Universidad Sergio Arboleda
Disciplina: Matemáticas
Profesor: Diego Villamizar

Matemáticas Discretas
Juan Sebastián Caballero Bernal

Taller 4

(1) Considere la siguiente sucesión:

$$F_n = \begin{cases} n & n \leq 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$

Calcule F_8, pruebe que $\Delta[F_x] = F_{x-1}$ y concluya, usando el T.F.C.D, que

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

Demostración. Para empezar, cálculando los primeros terminos de la sucesión:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = 2$$
$$F_4 = 3$$
$$F_5 = 5$$
$$F_6 = 8$$
$$F_7 = 13$$
$$F_8 = 21$$

Luego, evaluando la derivada de la sucesión para el caso en el cúal $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \Delta[F_x] &= F_{x+1} - F_x \\ &= F_x + F_{x-1} - F_x \\ &= F_{x-1} \end{aligned}$$

Notese que cuando $x = 0$ tendremos $\Delta[F_x] = 1$. Luego, gracias a ese resultado $\Delta[F_{x+1}] = F_x$ podremos evaluar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} F_k &= \sum_{0}^{n} F_x \\
&= \sum_{0}^{n} \Delta[F_{x+1}] \\
&= F_{x+1}\Big|_0^{n+1} \\
&= F_{n+2} - F_1 \\
&= F_{n+2} - 1
\end{aligned}$$

□

2 Use el T.F.C.D para probar que si $c \geq 2$ entero, entonces

$$\sum_{k=0}^{n} c^k = \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1}.$$

Demostración. Note primero que:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\frac{c^x}{c-1}\right] &= \frac{c^{x+1}}{c-1} - \frac{c^x}{c-1} \\
&= \frac{c^{x+1} - c^x}{c-1} \\
&= \frac{c^x(c-1)}{c-1} \\
&= c^x
\end{aligned}$$

Lo que permite evaluar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} c^k &= \sum_{0}^{n} c^x \\
&= \sum_{0}^{n} \Delta\left[\frac{c^x}{c-1}\right] \\
&= \frac{c^{n+1}}{c-1} - \frac{c^0}{c-1} \\
&= \frac{c^{n+1} - 1}{c-1}
\end{aligned}$$

□

3 Pruebe que:

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)! \cdot H_{n-1}$$

Demostración. Recordemos que:

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \sum_{x \in \binom{[n-1]}{n-2}} \prod_{x \in X} x$$

Gracias a la formula que tenemos para cálcular binomiales, sabemos que:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{n-2} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-(n-2))!(n-2)!} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} \\ &= n-1\end{aligned}$$

Cada uno de los conjuntos que están en $\binom{[n-1]}{n-2}$ es $[n-1]$ sin un elemento. Luego, si queremos cálcular la productoria de los elementos de cada conjunto, sabemos que $\prod_{x\in[n-1]} x = (n-1)!$, por lo que cuando sacamos i de $[n-1]$ la productoria será $\frac{(n-1)!}{i}$ para todo $i \in [n-1]$. Por lo que:

$$\begin{aligned}\sum_{x \in \binom{[n-1]}{n-2}} \prod_{x \in X} x &= \frac{(n-1)!}{1} + \frac{(n-1)!}{2} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(n-1)} \\ &= (n-1)! \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right] \\ &= (n-1)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\end{aligned}$$

Luego, si hacemos un cambio de variable de forma que $k = i-1$, tendremos que la sumatoria empezará en 0, llegará hasta $n-2$ y se expresará como:

$$\begin{aligned}(n-1)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} &= (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} \\ &= (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} k^{\underline{-1}}\end{aligned}$$

Y si recordamos que

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{-1}} = H_{n+1},$$

entonces concluimos que:

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)! \cdot H_{n-1}$$

□

(4) Calcule, usando el T.F.C.D, la expresión

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Hint: £Qué es $\Delta\left[\frac{1}{x}\right]$?

Demostración. Note primero que:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[-\frac{1}{x+1}\right] &= -\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\\
&= \frac{-x-1+x+2}{(x+2)(x+1)}\\
&= \frac{1}{(x+2)(x+1)}
\end{aligned}$$

Lo que permite evaluar la expresión:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{0}^{n}\frac{1}{(x+1)(x+2)}\\
&= \sum_{0}^{n}\Delta\left[-\frac{1}{x+1}\right]\\
&= -\frac{1}{n+2}+\frac{1}{1}\\
&= \frac{n+2}{n+2}-\frac{1}{n+2}\\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

$\square$