Universidad Sergio Arboleda
Disciplina: Matemáticas
Profesor: Fabio Molina

Cálculo Integral
Juan Sebastián Caballero Bernal

Taller 3

Sección 10.4

En los siguientes ejercicios, una secuencia $\{f(n)\}$ es definida por la formula dada. En cada caso, determinar si la secuencia converge o diverge, y dado el caso, determinar el limite la serie.

(1) $f(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Note que algunos valores de la secuencia son:

- $f(1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $f(2) = \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = -1$
- $f(3) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
- $f(4) = \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 1$

Y la secuencia siempre oscilara entre estos valores dependiendo para cada n de $n \mod 4$. Luego, no existe un limite definido para el cúal la secuencia converga.

(2) $f(n) = \frac{n}{2^n}$

Esta secuencia es una secuencia monotona, dado que es decreciente. Esto puede ser fácilmente demostrado tomando:

$$1 \leq n$$
$$n + 1 \leq n + n$$
$$n + 1 \leq 2n$$
$$n + 1 \leq \frac{n}{2^n} \cdot 2^{n+1}$$
$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \leq \frac{n}{2^n}$$

Note que el único caso donde se tiene la igualdad es con $n = 1$. Luego, dado que la serie es acotada inferiormente por 0 tiene un valor de convergencia. Dicho valor, llega a ser 0.

(3) $f(n) = \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin(n!)}{n+1}$

Note que esta sucesión converge a 0, esto por el comportamiento de la sucesión $\{\frac{1}{n+1}\}$ que tiende a 0, la sucesión $\{sin(n!)\}$ oscila entre 1 y -1, y la sucesión $\{n^{\frac{2}{3}}\}$ en su comportamiento aunque es creciente, dicho crecimiento cada vez es menor y menor, por lo que al combinar mediante un producto las 3 funciones, es fácil notar que el valor de la función recae principalmente en $\{\frac{1}{n+1}\}$ y dado que converge a 0, entonces la sucesión entera converge a 0.

(4) $f(n) = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$ Si dividimos por 3^n en el numberador y en el denominador:

$$\begin{aligned} \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} &= \frac{1+\frac{(-2)^n}{3^n}}{3+\frac{(-2)^{n+1}}{3^n}} \\ &= \frac{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{3-2\left(\frac{-2}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

Y dado que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n = 0$ podemos concluir que la sucesión converge a $\frac{1}{3}$.

(5) $f(n) = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

Gracias a las formulas dadas en la sección 10,2 es fácil determinar que esta secuencia converge y además, converge a e^2.

Cada una de las siguientes series es convergente. Mediante la definición formal, determine valores de N que cumplen la definición para $\epsilon = 1, 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, 0{,}0001$.

(6) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Para esto, note que la sucesión converge a 1. Por lo que si partimos desde la definición, donde se tiene que cumplir que $|a_n - L| < \epsilon$ tendremos:

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \\ &= \left|\frac{-1}{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &< \frac{1}{n} < \epsilon \end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

Por lo que servirá N tal que $N > \frac{1}{\epsilon}$. Por lo que para cada valor tendremos:

- Para $\epsilon = 1$ servirá $N = 2$

- Para $\epsilon = 0{,}1$ servirá $N = 11$
- Para $\epsilon = 0{,}01$ servirá $N = 101$
- Para $\epsilon = 0{,}001$ servirá $N = 1001$
- Para $\epsilon = 0{,}0001$ servirá $N = 10001$

(7) $a_n = (-1)^n \left(\frac{9}{10}\right)^n$ Note que la sucesión converge a 0. Por lo que si partimos desde la definición, donde se tiene que cumplir que $|a_n - L| < \epsilon$ tendremos:

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= \left|(-1)^n \frac{9^n}{10^n} - 0\right| \\ &= \left|(-1)^n \frac{9^n}{10^n}\right| \\ &= \frac{9^n}{10^n} \\ &= \left(\frac{9}{10}\right)^n < \epsilon \end{aligned}$$

Luego, podremos reducir la expresión anterior a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{10}\right)^n &< \epsilon \\ \left(\frac{10}{9}\right)^n &> \frac{1}{\epsilon} \\ \ln\left(\left(\frac{10}{9}\right)^n\right) &> \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \\ n \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right) &> \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \\ n &> \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)} \end{aligned}$$

Por lo que servirá N tal que $N > \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{10}{9}\right)}$. Por lo que para cada valor tendremos:

- Para $\epsilon = 1$ servirá $N = 1$
- Para $\epsilon = 0{,}1$ servirá $N = 22$
- Para $\epsilon = 0{,}01$ servirá $N = 44$
- Para $\epsilon = 0{,}001$ servirá $N = 65$
- Para $\epsilon = 0{,}0001$ servirá $N = 88$

Si α es un número real y n es un entero no negativo, el coeficiente binomial $\binom{\alpha}{n}$ se define por:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(a) Cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$ demuestre que:

$$\binom{\alpha}{1} = -\frac{1}{2}, \binom{\alpha}{2} = \frac{3}{8}, \binom{\alpha}{3} = -\frac{5}{16}, \binom{\alpha}{4} = \frac{35}{128}, \binom{\alpha}{5} = -\frac{63}{256}$$

Demostración. Para ello vamos a aplicar directamente la definición dada para cada valor de n.

- $n = 1$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{1} &= \frac{\alpha}{1!} \\ &= \alpha = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

- $n = 2$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{2} &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{2} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

- $n = 3$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{3} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6} \\ &= \frac{-\frac{15}{8}}{6} \\ &= -\frac{15}{8\cdot 6} \\ &= -\frac{5}{16}\end{aligned}$$

- $n = 4$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{4} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)}{24}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{24}\\ &= \frac{\frac{15\cdot 7}{16}}{24}\\ &= \frac{15\cdot 7}{16\cdot 24}\\ &= \frac{35}{128}\end{aligned}$$

- $n = 5$:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{5} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{5!}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)\left(-\frac{1}{2}-4\right)}{120}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)}{120}\\ &= \frac{\frac{15\cdot 7\cdot 9}{32}}{120}\\ &= \frac{15\cdot 7\cdot 9}{32\cdot 120}\\ &= -\frac{63}{256}\end{aligned}$$

$\square$

(b) Sea $a_n = (-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}$. Demostrar que $a_n > 0$ y que $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Note que $-\frac{1}{2} - k < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, si n es par, entonces tendremos un número par de terminos de la forma $-\frac{1}{2} - k$ para $0 \leq k \leq -n + 1$, por lo que el producto de todos estos terminos será positivo, y dado que n es par, entonces $(-1)^n$ será 1. Por lo que $a_n > 0$. Si n es impar, entonces tendremos una cantidad impares de terminos, por lo que su producto será un número negativo, pero dado que $(-1)^n$ será (-1) el termino de la sucesión en general será positivo. Es decir, siempre $a_n > 0$.

Para demostrar que $a_{n+1} < a_n$ es suficiente con notar que $a_{n+1} = a_n \cdot \left(\frac{a-n+2}{n+1}\right)$. Antes de seguir, demostraremos una desigualdad importante para esto(Notaremos a $-\frac{1}{2}$ como α):

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-n+2}{n+1} &= \frac{\alpha+3-(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{\alpha+3}{n+1}-1 \\ &= \frac{-\frac{1}{2}+3}{n+1}-1 \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{n+1}-1 \\ &= \frac{5}{2n+2}-1<1\end{aligned}$$

Luego, tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-n+2}{n+1} &< 1 \\ a_n \cdot \frac{a-n+2}{n+1} &< a_n \\ a_{n+1} &< a_n\end{aligned}$$

□

Sección 10.9

Cada una de las siguientes series es una serie telescopica o geometrica, o alguna serie relacionada cuya suma parcial puede ser simplificada. Demostrar que la serie converge al limite indicado.

8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2 \\ &= \frac{1}{2}+1 \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

Para empezar, vamos a descomponer la expresión $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ usando fracciones parciales.

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{\sqrt{n+1}}$$
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = A\sqrt{n+1} + B\sqrt{n}$$

De esto, podemos deducir que $A = 1$ y $B = -1$. Por tanto, tendremos que:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Por lo que tendremos la siguiente suma telescopica:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$

Empecemos por reducir la expresión con la ayuda de sumas parciales. Tendremos entonces la siguiente derivación:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$
$$2n+1 = A(n+1) + B(n)$$

De donde saldrá que $A = B = 1$ y por tanto:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

Luego, combinando con $(-1)^{n-1}$ tendremos:

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^{n}}{n+1}\end{aligned}$$

Lo que nos muestra que podemos usar las propiedades de una serie telescopica:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= \frac{(-1)^{1-1}}{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

11 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+n)\right]}{\log(n^n)\log(n+1)^{n+1}} = \log_2(\sqrt{e})$

Desarrollando como sigue la serie original:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+n)\right]}{\log(n^n)\log(n+1)^{n+1}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log(n+1)}{n\log(n)(n+1)\log(n+1)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)+\log(n+1)}{n\log(n)(n+1)\log(n+1)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)\log(n+1)-n\log(n)}{n\log(n)(n+1)\log(n+1)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}
\end{aligned}$$

Y dado que es una suma telescopica tendremos entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} &= \frac{1}{2\log(2)} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log(n)} \\
&= \frac{1}{2\log(2)} - 0 \\
&= \frac{\log(e)}{2\log(2)} \\
&= \frac{\log(\sqrt{e})}{\log(2)} \\
&= \log_2(\sqrt{e})
\end{aligned}$$

Usando la serie geometrica, y modificando con operaciones en ella, desarrollar las siguientes formulas:

12 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

Para ello, tomaremos la serie geometrica original y derivaremos y multipliquemos por x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Volviendo a derivar y multiplicando por x

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Y volviendo a repetir el proceso una ultima vez tendreos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1} = \frac{(1-x)^3(1+2x) + 3(x+x^2)(1-x)^2}{(1-x)^6}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1} = \frac{(1-x)(1+2x) + 3(x+x^2)}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1} = \frac{1-x+2x-2x^2+3x^2+3x}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1} = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log \frac{1}{1-x}$

Partiendo desde la serie geometrica e integrando tendremos:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx = \int \frac{1}{1-x} \, dx$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int x^n \, dx = \int \frac{1}{1-x} \, dx$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x) + C$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) + C$$

Si se reemplaza $x = 0$ podremos determinar fácilmente que $C = 0$, por lo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log \frac{1}{1-x}$$

14 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$

Empezaremos desde la serie geometrica con un cambio de variable y derivaremos 3 veces:

$$\sum_{n=-3}^{\infty} x^{n+3} = \frac{1}{1-x}$$
$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+3)x^{n+2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2)x^{n+1} = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2)x^{n+1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1)x^n = 2\frac{3(1-x)^2}{(1-x)^6}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1)x^n = 3!\frac{1}{(1-x)^4}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$$

15 Dado que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ para todo x, encontrar la suma de la siguiente serie, asumiendo que está permitido manipular series infinitas como si fueran sumas finitas.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

Operaremos como prosigue:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!} &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}+1\\ &= 1\end{aligned}$$

16 Dado que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ demostrar:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$$

Para esto, vamos a derivar y multiplicar por x dos veces en la siguiente expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}=xe^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{n!}=e^x(x+1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=e^x(x^2+x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=e^x(x^2+x)$$

Sección 10.14

Verificar si las siguientes series convergen o divergen y dar una justificación.

17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}$

La serie converge. Para demostrarlo, tome $\{b_n\}$ donde $b_n=\frac{n^{\epsilon}}{n^{\frac{3}{2}}}$, con $\epsilon<\frac{1}{2}$. Note que b_n genera una serie p y es convergete dado que $\frac{3}{2}-\epsilon>1$. Luego, si hacemos el limite de los terminos de ambas sucesiones:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^{\epsilon}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n\cdot n^{\epsilon}\cdot(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\sqrt{n}\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n\cdot n^{\epsilon}\cdot(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n^{\epsilon}(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2-n}}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\log(4n+1)}{n^{\epsilon}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\log(4n+1)}{n^{\epsilon}} \\
&= \sqrt{2}\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Luego, gracias a esto, podemos concluir que la convergencia de b_n implica la convergencia de a_n(La nota luego del Teorema 10.9 en el libro de Apostol).

18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

Usaremos el criterio de la integral. Para ello, note primero que si desarrollamos una integral por partes con $u = x$ y $dv = 2^{-x}dx$, obtieniendo que $du = dx$, $v = -\frac{2^{-x}}{\log(2)}$:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{2^x}\,dx &= \int \frac{x}{2^x}\,dx + \int 2^{-x}\,dx \\
&= \frac{-x2^{-x}}{\log(2)} + \frac{1}{\log(2)}\int 2^{-x}\,dx - \frac{2^{-x}}{\log(2)} \\
&= \frac{-x2^{-x}}{\log(2)} - \frac{2^{-x}}{\log^2(2)} - \frac{2^{-x}}{\log(2)}
\end{aligned}
$$

Por lo que al hacer la integral impropia para la serie tendremos:

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{x+1}{2^x}\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-x2^{-x}}{\log(2)} - \frac{2^{-x}}{\log^2(2)} - \frac{2^{-x}}{\log(2)}\Big|_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n2^{-n}}{\log(2)} - \frac{2^{-n}}{\log^2(2)} - \frac{2^{-n}}{\log(2)} + \frac{1}{2\log(2)} + \frac{1}{2\log^2(2)} + \frac{1}{2\log(2)} \\
&= \frac{1}{\log(2)} + \frac{1}{2\log^2(2)}
\end{aligned}
$$

Por lo que dado que la integral converge, la serie también lo hace.

19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2}$

Esta serie converge gracias al criterio de comparación directa, puesto que:

$$|\sin(nx)| \leq 1$$
$$\frac{|\sin(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Y dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge dado que es una serie p con $p > 1$, entonces la serie que queriamos comprobar converge.

20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Si aplicamos el criterio de comparación por limite con la serie $\frac{1}{n}$ tendremos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Por lo que dado que $\frac{1}{n}$ genera una serie divergente, la otra serie también será divergente.

21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$

Si aplicamos el criterio de comparación directa, con el siguiente hecho:

$$\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 1$$
$$n\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq n$$
$$\frac{n\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$$

Y gracias a que sabemos que $\frac{n}{2^n}$ genera una serie convergente, entonces la serie original que deseabamos comparar, es convergente.

22 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ Si integramos la función dada abajo, haciendo que $u = x^2$ y $du = 2xdx$ entonces:

$$\begin{aligned}\int xe^{-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int e^{-u}du \\ &= -\frac{1}{2}e^{-u} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\end{aligned}$$

Y haciendo el limite de la integral impropia:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_1^n xe^{-x^2}\,dx &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2e^{x^2}}\Big|_1^n \\
&= \lim_{n=\infty} -\frac{1}{2e^{n^2}} + \frac{1}{2e} \\
&= \frac{1}{2e}
\end{aligned}$$

Y dado que la integral converge, entonces la serie converge.

23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$

Note que la integral anterior posee una función que es decreciente, por lo que el area de la curva entre 0 y $\frac{1}{n}$ irá disminuyendo. Luego, tendremos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx &\leq \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&< \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Y dado que llegamos a una serie p que converge, ya que $p>1$, entonces la serie original converge.

Sección 10.16

Determinar si las siguientes series son convergentes o no, y dar una justificación.

24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ Si aplicamos el criterio de la razón a la serie:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n 2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}2^n n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

Y dado que $\frac{2}{e}<1$ entonces la serie converge.

25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$ Si aplicamos el criterio de la razón a esta serie:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{2n+2}}}{\frac{n!}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^n}{n! \cdot 2^{2n+2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Por lo que la serie actualmente diverge.

26 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$ Si aplicamos el test de la raíz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} - 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} - \lim_{n\to\infty} 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y dado que $0 < 1$ entonces la serie converge.

27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - e^{-n^2}$ Sabemos de por sí que la serie $\frac{1}{n}$(La serie armonica) es divergente. Luego, aplicando el criterio de la raiz sobre la serie e^{-n^2}:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(e^{-n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(e^{-n^2 \cdot \frac{1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que dicha serie converge, de lo que concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - e^{-n^2}$ diverge, ya que si no, la serie armonica convergería.

28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

Para determinar la convergencia de esta serie, aplicaremos el criterio de la raíz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^{\frac{1}{n^2}}}{\frac{n+1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot n^{\frac{1}{n^2}}}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}} \\
&= \infty \cdot 1 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Por lo que la serie diverge dado que el limite es mayor que 1.

Sección 10.20

Determinar la convergencia o divergencia de las series dadas. En caso de que la serie converja, determinar si la serie converge absolutamente o condicionalmente.

29 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

Si aplicamos el criterio de la raíz a la serie $\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+100}{3n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{100}{n}}{3+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

Por lo que la serie converge absolutamente, y por tanto tambie la serie alternante converge.

30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

Para ello, note que el limite de la sucesión es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Por lo que gracias al criterio de convergencia, la serie no converge, y por tanto la serie de terminos en valor absoluto tambie diverge.

(31) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{1+n^2}$ Para ello, note que el limite de la sucesión es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n^2}{1+n^2}\neq 0$$

Ya que para valores pares el limite de la sucesión será 1 y para valores impares será -1. Por lo que gracias al criterio de convergencia, la serie no converge, y por tanto la serie de terminos en valor absoluto tambie diverge.

(32) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ Para ello, note que el limite de la sucesión es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\neq 0$$

dado que el limite en valor absoluto tiende a ∞ y con $(-1)^n$ oscila entre $-\infty$ e ∞. Por lo que gracias al criterio de convergencia, la serie no converge, y por tanto la serie de terminos en valor absoluto tambie diverge.

(33) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{37}}{(n+1)!}$

Si aplicamos el criterio de la razón a la serie absoluta tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{37}}{(n+2)!}}{\frac{n^{37}}{(n+1)!}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+1)^{37}}{(n+2)!n^37}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^37}{(n+2)n^{37}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{37}\\
&= 0\cdot 1\\
&= 0<1
\end{aligned}$$

Por lo que la serie converge absolutamente, y por tanto, también converge de forma alternante.

(34) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arctan\frac{1}{2n+1}$

Si comprobamos la convergencia de la secuencia:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\arctan\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\\
&= \arctan 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que por el criterio de Leibniz, la serie converge condicionalmente. Luego, si la serie absoluta la comparamos con la serie $\frac{1}{2n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2}\cdot\frac{-2}{(2n+1)^2}}{\frac{-1}{2n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2}{4n^2+4n+2}}{\frac{-1}{2n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{2n^2+2n+1}}{\frac{-1}{2n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{2n^2+2n+1}$$
$$= 1$$

Por lo que por el criterio de comparación de limites, ambas series convergen o ambas divergen. Y por tanto la serie diverge en valor absoluto.

35 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

La serie converge condicionalmente ya que la sucesión de terminos es decreciente y:

$$\lim_{n\to\infty} e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e - \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= e - e$$
$$= 0$$

Por lo que es valido aplicar el criterio de Leibniz. Luego, si aplicamos el criterio de comparación por limite con la serie armonica tendremos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = \frac{e}{2}$$

Por lo que dado que la serie armonica diverge, entonces la serie original diverge, por lo que la serie solo converge condicionalmente.

36 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$

Podemos usar el criterio de comparación por limites, con la serie $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ de forma que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= 1^{\frac{3}{2}}$$
$$= 1$$

Y dada que la serie $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ es una serie p con $p > 1$, es convergente, entonces la serie original converge absolutamente.

Sección 10.24

Sección 11.13

Sección 11.16