Documentación Algoritmos
Obtención de Raíces

Juan Camilo Chafloque

Abel Santiago Cortés

Juan Sebastián García

Agosto 2019

Abstract

En la matemática tradicional muchas ecuaciones no tienen solución al momento de obtener su raíz. Es por eso que se ha recurrido a nuevos métodos y algoritmos desarrollados a partir del Análisis Numérico, uno de estos y el que se explicará junto a su demostración es el método de Bisección.

1 Introducción

En principio es necesario entender que las raíces de una ecuación siempre han sido un tema discutido en las matemáticas y sus aplicaciones. Esto se debe principalmente a que su importancia permite proveer de una ecuacion incognitas como: maximos y minimos, calores propios de matrices, resolver sistemas lineales y diferenciales. Ahora, es también relevante comprender que los métodos para calcular raíces de una ecuación se destacan por mantener una consistencia en ser iterativos , basados en modelos de aproximaciones sucesivas.En términos mas concretos el objetivo de estos metodos es que partiendo de una primera aproximación al valor de la raíz, determinamos una aproximación mejor aplicando una determinada regla de cálculo y así sucesivamente hasta que se determine el valor de la raíz con el grado de aproximación deseado.[1]

Método de Steffensen

August 6, 2019

1 Definición del Método

El **étodo de Steffensen**, es un algoritmo utilizado para obtener los ceros de una funcion. Este se puede consideran como una combinación de los métodos de **punto fijo y del método de Aitken**.Este presenta una convergencia rápida y no requiere, como en el caso de el **método de la secante**, la evaluación de alguna derivada. Otra ventaja de este algoritmo es que el proceso de iteración solo necesita un punto inicial.

Otra ventaja de este algoritmo es que , de la misma que el **método de Newton** tiene convergencia cuadratica. Lo que significa que ambos encuentran raíces "mas rápido" (En cada iteración, se duplica en número de digitos correctos).

Se calcula el siguiente punto de iteración a partir de la expresión: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f\ (x_n+f(x_n))-f(x_n)}$ [1]

2 Implementación del Método

1. **Ecuación de Prueba:** $e^x - \pi x$
2. **Tolerancia:** $10e-8$
3. **x=:** 1
4. **x=:** 2

3 Resultados

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 0.5538270369037372 \quad (1)$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 3 \quad (2)$$

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 1.638528419973685 \quad (3)$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 7 \quad (4)$$

4 Tablas de Error

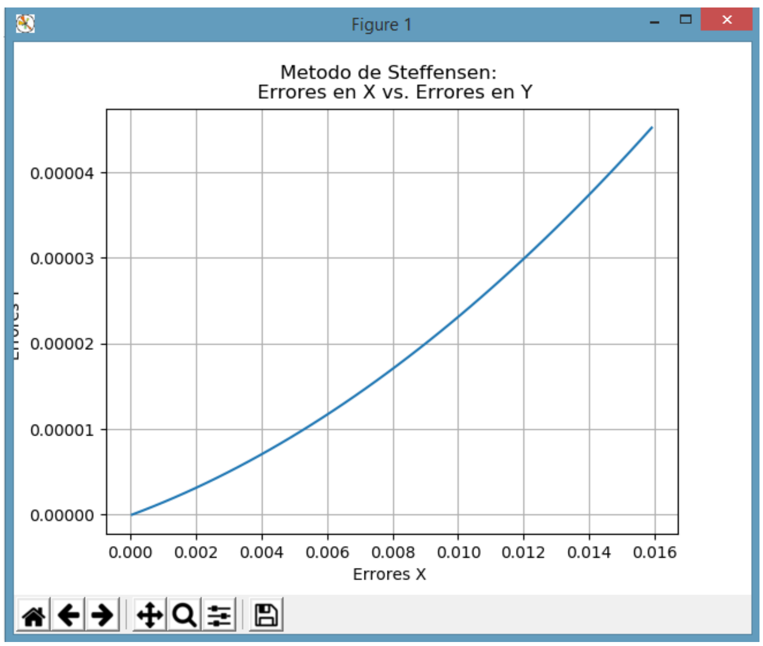

Figure 1: Gráfica error Steffensen en 1

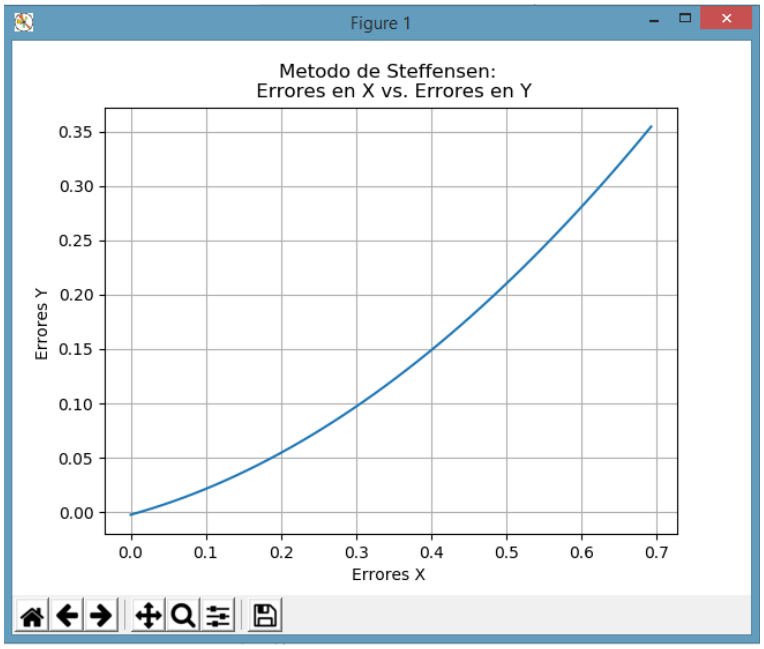

Figure 2: Gráfica error Steffensen en 2

5 Conclusión y Análisis

Para conlcluir, nos encontramos con que este algoritmo tiene diversas ventajas frente a los otros analizados. Como lo es su rápida convergencia(Convergencia caudrática) , el que no sea necesario , como lo es en el método de la secante, la evaluación e alguna derivada y el que el proceso de iteración solo necedite un punto inicial. Sin embargo un precio importante a considerar es que se genera una doble evaluacion: en $f(x_n)$ como $f\ (x_n + f(x_n))$, lo cual puede tomar bastante tiempo dependiendo de la función. También se debe tener en cuenta que se debe tener cuidado con escoger un valor de inicial x correcto, ya que si este no se encuentra lo suficientemente cerca de la solución el método puede fallar.[1]

6 References

1. Proyecto Métodos Numéricos `Steffensen` Arturo Guillén ND

Método de Secante

August 6, 2019

1 Definición del Método

Este método se puede pensar como una simplificacion del método de **Newton-Raphson**. Pero en lugar de tomar la derivada de la función de la cual se quiere encontrar la raíz, se aproxima por una recta secante a la curva, cuya pendiente es aproximadamente igual a la derivada en el punto inicial. .Se encuentra una diferencia con **Newton-Raphson**, es que se conocen dos puntos de la función , con los cuales se generará la recta.

Sean x0 y x1 pertenecientes a cierta f(x) se puede definir:
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
Aplicando el método de **Newton-Raphson** queda:
$x_{n+1} = x_n - f\left(x_n\right) \cdot \frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$ [1]

2 Implementación del Método

1. **Ecuación de Prueba:** $e^x - \pi x$
2. **Tolerancia:** $10e-8$
3. **Intervalo:** $[0, 2]$

3 Resultados

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 0.5538270366445147 \quad (1)$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 7 \quad (2)$$

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 1.6385284199703645 \quad (3)$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 9 \quad (4)$$

4 Tablas de Error

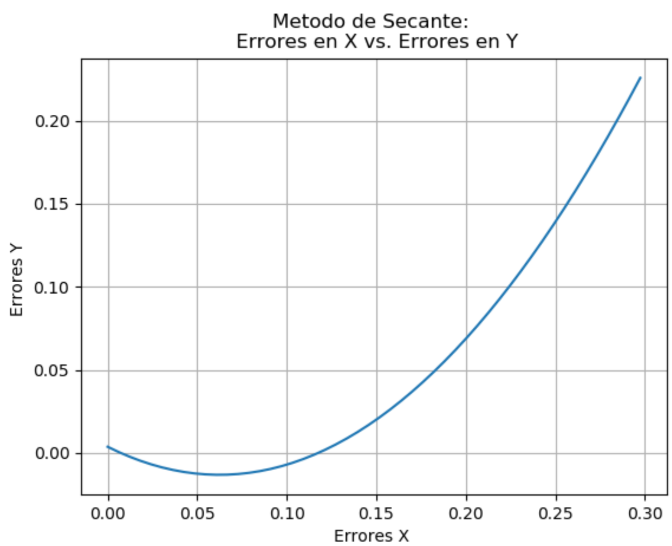

Figure 1: Gráfica error en Secante en intervalo $[0, 1]$

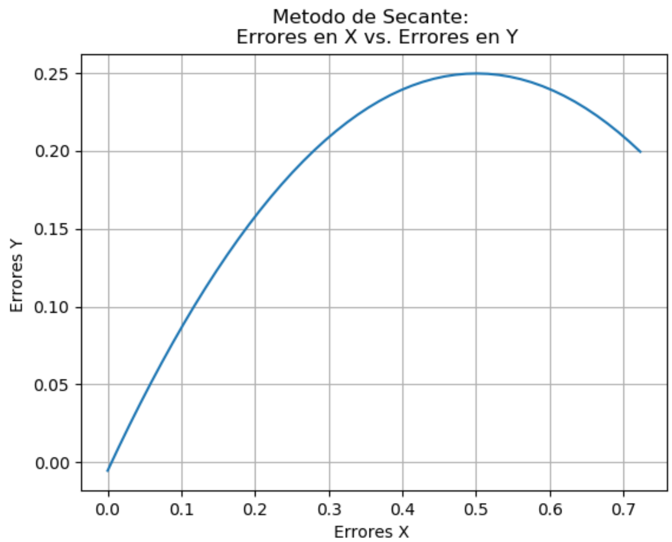

Figure 2: Gráfica error en Secante en intervalo $[1, 2]$

5 Conclusión y Análisis

Para conlcluir, que en general este método tiene las mismas ventajas y limitaciones que el método de Newton-Raphson, ecplicado previamente, este es simple y muy utilizado, gracias a la rapídez que presenta y también al hecho de que no se tiene que hallar alguna derivada.[1]

6 References

1. Métodos numéricos Apuntes y Ejemplos Unidad No.3 `Método de la Secante` Rodrigo Russo ND

Método: Punto Fijo

August 6, 2019

1 Definición del Método

El método de Punto fijo se utiliza para resolver ecuaciones de la forma x=g(x),

Si la ecuación es f(x)=0,se puede sumar x en ambos lados de la ecuacion, o despejarla para ponerla de la forma adecuada

Un punto fijo en una funcion g, es numero p tal que g(p)=p. Este método inicia con la aproximascion inical x_0 y $x_{i+1} = g(x_i)$ genera una susesión de aproximaciones la cual converge a la solucion de la ecuación f(x)=0. La función g se le conoce como función iteradora. Y se puede demostrar que esta sucesión $\langle x_n \rangle$ converge siempre y cuando $|g'(x)| < 1$.[2]

2 Implementación del Método

1. **Ecuación de Prueba:** $e^x - \pi x$
2. **Tolerancia:** $10e - 8$
3. **Intervalo:** $[0, 2]$

3 Resultados

$$\text{Con la función } g(x) = e^x/PI \text{ [1,2] es aprox: } 0.5538268294972191 \quad (1)$$

$$\text{El numero de iteraciones que se obtuvieron: } 21 \quad (2)$$

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 1.6385284066200256 \quad (3)$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 24 \quad (4)$$

4 Tablas de Error

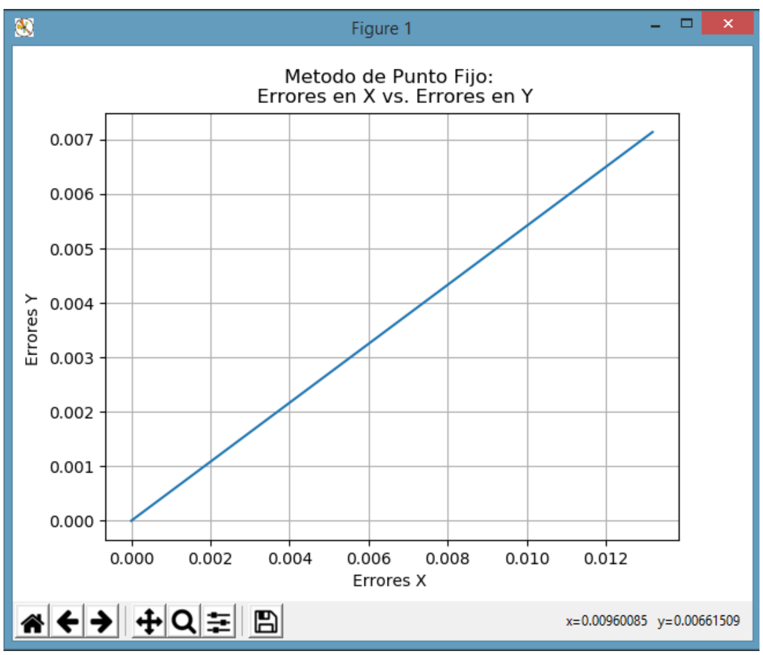

Figure 1: Gráfica error Punto fijo intervalo [0,1]

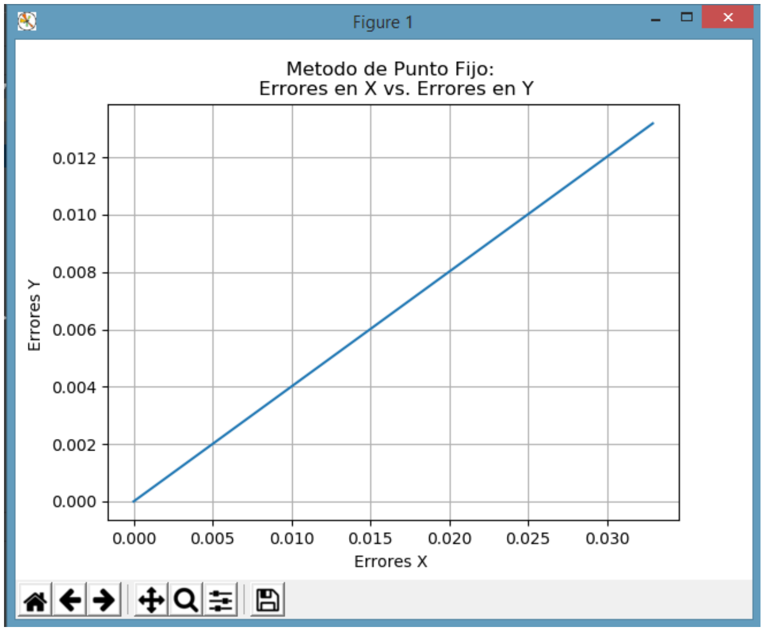

Figure 2: Gráfica error Punto Fijo intervalo [1,2]

5 Conclusión y Análisis

Para colncluir el metodo de punto fijo es una tecnica simple que posee condiciones que aseguran la convergencia. Hay que tener en cuenta que es obligatorio que $|g'(x)| < 1$ cuando esta cerca la reíz. Este metodo tiene desventajas ya que que la convergencia depende de la magnitud de g'(x) y que es necesario construir funciónes g(x).

6 References

1. Universitat de Valencia: `Cálculo de raíces de ecuaciones` Wladimiro Diaz May 1998

2. Tencnologías de Internet en la Enseñanza de la Matemática `Método de punto fijo` Walter Mora F ND

Método de Posición Falsa

August 6, 2019

1 Definición del Método

El proceso de convergencia en el método de bisección es muy lento. Depende solo de la elección de los puntos finales del intervalo [a, b]. La función f (x) no tiene ningún papel en la búsqueda del punto c (que es solo el punto medio de a y b). Se usa solo para decidir el siguiente intervalo más pequeño [a, c] o [c, b]. Se puede obtener una mejor aproximación a c tomando la línea recta L que une los puntos (a, f (a)) y (b, f (b)) que intersecan el eje x. Para obtener el valor de c podemos igualar las dos expresiones de la pendiente m de la línea L.

La selección de c por la expresión anterior se llama método Regula-Falsi o método de posición falsa.

Teorema : Dada una función f (x) continua en un intervalo [a, b] tal que f (a) * f (b) mayor a 0

c = a * f (b) - b * f (a) f (b) - f (a) si f (a) * f (c) mayor a 0 entonces b = c más a = c

El método de posición falsa nuevamente está obligado a converger porque pone entre paréntesis la raíz en todo su proceso de convergencia.[1]

2 Implementación del Método

1. **Ecuación de Prueba:** $e^x - \pi x$
2. **Tolerancia:** $10e - 8$
3. **Intervalo:** $[0, 1], [1, 2]$

3 Resultados

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 0.5538319052541543 \quad (1)$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 7 \quad (2)$$

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 1.6382124840596417 \quad (3)$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 7 \quad (4)$$

4 Tablas de Error

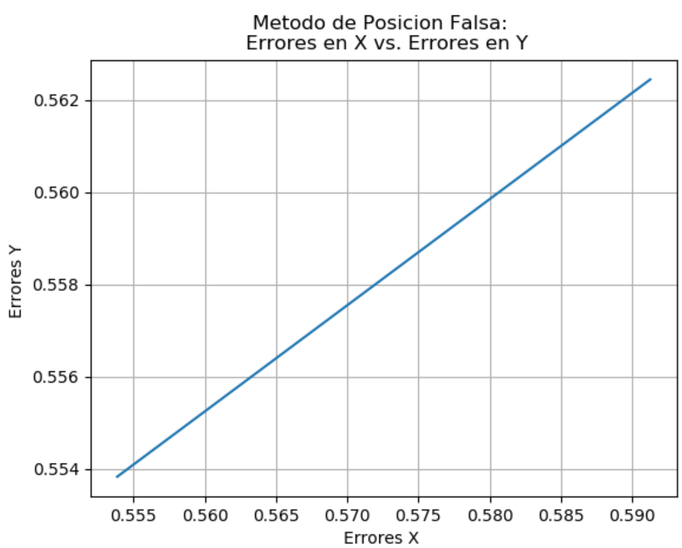

Figure 1: Gráfica error Posición Falsa intervalo [0,1]

5 Conclusión y Análisis

Este es el más antiguo Método para calcular las raíces reales de una ecuación algebraica. Con el uso de este método,puede encontrar dos números a y b de

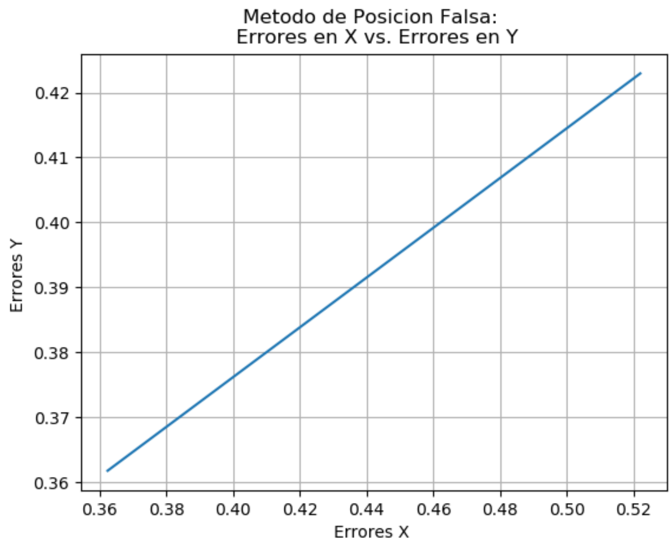

Figure 2: Gráfica error Posición Falsa intervalo [1,2]

tal manera que las ecuaciones f (a) yf (b) sean de signo diferente. Por lo tanto la raíz se encuentra entre el punto ayb para la gráfica de y = f (x) y debe cruzar el eje x para el punto x = a y x = b.

6 References

1. Mat.IIC: `REGULA-FALSI METHOD` Syredida Jun 2010

2. University of Nebraska: `Convergence of Numerical Models` David B June 2015

Método de Newton

August 6, 2019

1 Definición del Método

El método de Newton, también llamado método de **Newton-Raphson**, es un algoritmo de busqueda de raíces que utiliza los primeros terminos de las **series de Taylor** de una funcion f(x) cerca a una raíz esperada. Este también es conocido como la iteración de Newton.

El **méwtodo de Newton** dice que la mejor aproximacióon de una raiz de f(x) de da por $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f\,'(x_n)}$. Generalmente, el método se repite hasta que dos iteraciones continuas devuelven el mismo valor para un numero establecido de decimales.
El método de Newton también se puede aplicar para encontrar los extremos sobre una función al operarla en la primera derivada.[1]

2 Implementación del Método

1. **Ecuación de Prueba:** $e^x - \pi x$
2. **Tolerancia:** $10e - 8$
3. **Intervalo:** $[0, 2]$

3 Resultados

$$\text{La raiz entre [0,1] es aproximadamente: } 0.5538270366445135 \tag{1}$$

$$\text{El numero de iteraciones que se obtuvieron: } 3 \tag{2}$$

$$\text{La raiz entre [1,2] es aproximadamente: } 1.6385284199703631 \tag{3}$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 24 \tag{4}$$

4 Tablas de Error

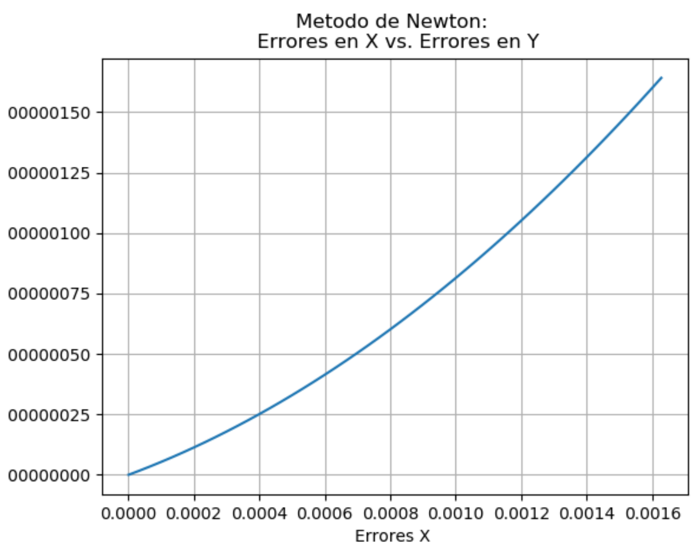

Figure 1: Gráfica error Newton intervalo [0,1]

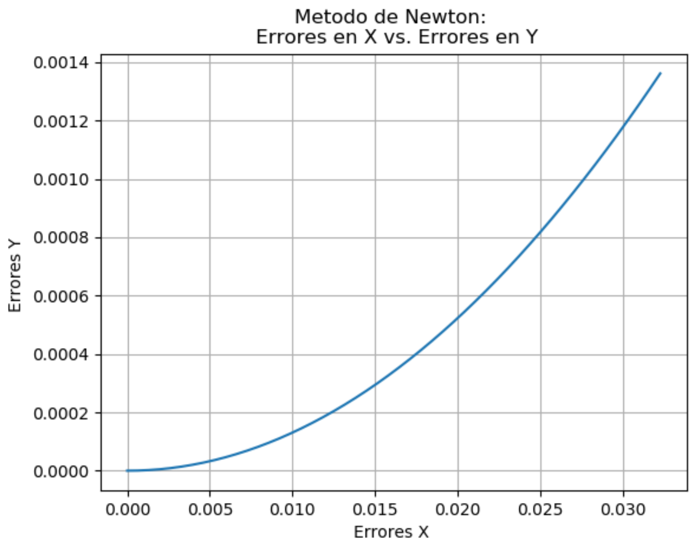

Figure 2: Gráfica error Newton intervalo [1,2]

5 Conclusión y Análisis

El método de Newton-Raphson es eficiente solucionando sistemas de ecuaciones no lineales, este converge rápidamente y da resultados con gran precisión.Este método se puede usar ya sea para problemas académicos, como para problemas de la vida real.Hay que tener en cuenta que este no puede ser utilizado para los casos en que la derivada sea igual a cero. $(f'(x) = 0)$. Y la eficiencia del método cambia, dependiendo del valor inicial elegido.

6 References

1. Newton's Method Chegg Study `www.chegg.com` ND

2.Métodos numéricos: `Método de Newton-Raphson` jorgeyfloreth 14 febrero, 2017

Método Hibrido

August 6, 2019

1 Definición del Método

En este algoritmo, Altaee, Hoomod y Hussein sugirieron dos bisecciones pasos al principio y luego aplicó los pasos de Newton-Raphson sin considerando una función dada y un intervalo.

Para evitar la deficiencia del algoritmo híbrido [1], sugerimos Un algoritmo híbrido mejorado. Cuando determinamos el intervalo que contiene una raíz por el intermedio teorema del valor, lo denotamos por [an, bn]. Este proceso nos da una fiabilidad para La convergencia de nuestro algoritmo. Además, nuestro algoritmo es más eficiente. que el método de bisección ya que mezclamos el método de bisección con el método NewtonRaphson. [2]

2 Implementación del Método

1. **Ecuación de Prueba:** $e^x - \pi x$
2. **Tolerancia:** $10e - 8$
3. **Intervalo:** $[0, 2]$

3 Resultados

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 0.5538270095885925 \tag{1}$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 18 \tag{2}$$

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 1.6385284395594213 \tag{3}$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 22 \tag{4}$$

4 Tablas de Error

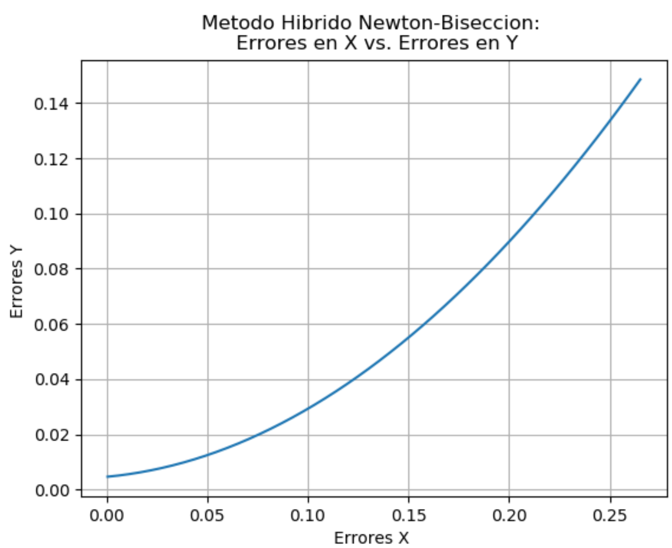

Figure 1: Gráfica error Hibrido intervalo [0,1]

5 Conclusión y Análisis

Sugerimos un algoritmo híbrido mejorado que converge a la raíz de un ecuación no lineal más rápido que el método de bisección. Por la complejidad nuestro

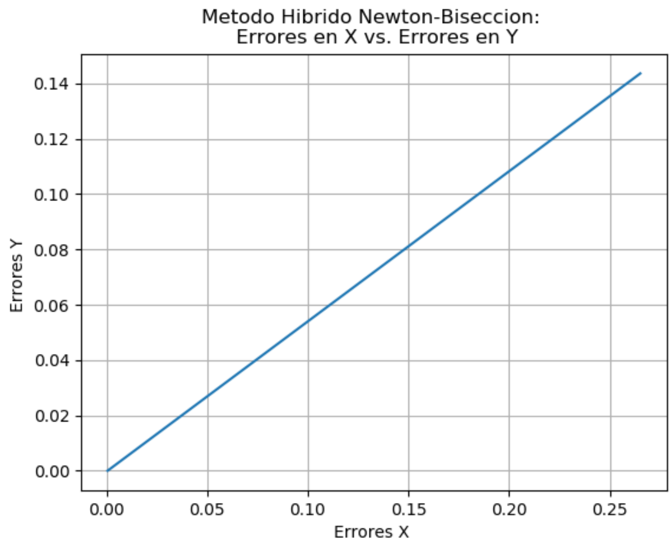

Figure 2: Gráfica error Hibrido intervalo [1,2]

algoritmo, no obtenemos la tasa de convergencia de nuestro híbrido mejorado algoritmo. Por lo tanto, trataremos de calcular la tasa de convergencia de nuestra mejora algoritmo en el futuro.

6 References

1. Universitat de Valencia: `Cálculo de raíces de ecuaciones` Wladimiro Diaz May 1998

2. Engineer.org: `The Bisection Method for root findings` X-Engineer ND

Método de Biseccion

August 6, 2019

1 Definición del Método

El método de bisección, también llamado método de división a la mitad, el método de búsqueda binaria o el método de dicotomía. se basa en el teorema de Bolzano para funciones continuas.

Teorema (Bolzano): si una función f (x) es continua en un intervalo [a, b] y f (a) · f (b) ¡ 0, entonces existe un valor c entre (a, b) para el cual f (c) = 0.

El método de bisección puede usarse para encontrar la raíz de una función continua en un intervalo conectado si podemos ubicar dos puntos en el dominio de la función donde tiene signos opuestos. Simplemente restringimos la función a ese dominio y aplicamos el método. El Método de Bisección busca encontrar el valor c para el cual la gráfica de la función f cruza el eje x. El valor c es en este caso una aproximación de la raíz de la función f (x). La proximidad del valor de c a la raíz real depende del valor de la tolerancia que establezcamos para el algoritmo. [2]

2 Implementación del Método

1. **Ecuación de Prueba:** $e^x - \pi x$
2. **Tolerancia:** $10e - 8$
3. **Intervalo:** $[0, 2]$

3 Resultados

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 0.5538269877433777 \tag{1}$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 24 \tag{2}$$

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 1.6385284066200256 \tag{3}$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 24 \tag{4}$$

4 Tablas de Error

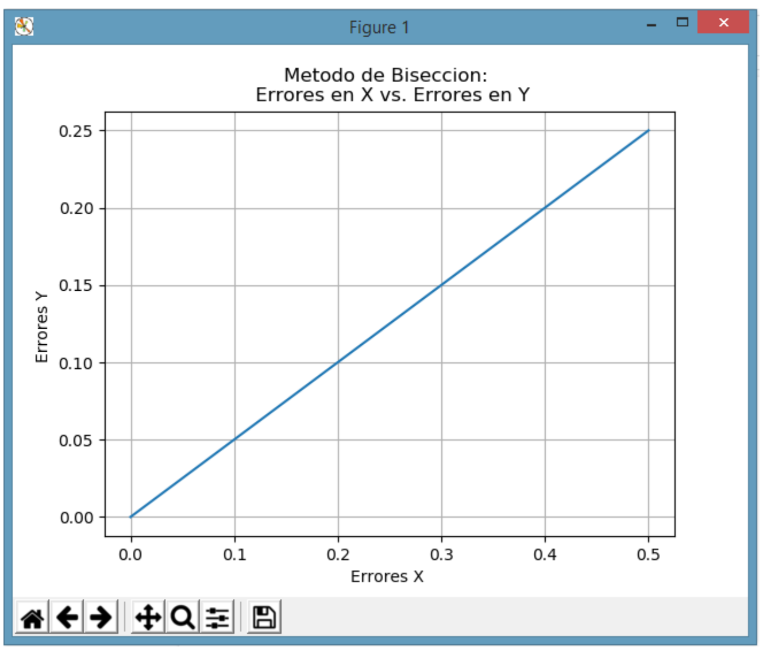

Figure 1: Gráfica error Biseccion intervalo [0,1]

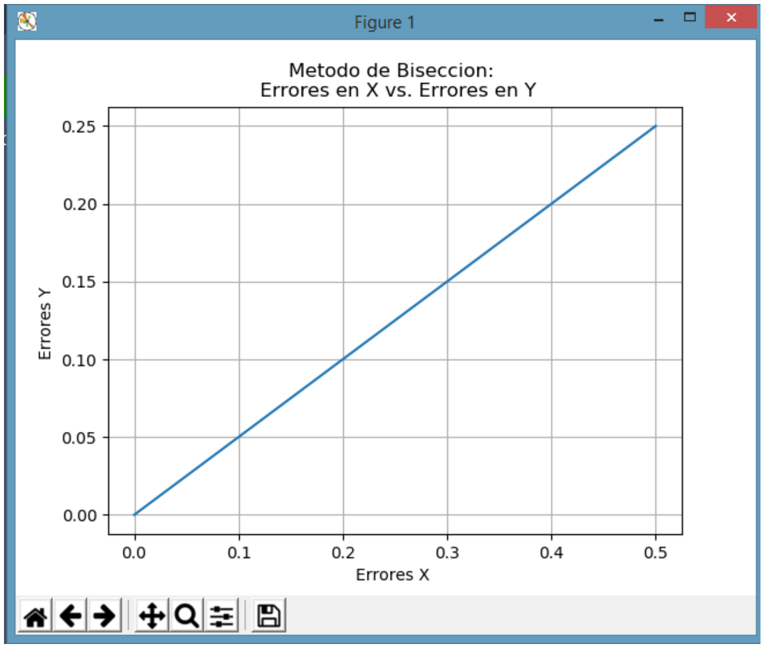

Figure 2: Gráfica error Biseccion intervalo [1,2]

5 Conclusión y Análisis

El método de bisección es un método de búsqueda de raíz simple, fácil de implementar y muy robusto. Las desventajas de este método es que es relativamente lento. Debido a esto, la mayoría de las veces, el método de bisección se usa como punto de partida para obtener un valor aproximado de la solución, que luego se usa como punto de partida para métodos que convergen más rápidamente.Además método de bisección converge en una solución que depende de la tolerancia y el número de iteraciones que realiza el algoritmo. Existe una dependencia entre la tolerancia y el número de iteraciones.

6 References

1. Universitat de Valencia: `Cálculo de raíces de ecuaciones` Wladimiro Diaz May 1998

2. Engineer.org: `The Bisection Method for root findings` X-Engineer ND

Método de Aitken

August 6, 2019

1 Definición del Método

El método Aitken se utiliza para acelerar la convergencia de secuencias, p. secuencias obtenidas de métodos iterativos. Una suposición explícita al derivar método y establecimiento de aceleración (para convergencia lineal secuencias) es que las iteraciones de error consecutivas (o sus aproximaciones) tienen el mismo signo o tiene un patrón de signo alterno. Extendemos el estándar de Aitken método para los casos en los que pares de errores consecutivos iteran en la secuencia tienen signos alternos [1]

2 Implementación del Método

1. **Ecuación de Prueba:** $e^x - \pi x$
2. **Tolerancia:** $10e - 8$
3. **Intervalo:** $[0, 2]$

3 Resultados

$$\text{La aproximacion de la raiz de la funcion es: } 0.5538270366445135 \tag{1}$$

$$\text{La cantidad de iteraciones que se tuvieron fueron: } 4 \tag{2}$$

x

4 Conclusión y Análisis

Hemos desarrollado una extensión del Aitken método Aitken que, aunque muy especializado, acelera la convergencia de secuencias iterativas de la forma descrita. Una prueba de esta extensión fue desarrollada y uno de los ejemplos numéricos que ilustran la aplicación del método fueron dados.

5 Tablas de Error

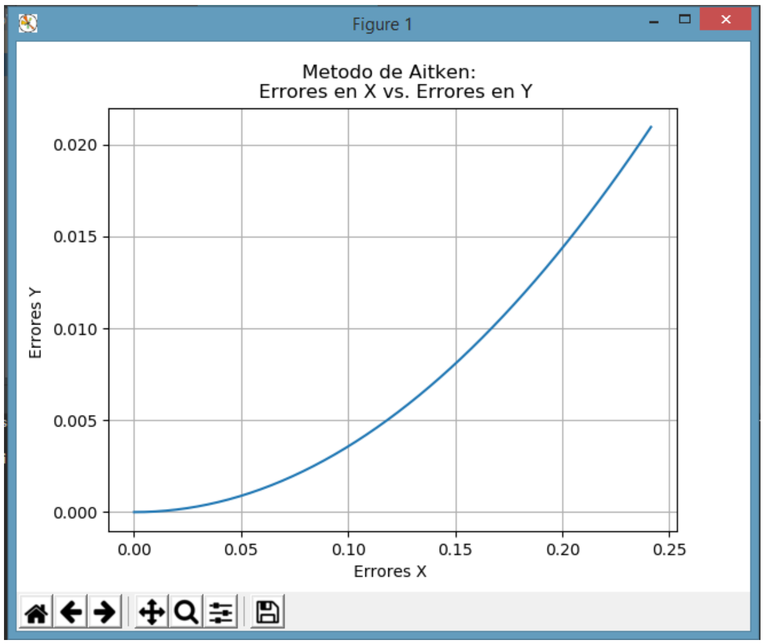

Figure 1: Gráfica error Aitken intervalo [0,1]

6 Referencias

1. Universitat de Valencia: `Cálculo de raíces de ecuaciones` Wladimiro Diaz May 1998

2. Hikari.org: `Improved Hybrid Algorithm` Jeongwon Kim ND