Taller 3 - Análisis Numérico

Juan Camilo Chafloque
Abel Santiago Cortes
Juan Sebastian Osorio

27 de octubre de 2019

1. Punto A.

Para la función $xcos(x)$. Encontrar el valor aproximado de su derivada para los siguientes valores de entrada:

1. **Valor de x:** 1,8
2. **Valores de h:** $[0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, 0{,}0001]$

Para cada valor de h se utilizó la siguiente ecuación para aproximar el valor de la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x+h_i) - f(x)}{f(h_i)} \tag{1}$$

h	Resultado
0.1	-2.063171328893267
0.01	-1.9878801603501752
0.001	-1.9808977805674546
0.0001	-1.9802047726913956

Cuadro 1: Tabla de aproximaciones.

2. Punto B.

Para calcular la cota de error del punto A, se tuvo que encontrar la segunda derivada de la función:

$$f''(x) = -2sin(x) - xcos(x) \tag{2}$$

Luego, hallar el valor de M que es una cota del valor de $|f''(x)|$, con un x igual a 1.8. La ecuación final para hallar el error es:

$$e = \frac{|h_i M|}{2} \tag{3}$$

h	Error
0.1	0.07693657456544167
0.01	0.0076936574565441675
0.001	0.0007693657456544167
0.0001	7.693657456544168e-05

Cuadro 2: Tabla de errores vs h.

3. Punto C.

1. **Valor de x:** 1,8
2. **Valores inicial de h:** 0,1
3. **Número máximo de iteraciones:** 100
4. **Precisión:** $10e - 4$

Con los valores iniciales anteriores, se iteró utilizando la ecuación 1 hasta que el valor del error fuera menor a la precisión o hasta alcanzar el número máximo de iteraciones. Para cada iteración se disminuia el valor de h en un factor de 10.

El valor de h para garantizar un error menor a 10e-4 es: 0.001

4. Punto D.

1. **Valor de x:** 1,8
2. **Valor de x_1:** $x + h$

3. **Valor de x_2:** $x + 2h$
4. **Valor de h:** 0,001

Con los puntos x, x_1 y x_2, se utilizó la siguiente ecuación para aproximar el resultado de la derivada de la función en x.

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} \tag{4}$$

La aproximación utilizando los puntos dados es igual a: -1.9801286426552878

5. Punto E.

En este punto se realizó una modificación a la ecuación 4, tomando valores entre $(x - h)$ y $(x + h)$. La ecuación modificada es la siguiente:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{5}$$

En WolframAlpha, se calculó el valor exacto de la función $f'(x)$ cuando x es igual a 1.8 para poder compararla con el resultado de la ecuación 4.

El error utlizando la ecuación modificada de tres puntos es igual a: 4.0575553073e-07

6. Punto F.

Para este punto se utilizó la ecuación de los cinco puntos alrededor de x_0.

$$f'(x) = \frac{-f(x_4) + 8f(x_3) - 8f(x_2) + f(x_1)}{12h} \tag{6}$$

Donde:

1. x_0**:** 1,8
2. x_1**:** $x_0 - 2h$

3. x_2: $x_0 - h$
4. x_3: $x_0 + h$
5. x_4: $x_0 + 2h$
6. **Valor de h:** 0,001

La aproximación utilizando los 5 puntos es igual a: -1.980127830
El error utlizando la ecuación de 5 puntos es igual a: 4.021227795e-13

Se puede ver que el error para la ecuación de los 5 puntos es menor a los errores de las ecuaciones anteriores.

7. Punto G.

Para este punto se necesita hallar una aproxamiación al valor de $f''(x)$ cuando x es igual a 1.8. Para realizar esta aproximación se utilizó la siguiente ecuación:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{7}$$

En WolframAlpha, se calculó el valor exacto de la función $f''(x)$ cuando x es igual a 1.8 para poder compararla con el resultado de la ecuación 7.

La aproximación es igual a: -1.5387312006
El error utlizando la ecuación es igual a: 2.9063012219e-07

8. Punto H.

Teniendo en cuenta que el error total (h)=Error de redondeo + Error de truncamiento dado por la función $e(h)$. Encontrar el tamaño óptimo del paso.

Se tiene que:

$$e(h) = \frac{E}{h} + \frac{h^2}{6}M \tag{8}$$

.

Para obtener el valor óptimo de h se tiene que derivar la ecuación anterior y despejar dicho valor.

$$e'(h) = \frac{-E}{h^2} + \frac{2h}{6}M \tag{9}$$

.

Una vez se deriva la función, se iguala a cero y se despeja h.

$$\frac{E}{h^2} = \frac{2h}{6}M \tag{10}$$

.

Por lo tanto el valor óptimo del paso es igual a:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6E}{2M}} \tag{11}$$

.

9. Punto I.

Para el siguiente problema se tenía que hallar una aproximación $f'(1)$ a la función $f(x) = xe^x$.
Se realizaron 15 iteraciones disminuyendo el valor de h en un factor de 10 para graficar la variación de la precisión en función de h. La ecuación utilizada para realizar las aproximaciones fue la ecuación 1.

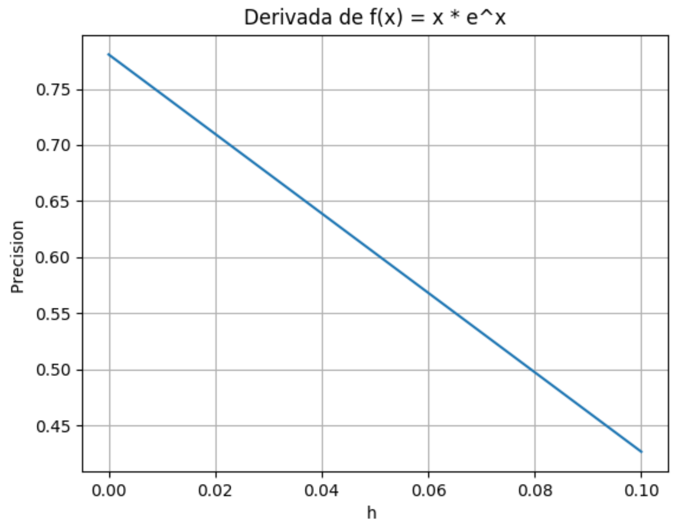

Figura 1: Grafica Precisión vs. h

10. Punto J.

En un circuito con un voltaje $E(t)$ y una inductancia L se tiene que:

$$E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri \tag{12}$$

Donde R es la resistencia e i es la corriente.

1. $ValordeR$**:** 0,142
2. $ValordeL$**:** 0,98
3. $Valordeh$**:** 0,01
4. $Valoresdet$**:** [1,001,011,021,031,04]
5. $Valoresdei$**:** [3,103,123,143,183,24]

Primero, se realizó una interpolación para los valores de t e i utilizando la función de R $poly_calc$. El polinomio fue:

$$-83333{,}33t^4 + 341666{,}7t^3 - 525191{,}7t^2 + 358719{,}9t - 91858{,}4 \tag{13}$$

Luego se hallaron aproximaciones a la derivada de la corriente para cada instante t.

t	di
1.00	2.114205
1.01	2.115966
1.02	4.117756
1.03	6.119573
1.04	6.121419

Cuadro 3: Tabla de di vs t.

Una vez se tenian los valores de di para cada instante t, se procedió a calcular una aproximación al valor de $E(t)$.

t	E(t)
1.00	2.512121
1.01	2.516687
1.02	4.481280
1.03	6.448742
1.04	6.459071

Cuadro 4: Tabla de di vs t.

11. Referencias

1. Introducción a los Métodos Numéricos: Implementaciones en R Walter Mora F. February 2015

2. Análisis Numérico Básico: Un enfoque algorítmico con el soporte de Python Luis Rodríguez Ojeda January 2014