Método Broyden

Juan Camilo Chafloque
Abel Santiago Cortes
Juan Sebastian Osorio

August 20 2019

1. Introducción

El método de Broyden es un método para la solución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales con más de una variable. Este método disminuye considerablemente el número de operaciones a realizar aunque pierde la convergencia cuadrática del método de Newton y en vez tiene una convergencia lineal.

¿Para que se utiliza?
Se utiliza para determinar las soluciones o solución de un sistema no lineal. Es un método iterativo que inicia con un valor inicial x_0.

2. Procedimiento

1. Se realiza la primera iteración a través del método de Newton:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - J(X^{(0)})^{-1}F(X^{(0)}) \tag{1}$$

2. Luego se sigue con el método Broyden con la formula de Sherman y Morrison. Con esta fórmula se obtiene la inversa i-ésima de la matriz Jacobiana.

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} + \frac{(S_1 - A_0^{-1}Y_1)S_1A_0^{-1}}{S_1A_0^{-1}Y_1} \tag{2}$$

En donde:

$$S_1 = X^{(1)} - X^{(0)} \tag{3}$$

$$Y_1 = F(X^{(1)}) - F(X^{(0)}) \tag{4}$$

Una vez se tiene la matriz A_1^{-1} se puede obtener la segunda iteración:

$$X^{(2)} = X^{(1)} - A_1^{-1}F(X^{(1)}) \tag{5}$$

Ya calculadas las primeras dos iteraciones se puede calcular el error que existe entre las iteraciones a través del calculo del error:

$$E = |X^{(i)} - X^{(i-1)}| \tag{6}$$

Se continua iterando hasta llegar a una aproximación bastante cercana a la raíz real.

3. Ejemplos y Resultados

Con ayuda de las librerías de R se encontró la función Broyden que dado un sistema no lineal, esté encontraba las raices del sistema.

1. **Ejemplo 1**

$$\begin{cases} 4X_1^2 - 20X_1 + 0{,}25X_2^2 + 8 = 0 \\ 0{,}5X_1X_2^2 + 2X_1 - 5X_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Las raices del sistema no lineal son: 0.5 2 El número de iteraciones que se tuvieron fue de: 7

2. **Ejemplo 2**

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1 \\ X_1^2 + X_2^2 = 0{,}25 \\ X_1^2 + X_2^2 - 4X_3 = 0 \end{cases}$$

Las raices del sistema no lineal son: 0.4407629 0.8660254 0.236068 El número de iteraciones que se tuvieron fue de: 8

4. Conclusión

Este método converge lentamente ya que es una generalización del método de la secante, y el método de la secante se sabe que converge más lento que el método de Newton. Sin embargo, necesita menos pasos para obtener los valores de la solución.