Taller 1

Parte 1

1 **Ejercicio 1:** Demostrar que $\int\limits_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$ considerando particiones de n subintervalos y usando la formula para $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3$.

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de forma que $x_i - x_{i-1} = \frac{b}{n}$ para todo i entre 1 y n. Observese entonces que $U(f,P)$ y $L(f,P)$ pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \cdot \frac{b}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(i \cdot \frac{b}{n}\right)^3 \cdot \frac{b}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^3 \cdot \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\ &= \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^3 \cdot \frac{b}{n} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} x_j^3 \cdot \frac{b}{n} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} j^3 \cdot \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^4}{n^4} \sum_{j=1}^{n-1} j^3 \\ &= \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n-1)^2}{4} \end{aligned}$$

Es fácil notar entonces que:

$$L(f,P) < \frac{b^4}{n^4} < U(f,P)$$

Y gracias a que n puede hacerse tan grande como se desee, podemos hacer que $U(f,P) - L(f,P)$ sea tan pequeño como se desee, concluyendo entonces que al ser la integral el único número con dicha propiedad:

$$\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$$

De manera más general se puede llegar al resultado:

$$U(f,P) - L(f,P) = \frac{b^4}{2 \cdot n}$$

Lo que hace más evidente la afirmación anterior. $\square$

(2) **Ejercicio 2:** Demostrar de forma similar que $\int\limits_0^b x^4 dx = \frac{b^5}{5}$.

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de forma que $x_i - x_{i-1} = \frac{b}{n}$ para todo i entre 1 y n. Observese entonces que $U(f,P)$ y $L(f,P)$ pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \cdot \frac{b}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(i \cdot \frac{b}{n}\right)^4 \cdot \frac{b}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^4 \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^5}{n^5} \sum_{i=1}^{n} i^4 \\ &= \frac{b^5}{n^5} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^4 \cdot \frac{b}{n} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} x_j^4 \cdot \frac{b}{n} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} j^4 \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^5}{n^5} \sum_{j=1}^{n-1} j^4 \\ &= \frac{b^5}{n^5} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30} \end{aligned}$$

Es fácil notar entonces que:

$$L(f,P) < \frac{b^5}{n^5} < U(f,P)$$

Y gracias a que n puede hacerse tan grande como se desee, podemos hacer que $U(f,P) - L(f,P)$ sea tan pequeño como se desee, concluyendo entonces que al ser la integral el único número con dicha propiedad:

$$\int_0^b x^4 dx = \frac{b^5}{5}$$

De manera más general se puede llegar al resultado:

$$U(f,P) - L(f,P) = \frac{b^5}{n}$$

Lo que hace más evidente la afirmación anterior. $\square$

(3) **Ejercicio 5:** Evaluar sin hacer calculos:

(a) $\int_{-1}^{1} x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}dx$

Para empezar, determinaremos el comportamiento de la función con respecto a paridad:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \cdot \sqrt{1-(-x)^2} \\ &= -(x^3) \cdot \sqrt{1-x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que f es una función impar. Luego, eso quiere decir que:

$$\int_{-1}^{1} x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}dx = 0$$

(b) $\int_{-1}^{1}(x^5+3) \cdot \sqrt{1-x^2}dx$ Empecemos por despejar la función como procede:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}(x^5+3) \cdot \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-1}^{1} x^5 \cdot \sqrt{1-x^2} + 3 \cdot \sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^5 \cdot \sqrt{1-x^2}dx + \int_{-1}^{1} 3 \cdot \sqrt{1-x^2}dx \end{aligned}$$

Luego, gracias a que la función $x^5 \cdot \sqrt{1-x^2}$ es impar, la integral de dicha función entre -1 y 1 será 0. Solo se debe hallar el valor de:

$$\int_{-1}^{1} 3 \cdot \sqrt{1-x^2}dx = 3\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}$$

Y dado que la función es par, solo es necesario conocer el valor de:

$$2 \cdot \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}$$

Pero dicha area será la cuarta parte del área de una circunferencia de radio 1. Lo que sería:

$$\begin{aligned} \frac{A}{4} &= \frac{\pi \cdot r^2}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Luego, eso significa que:

$$2 \cdot \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Y entonces:

$$3\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} = \frac{3\pi}{2}$$

Siendo el anterior resultado, el correspondiente a la integral original.

④ **Ejercicio 7:** Decidir cuales de las siguientes funciones son integrables en $[0, 2]$ y cálcular la integral cuando sea posible.

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, queremos determinar una partición P_ϵ de modo que:

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

Para ejercicios practicos, es conveniente hacer que $1 \in P_\epsilon$ de forma que para algún k se tendrá que $x_k = 1$.Definamos entonces cada uno de los terminos:

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i(x_i - x_{i-1}) + 1 + \sum_{i=k+2}^{n} (x_i - 2)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + (-1) + \sum_{i=k+1}^{n} (x_{i-1} - 2)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

□

(b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = x + [x]$

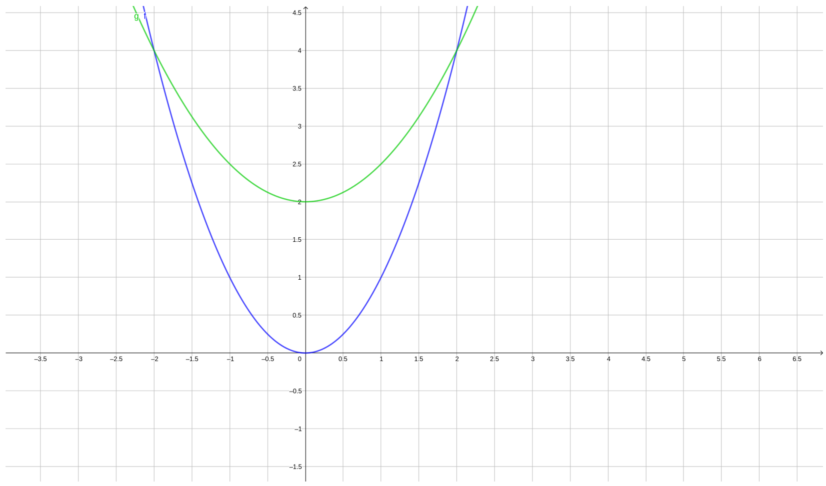
(d) $f(x) = \begin{cases} x + [x], & x \text{ rational} \\ 0, & x \text{ irrational} \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es de la forma } a + b\sqrt{2} \text{ para } a, b \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \text{ no es de dicha forma} \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \text{ or } x > 1 \end{cases}$

5 **Ejercicio 8:** Encontrar el area de las regiones delimitadas por:

(a) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$



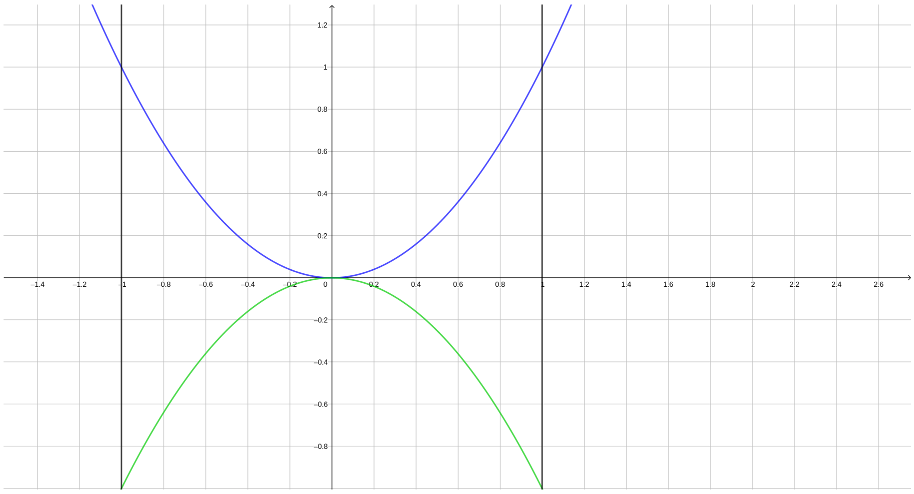
En este caso, bastará con calcular la integral de ambas funciones en el intervalo $[-2, 2]$, siendo el intervalo donde ambas funciones delimitan un area especifica. Luego, dado que en dicho intervalo se tiene la desigualdad $g(x) \geq f(x)$, el area de la región delimitada será el area bajo la curva de g sin el area bajo la curva de f. Esto es:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} g(x) - f(x) dx &= \int_{-2}^{2} g(x) dx - \int_{-2}^{2} f(x) dx \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2} + 2dx - \int_{-2}^{2} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} x^2 dx + \int_{-2}^{2} 2dx - \int_{-2}^{2} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8}{3} + 8 - 2 \cdot \frac{8}{3} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Por lo que el área delimitada por dichas graficas será $\frac{16}{3}$ unidades.

(b) Las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$ y las lineas verticales que pasan por $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

Notese que la función f es un reflejo de la función g sobre el eje x, por lo que bastará con cálcular el area de la región delimitada por encima del eje x para determinar el area total. Además, note que las dos rectas verticales intersecan a la función f en los puntos $(-1, 1)$ y

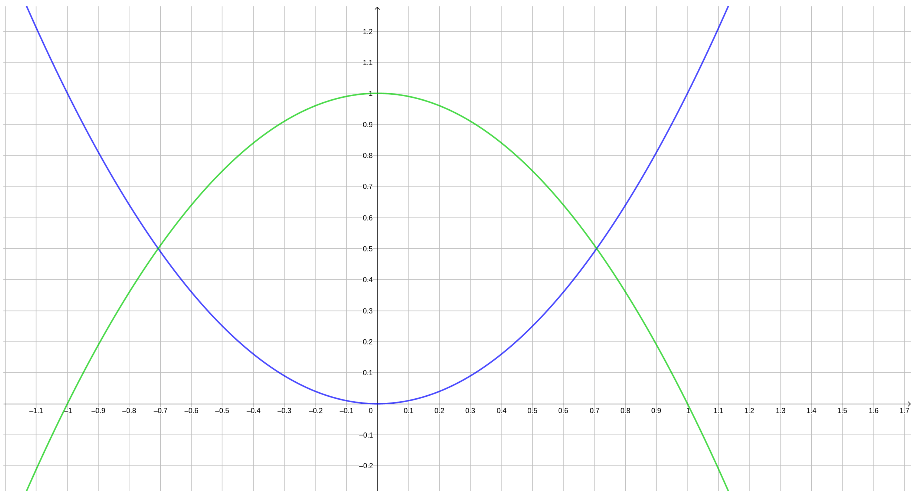


(1, 1). Esto permite delimitar el problema a calcular el area bajo la curva de la función f en el intervalo $[-1, 1]$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} x^2 dx\\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Luego, el area total de la región delimitada por las dos funciones y las dos rectas será el doble del area anterior, es decir, $\frac{4}{3}$ unidades.

(c) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$ La figura determinada por dichas funciones se



refleja sobre el eje y al ser ambas funciones pares. Por lo que es suficiente encontrar el area de un lado de la gráfica. Determinando primero las restricciones de las funciones:

$$\begin{aligned}
x^2 &= 1 - x^2 \\
2x^2 &= 1 \\
x^2 &= \frac{1}{2} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

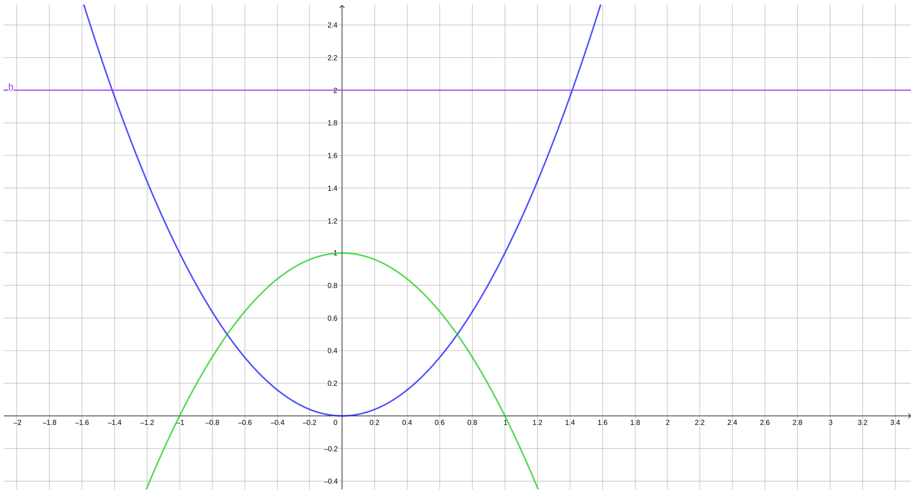
Con esto en mente, la integral necesaria para determinar el area es aquella del intervalo $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ teniendo en cuenta que la función g es mayor a la función f en los valores de este intervalo. Por lo que el area de la figura será:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - x^2 - x^2 dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - 2x^2 dx \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 \cdot dx - 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \left(\frac{\frac{2\sqrt{2}}{8}}{3} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\frac{2\sqrt{2}}{4}}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{12} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{6}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que el área de la figura completa será $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ unidades.

(d) Las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = 2$

En este caso, es importante notar que la región delimitada por las tres figuras tiene que estar por encima del eje x y por debajo de $y = 2$. Dado que h interseca a f en los puntos



$\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, el area de la región entre f y h será expresada como sigue:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} 2 - x^2 &= \int_0^{\sqrt{2}} 2dx - \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx\\ &= 2 \cdot \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\\ &= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)\\ &= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}\\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Por lo que el area entre f y h será $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. Luego, para obtener el area deseada sustraemos el area entre f y h del area entre f y g que fue determinada en el problema anterior.

$$\begin{aligned}\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} &= \frac{8\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{3}\\ &= \frac{6\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

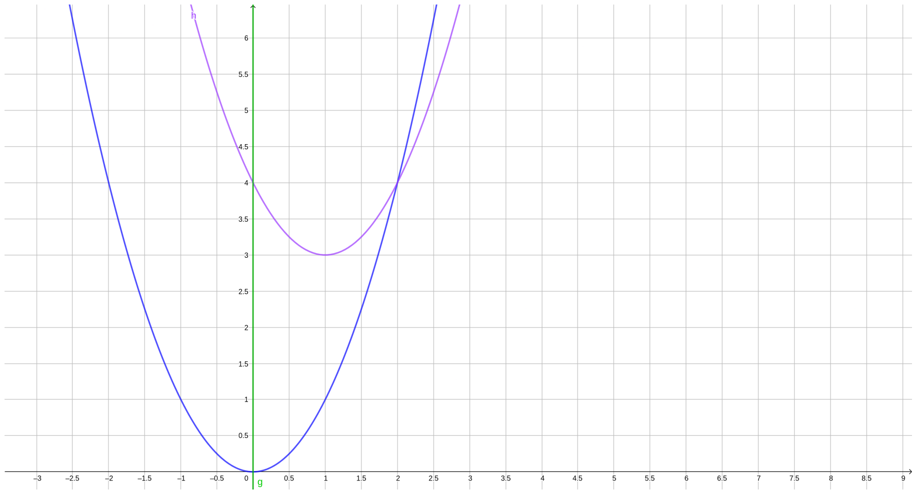
Por lo que el area delimitada por las tres gráficas será $\frac{6\sqrt{2}}{3}$.

(e) Las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2x + 4$ y el eje vertical

La gráfica delimitada estará entonces en el primer cuadrante del plano cartesiano. Revisando el punto extremo dentro de las gráficas tendremos:

$$\begin{aligned}x^2 &= x^2 - 2x + 4\\ -2x + 4 &= 0\\ 2x &= 4\\ x &= 2\end{aligned}$$

Por lo que la operación necesaria para determinar el area de la región será determinar una integral entre 0 y 2, teniendo en cuenta que la función g es mayor que la función f en el



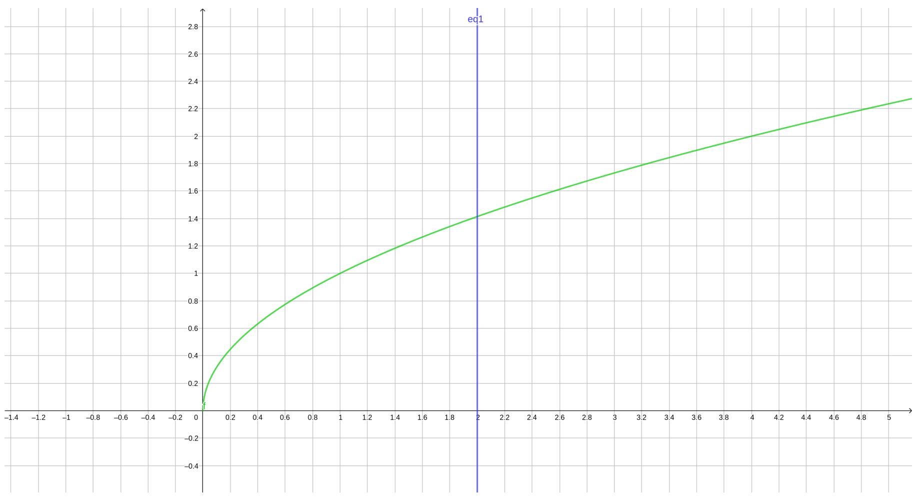
intervalo dado, tendremos:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 g(x) - f(x)dx &= \int_0^2 x^2 - 2x + 4dx - \int_0^2 x^2dx \\
&= \int_0^2 x^2dx - 2\int_0^2 xdx + \int_0^2 4dx - \int_0^2 x^2dx \\
&= \int_0^2 4dx - 2\int_0^2 xdx \\
&= 8 - 2\cdot\frac{4}{2} \\
&= 8 - 4 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Por lo que el area de la región delimitada será 4.

(f) Las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje horizontal y la linea vertical que pasa por $(2, 0)$

Con el objetivo de evaluar solo integrales que sabemos determinar, tome en cuenta como



referencia de eje horizontal al eje y. Luego, se puede observar que al ser gráficas ïnversas"tendremos que determinar una integral entre $[0, \sqrt{2}]$. Esto será:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} y^2 dy &= \frac{(\sqrt{2})^3}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Por lo que el area de la región solicitada será $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Esto de forma que la región de la función $x = y^2$ y $x = 2$ en la región necesitada es la misma que la región de la función $y = \sqrt{x}$ y la recta $x = 2$.

6 **Ejercicio 9:** Determine:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\, dy \right) dx$$

en terminos de $\int_a^b f$ y $\int_c^d g$

Para empezar, es necesario notar que $f(x)$ se comporta como una constante dentro de la segunda integral, al estar en terminos de y. Por tanto, podemos escribir:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(f(x) \cdot \int_c^d g(y)dy \right) dx$$

Luego, con respecto a la primera integral, $\int_c^d g(y)dy$ se comporta como una constante, lo que permite reducir a:

$$\int_a^b \left(f(x) \cdot \int_c^d g(y)dy \right) dx = \int_c^d g(y)dy \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Lo que permite que la expresión original sea escrita como:

$$\int_a^b f \cdot \int_c^d g$$

7 **Ejercicio 10:** Demostrar usando la notación del Teorema 5 que:

$$m_i' + m_i'' = inf\{f(x_1) + g(x_2) : t_{i-1} \leq x_1, x_2 \leq t_i\} \leq m_i$$

Demostración. Recordando las siguientes definiciones del Teorema 5:

$$m_i' = inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$m_i'' = inf\{g(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$m_i = inf\{f(x) + g(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

Primero, se demostrará que $m'_i + m''_i = inf\{f(x_1) + g(x_2) : t_{i-1} \leq x_1, x_2 \leq t_i\}$. Sean x_1, x_2, x'_1, x'_2 de forma que:

$$inf\{f(x) + g(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = f(x_1) + g(x_2)$$
$$m'_i = f(x'_1)$$
$$m''_i = f(x'_2)$$

Por definición es dado que:

$$f(x'_1) + g(x'_2) \leq f(x_1) + g(x_2)$$

Luego, por la defínción de m'_i y de m''_i:

$$f(x_1) \leq f(x'_1)$$
$$g(x_2) \leq g(x'_2)$$

Lo que nos permite concluir que:

$$f(x_1) + g(x_2) \leq f(x'_1) + g(x'_2)$$

Y de lo que sigue que:

$$f(x_1) + g(x_2) = f(x'_1) + g(x'_2)$$

Luego, sea x' de forma que:

$$m_i = f(x') + g(x')$$

Por definición, de nuevo se tendrá que:

$$f(x_1) \leq f(x')$$
$$g(x_2) \leq g(x')$$

De lo que se concluye que:

$$f(x_1) + g(x_2) \leq f(x') + g(x')$$
$$m'_i + m''_i \leq m_i$$

$\square$

8 **Ejercicio 13:**

(a) Demostrar que si f es integrable en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$

Demostración. Sea entonces P una partición sobre el intervalo $[a,b]$, es notable por la hipotesis que en todo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se tendrá que $M_i \geq 0$ y $m_i \geq 0$. Junto con el hecho de que siempre $x_i - x_{i-1} \geq 0$ podemos concluir que para todo i entre 1 y n:

$$M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq 0 \qquad\qquad m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq 0$$

Por lo que en terminos más generales tendremos que:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq 0 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \geq 0$$

Por lo que $U(f)$ y $L(f)$ serán mayores o iguales a 0 puesto que las afirmaciones anteriores se cumplen para toda partición P. Dado que f es *Darboux Integrable*, entonces $U(f) = L(f) = \int_a^b f$ lo que permite concluir que:

$$\int_a^b f \geq 0$$

□

(b) Demostrar que si f y g son integrables en $[a,b]$ y que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

Demostración. Bajo las condiciones dadas, es de notar que $f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Luego, al ser g integrable, también lo será $-1 \cdot g$ y al ser f integrable $f - g$ es una función integrable también. Luego, gracias a la parte (a) se puede concluir que:

$$\int_a^b f - g \geq 0$$

$$\int_a^b f - \int_a^b g \geq 0$$

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

□

9 **Ejercicio 14:** Demostrar que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

Demostración. Supongase entonces que f es una función integrable en $[a, b]$. Eso quiere decir que para todo ϵ mayor que 0 existe una partición P_ϵ de forma que:

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

Dicha partición puede ser escrita como:

$$P_\epsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

Lo que permite que tomando $c \in \mathbb{R}$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$ se cumple que:

$$a \leq x_i \leq b$$
$$a + c \leq x_i + c \leq b + c$$

Por lo que $x_i + c$ pertenece al intervalo $[a + c, b + c]$ de forma que podemos definir una partición:

$$P = \{x_i + c | x_i \in P_\epsilon\}$$

De manera intuitiva se define M_i' y m_i' de manera similar a como se haría con M_i y m_i, y notece que todo elemento $x_j \in [a+c, b+c]$ puede ser escrito en terminos de un elemento $x_k \in [a, b]$ como $x_j = x_k + c$. Con eso en mente, evaularemos las sumas inferiores y superiores de P sobre la función g definida como $g(x) = f(x - c)$ tendremos:

$$\begin{aligned}
U(g, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i' \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x_j) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_j - c) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f((x_k + c) - c) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_k) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= U(f, P_\epsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(g, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i' \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x_j) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_j - c) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f((x_k + c) - c) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_k) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&\geq \sum_{i=1} m_i(x_i - x_(i - 1)) \\
&= L(f, P_\epsilon)
\end{aligned}$$

Lo que permite concluir la siguiente desigualdad:

$$L(f, P_\epsilon) \leq L(g, P) \leq U(g, P) \leq U(f, P_\epsilon)$$

De manera clara ya es evidente que:

$$U(g, P) - L(g, P) < \epsilon$$

Por lo que g es integrable sobre $[a+c, b+c]$. Note que:

$$L(f, P_\epsilon) \leq L(g, P) \leq \int_{a+c}^{b+c} g(x)dx \leq U(g, P) \leq U(f, P_\epsilon)$$

Pero dado que:

$$L(f, P_\epsilon) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f, P_\epsilon)$$

Podemos concluir que al hacer la diferencia entre las sumas superiores y las sumas inferiores tendremos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

$\square$

(10) **Ejercicio 15:** Para $a, b > 1$ demostrar que:

$$\int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt$$

Demostración. Gracias al hecho de que:

$$\int_a^1 \frac{1}{t}dt = \int_b^{ab} \frac{1}{t}dt$$

La expresión original puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt &= \int_b^{ab} \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt \\
&= \int_1^b \frac{1}{t}dt + \int_b^{ab} \frac{1}{t}dt \\
&= \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt
\end{aligned}$$

$\square$

(11) **Ejercicio 20:** Suponga que f es una función no decreciente en $[a, b]$.

(a) Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$. £Que es $U(f, P)$ y $L(f, P)$?

Gracias a ser no decreciente, se tendrá que:

$$\begin{aligned}
U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}$$

En terminos un poco más explicitos, $U(f, P)$ será la suma de areas de los rectángulos cuyas alturas son $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)$ y $L(f, P)$ serála suma de areas de los rectángulos cuyas alturas son $f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_{n-1})$.

(b) Suponga que $t_i - t_{i-1} = \delta$ para todo i. Demostrar que $U(f,P) - L(f,P) = \delta[f(b) - f(a)]$

Demostración. Sea f una función no decreciente en $[a,b]$ y una partición P de forma que $t_i - t_{i-1} = \delta$ para todo i entre 1 y n. Entonces:

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \delta \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \delta[f(t_n) - f(t_0)] \\ &= \delta[f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

□

(c) Demostrar que f es integrable

Demostración. Sea f una función no decreciente en $[a,b]$. Tome $\epsilon > 0$, definamos entonces $P_\epsilon = x_0, x_1, \ldots, x_n$ para $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\epsilon}$ y de forma que $t_i - t_{i-1} = \frac{(b-a)}{n}$ .Se tendrá entonces:

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(\frac{b-a}{n}) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) \\ &= \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{n} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Y dado que la diferencia entre las sumas superiores e inferiores es menor que ϵ para todo $\epsilon > 0$, entonces f es *Darboux Integrable.* $\square$

(d) Dar un ejemplo de una función no descreciente en $[0, 1]$ que sea discontinua en infinitos puntos.

Definase el siguiente conjunto F:

$$F := \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} | n \in \mathbb{N} \right\}$$

Entonces defina la función $f : \mathbb{R} \setminus F \to \mathbb{R}$ de forma que $f(x) = x$. Es evidente que la función es no decreciente y además posee una infinidad de discontinuidades.

Parte 2

12 **Ejercicio 1:** Determinar la derivada de cada una de las siguientes funciones

(a) $F(x) = \int_a^{x^3} \sin^3 t dt$

Resolviendo la siguiente integral será:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx \\
&= \int (\cos^2 x - 1) \cdot (-\sin x) dx \\
&= \int u^2 - 1 du & \text{Con } u = \cos x \\
&= \int u^2 du - \int 1 du \\
&= \frac{u^3}{3} - u + C \\
&= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C
\end{aligned}$$

Luego, la integral de la función puede ser escrita gracias al Teorema Fundamental del cálculo:

$$\int_a^{x^3} \sin^3 t dt = \frac{\cos^3(x^3)}{3} - \cos(x^3) - \frac{\cos^3(a)}{3} + \cos(a)$$

Y derivando la expresión será:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos^3(x^3)}{3}-\cos(x^3)-\frac{\cos^3(a)}{3}+\cos(a)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos^3(x^3)}{3}-\cos(x^3)\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(-3\cos^2(x^3)\sin(x^3)\cdot 3x^2\right)+(\sin^2(x^3)\cdot 3x^2)\\
&= \left(-3x^2\cos^2(x^3)\sin(x^3)\right)+(3x^2\cdot\sin^2(x^3))\\
&= 3x^2(-\cos^2(x^3)\sin(x^3)+\sin^2(x^3))\\
&= 3x^2\sin(x^3)(-\cos^2(x^3)+1)\\
&= 3x^2\sin(x^3)(\sin^2(x^3))\\
&= 3x^2\sin^3(x^3)
\end{aligned}
$$

(b) $F(x)=\int_{15}^{x}\left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}dt\right)dy$
La expresión $g(y)=\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}$ entonces:

$$F(x)=\int_{15}^{x} g(y)dy$$

Luego, por el Teorema Fundamental del Calculo se puede determinar la derivada de $F(x)$ como sigue:

$$F'(x)=\int_8^x \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}dt$$

Dicho cambio de variable dentro de la integral permite que al derivar $g(15)$ al ser una constante su derivada será 0. Luego, solo quedará la expresión $g(x)$ de forma que queda la expresión anteriormente descrita.

(c) $F(x)=\sin\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t dt\right)dy\right)$ Es conveniente definir las siguientes funciones en terminos de x y y:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x g(y)dy\\
g(y) &= \sin\left(\int_0^y \sin^3 t dt\right)
\end{aligned}
$$

Lo que permitirá escribir la función original como:

$$F(x)=sin(f(x))$$

Y aplicando la regla de la cadena tendremos:

$$\frac{d}{dx}F(x)=\cos(f(x))\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

Luego, podemos calcular la derivada de f con respecto a x gracias al Teorema Fundamental del Calculo. Esto será:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= g(x)\\ &= \sin\left(\int_0^x \sin^3 t dt\right)\end{aligned}$$

Lo que nos dejará con la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \cos\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t dt\right) dy\right) \cdot \sin\left(\int_0^x \sin^3 t dt\right)$$

13 **Ejercicio 2:** Para cada una de las siguientes funciones f, si $F(x) = \int_0^x f$, £En que puntos x ocurre que $F'(x) = f(x)$?

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

Note que la función f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Eso quiere decir que por lo menos para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 1$ se tendrá que $F'(x) = f(x)$. Luego, gracias a que la función F no es continua en 1 se puede afirmar que no es diferenciable en dicho punto y por tanto $F'(1) \neq f(1)$.

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Dado que de nuevo, la función es continua en todo número real a excepción de 1, está asegurado al menos que $F'(x) = f(x)$ para $x \neq 1$. Luego, de nuevo como F es discontinua en $x = 1$ concluimos que no es diferenciable y por tanto $F'(1) \neq f(1)$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ o } x > 1 \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Esta función es continua en todos los números reales, a excepción de 1.Incluso es notorio que es continua en 0 puesto que tant por derecha como por izquierda, los valores tienden a 0.

14 Determinar $(f^{-1})'(0)$ de:

(a) $f(x) = \int_0^x 1 + \sin(\sin t)dt$

Primero, igualemos la expresión a 0. Esto quiere decir:

$$\begin{aligned}\int_0^x 1 + \sin(\sin t)dt = 0\\ x = 0\end{aligned}$$

Es de tener en cuenta que x solo puede ser 0 puesto que si se intenta resolver la ecuación $\sin(\sin t) = -1$ se llegará a un valor no definido por la función $\sin^{-1}$. El valor de la función nos indica que dentro del conjunto que representa la función tendremos la pareja ordenada $(0, 0)$, por lo que la función inversa tendrá la pareja ordenada $(0, 0)$

Luego, gracias al Teorema Fundamental del Calculo sabemos que al ser la función continua en todo punto, incluyendo 0 se tendrá que: $f'(x) = 1 + \sin(\sin t)$ Reemplazando con 0 tendremos:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1 + \sin(\sin 0) \\ &= 1 + \sin(0) \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego, por la regla de la derivada de la función inversa:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(0) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} \\ &= \frac{1}{f'(0)} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \int_1^x \cos(\cos t)dt$

Primero igualemos de nuevo la expresión a 0, es decir:

$$\begin{aligned} \int_1^x \cos(\cos t)dt &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Es de tener en cuenta que x solo puede ser 1 puesto que si se intenta resolver la ecuación $\cos(\cos t) = 0$ se llegará a un valor no definido por la función $\cos^{-1}$. El valor de la función nos indica que dentro del conjunto que representa la función tendremos la pareja ordenada $(1, 0)$, por lo que la función inversa tendrá la pareja ordenada $(0, 1)$

Luego, gracias al Teorema Fundamental del Calculo sabemos que al ser la función continua en todo punto, incluyendo 0 se tendrá que: $f'(x) = \cos(\cos t)$ Por lo que reemplazando dicho valor se tendrá:

$$f'(1) = \cos(\cos 1)$$

Luego, por la regla de la derivada de la función inversa:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(0) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{\cos(\cos 1)}\end{aligned}$$

15 **Ejercicio 6**: Encontrar una función g de forma que:

$$\int_0^{x^2} t \cdot g(t)dt = x + x^2$$

Derivando en ambos lados de la igualdad se tendrá:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} t \cdot g(t)dt &= \frac{d}{dx}x + x^2 \\ x^2 \cdot g(x^2) \cdot 2x &= 1 + 2x\end{aligned}$$

Y despejando en terminos de $g(x^2)$ se tendrá:

$$\begin{aligned}x^2 \cdot g(x^2) \cdot 2x &= 1 + 2x \\ 2x^3 \cdot g(x^2) &= 1 + 2x \\ g(x^2) &= \frac{1+2x}{2x^3}\end{aligned}$$

Por lo que sí $t = x^2$ se tendrá:

$$g(t) = \frac{1 + 2\sqrt{t}}{2\sqrt{t^3}}$$

Con $t \geq 0$.