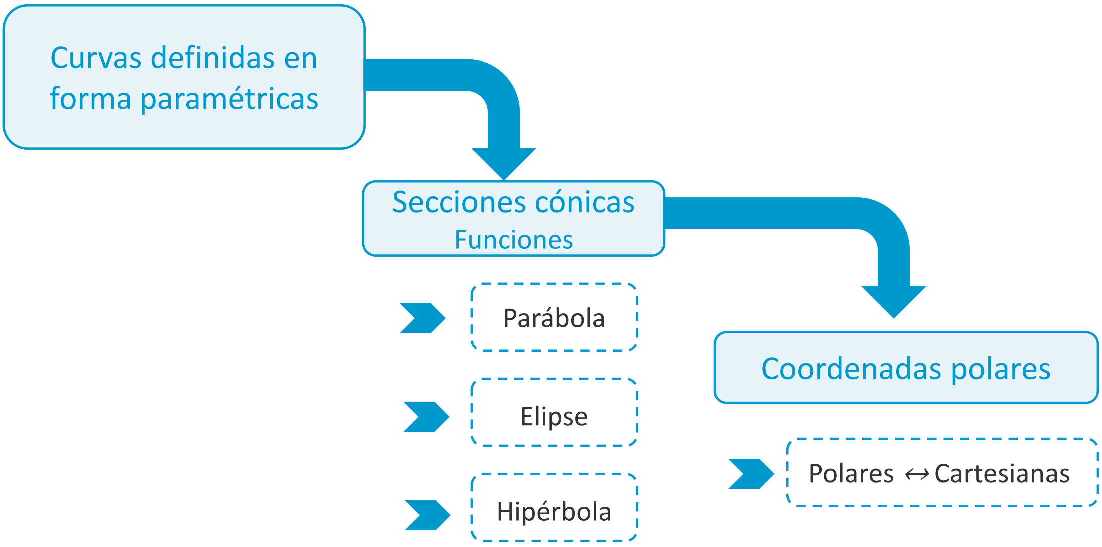
i

Cálculo Vectorial

Secciones cónicas y coordenadas polares

Índice

Esquema


Curvas definidas en forma paramétricas
Secciones cónicas
Funciones
Parábola
Elipse
Hipérbola
Coordenadas polares
Polares ↔ Cartesianas

1.1. Introducción y objetivos

Con este curso se pretende consolidar lo aprendido en asignaturas pre-requisito como son Cálculo Diferencial e Integral. Fortalecerás los sistemas analizados y representados en dos y tres dimensiones, especialmente este último. En este tema específico podrás representar funciones definidas bajo una tercera variable, identificar, graficar y generar ecuaciones de las secciones cónicas a partir de un modelo general y elaborar gráficas en sistemas de coordenadas polares.

1.2. Curvas definidas en forma paramétrica

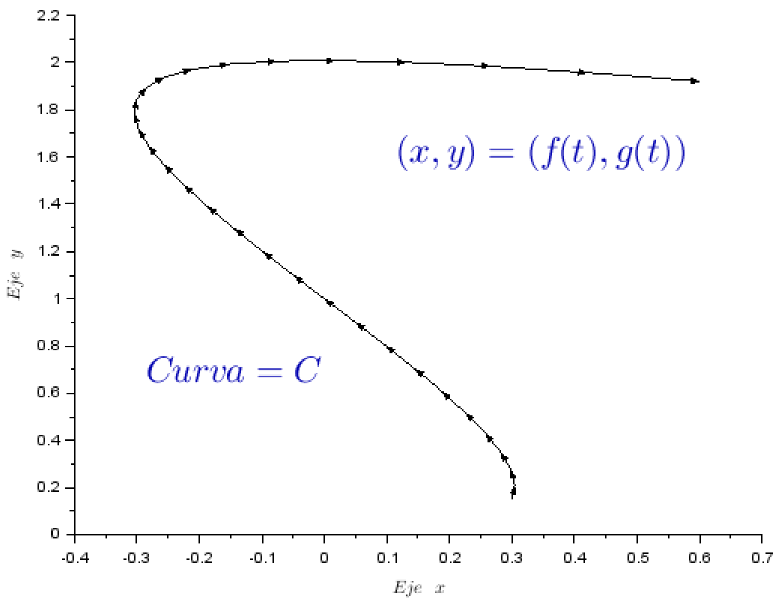


Figura 1. Tipo de curva en forma de ecuación paramétrica. Fuente: Enterprise, 2019.

La gráfica de la figura 1 no puede ser representada por la ecuación $y = f(x)$, ya que los elementos no corresponden a una única imagen, es decir, no son biunívocos. Sin embargo las coordenadas x y y pueden ser definidas en el plano bajo una tercera variable t, también llamada **parámetro.** Asimismo, se puede expresar dicha función mediante las ecuaciones:

$$x = f(t) \qquad\qquad y = g(t)$$

También llamadas **ecuaciones paramétricas**. Las coordenadas (x, y) se determinan por un valor de t las cuales se representan en un plano coordenado, donde trazamos una curva **C**, llamada **curva paramétrica.** Por ende, la expresión queda determinada de la siguiente manera:

$$(x, y) = (f(t), g(t))$$

Ejemplo 1. Traza la curva C determinada por las ecuaciones paramétricas $x = 2t^2 + 1$ y $y = t - 1$, en el intervalo $-1 \leq t \leq 2$. ¿Cuál es la orientación de la función paramétrica?

Solución. Para diferentes valores de t en el intervalo $[-1, 2]$, se calculan los correspondientes valores de x y y, según se muestra en la siguiente tabla:

t	$x = 2t^2 + 1$	$y = t - 1$
-1	3	-2
$-1/2$	$3/2$	$-3/2$
0	1	-1
½	$3/2$	$-1/2$
1	3	0
$3/2$	$11/2$	$1/2$
2	9	1

Tabla 1. Datos de tabulación para la gráfica del ejemplo 1.

Luego se ubican las coordenadas en el plano cartesiano y se unen formando una curva:

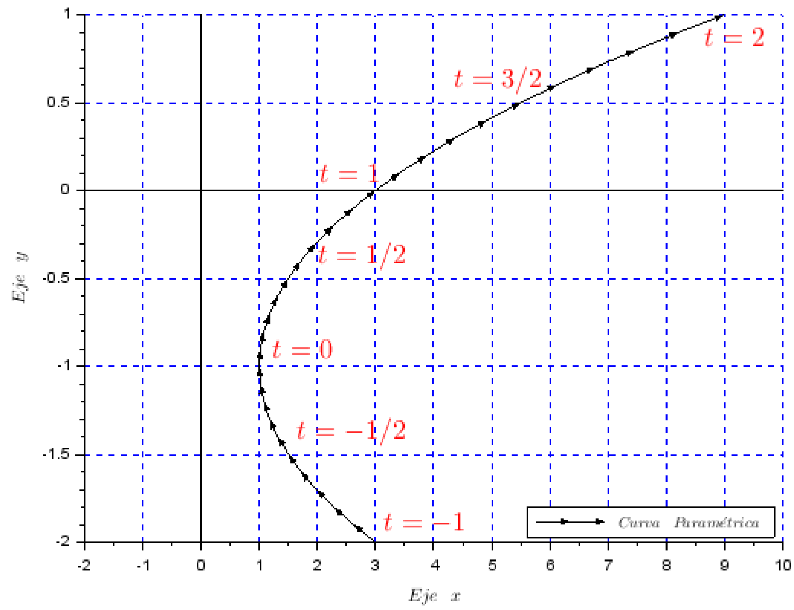


Figura 2. Curva paramétrica para el ejemplo 1.

Para determinar la orientación de la curva, es conveniente interpretar el avance sobre ella en el sentido en que el **parámetro** t crece. De esta forma se obtiene la orientación mostrada en la imagen mediante flechas. La función dibujada tiene el perfil de una parábola, para verificar dicho tipo de curva se sustituye el parámetro $\boldsymbol{t}$, despejado de la segunda ecuación, $t = y + 1$ en la primera ecuación, el resultado es el siguiente: $x = 2t^2 + 1 = 2(y+1)^2 + 1 = \mathbf{2y^2 + 4y + 3}$

La cual es una ecuación que representa una parábola en el plano cartesiano: $\boldsymbol{x = 2y^2 + 4y + 3}$

Ejemplo 2. Sigue un procedimiento similar al del ejemplo 1 para trazar la gráfica de la curva determinada por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \cos(t), y = sen(t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Señala sobre la gráfica la orientación de la curva.

Solución: en primer lugar se tabula en el rango de valores dados, en este caso en radianes, ya que son funciones trigonométricas:

t	$x = \cos(t)$	$y = sen(t)$
0	1	0
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	0	1
$3\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	-1	0
$5\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$3\pi/2$	0	-1
$7\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	1	0

Tabla 2. Datos de tabulación para la gráfica del Ejemplo 2.

Al ubicar cada una de las coordenadas en el plano, y considerando puntos de evaluación intermedios, la gráfica es una circunferencia de radio 1 que se puede representar de la siguiente forma:

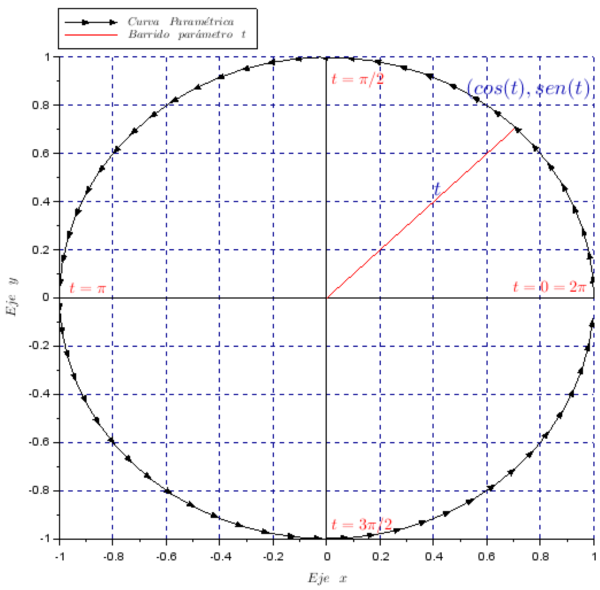


Figura. 3 Curva paramétrica para el ejemplo 2.

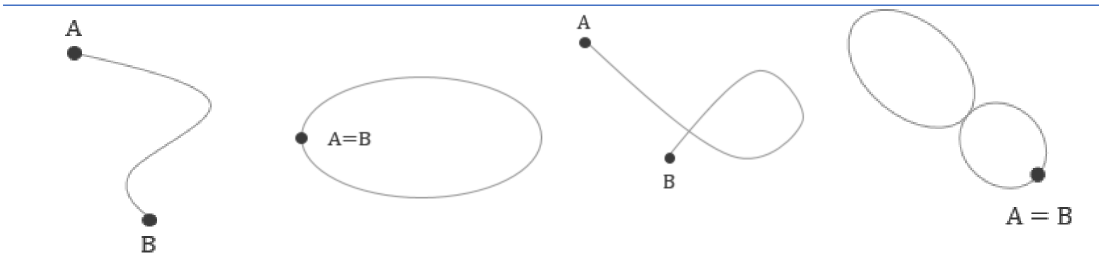
Es una ecuación de la forma: $x^2 + y^2 = cos^2(t) + sen^2(t) = 1$

> La coordenada (x, y) se mueve sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, en este ejemplo el valor que toma t es el ángulo, en radianes, que se va desplazando en la figura 3, en sentido anti horario desde el punto $x = 1$ y $y = 0$ hasta el volver al mismo punto de forma cíclica.

Nota:

Los ejemplos anteriores se han restringido por un intervalo cerrado $[a, b]$, aquí los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$ se conocen como **punto inicial** y **punto final** de la curva **C**, respectivamente. Si los puntos inicial y final coinciden, se dice que la curva es **cerrada**. Si la curva no se cruza a sí misma, se dice que es **simple**.

En la siguiente figura se ilustran diferentes tipos de curvas planas.



Simple, no cerrada	Simple, cerrada	No simple, no cerrada	No simple, cerrada

Figura 4. Algunos tipos de curvas planas.

Si se quiere obtener una ecuación de la curva en las variables x y y, por ejemplo, para reconocer el tipo de curva, es necesario **eliminar el parámetro**. No hay una forma única de eliminar el parámetro, en algunos casos se puede **despejar t** de una ecuación y sustituir en la otra, mientras que en otros casos puede ser útil aplicar una **identidad trigonométrica,** como se denotó en los ejemplos dados.

Ejercicios para profundizar

Realiza una gráfica la curva usando ecuaciones paramétricas y determina su orientación:

- $x = t^2 - 3t, y = 4t - t^2, -3 \leqslant t \leqslant 3.$
- $x = 2 - \cos(t), y = sen^2(t),\ 0 \leqslant t \leqslant {}^{\pi}/_{2}.$

Traza la curva y luego elimine el parámetro t para determinar una ecuación cartesiana.

- $x = e^t + 2, x = e^{3t}.$
- $x = \frac{1}{2}\cos(t), y = 2sen(t), 0 \leqslant t \leqslant \pi.$

1.3. Secciones cónicas

Son intersecciones de un plano con un cono recto circular doble. Dependiendo del ángulo de corte y la posición del seccionamiento se originan tres arquetipos: elipses, parábolas e hipérbolas (Marsden y Tromba, 1991). La circunferencia no es una tipología fundamental y se enmarca en la sección elipse.

En el siguiente enlace podrás interactuar sobre el plano e identificar de forma dinámica cada una de las secciones. Para ello debe considerar que las intersecciones no pasan por los vértices del cono.

Accede a GeoGebra a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web:

https://www.geogebra.org/m/wGmmF2dm

Parábola

Una **parábola** es el conjunto de puntos del plano que son **equidistantes** de una línea fija llamada **directriz** y un punto fijo llamado **foco**. La línea que es perpendicular a la directriz y pasa por el foco, se denomina **eje** de simetría. El punto de intersección de la parábola con su eje es el **vértice.**

En la figura 5 se presenta una parábola con foco $\boldsymbol{F(0,p)}$ y directriz $\boldsymbol{y = -p}$. El eje de la parábola es el **eje y**, mientras que el vértice es $\boldsymbol{V(0,0)}$.

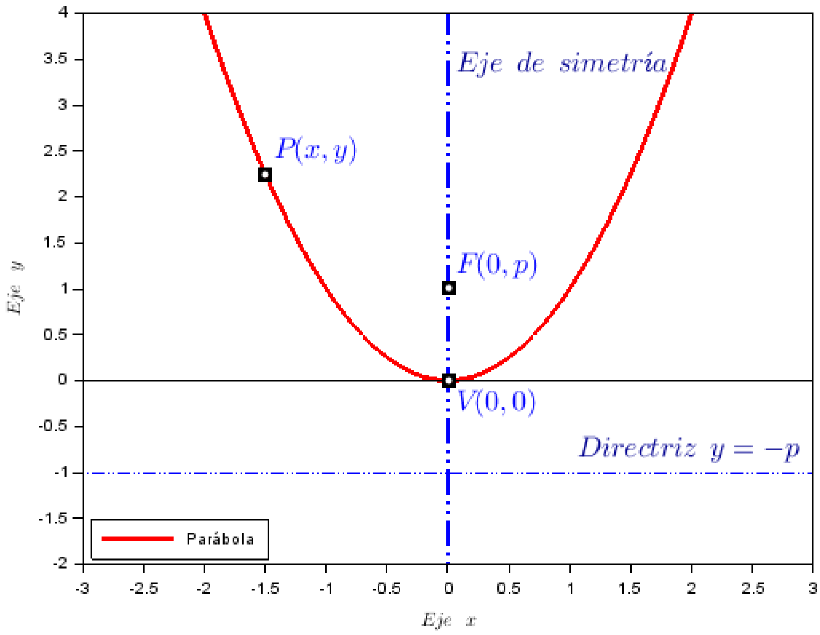


Figura 5. Parábola con foco $F(0,p)$ y directriz $y = -p$.

De acuerdo con la definición, un punto cualquiera $P(x,y)$ de la parábola, equidista del foco $F(0,p)$ y de la directriz $y = -p$, por lo cual puede escribirse bajo el siguiente modelo:

$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k) \rightarrow Paralelo\ al\ eje\ y \qquad (1)$$

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h) \rightarrow Paralelo\ al\ eje\ x \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son la forma **estándar** para una parábola, donde el vértice está definido por $V(h,k)$ y la distancia equidistante que hay entre el vértice (como punto central) y el foco y la directriz definida por $4p$.

El signo positivo será para una curva que sea cóncava hacia arriba (el foco se encuentra por encima / a la derecha del vértice y de la directriz – ecuación 1) y en caso contrario será negativa la ecuación si la parábola es cóncava hacia abajo (el foco está por debajo / a la izquierda de la directriz y del vértice – ecuación 2). Cada modelo depende de cuál eje del plano se use como referencia:

- Si el eje de simetría de la parábola es paralelo al $eje\ y$ o es el $eje\ y$, se usa la forma estándar – Ecuación (1).
- Si el eje de simetría de la parábola es paralelo al $eje\ x$ o es el $eje\ x$, se usa la forma estándar – Ecuación (2).

Ejemplo 3. Halla la ecuación estándar y **general** de la parábola con vértice $V(2,2)$ y foco $F(2,4)$ trazando una gráfica como ayuda para su resolución.

Solución: ubicar los puntos (vértice y foco) en el plano cartesiano:

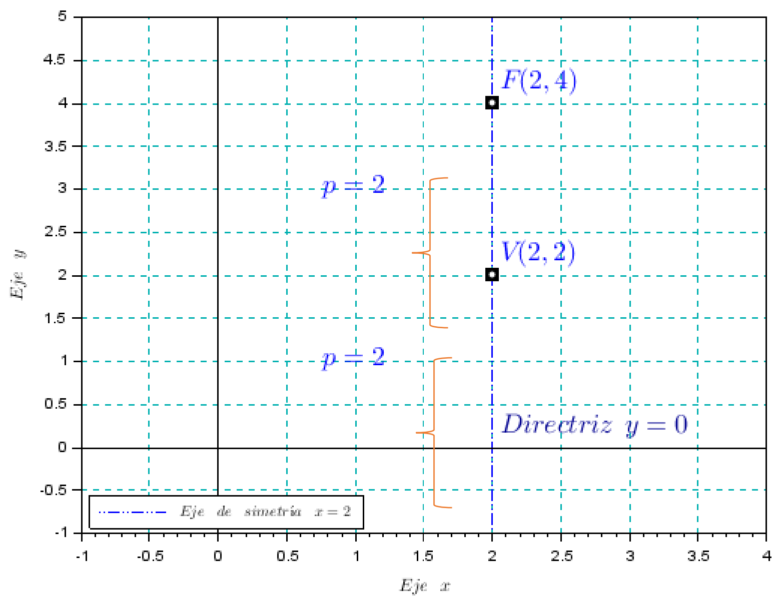


Figura 6. Vértice, foco, directriz y eje de simetría – Ejemplo 3.

De la figura 6 podemos deducir que:

- La distancia entre el vértice y el foco es de $2\ unidades$, es decir que $p = 2$, por ser equidistante entonces la directriz es el segmento de recta $y = 0$.
- El eje de simetría se encuentra a $90°$ respecto a la directriz y pasa por los puntos: vértice y foco, es el segmento de recta $x = 2$.
- Siguiendo el modelo de la ecuación estándar para una parábola, podemos observar que el foco está por encima del vértice, esto indica que la gráfica es cóncava hacia arriba, por lo tanto, la ecuación toma signo positivo: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.
- Podemos determinar el **lado recto** de la gráfica, el cual pasa por el foco, es paralelo a la directriz y perpendicular al eje de simetría: su longitud está determinada a partir de la ecuación estándar: $Longitud = l = 4p = 4(2) = 8\ unidades$ repartidas de forma equidistante desde el foco. Este segmento de recta queda representado de la siguiente forma:

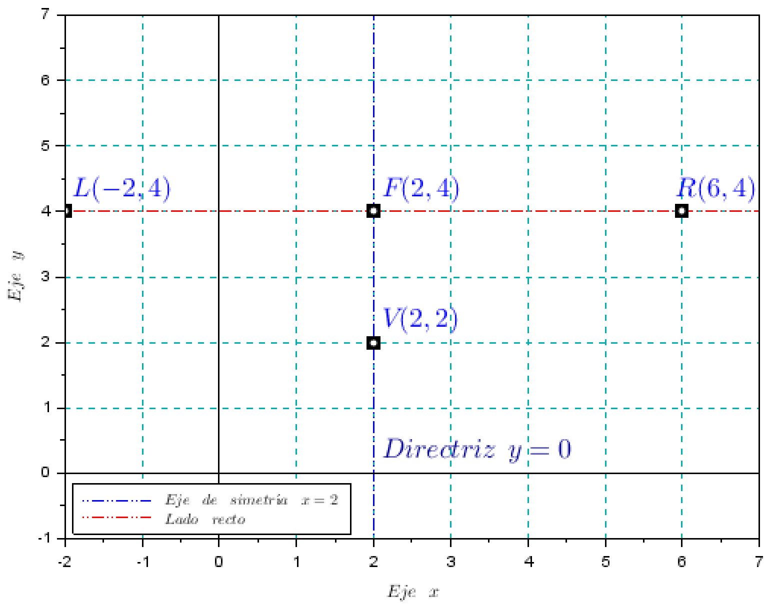


Figura 7. Ubicación de puntos equidistantes al foco para trazado de la parábola del ejemplo 3.

Los dos puntos del **lado recto** por donde pasa la curva se determinan a partir de la coordenada del foco:

- Coordenada izquierda: $L\left(2 - \frac{l}{2}, 4\right) = L\left(2 - \frac{8}{2}, 4\right) = L(-2,4)$.
- Coordenada derecha: $L\left(2 + \frac{l}{2}, 4\right) = L\left(2 + \frac{8}{2}, 4\right) = L(6,4)$.

- Por último, se define la ecuación general de la parábola a partir de la ecuación estándar:

El vértice de la gráfica está en punto del plano $V(2,2)$, según el modelo $V(h,k)$ se puede encontrar los valores tanto para h como para k de la siguiente manera: $h = 2$ y $k = 2$. Por lo tanto, la **ecuación estándar** queda determinada por el siguiente modelo: $(x-2)^2 = 4(2)(y-2)$.

Teniendo ya la ecuación definida se procede a ejecutar factorizaciones a la misma: $x^2 - 4x + 4 = 8y - 16$ luego se iguala a cero la ecuación: $x^2 - 4x - 8y + 20 = 0$ y queda defina la **ecuación general** de la parábola.

La parábola queda trazada en la siguiente imagen:

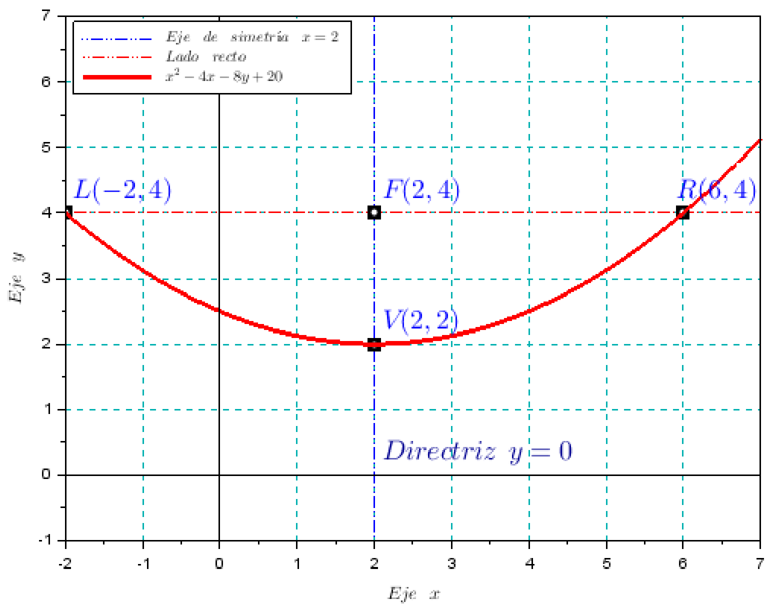


Figura 8. Parábola del ejemplo 3.

Ejemplo 4. Determina el vértice, el foco, la distancia p, concavidad y la forma estándar de la siguiente ecuación general: $3x^2 + 75 + 36y + 6x = 0$.

Solución: en primer lugar se organizar los elementos de la ecuación para determinar qué tipo de factorización se debe aplicar: $3x^2 + 6x + 36y + 75 = 0$, luego es necesario establecer que el coeficiente que acompaña al elemento de mayor grado «$3x^2$» debe ser igual a 1, para ello dividimos la ecuación entre 3 y queda de la siguiente forma: $x^2 + 2x + 12y + 25 = 0$, luego se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2x + 1 =$

$-12y - 25 + 1 \rightarrow$ y queda definida la ecuación estándar: $(x+1)^2 = -12(y+2)$, donde:

- Coordenada del vértice: $h = 1$ y $k = 2 \rightarrow V(1,2)$.
- Distancia equidistante p: $4p = 12 \rightarrow p = 3$.
- Coordenada del foco: como el signo de la ecuación estándar es negativo el foco queda por debajo del vértice: $F(1,2-p) \rightarrow F(1,2-3) \rightarrow F(1,-1)$; por ende, la parábola queda definida como cóncava hacia abajo.

*Queda a consideración del estudiante bosquejar la gráfica del ejemplo dado.

Ejemplo 5. Determina la ecuación general de la parábola con $F(0,-2)$ y directriz $x = -2$.

Solución: se ubican los puntos dados en el plano para determinar el vértice y el eje de simetría:

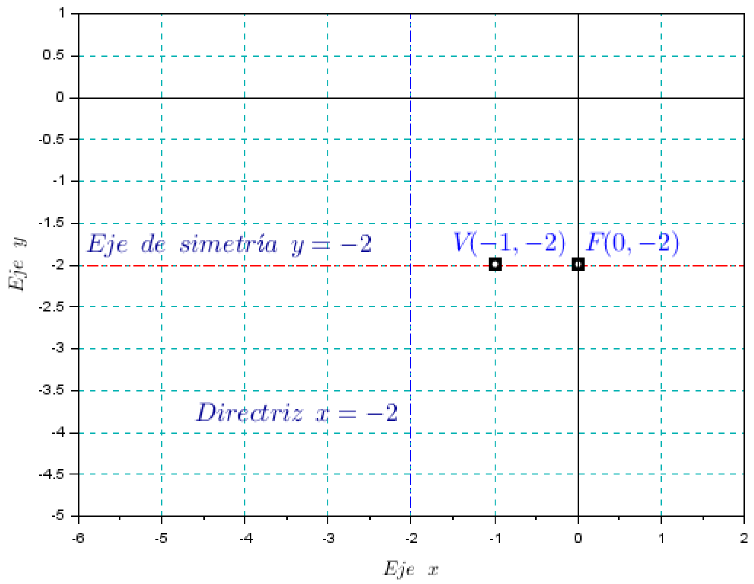


Figura 9. Ubicación de directriz y foco del ejemplo 4.

Sabiendo de antemano que el vértice está equidistante al foco y a la directriz, se deduce que este punto se encuentra en el punto intermedio $V(-1,-2)$, a su vez el eje de simetría se ubica perpendicular a la directriz y pasa por los puntos vértice y foco, es decir el segmento de recta $y = -2$, la distancia $p = 1$, ya que es la longitud que equidista entre el vértice y el foco o la directriz.

Ahora siguiendo el modelo de **ecuación estándar** $(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$, se determinar la concavidad de la curva, sabiendo que la función se traza en simétrica al $eje\ x$, el foco está a la derecha del vértice y de la directriz, la parábola entonces es cóncava hacia arriba.

Luego, se reemplaza la coordenada del vértice en la ecuación: $(y+2)^2 = 4(1)(x+1)$. Despejando e igualando a cero se halla la ecuación general del ejemplo planteado: $y^2 + 4y - 4x = 0$.

La gráfica dibujada se puede observar en la figura 9:

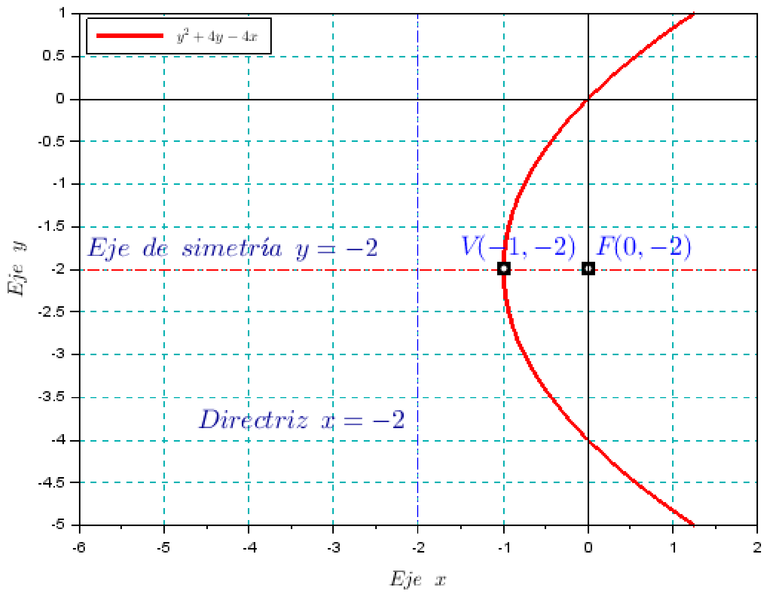


Figura 10. Parábola del ejemplo 4.

Ejercicios para profundizar

Encuentra la ecuación general o estándar ubicando el vértice, foco, concavidad, distancia p, directriz y eje de simetría en un plano cartesiano:

- Parábola con directriz $y = 2$, foco $F(3,-2)$.
- Parábola con Vértice $V(-4,2)$ y foco $F(-4,-1)$.
- $(x+2)^2 = 5(y-4)$.
- $4x^2 + 16x - 2y + 5 = 0$.

Elipse

Esta sección cónica es un conjunto de puntos del plano tales que la **suma** de las distancias a dos puntos fijos denominados **focos**, es constante. El punto medio del segmento de recta que une a los focos, se llama **centro** de la elipse. En la figura 10 se presenta una elipse con centro $\boldsymbol{C(h,k)}$ y focos $\boldsymbol{F_1(h-c,k)}$ y $\boldsymbol{F_2(h+c,k)}$.

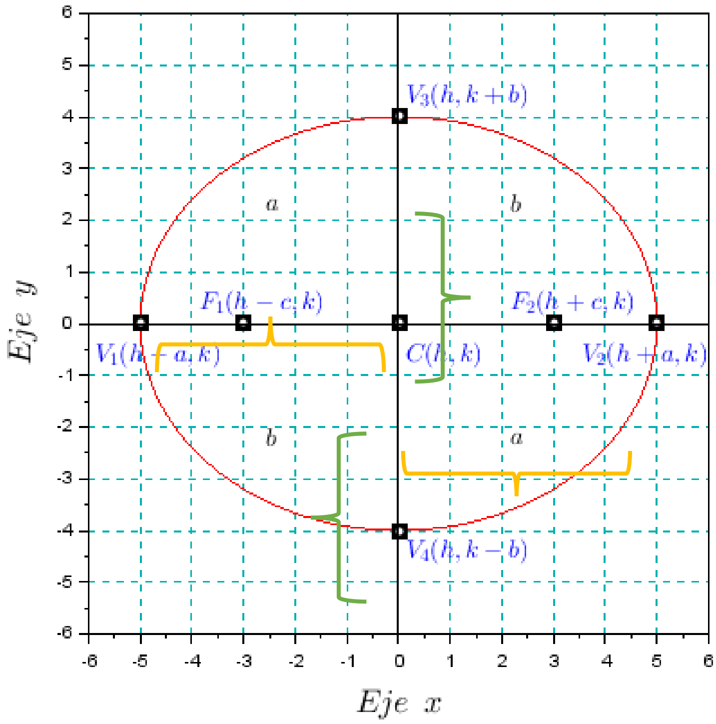


Figura 11. Modelo general de una elipse.

Como se puede apreciar en la gráfica, hay más coordenadas que tener en cuenta, para lo que seguimos el modelo de la ecuación estándar de una elipse:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

En esta **ecuación** se asume $a \geq b > 0$ y $c^2 = a^2 - b^2$. La elipse representada por esta ecuación tiene eje mayor horizontal y eje menor vertical.

Donde:

- El valor de c es la distancia equidistante entre el centro y los focos y se determina aplicando la siguiente ecuación pitagórica: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
- El **vértice 1**: $V_1(h-a,k)$ y el **vértice 2**: $V_2(h+a,k)$ pasan por el segmento de recta del centro y los focos, llamado **eje mayor** de longitud $2a$, limitan el trazo de la gráfica.
- De forma perpendicular se tiene el **vértice 3**: $V_3(h,k+b)$ y **vértice 4** $V_4(h,k-b)$ que también son la frontera de la gráfica y conforman el eje menor de la elipse, este de longitud $2b$.
- Si $a^2 > b^2$ la elipse tiene orientación horizontal.
- Si $a^2 < b^2$ la elipse tiene orientación vertical.

Ejemplo 6. Determina el centro, los focos y los vértices de la elipse definida por la ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$. Traza la gráfica.

Solución: para obtener la ecuación en forma estándar, se dividen ambos lados de la igualdad entre 144 y se simplifica:

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}.$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{(x-0)^2}{16} + \frac{(y-0)^2}{9} = 1$$

Se tiene entonces que:

- El centro está en la coordenada $C(0,0)$
- $16 = a^2 \rightarrow a = 4$
- $9 = b^2 \rightarrow b = 3$
- $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \approx 2{,}64.$

Focos:

- $F_1(0-\sqrt{7},0) \rightarrow F_1(-\sqrt{7},0)$
- $F_2(0+\sqrt{7},0) \rightarrow F_2(\sqrt{7},0)$

Vértices:

- $V_1(h-a,k) \rightarrow V_1(0-4{,}0) \rightarrow V_1(-4{,}0)$
- $V_2(h+a,k) \rightarrow V_2(0+4{,}0) \rightarrow V_2(4{,}0)$

- $V_3(h, k+b) \rightarrow V_3(0,0+3) \rightarrow V_3(0,3)$
- $V_4(h, k-b) \rightarrow V_1(0,0-3) \rightarrow V_4(0,-3)$

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la elipse y se identifican los ejes mayor y menor.

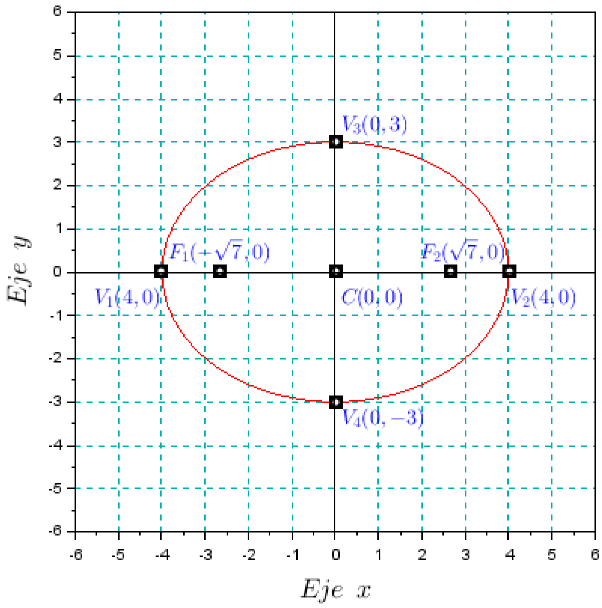


Figura 12. Elipse del ejemplo 6.

Ejercicio 1. ¿Cuál es la longitud del eje mayor de la elipse de la figura anterior? ¿Y la longitud del eje menor? ¿Qué segmento de recta representan?

La forma estándar de la ecuación de una elipse con centro en $C(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y focos $F_1(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{c})$ y $F_2(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} + \boldsymbol{c})$, se presenta a continuación:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad (4)$$

En la **ecuación (4)** se asume $a \geq b > 0$ y $c^2 = a^2 - b^2$. La elipse representada por esta ecuación tiene eje mayor vertical y eje menor horizontal.

Ejemplo 7. Halla la ecuación de la elipse que se presenta a continuación.

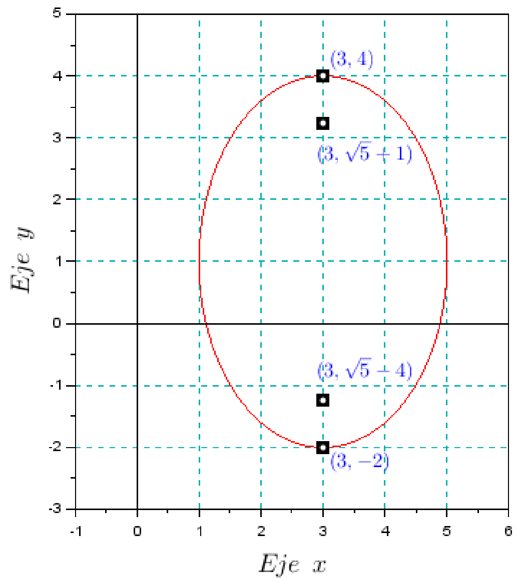


Figura 13. Elipse del ejemplo 4.

Solución: considerando que la elipse tiene eje mayor vertical, la forma estándar de la ecuación es la siguiente:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Dado que los vértices tienen coordenadas $V_1(h,k+\ a) \rightarrow V_1(3,4)$ y $V_2(h,k\ -a) \rightarrow V_2(3,-2)$, el valor de a puede obtenerse directamente de la gráfica, la distancia entre los vértices del eje mayor es igual a $6\ unidades \rightarrow 2a$, entonces $a\ =\ 3$, por ende el centro de la elipse está en el punto $C(3,1)$.

Los vértices del eje menor están en las coordenadas $V_3(1,1)$ y $V_4(5,1)$, la distancia entre los vértices del eje menor da como resultado $4\ unidades\ \rightarrow 2b$, entonces $b=2$.

Así que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

Dado que los focos tienen coordenadas $F_1(h,k+c) \rightarrow F_1(3,\sqrt{5}+1)$ y $F_2(h,k-c) \rightarrow F_2(3,\sqrt{5}-4)$, el valor de c coincide con el calculado de forma simétrica desde el centro de la elipse. Despejando de la ecuación estándar:

$$\frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

Ejemplo 8. Ubica los focos, los vértices, eje mayor y menor y trace la elipse de la siguiente ecuación: $x^2+5y^2-6x-20y+19=0$

Solución: en primera instancia se debe determinar la forma general a partir de la ecuación dada:

Factorizando:

$$(x^2-6x+9)+5(y^2-4y+4)=-19+9+20$$
$$(x-3)^2+5(y-2)^2=10 \rightarrow \frac{(x-3)^2}{10}+\frac{5(y-2)^2}{10}=\frac{10}{10}$$
$$\frac{(x-3)^2}{10}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$$

Dado que:

$$a^2=(\sqrt{10})^2 \rightarrow a^2=10$$
$$b^2=(\sqrt{2})^2 \rightarrow b^2=2$$

Y que $a>b>0$ se determina que la elipse tiene orientación horizontal. Se halla $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{10-2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Entonces las coordenadas para trazar la gráfica son las siguientes:

- Centro: $C(3,2)$.
- Vértices: $V_1(3-\sqrt{10},2)$, $V_2(3+\sqrt{10},2)$, $V_3(3,2+\sqrt{2})$, $V_2(3,2-\sqrt{2})$.
- Focos: $F_1(3-2\sqrt{2},2)$ y $F_2(3+2\sqrt{2},2)$.

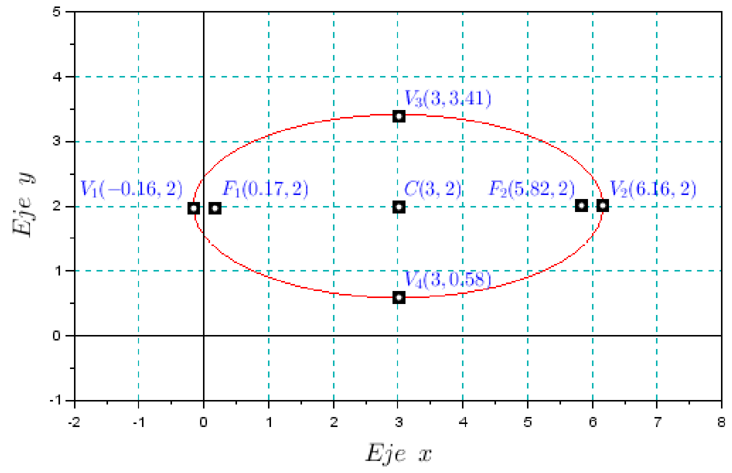


Figura 14. Elipse ejemplo 8.

- El eje mayor se encuentra entre el V_1 y V_2.
- El eje menor se encuentra entre V_3 y V_4.

Ejercicios para profundizar

- **Ejercicio 2**. Determina la longitud del eje mayor y del eje menor de la elipse definida por $9x^2 + 25y^2 = 225$
- **Ejercicio 3**. Traza la gráfica de la elipse definida por $9x^2 + 2y^2 = 18$. Señale sobre la gráfica el centro, los focos y los vértices.
- **Ejercicio 4**. Halla los puntos frontera del eje mayor y del eje menor de la elipse definida por $4x^2 + 2y^2 = 8$.
- **Ejercicio 5**. Muestra que la ecuación de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio r es un caso especial de la elipse.

Hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos del plano tales que la **diferencia** entre las distancias a dos puntos fijos denominados **focos,** es constante. El punto medio del segmento de recta que une a los focos, se llama **centro** de la hipérbola.

En la **figura 9** se presenta una hipérbola con **centro** $\boldsymbol{C(h,k)}$, focos $\boldsymbol{F_1\ (h-c,k)}$ y $\boldsymbol{F_2(h+c,k)}$ y vértices $\boldsymbol{V_1\ (h-a,k)}$ **y** $\boldsymbol{V_2\ (h-a,k)}$**.**

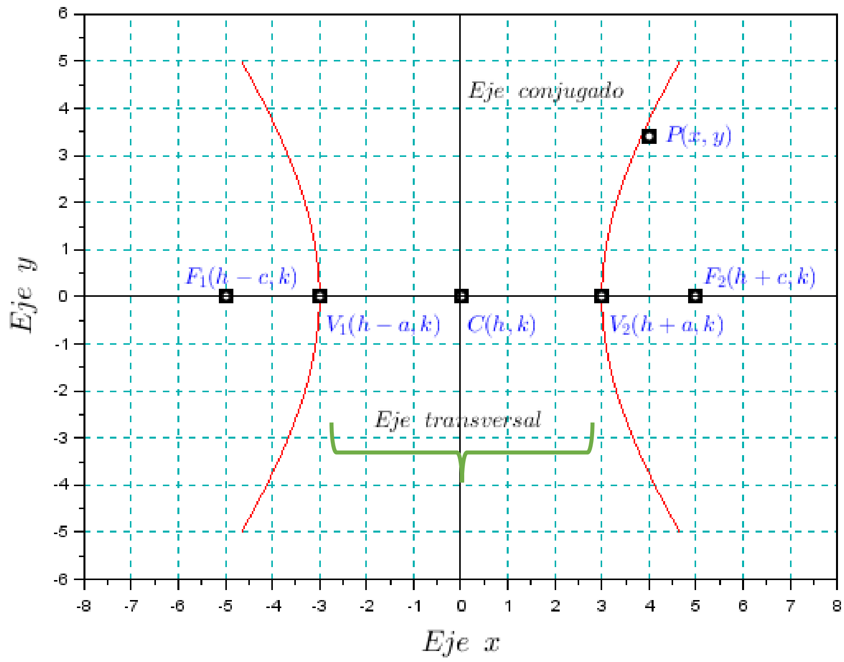


Figura 15. Hipérbola.

De acuerdo con la definición, para un punto cualquiera $P(x,y)$ sobre la hipérbola se cumple que $|\boldsymbol{d(P,F_1)-d(P,F_2)}|=\boldsymbol{k}$. Por conveniencia, en el desarrollo que sigue se asumirá que $\boldsymbol{k=2a}$.

El segmento de recta que pasa por el centro de la hipérbola tiene como puntos de frontera los vértices $V_1(h-a,k)$ y $V_2(h+a,k)$, se conoce como **eje transversal**. La longitud del eje transversal es $\boldsymbol{2a}$**.**

El segmento de recta que pasa por el centro de la hipérbola es perpendicular al eje transversal y tiene como puntos frontera $(h,k+b)$ y $(h,k-b)$ se conoce como **eje conjugado**. La longitud del eje conjugado es $\boldsymbol{2b}$.

La forma estándar de la ecuación de una hipérbola se presenta a continuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

En la **ecuación (5)** c se obtiene a partir de $c^2 = b^2 + a^2$. La hipérbola representada por esta ecuación tiene dos ramas y su eje transversal está sobre el eje x.

Es conveniente dibujar las asíntotas (rectas segmentadas) que se pueden hallar usando el siguiente modelo: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$: una línea decreciente y la otra creciente que sirven como referencia para trazar las dos ramas que conforman la hipérbola.

Ejemplo 9. Determine la ecuación general de la siguiente hipérbola:

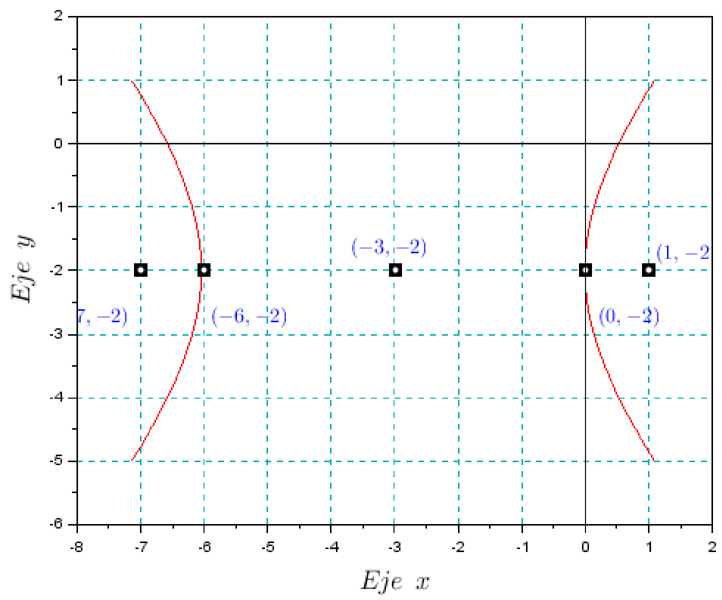


Figura 16. Hipérbola del ejemplo 5.

Solución. De acuerdo con la gráfica el centro está en la coordenada $C(-3,-2)$, los vértices en $V_1(-6,-2)$ y $V_2(0,-2)$, los focos en $F_1(-7,-2)$ y $F_2(1,-2)$, entonces por definición se obtiene:

- El eje transversal es un segmento de $6\ unidades$ lo que equivale a $2a$ entonces $a = 3$.
- El segmento entre los focos tiene un valor de $8\ unidades = 2c \rightarrow c = 4$.
- Con la ecuación $b^2 = c^2 - a^2$, se puede obtener $b = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.

La ecuación en forma estándar de la parábola es la siguiente:

$$\frac{(x+3)^2}{3^2} - \frac{(y+2)^2}{\sqrt{7}^2} = 1 \rightarrow \frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{7} = 1$$

Como se puede notar es una ecuación que a diferencia de la elipse una de las dos variables es **negativa**.

Las asíntotas de la hipérbola se determinan usando el modelo estándar:

$$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h) \rightarrow y + 2 = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}(x+3)$$

- $y = \frac{3}{\sqrt{7}}(x+3) - 2$.
- $y = -\frac{3}{\sqrt{7}}(x+3) - 2$.

La gráfica queda de la siguiente forma:

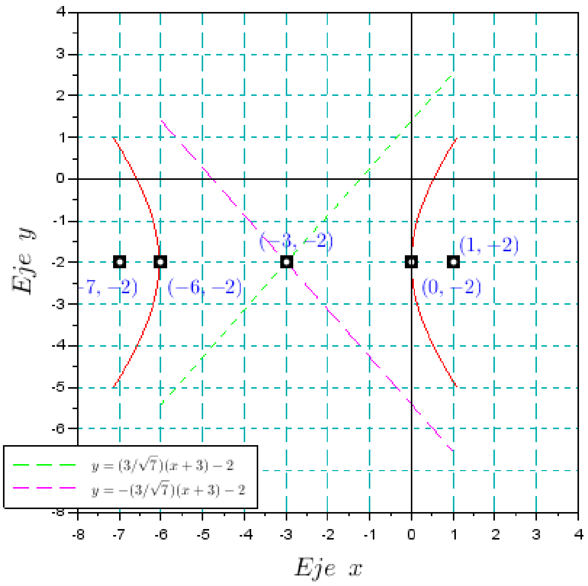


Figura 17. Hipérbola del ejemplo 5 con asíntotas.

La forma estándar de la ecuación de una hipérbola con centro en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y focos $F_1(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{c})$ y $F_2(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}+\boldsymbol{c})$, se presenta a continuación:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

En la **ecuación (6)** c se obtiene a partir de $b^2 = c^2 - a^2$. La hipérbola representada por esta ecuación tiene dos ramas y su eje transversal está sobre el eje y.

Ejemplo 10. Determina la ecuación estándar de la hipérbola con focos en $(0, -4)$ y $(0, 4)$ y vértices en $(0, -2)$ y $(0, 2)$. Traza la gráfica.

Solución: de la información dada: el centro está en punto $C(0,0)$, para los focos y los vértices se concluye que $c = 4$ y $a = 2$. Para encontrar el valor de b, se remplaza en la ecuación $b^2 = c^2 - a^2$, de donde $b = 2\sqrt{3}$.

La ecuación en forma estándar de la hipérbola con eje transversal sobre el eje y, es la siguiente:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{x-h)^2}{b^2}=1$$

Por lo cual, remplazando los valores de h,k, a y b, se obtiene:

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$$

Las asíntotas son las siguientes:

- $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$
- $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$

La gráfica de la hipérbola se muestra a continuación:

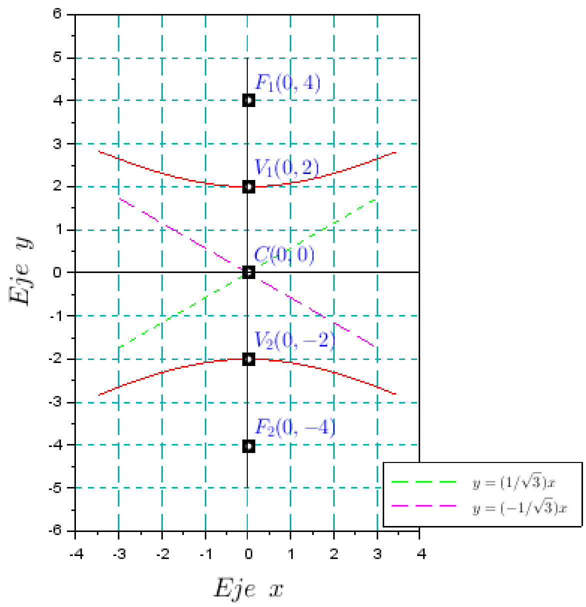


Figura 18. Hipérbola del ejemplo 10.

Ejercicios para profundizar

- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos frontera del eje conjugado de la hipérbola del ejemplo 6? ¿Cuál es la longitud de dicho eje?

- **Ejercicio 6**. La excentricidad de una elipse y una hipérbola se calcula mediante la ecuación $e = c/a$. Calcule la excentricidad de las hipérbolas de los ejemplos 9 y 10. ¿Qué es la excentricidad en una sección cónica?

1.4. Coordenadas polares

En el sistema cartesiano se trazan gráficas a partir de dos ejes perpendiculares, generalmente x y y, pero pueden tomar otras notaciones. Cada punto de esa gráfica, una función, se sitúa en un plano mediante un par ordenado de números llamados coordenadas. En esta sección se describe otro sistema práctico para muchas finalidades denominado **sistema de coordenadas polares.**

En este se ubica un punto en el plano llamado origen $\boldsymbol{O}$, desde esta coordenada se traza un vector en dirección oriente (en coordenadas cartesianas el semieje positivo de x) llamado **eje polar,** ahora bien, situando otro punto $\boldsymbol{P}$ en cualquier parte del plano y la distancia r de $\boldsymbol{O}$ a $\boldsymbol{P}$**,** el ángulo, dado en radianes, se encuentra entre la recta $\boldsymbol{OP}$ y el **eje polar.** Luego el par ordenado del punto $\boldsymbol{P}$ se simboliza como $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta})$; entonces $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\theta}$ son **coordenadas polares** del punto $\boldsymbol{P}$**.** Ahora, teniendo en cuenta como referencia el **eje polar,** el ángulo será positivo si hay un desplazamiento en sentido anti horario y será negativo si va en sentido horario.

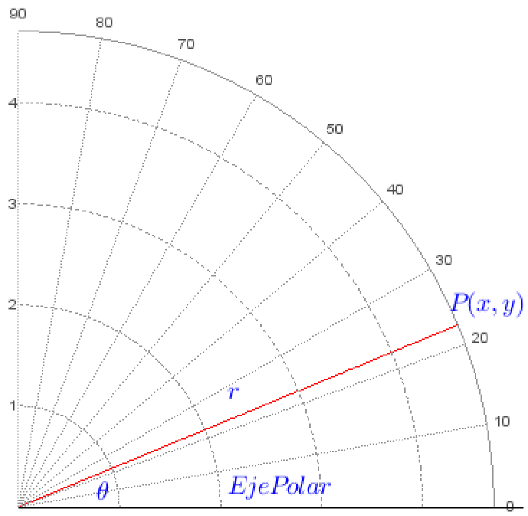


Figura 19. Recta OP desde el origen O y ángulo θ.

Las coordenadas (r,θ) y $(-r,\theta)$ son rectas que pasan por el origen $\boldsymbol{O}$ de la misma magnitud $|r|$ pero en sentidos diferentes. Entonces si $r > 0$ la coordenada (r,θ) se conserva en el mismo cuadrante, sin embargo, si $r < 0$ el eje para ordenado estará en el cuadrante opuesto, por ende, $(-r,\theta) \rightarrow (r,\theta+\pi)$.

Realiza una gráfica de cada uno para ordenador:

Ejemplo 11. $(2, {}^{\pi}/_{3})$

Solución:

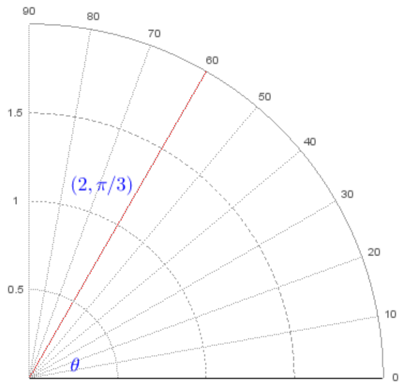


Figura 20. Gráfica de ejemplo 11.

Ejemplo 12. $(3, -{}^{\pi}/_{4})$

Solución:

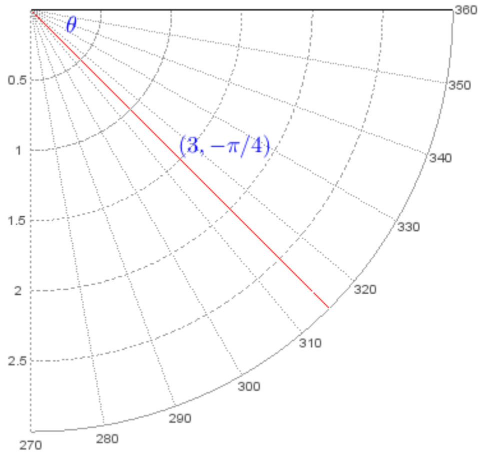


Figura. 21. Gráfica de ejemplo 12.

Ejemplo 13. $(-2, {}^{2\pi}/_{3}) \rightarrow (2, {}^{2\pi}/_{3} + \pi) \rightarrow (2, {}^{5\pi}/_{3})$

Solución:

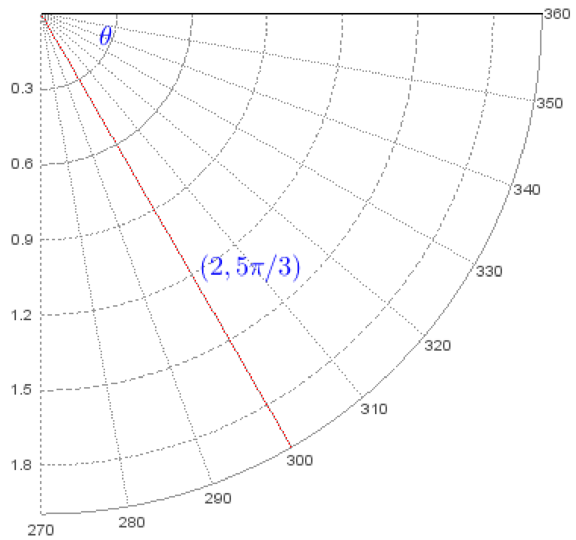


Figura 22. Gráfica de ejemplo 13.

Ejercicio: realiza una gráfica en coordenadas polares $(-2, {}^{\pi}/_{2})$.

Ejercicio: realiza una gráfica en coordenadas polares $\left(3, -{}^{5\pi}/_{6}\right)$.

$Polares \leftrightarrow Cartesianas$

Para pasar de un sistema de coordenadas a otro y viceversa se hace alusión a la siguiente figura:

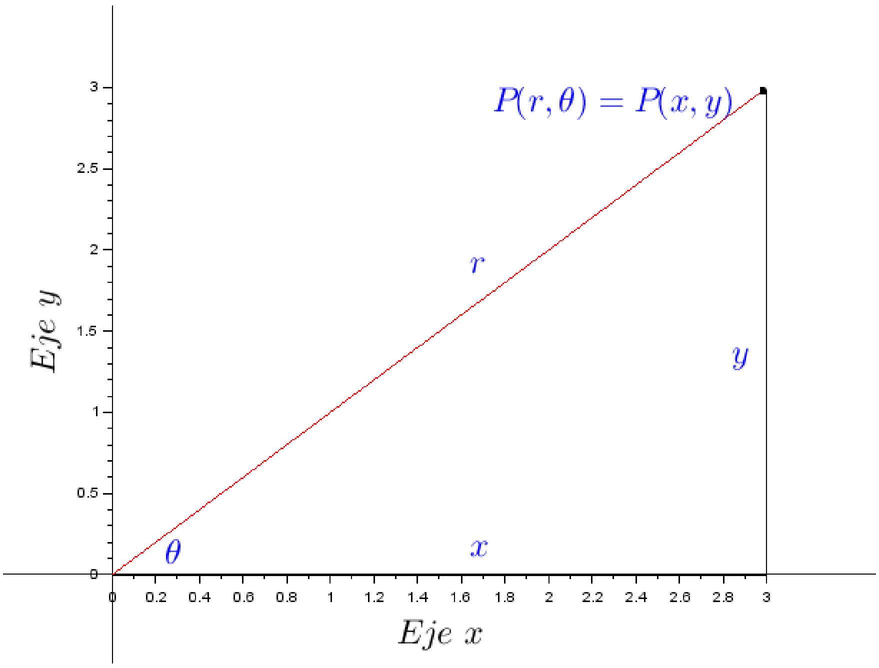


Figura 23. Esquema para convertir coordenadas polares a cartesianas y viceversa.

La coordenada P en coordenadas cartesianas es (x, y) y en polares es (r, θ). Según la anterior figura se puede deducir que:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$$

Entonces:

$$x = r\,cos(\theta) \qquad y = r\,sen(\theta)$$

La cuales son ecuaciones para convertir coordenadas del plano cartesiano al polar. Ahora bien, se sigue usando la figura 18 para determinar la conversión de coordenadas polares a cartesianas.

Se tiene que:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad\qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x} \to \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \theta$$

Ejemplo 14. Realiza la conversión del punto $(3, {}^{2\pi}/_{7})$ de coordenadas polares a cartesianas.

Solución: $r = 3$ y $\theta = {}^{2\pi}/_{7}$ y según las ecuaciones modelo:

- $x = r\,cos(\theta) \to 3\cos({}^{2\pi}/_{7}) \approx 1.87.$
- $y = r\,sen(\theta) \to 3\,\mathrm{sen}({}^{2\pi}/_{7}) \approx 2.34.$

Análogamente, el punto polar $(3, {}^{2\pi}/_{7})$ es aproximadamente igual a $(1.87, 2.34)$.

Ejemplo 15. Realiza la conversión del punto $(-2, 1)$ de coordenadas cartesianas a polares.

Solución: aplicando las ecuaciones modelo:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$
- $\tan(\theta) = \frac{y}{x} \to \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta \approx -0.46.$

En coordenadas polares: $(\sqrt{5}, -0.46)$.

Ejercicios para profundizar

Ejercicio. Convierte de coordenadas polares a cartesianas el siguiente punto: $(-4, {}^{3\pi}/_{5})$.

Ejercicio. Convierte de coordenadas cartesianas a polares el siguiente punto: $(\sqrt{2}, -5)$.

1.5. Referencias bibliográficas

Enterprises, S. (2019). Scilab. Versión 6.0.2.

Marsden, J. E. y Tromba, A. (1991). *Cálculo vectorial* (Manuel López Mateos, trad). Wilmington, Delaware: Adisson-Wesley Iberoamericana.

Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). *Cálculo*. Novena edición. PEARSON EDUCACIÓN.

Zill. D. y Wright, W. (2011). *Cálculo de varias variables*. Cuarta edición. McGraw Hill Educación.

A fondo

Curvas interesantes en matemáticas: curvas de Bézier

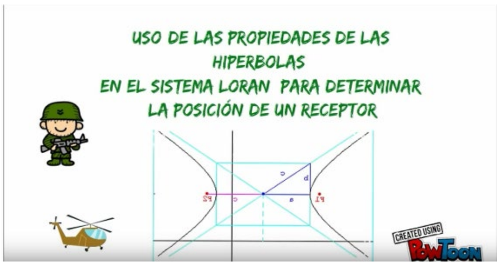
Mendoza, M. J. (septiembre, 2011). Curvas interesantes en matemáticas: curvas de Bézier. *Temas para la educación* (revista digital para profesionales de la enseñanza). Recuperado de: https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd8625.pdf

Este tipo de curvas contribuyen al modelado de formas suaves en la representación de objetos o personas en tres dimensiones utilizando *software* de tipo CAD que permite que las visualizaciones de dichas formas sean mucho más realistas y eficientes. Por ejemplo, en diseños automotrices, específicamente las carrocerías de los coches, las superficies son cada vez más aerodinámicas y la interacción con el aire (fricción) se ha venido modelando con el fin de reducir este índice al mínimo posible.

Aplicación de las hipérbolas en el sistema LORAN

George Alama Quiroz (octubre, 2019). Aplicación de las hipérbolas en el sistema LORAN. Recuperado de: https://youtu.be/uxNMPhXx2XI

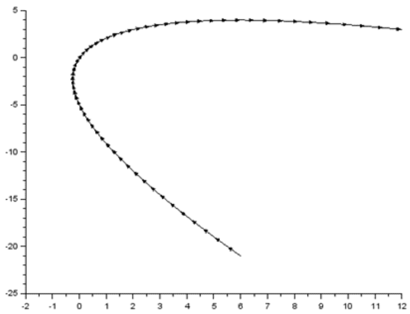
Saber la ubicación de un lugar o simplemente buscar una ruta para llegar a un destino se convirtió en un hábito en esta era moderna, gracias al Sistema de Posicionamiento Satelital, profundamente desarrollado, que nos brinda una gran precisión, generalmente en $\pm 10\ m$ con una buena recepción de señal. Sin embargo, antes de que este entrara en auge, en navegación marítima era muy frecuente (y aún se utiliza después de la evolución a versiones más sofisticadas y confiables), se empleaba un sistema de navegación hiperbólico *LORAN (Long Range Navigation)* desarrollado en la Segunda Guerra Mundial, el rango de tiempo transcurrido entre la recepción de señales transmitidas desde varios emisores que permiten establecer la posición de un receptor.



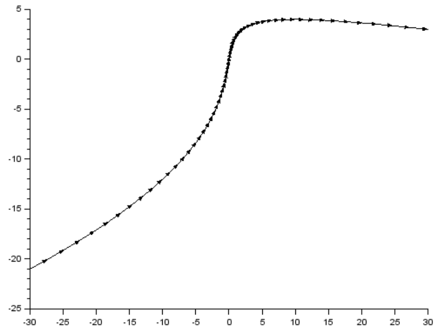
Test

1. ¿Cuál orientación de la función paramétrica dada por las siguientes ecuaciones: $x = t^2 + t,\ y = 4t - t^2,\ -3 \leqslant t \leqslant 3$?

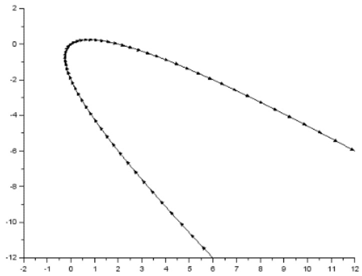
   A.

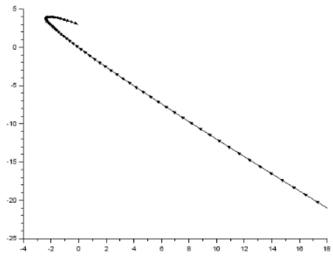
   B.

   C.

   D.

2. Al eliminar el parámetro t de las siguientes ecuaciones $x = e^{5t}$ y $y = e^t + 5$ da como resultado:

   A. $x = (5 - y)^2$.

   B. $x = (y - 5)^2$.

   C. $x = y - 5$.

   D. $x = (y + 5)^2$.

3. La siguiente ecuación general de la parábola $y^2 - 6y - 5x - 1 = 0$ tiene las siguientes características:

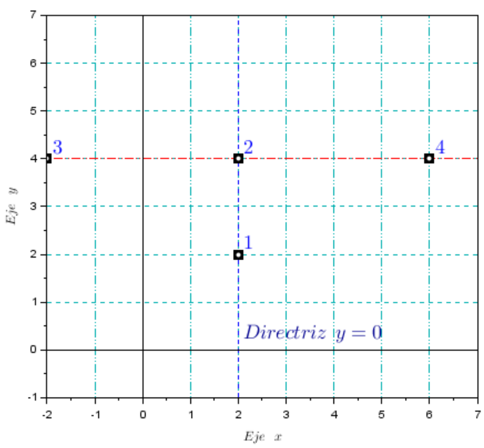
A. $V(-2,3)$, $Eje\ de\ simetría\ \rightarrow x = 3$ y directriz perpendicular al eje de simetría.

B. $V(2,-3)$, $Eje\ de\ simetría\ \rightarrow x = 3$ y foco en $(-\frac{3}{4}, 3)$.

C. $V(-6,-5)$, $Eje\ de\ simetría\ \rightarrow y = 3$ y directriz perpendicular al eje de simetría.

D. $V(-2,3)$, $Eje\ de\ simetría\ \rightarrow y = 3$ y foco en $(-\frac{3}{4}, 3)$.

4. Respecto a la siguiente gráfica, ¿qué notación tiene los puntos y cuál es su coordenada?



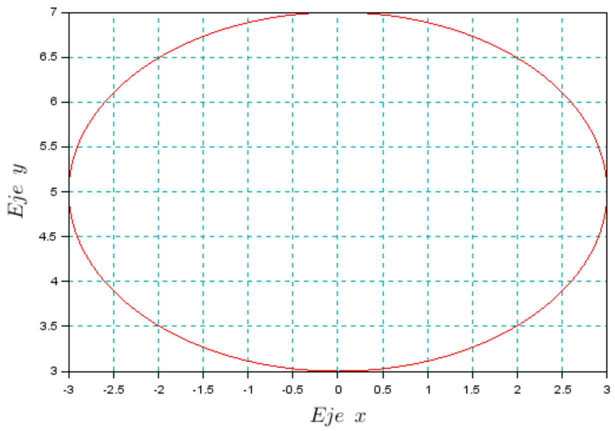
A. 1: $F(2,2)$, 1: $V(2,4)$, 3: $L(-2,4)$ y 4: $R(6,4)$.

B. 1: $V(2,4)$, 1: $F(2,2)$, 3: $L(-2,4)$ y 4: $R(6,4)$.

C. 1: $V(2,2)$, 1: $F(2,4)$, 3: $R(-2,4)$ y 4: $L(6,4)$.

D. 1: $V(2,2)$, 1: $F(2,4)$, 3: $L(-2,4)$ y 4: $R(6,4)$.

5. Los vértices, focos y los ejes de la siguiente elipse:



A. Eje mayor: $V_1(-3,5)$, $V_2(3,5)$, Eje menor: $V_3(0,7)$, $V_4(0,3)$, Focos: $F_1\left(-\sqrt{5},5\right)$ y $F_2\left(-\sqrt{5},5\right)$.

B. Eje menor: $V_1(-3,5)$, $V_2(3,5)$, Eje mayor: $V_3(0,7)$, $V_4(0,3)$, Focos: $F_1\left(-\sqrt{5},5\right)$ y $F_2\left(-\sqrt{5},5\right)$.

C. Eje mayor: $V_1(5,-3)$, $V_2(5,3)$, Eje menor: $V_3(0,7)$, $V_4(0,3)$, Focos: $F_1\left(-\sqrt{5},5\right)$ y $F_2\left(-\sqrt{5},5\right)$.

D. Eje mayor: $V_1(-3,5)$, $V_2(3,5)$, Eje menor: $V_3(0,7)$, $V_4(0,3)$, Focos: $F_1\left(\sqrt{5},5\right)$ y $F_2\left(\sqrt{5},5\right)$.

6. Define el centro, los focos, vértices y eje transversal de la siguiente ecuación: $\frac{(x+3)^2}{36} - \frac{(y-4)^2}{49} = 1$.

A. $C(-3,4)$, Eje transversal: $V_1(-9,4)$ y $V_2(3,4)$, Focos: $F_1(12.21,4)$ y $F_1(-6.21,4)$.

B. $C(-3,4)$, Eje transversal: $V_1(-9,4)$ y $V_2(3,4)$, Focos: $F_1(-12.21,4)$ y $F_1(6.21,4)$.

C. $C(-3,4)$, Eje conjugado y transversal: $V_1(-9,4)$ y $V_2(3,4)$, Focos: $F_1(-12.21,4)$ y $F_1(6.21,4)$.

D. $C(3,-4)$, Eje transversal: $V_1(9,-4)$ y $V_2(3,-4)$, Focos: $F_1(-12.21,-4)$ y $F_1(6.21,-4)$.

7. Determina las asíntotas del anterior ejercicio:

A. $y = \frac{6}{7}(x+3)+4$.

B. $y = \pm\frac{7}{6}(x+3)+4$.

C. $y = \pm\frac{6}{7}(x+3)+4$.

D. $y = \pm\frac{6}{7}(x-3)-4$.

8. Para realizar la gráfica del siguiente par ordenado $(-4, {}^{2\pi}/_{5})$ se debe realizar una conversión que da como resultado:

A. $\left(4, {}^{\pi}/_{5}\right)$.

B. $\left(4, {}^{2\pi}/_{5}\right)$.

C. $\left(-4, {}^{7\pi}/_{5}\right)$.

D. $(4, {}^{7\pi}/_{5})$.

9. El punto en coordenadas cartesianas (-3,-2) convertido en coordenadas polares es:

A. $\left(\sqrt{5}, 0.58\right)$.

B. $\left(\sqrt{13}, -0.58\right)$.

C. $\left(\sqrt{13}, 0.58\right)$.

D. $(\sqrt{13}, 0.49)$.

10. El punto polar $(2, \frac{3\pi}{5})$ en coordenadas cartesianas es aproximadamente:

A. $(0.61, 1.9)$.

B. $(-0.61, 1.9)$.

C. $(-0.61, -1.9)$.

D. $(0.61, -1.9)$.