En general aplicando el razonamiento anterior podemos deducir que $|\bigcap_{x\in X} A_x| = \binom{n-k}{m-k}$ si $X \in \binom{n}{k}$.

- Una demostración más rigurosa de esto puede hacerse mediante biyecciones. Sea $X \in \binom{n}{k}$ defina la función:

$$\begin{aligned} \varphi : \bigcap_{x\in X} A_x &\to \binom{[n]\setminus X}{m-k} \\ B &\mapsto B \setminus X \end{aligned}$$

Luego, usando *Principio de inclusión-exclusión* podremos derivar la siguiente formula:

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{X\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{x\in X} A_x\right| \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{X\in\binom{[n]}{k}} \binom{n-k}{m-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-k}{m-k} \cdot \sum_{X\in\binom{[n]}{k}} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} \end{aligned}$$

Luego, note que esta suma puede separarse como:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} + \sum_{k=m+1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}$$

Note que para la segunda suma, todo valor que toma k es mayor que m, por lo que siempre quedará algo de la forma:

$$\binom{n-k}{-s}$$

Donde $s \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, por lo que estaremos hablando de conjuntos de cardinal negativo, y dado que no tiene sentido esto, todos estos valores serán 0, por lo que la segunda suma es 0 y:

$$\left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}$$

Ahora, notese que:

$$\bigcup_{i\in[n]} A_i = \binom{n}{m}$$

Si $m = 0$, entonces la igualdad es evidente, así que para el caso donde $m \geq 1$ tendremos que demostrar una doble contenecia:

$\subseteq$) Supongamos que $A \in \bigcup_{i\in[n]} A_i$, por Definición existe $i \in [n]$ tal que $A \in A_i$, y luego por definción de A_i tendremos que $A \in \binom{[n]}{m}$.

$\supseteq$) Supongamos que $A \in \binom{[n]}{m}$, y dado que $m \geq 1$ sabemos que $A \neq \emptyset$, por lo que existe $i \in [n]$ de modo que $i \in A$, y por definción $A \in A_i$, de manera que concluimos que $A \in \bigcup_{i\in[n]} A_i$.

$\square$

Luego, tendremos la igualdad:

$$\left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| = \binom{n}{m}$$

Y combinando y reorganizando tendremos:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| &= \binom{n}{m} \\
\binom{n}{m} - \left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| &= 0 \\
\binom{n}{m} - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} &= 0 \\
\binom{n}{m} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} &= 0 \\
\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} &= 0
\end{aligned}$$

Demostrando la igualdad deseada.