Ejercicio 1: Derivar cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \log_{(e^x)}(\sin x)$

Por propiedades de los logaritmos, la función puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\log(\sin x)}{\log(e^x)} \\ &= \frac{\log(\sin x)}{x} \\ &= x^{-1} \cdot \log(\sin x) \end{aligned}$$

Y aplicando la regla de la derivada de un producto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) &= x^{-1} \cdot \frac{d}{dx}\log(\sin x) + \log(\sin x) \cdot \frac{d}{dx}x^{-1} \\ &= x^{-1} \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) + \log(\sin x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\log(\sin x)}{x^2} \\ &= \frac{\cot x}{x} - \frac{\log(\sin x)}{x^2} \\ &= \frac{x \cdot \cot x - \log(\sin x)}{x^2} \end{aligned}$$

(b) $f(x) = (\log x)^{\log x}$

Por definición de exponenciación, podemos escribir la función como:

$$f(x) = e^{\log x \cdot \log(\log x)}$$

Ejercicio 2: Aplicar derivación logaritmica para para obtener la derivada de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sin x^{\cos x} + \cos x^{\sin x}$

Integrando cada sumando:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin x^{\cos x} &= \frac{d}{dx}e^{\log(\sin x)\cos x} \\ &= \end{aligned}$$

Ejercicio 5: Hallar los siguientes limites mediante la regla de L'Hopital.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$

Aplicando repetidamente la regla de L'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{6x}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{6}\\
&= \frac{e^0}{6}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}{x^3}$ Aplicando repetidamente la regla de L'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3} - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}-1+2x}{3x^2} - \frac{1}{3}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2+2x+1}+2}{6x} - \frac{1}{3}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(x+1)^3}}{6} - \frac{1}{3}\\
&= \frac{\frac{2}{1}}{6} - \frac{1}{3}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 7: Demostrar que:

(a) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \frac{e^x+e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y-e^{-y}}{2}\\
&= \frac{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})}{4}\\
&= \frac{e^{x+y}+e^{y-x}+e^{x-y}+e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{y-x}-e^{x-y}+e^{-x-y}}{4}\\
&= \frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4}\\
&= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}\\
&= \cosh(x+y)
\end{aligned}$$

Ejercicio 8: Las funciones sinh y tanh son inyectivas y por tanto poseen su respectiva función inversa. Pero para la función cosh no es el caso. Si se restringe su dominio a $[0,\infty)$ tiene una inversa designada por arccosh definida sobre $[1,\infty)$. Demostrar:

(a) $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ para $x > 1$

Recordemos que por propiedades de las derivadas para una función f y su inversa f^{-1} tendremos que:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dx}f(x) \circ f^{-1}(x)}$$

Y recordando que $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$ tendremos que:

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x) \circ \cosh^{-1}(x)}$$

además usando la identidad $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ y la definición de función inversa:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1}(x)) - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh(\cosh^{-1}(x)) \cdot \cosh(\cosh^{-1}(x)) - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x \cdot x - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 9: Hallar una formula explicita para $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$ y $\tanh^{-1}$.

Para $\sinh^{-1}$ basta simplemente con despejar en la formula dada:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
2y &= e^x - e^{-x} \\
e^x - 2y - e^{-x} &= 0 \\
e^{2x} - 2ye^x - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Luego, usando la formula cuadratica(Teniendo en cuenta que queremos determinar e^x):

$$\begin{aligned}
e^x &= \frac{-(-2y) \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \\
e^x &= \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} \\
e^x &= y \pm \sqrt{y^2 + 1}
\end{aligned}$$

Como e^x siempre será un número positivo, podemos tomar la raíz con $+$ y aplicando logaritmo:

$$\begin{aligned}
e^x &= y + \sqrt{y^2 + 1} \\
\log(e^x) &= \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\
x &= \log(y + \sqrt{y^2 + 1})
\end{aligned}$$

Por lo que $\sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$. Para $\cosh^{-1}$ es necesario recordar que se hace una restricción del dominio de $\cosh^{-1}$ a $[0, \infty)$ y el dominio de $\cosh^{-1}$ será $[1, \infty)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ 2y &= e^x + e^{-x} \\ e^x - 2y + e^{-x} &= 0 \\ e^{2x} - 2ye^x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

De nuevo, aplicaremos la formula cuadratica para determinar e^x:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{-(-2y) \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \\ e^x &= \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2-1}}{2} \\ e^x &= y \pm \sqrt{y^2-1} \end{aligned}$$

Para ajustar el resultado a la restricción hecha, tendremos que escoger la raíz con + y aplicando logaritmo:

$$\begin{aligned} e^x &= y + \sqrt{y^2-1} \\ \log(e^x) &= \log(y + \sqrt{y^2-1}) \\ x &= \log(y + \sqrt{y^2-1}) \end{aligned}$$

Por lo que $\cosh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$. Por último, para $\tanh^{-1}$ tendremos:

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ y &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ y(e^{2x} + 1) &= e^{2x} - 1 \\ ye^{2x} + y - e^{2x} + 1 &= 0 \\ e^{2x}(y-1) + (y+1) &= 0 \\ e^{2x} &= -\frac{y+1}{y-1} \\ \log(e^{2x}) &= \log\left(\frac{y+1}{1-y}\right) \\ 2x &= \log(y+1) - \log(1-y) \\ x &= \frac{\log(y+1) - \log(1-y)}{2} \end{aligned}$$

Por lo que $\tanh^{-1}(x) = \frac{\log(x+1) - \log(1-x)}{2}$.