Universidad Sergio Arboleda
Disciplina: Matemáticas
Profesor: Fabio Molina

Cálculo Integral
Juan Sebastián Caballero Bernal

Taller 2

Capitulo 17

1 **Ejercicio 1:** Derivar cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \log_{(e^x)}(\sin x)$

Por propiedades de los logaritmos, la función puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\log(\sin x)}{\log(e^x)} \\ &= \frac{\log(\sin x)}{x} \\ &= x^{-1} \cdot \log(\sin x) \end{aligned}$$

Y aplicando la regla de la derivada de un producto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) &= x^{-1} \cdot \frac{d}{dx}\log(\sin x) + \log(\sin x) \cdot \frac{d}{dx}x^{-1} \\ &= x^{-1} \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) + \log(\sin x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\log(\sin x)}{x^2} \\ &= \frac{\cot x}{x} - \frac{\log(\sin x)}{x^2} \\ &= \frac{x \cdot \cot x - \log(\sin x)}{x^2} \end{aligned}$$

(b) $f(x) = (\log x)^{\log x}$

Por definición de exponenciación, podemos escribir la función como:

$$f(x) = e^{\log x \cdot \log(\log x)}$$

2 **Ejercicio 2:** Aplicar derivación logaritmica para para obtener la derivada de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sin x^{\cos x} + \cos x^{\sin x}$

Integrando cada sumando:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x^{\cos x} &= \frac{d}{dx}e^{\log(\sin x)\cos x} \\
&= e^{\log(\sin x)\cos x}\cdot\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\log(\sin x)\right] \\
&= \sin x^{\cos x}\cdot\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\log(\sin x)\right]
\end{aligned}$$

Y el otro:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x^{\sin x} &= \frac{d}{dx}e^{\log(\cos x)\sin x} \\
&= e^{\log(\cos x)\sin x}\cdot\left[\cos x\log(\cos x)\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right] \\
&= \cos x^{\sin x}\cdot\left[\cos x\log(\cos x)\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \sin x^{\cos x}\cdot\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\log(\sin x)\right] + \cos x^{\sin x}\cdot\left[\cos x\log(\cos x)\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$$

3 **Ejercicio 5:** Hallar los siguientes limites mediante la regla de L'Hopital.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$

Aplicando repetidamente la regla de L'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{6x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6} \\
&= \frac{e^0}{6} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}{x^3}$ Aplicando repetidamente la regla de L'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1+2x}{3x^2} - \frac{1}{3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2+2x+1}+2}{6x} - \frac{1}{3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{(x+1)^3}}{6} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{\frac{2}{1}}{6} - \frac{1}{3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4 **Ejercicio 7:** Demostrar que:

(a) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{y-x} + e^{x-y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{y-x} - e^{x-y} + e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \\
&= \cosh(x+y)
\end{aligned}$$

5 **Ejercicio 8:** Las funciones sinh y tanh son inyectivas y por tanto poseen su respectiva función inversa. Pero para la función cosh no es el caso. Si se restringe su dominio a $[0, \infty)$ tiene una inversa designada por arccosh definida sobre $[1, \infty)$. Demostrar:

(a) $\frac{d}{dx} \cosh^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ para $x > 1$

Recordemos que por propiedades de las derivadas para una función f y su inversa f^{-1} tendremos que:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x) \circ f^{-1}(x)}$$

Y recordando que $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$ tendremos que:

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x) \circ \cosh^{-1}(x)}$$

además usando la identidad $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ y la definición de función inversa:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \cosh^{-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1}(x)) - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh(\cosh^{-1}(x)) \cdot \cosh(\cosh^{-1}(x)) - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x \cdot x - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

6 **Ejercicio 9:** Hallar una formula explicita para $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$ y $\tanh^{-1}$.

Para $\sinh^{-1}$ basta simplemente con despejar en la formula dada:

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ 2y &= e^x - e^{-x} \\ e^x - 2y - e^{-x} &= 0 \\ e^{2x} - 2ye^x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Luego, usando la formula cuadratica(Teniendo en cuenta que queremos determinar e^x):

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{-(-2y) \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \\ e^x &= \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} \\ e^x &= y \pm \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

Como e^x siempre será un número positivo, podemos tomar la raíz con + y aplicando logaritmo:

$$\begin{aligned} e^x &= y + \sqrt{y^2 + 1} \\ \log(e^x) &= \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\ x &= \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{aligned}$$

Por lo que $\sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Para $\cosh^{-1}$ es necesario recordar que se hace una restricción del dominio de $\cosh^{-1}$ a $[0, \infty)$ y el dominio de $\cosh^{-1}$ será $[1, \infty)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ 2y &= e^x + e^{-x} \\ e^x - 2y + e^{-x} &= 0 \\ e^{2x} - 2ye^x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

De nuevo, aplicaremos la formula cuadratica para determinar e^x:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{-(-2y) \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \\ e^x &= \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} \\ e^x &= y \pm \sqrt{y^2 - 1} \end{aligned}$$

Para ajustar el resultado a la restricción hecha, tendremos que escoger la raíz con + y aplicando logaritmo:

$$\begin{aligned} e^x &= y + \sqrt{y^2 - 1} \\ \log(e^x) &= \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \\ x &= \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{aligned}$$

Por lo que $\cosh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Por último, para $\tanh^{-1}$ tendremos:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
y &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\
y(e^{2x} + 1) &= e^{2x} - 1 \\
ye^{2x} + y - e^{2x} + 1 &= 0 \\
e^{2x}(y - 1) + (y + 1) &= 0 \\
e^{2x} &= -\frac{y + 1}{y - 1} \\
\log(e^{2x}) &= \log\left(\frac{y + 1}{1 - y}\right) \\
2x &= \log(y + 1) - \log(1 - y) \\
x &= \frac{\log(y + 1) - \log(1 - y)}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que $\tanh^{-1}(x) = \frac{\log(x+1) - \log(1-x)}{2}$.

7 **Ejercicio 10:** Demostrar que:

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$$

no es acotada en $[2, \infty)$.

Demostración. Recordemos que:

$$\begin{aligned}
\log(t) &< t \\
\frac{1}{\log(t)} &> \frac{1}{t} \\
\int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt &> \int_2^x \frac{1}{t} dt \\
\int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt &> \log(x) - \log(2)
\end{aligned}$$

Y dado que $\log(x) - \log(2)$ no es acotado en $[2, \infty)$ obviamente no lo será $\int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt = F(x)$ □

8 **Ejercicio 25:** Dada una función derivable f, hallar todas las funciones continuas g que satisfacen:

$$\int_0^{f(x)} fg = g(f(x)) - 1$$

Capitulo 18

9 **Ejercicio 1:** Evaular las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2-1+1}}dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du \\
&= \sin^{-1}(u) + C \\
&= \sin^{-1}(x+1) + C
\end{aligned}$$

10 **Ejercicio 2:** Evaular las siguientes integrales:

(a) $\int \log(\cos x) \cdot \tan x dx$

$$\begin{aligned}
\int \log(\cos x) \cdot \tan x dx &= \int \log(\cos x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x}dx \\
&= \int \log(u) \cdot \frac{-1}{u}du \\
&= -\int \frac{\log(u)}{u}du \\
&= -\int zdz \\
&= -\frac{z^2}{2} + C \\
&= -\frac{\log^2(u)}{2} + C \\
&= -\frac{\log^2(\cos x)}{2} + C
\end{aligned}$$

11 **Ejercicio 3:** Integración por partes:

(a) $\int \cos(\log x)dx$

$$\int \cos(\log x)dx = \int 1 \cdot \cos(\log x)dx$$

Y haciendo la sustitución $u = \cos(\log x)$ y $dv = 1dx$, obtendremos que $du = -\frac{\sin(\log(x))}{x}dx$ y $v = x$. Tendremos entonces:

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \cos(\log x)dx &= x \cdot \cos(\log(x)) - \int -\frac{\sin(\log(x))}{x} \cdot xdx \\
&= x\cos(\log(x)) + \int \sin(\log x)dx \\
&= x\cos(\log(x)) + \int 1 \cdot \sin(\log x)dx
\end{aligned}$$

Si ahora se hace $u = \sin(\log(x))$ y $dv = 1dx$ tendremos $du = \frac{\cos(\log(x))}{x}dx$ y $v = x$ llegando a que:

$$\begin{aligned}
\int \cos(\log x)dx &= x\cos(\log(x)) + \int 1 \cdot \sin(\log x)dx \\
&= x\cos(\log(x)) + x\sin(\log(x)) - \int \frac{\cos(\log(x))}{x} \cdot xdx \\
&= x\cos(\log(x)) + x\sin(\log(x)) - \int \cos(\log(x))dx
\end{aligned}$$

Y despejando en la ecuación tendremos:

$$\begin{aligned}
\int \cos(\log x)dx &= x\cos(\log(x)) + x\sin(\log(x)) - \int \cos(\log(x))dx \\
2 \cdot \int \cos(\log x)dx &= x\cos(\log(x)) + x\sin(\log(x)) \\
\int \cos(\log x)dx &= \frac{x\cos(\log(x)) + x\sin(\log(x))}{2} + C
\end{aligned}$$

12 **Ejercicio 4:** Integrar usando identidades trigonometricas

(a) $\int \sqrt{x^2-1}dx$

Si se hace que $x = \sec u$ entonces $dx = \sec u \tan u du$ y por tanto:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}dx &= \int \sqrt{\sec^2 u - 1}\sec u \tan u du \\
&= \int \sqrt{\tan^2 u}\sec u \tan u du \\
&= \int \tan u \sec u \tan u du \\
&= \int \sec u \tan^2 u du \\
| &= \int \sec u(\sec^2 u - 1)du \\
&= \int \sec^3 u du - \int \sec u du \\
&= \frac{\sec u \tan u + \log(secu + tanu)}{2} - \log(\sec u + \tan u) + C \\
&= \frac{x\tan(\sec^{-1} x) + \log(x + \tan(\sec^{-1}(x)))}{2} - \log(x + \tan(\sec^{-1})x) + C \\
&= \frac{x\sqrt{x^2-1} + \log(x + \sqrt{x^2-1})}{2} - \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C \\
&= \frac{x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1})}{2} + C
\end{aligned}$$

13 **Ejercicio 6:** Integrar las siguientes funciones racionales:

(a) $\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}dx$ Empezamos resolviendo:

$$\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}dx = \int \frac{x^3+x+2}{(x^2+1)^2}dx$$

Desarrollando fracciones parciales tendremos:

$$\frac{x^3+x+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$
$$x^3+x+2 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$$
$$x^3+x+2 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D$$

Y tendremos un sistema de ecuaciones donde:

$$A = 1$$
$$A + C = 1$$
$$B = 0$$
$$B + D = 2$$

Y concluimos facilmente que $A = 1, B = 0, C = 0, D = 2$. Por lo que podemos reescribir:

$$\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Resolviendo la primera integral por sustitución tendremos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2}\cdot \log|u| \\ &= \frac{\log|x^2+1|}{2}\end{aligned}$$

Y resolviendo la segunda por sustitución trigonometrica haciendo $x = \tan u$ con $dx = \sec^2 u du$:

$$\begin{aligned}2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx &= 2\int \frac{\sec^2 u}{(\tan^2 u+1)^2}du \\ &= 2\int \frac{\sec^2 u}{(\sec^2 u)^2}du \\ &= 2\int \frac{\sec^2 u}{\sec^4 u}du \\ &= 2\int \frac{1}{\sec^2 u}du \\ &= 2\int \cos^2 u du \\ &= 2\int \frac{1+\cos(2u)}{2}du \\ &= \int 1+\cos(2u)du \\ &= u + \frac{1}{2}\sin(2u) \\ &= \tan^{-1} x + \frac{\sin(2\tan^{-1} x)}{2}\end{aligned}$$

Concluyendo así que:

$$\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}dx = \frac{\log|x^2+1|}{2} + \tan^{-1} x + \frac{\sin(2\tan^{-1} x)}{2}$$

14 **Ejercicio 7:** Resolver mediante varios metodos las siguientes integrales:

(a) $\int \sin^{-1}(\sqrt{x})dx$

Si se hace $u = \sqrt{x}$ con $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ y se reescribe la integral como sigue:

$$\begin{aligned}\int \sin^{-1}(\sqrt{x})dx &= \int \sin^{-1}(\sqrt{x})dx \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}dx \\ &= \int \sin^{-1}(u)2udu\end{aligned}$$

Luego, integraremos por partes haciendo que $z = \sin^{-1} u$ y $dv = udu$ por lo que $dz = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$ y $v = \frac{u^2}{2}$ tendremos:

$$\begin{aligned}2\int \sin^{-1}(u)udu &= 2\left(\frac{u^2\sin^{-1}(u)}{2} - \int \frac{u^2}{2\sqrt{1-u^2}}du\right) \\ &= u^2\sin^{-1}(u) - \int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du\end{aligned}$$

Para resolver la integral restante, aplicaremos la sustitución trigonometrica $u = \sin z$ y $du = \cos zdz$:

$$\begin{aligned}\int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du &= \int \frac{\sin^2 z}{\sqrt{1-\sin^2 z}}\cos zdz \\ &= \int \frac{\sin^2 z}{\cos z}\cos zdz \\ &= \int \sin^2 z \\ &= \frac{1}{2}\int 1-\cos(2z) \\ &= \frac{z}{2} - \frac{1}{4}\sin(2z) \\ &= \frac{\sin^{-1} u}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\sin^{-1}(u))\end{aligned}$$

Por lo que al final tendremos:

$$\begin{aligned}\int \sin^{-1}(u)2udu &= u^2\sin^{-1}(u) - \frac{\sin^{-1} u}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\sin^{-1}(u)) \\ &= x\sin^{-1}(\sqrt{x}) - \frac{\sin^{-1}\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\sin^{-1}(\sqrt{x}))\end{aligned}$$

15 **Ejercicio 8:** Hallar las integrales siguientes:

(a) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx \\ &= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u = \cos x$ y $du = -\sin x dx$ tendremos:

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx &= \int \frac{u^2-1}{u^2} du \\ &= \int 1 du - \int \frac{1}{u^2} du \\ &= u + u^{-1} + C \\ &= \cos x + \sec x + C\end{aligned}$$

16 **Ejercicio 9:** Hallar las integrales siguientes:

(a) $\int \frac{dx}{x - x^{\frac{3}{5}}} dx$ Aplicando la sustitución $u = x^{\frac{1}{5}}$ y con $du = \frac{1}{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}} dx$ tendremos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x - x^{\frac{3}{5}}} dx &= \int \frac{1}{x - x^{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{5x^{\frac{4}{5}}}{5x^{\frac{4}{5}}} dx \\ &= 5 \int \frac{u^4}{u^5 - u^3} du \\ &= 5 \int \frac{u^4}{u^3(u^2-1)} du \\ &= 5 \int \frac{u}{u^2-1} du\end{aligned}$$

Ahora, haciendo la sustitución $z = u^2 - 1$ y $dz = 2udu$ tendremos:

$$\begin{aligned}5 \int \frac{u}{u^2-1} du &= 5 \int \frac{2u}{2(u^2-1)} du \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2u}{u^2-1} du \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{5}{2} \log |z| \\ &= \frac{5}{2} \log |u^2 - 1| \\ &= \frac{5}{2} \log |x^{\frac{2}{5}} - 1|\end{aligned}$$

17 **Ejercicio 26:** Hallar el area delimitada por la gráfica de las siguientes funciones en coordenadas polares

(a) $r = 2 + \cos\theta$

Para empezar, encontraremos la integral indefinida de acuerdo a que el area delimitada en coordenadas polares es $\frac{1}{2}\int r^2 d\theta$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int (2+\cos\theta)^2 d\theta &= \frac{1}{2}\int \cos^2\theta + 4\cos\theta + 4d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \cos^2\theta d\theta + 4\int \cos\theta + \int 4d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{2} + 4\sin\theta + 4\theta\right] + C \qquad = \frac{\theta}{4} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + 2\sin\theta + 2\theta \\
&= \frac{9\theta}{4} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + 2\sin\theta
\end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta que el periodo de $\cos\theta$ es 2π podremos calcular la integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta &= \frac{9\theta}{4} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + 2\sin\theta|_0^{2\pi} \\
&= \frac{9(2\pi)}{4} + \frac{\sin(2(2\pi))}{4} + 2\sin(2\pi) - \frac{9(0)}{4} - \frac{\sin(2(0))}{4} - 2\sin(0) \qquad = \frac{9\cdot 2\pi}{4} \\
&= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

18 **Ejercicio 29:** Hallar la longitud de curva de las siguientes funciones descritas gráficamente:

(a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{12x}$ para $1 \leq x \leq 2$

Para empezar, determinemos la derivada de f respecto a x:

$$\frac{d}{dx}f(x) = 3x^2 - \frac{1}{144x^2}$$

Luego, recordemos que la formula para la longitud de curva es $\int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]^2}dx$. Si evaluamos la integral indefinida:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]^2}dx &= \int \sqrt{1 + \left[3x^2 - \frac{1}{144x^2}\right]^2}dx \\
&= \int \sqrt{1 + 9x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{144x^4}}dx \\
&= \int \sqrt{9x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{144x^4}}dx \\
&= \int \sqrt{\left(3x^2 + \frac{1}{12x^2}\right)^2}dx \\
&= \int 3x^2 + \frac{1}{12x^2}dx \\
&= x^3 - \frac{1}{12x} + C
\end{aligned}$$

Luego, si lo evaluamos en el intervalo requerido:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{1+\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]^2}dx &= x^3 - \frac{1}{12x}\Big|_1^2 \\ &= 2^3 - \frac{1}{12\cdot 2} - 1 + \frac{1}{12} \\ &= 8 - \frac{1}{24} - 1 + \frac{1}{12} \\ &= \frac{169}{4}\end{aligned}$$

19 **Ejercicio 30:** Para las funciones que siguen, hallar la longitud de la gráfica en coordenadas polares:

(a) $f(\theta) = a(1-\cos\theta)$

Para empezar, derivemos la función f con respecto a θ:

$$\frac{d}{d\theta}f(\theta) = a\sin\theta$$

Ahora, recordemos que en coordenadas polares la formula para la longitud de curva es

$$\int_a^b \sqrt{[f(\theta)]^2 + \left[\frac{d}{d\theta}f(\theta)\right]^2}d\theta$$

lo que nos permite cálcular la integral indefinida:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{[f(\theta)]^2 + \left[\frac{d}{d\theta}f(\theta)\right]^2}d\theta &= \int \sqrt{[a(1-\cos\theta)]^2 + [a\sin\theta]^2}d\theta \\ &= \int \sqrt{a^2\left[cos^2\theta - 2\cos\theta + 1\right] + a^2\sin^2\theta d\theta} \\ &= \int \sqrt{a^2\left[cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta\right]}d\theta \\ &= \int \sqrt{a^2\left[2-2\cos\theta\right]}d\theta \\ &= a\int \sqrt{2-2\cos\theta}d\theta\end{aligned}$$

Por último, resolviendo mediante la sustitución de Weirstrass la integral restante:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2-2\cos\theta}d\theta &= \int \sqrt{2-2\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]}\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \sqrt{2+\frac{2t^2-2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \sqrt{\frac{2t^2+2+2t^2-2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \sqrt{\frac{4t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{4t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt\end{aligned}$$

luego sustituimos $z = t^2 + 1$ y $dz = 2tdu$ quedando entonces:

$$\begin{aligned}
4 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{1}{z \cdot \sqrt{z}} dz &= 4 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} dz \\
&= 2 \int z^{-\frac{3}{2}} dz \\
&= 2 \cdot -\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{z}} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{t^2+1}} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{\tan^2(\frac{\theta}{2}) + 1}} \\
&= -\frac{4}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= -4 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\int \sqrt{[f(\theta)]^2 + \left[\frac{d}{d\theta} f(\theta)\right]^2} d\theta = -4a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Y evaluando entre 0 y 2π(Donde está definida la función en coordenadas polares):

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{[f(\theta)]^2 + \left[\frac{d}{d\theta} f(\theta)\right]^2} d\theta &= -4a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |_0^{2\pi} \\
&= -4a \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + 4a \cos\left(\frac{0}{2}\right) \\
&= -4a \cos(\pi) + 4a \cos(0) \\
&= -4a(-1) + 4a \\
&= 8a
\end{aligned}$$

20 **Ejercicio 32:** Hallar el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar con respecto al eje x y y la región delimitada por $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$.

El truco empieza en recordar que para un disco el volumen $V = \pi \cdot h \cdot r^2$, y será lo que usaremos para cálcular el volumen. Para cuando se rota alrededor del eje x o y note que se generan anillos con cierto huecos, por lo que será cálcular el volumen del anillo menor al anillo mayor.

- **Eje x:** Notese que el grosor será determinado por un δx, y note que el radio mayor será x y el radio mayor menor será x^2. Luego, δx al hacerlo cada vez más pequeño se aproxima el volumen mediante:

$$V_x = \int_0^1 x^4 - x^2 dx$$

- **Eje y:** De manera similar el grosor será determinado por un δy, y note que el radio mayor será y y el radio menor $\sqrt{y}$. Luego, δy al hacerlo cada vez más pequeño se aproxima el volumen mediante:

$$V_y = \int_0^1 y^2 - y dy$$

Capitulo 19

21 **Ejercicio 1:** Hallar los polinomios de Taylor del grado indicado y en el punto indicado para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = e^{\sin x}$ de grado 3 en 0

Primero, determinemos las primeras tres derivadas:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin x} \\
\frac{d}{dx} f(x) &= e^{\sin x} \cos x \\
\frac{d^2}{dx^2} f(x) &= e^{\sin x} \cos^2 x - \sin x e^{\sin x} \\
\frac{d^3}{dx^3} f(x) &= e^{\sin x} \cos^3 x - 2 \cos x \sin x - e^{\sin x} \sin x \cos x - \cos x e^{\sin x}
\end{aligned}$$

Luego, evaluando en 0 tendremos:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
\frac{d}{dx} f(0) &= 1 \\
\frac{d^2}{dx^2} f(0) &= e^{\sin 0} \cos^2 0 - \sin 0 e^{\sin 0} = 1 \\
\frac{d^3}{dx^3} f(0) &= e^{\sin 0} \cdot \cos^3 0 - 2 \cos 0 \cdot \sin 0 - e^{\sin 0} \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 - \cos 0 \cdot e^{\sin 0} = 0
\end{aligned}$$

Y evaluando el polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned}
P_{3,0}(x) &= \sum_{i=0}^{3} \frac{\frac{d^i}{dx^i} f(0)}{i!} x^i \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \log(x)$ de grado n en 2

Para empezar, notemos un pequeño patrón dentro de las derivadas de f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(x) \\ \frac{d}{dx}f(x) &= x^{-1} \\ \frac{d^2}{dx^2}f(x) &= -x^{-2} \\ \frac{d^3}{dx^3}f(x) &= 2x^{-3} \\ \frac{d^4}{dx^4}f(x) &= -6x^{-4} \\ &\cdots\cdots \\ \frac{d^n}{dx^n}f(x) &= (-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n} \end{aligned}$$

Con esto, para $n \geq 1$ podremos hacer una generalización:

$$\begin{aligned} P_{n,2} &= \log(2) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{d^i}{dx^i}f(2)}{i!}(x-2)^i \\ &= \log(2) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}(i-1)!2^{-i}}{i!}(x-2)^i \\ &= \log(2) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}2^{-i}}{i}(x-2)^i \\ &= \log(2) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i \cdot 2^i}(x-2)^i \\ &= \log(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}(x-2)^n \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ de grado $2n+1$ en 0

22 Escribir cada polinomio de x en terminos de un polinomio de $x-3$:

(a) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$

Bastará cálcular el polinomio de Taylor de grado 4 en 3 para f ya que será igual hasta grado

4 a f, por lo que primero deberemos derivar la función 4 veces:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1 \\
\frac{d}{dx}f(x) &= 4x^3 - 36x^2 + 88x + 2 \\
\frac{d^2}{dx^2}f(x) &= 12x^2 - 72x + 88 \\
\frac{d^3}{dx^3}f(x) &= 24x - 72 \\
\frac{d^4}{dx^4}f(x) &= 24
\end{aligned}$$

Y ahora si se evalua en 3 tendremos:

$$\begin{aligned}
f(3) &= 3^4 - 12 \cdot 3^3 + 44 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 160 \\
\frac{d}{dx}f(3) &= 4 \cdot 3^3 - 36 \cdot 3^2 + 88 \cdot 3 + 2 = 50 \\
\frac{d^2}{dx^2}f(3) &= 12 \cdot 3^2 - 72 \cdot 3 + 88 = -20 \\
\frac{d^3}{dx^3}f(3) &= 24x - 72 = 0 \\
\frac{d^4}{dx^4}f(3) &= 24 = 24
\end{aligned}$$

Por lo que el polinomio quedará:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{24}{4!}(x-3)^4 + \frac{0}{3!}(x-3)^3 - \frac{20}{2!}(x-3)^2 + \frac{50}{1!}(x-3)^1 + 160 \\
&= (x-3)^4 - 10(x-3)^2 + 50(x-3) + 160
\end{aligned}$$