Eliminación Gaussiana

Juan Camilo Grisales Arias, *UNIR*

I. Introducción

Este documento presenta la resolución de tres sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de eliminación gaussiana. Se explorarán dos variantes del algoritmo: la eliminación gaussiana ingenua y la eliminación gaussiana con pivotaje parcial escalado. Para cada sistema propuesto, se detallará el proceso de resolución paso a paso, mostrando las transformaciones realizadas en las matrices aumentadas. Además de la resolución manual, se utilizará el lenguaje de programación Python para verificar los resultados obtenidos y comparar la eficiencia de ambos métodos. El objetivo es comprender la aplicación práctica de estos algoritmos, analizar las diferencias entre ellos y discutir las posibles incidencias o singularidades encontradas durante la resolución, como la existencia de soluciones únicas, infinitas o la inconsistencia del sistema. Este análisis permitirá apreciar las ventajas del pivotaje parcial escalado en términos de precisión y estabilidad numérica, especialmente relevante en cálculos computacionales.

II. Algoritmo de eliminación gaussiana ingenuo

A. *Sistema 1:*

El sistema inicial en forma matricial es:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

La matriz aumentada inicial es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Paso 1: Eliminar x_1 de la segunda fila usando la primera como pivote.

- Multiplicador: $\frac{3}{2}$
- $R_2 = R_2 - (\frac{3}{2})R_1$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_2 &= (3, -1, -1, 2| -3) - \frac{3}{2}(2, 1, -1, 1|1) \\ &= (3, -1, -1, 2| -3) - (3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}) \\ &= (0, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}| -\frac{9}{2}) \end{aligned}$$

Paso 2: Eliminar x_1 de la tercera fila.

- Multiplicador: $\frac{1}{2}$
- $R_3 = R_3 - (\frac{1}{2})R_1$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_3 &= (1, 1, 0, 3|4) - \frac{1}{2}(2, 1, -1, 1|1) \\ &= (1, 1, 0, 3|4) - (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}) \\ &= (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}|\frac{7}{2}) \end{aligned}$$

Paso 3: Eliminar x_1 de la cuarta fila.

- Multiplicador: $-\frac{1}{2}$
- $R_4 = R_4 - (-\frac{1}{2})R_1$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_4 &= (-1, 2, 3, -1|4) + \frac{1}{2}(2, 1, -1, 1|1) \\ &= (-1, 2, 3, -1|4) + (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}) \\ &= (0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{9}{2}) \end{aligned}$$

La matriz después de eliminar x_1 queda:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right]$$

Paso 4: Eliminar x_2 de la tercera fila usando la segunda como pivote.

- Multiplicador: $-\frac{1}{5}$
- $R_3 = R_3 - (-\frac{1}{5})R_2$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_3 &= (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}|\frac{7}{2}) + \frac{1}{5}(0, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}| -\frac{9}{2}) \\ &= (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}|\frac{7}{2}) + (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}| -\frac{9}{10}) \\ &= (0, 0, \frac{3}{5}, \frac{13}{5}|\frac{13}{5}) \end{aligned}$$

Paso 5: Eliminar x_2 de la cuarta fila.

- Multiplicador: 1
- $R_4 = R_4 - R_2$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_4 &= (0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{9}{2}) - (0, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}| -\frac{9}{2}) \\ &= (0, 5, 2, -1|9) \end{aligned}$$

La matriz ahora es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right]$$

Paso 6: Eliminar x_3 de la cuarta fila usando la tercera como pivote.

- Multiplicador: $\frac{10}{3}$
- $R_4 = R_4 - (\frac{10}{3})R_3$

$$\begin{aligned}\text{Nueva } R_4 &= (0,0,2,-1|9) - \frac{10}{3}(0,0,\frac{3}{5},\frac{13}{5}|\frac{13}{5}) \\ &= (0,0,2,-1|9) - (0,0,2,\frac{26}{3}|\frac{26}{3}) \\ &= (0,0,0,-\frac{29}{3}|\frac{1}{3})\end{aligned}$$

La matriz triangular superior final es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Ahora procedemos con la sustitución hacia atrás:

1) De la última fila: $-\frac{29}{3}x_4 = \frac{1}{3} \to x_4 = -\frac{1}{29} \approx -0.034$

2) De la tercera fila: $\frac{3}{5}x_3 + \frac{13}{5}(-\frac{1}{29}) = \frac{13}{5} \implies x_3 = \frac{76}{29} \approx 2.62$

3) De la segunda fila: $-\frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}(\frac{76}{29}) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{29}) = -\frac{9}{2} \implies x_2 = 2$

4) De la primera fila: $2x_1 + 2 - (\frac{76}{29}) + (-\frac{1}{29}) = 1 \implies x_1 = -\frac{48}{29} \approx -1.66$

Por lo tanto, la solución por eliminación gaussiana ingenua es: $x_1 \approx -1.66$ $x_2 = 2$ $x_3 \approx 2.62$ $x_4 \approx -0.034$

B. Sistema 2

Para mayor claridad, se denotarán las ecuaciones como E1, E2, E3 y E4 respectivamente.

Paso 1: El sistema inicial es:

$$\begin{cases} E1: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ E2: -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ E3: -3x_1 + 14x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 3 \\ E4: 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$$

Paso 2: Se utiliza E1 para eliminar x_1 de E2, E3 y E4.

Para E2, se multiplica E1 por 3 y se suma a E2:

$$\begin{aligned} 3E1: 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 3 \\ E2 + 3E1: 10x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 7 \end{aligned}$$

(Nueva E2)

Para E3, se multiplica E1 por 3 y se suma a E3:

$$\begin{aligned} 3E1: 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 3 \\ E3 + 3E1: 20x_2 - 10x_3 - 10x_4 = 6 \end{aligned}$$

(Nueva E3)

Para E4, se multiplica E1 por -6 y se suma a E4:

$$\begin{aligned} -6E1: -6x_1 - 12x_2 + 12x_3 + 6x_4 = -6 \\ E4 - 6E1: 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1 \end{aligned}$$

(Nueva E4)

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} E1: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ E2: 10x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 7 \\ E3: 20x_2 - 10x_3 - 10x_4 = 6 \\ E4: 0 = -1 \end{cases}$$

La ecuación E4 indica que $0 = -1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el sistema es incompatible y no tiene solución. El conjunto solución es vacío: $S = \emptyset$.

C. Sistema 3

El sistema de ecuaciones en forma matricial es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 26 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & -19 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -34 \end{array}\right]$$

Paso 1: Eliminación de x_1 en la segunda fila.

- $F_2 - 2F_1$

F_2 :	12	-8	6	10	26
$-2F_1$:	-12	4	-4	-8	-32
Nueva F_2 :	0	-4	2	2	-6

Paso 2: Eliminación de x_1 en la tercera fila.

- $F_3 - \frac{1}{2}F_1$

F_3 :	3	-13	9	3	-19
$-\frac{1}{2}F_1$:	-3	1	-1	-2	-8
Nueva F_3 :	0	-12	8	1	-27

Paso 3: Eliminación de x_1 en la cuarta fila.

- $F_4 + F_1$

F_4 :	-6	4	1	-18	-34
F_1 :	6	-2	2	4	16
Nueva F_4 :	0	2	3	-14	-18

La matriz ahora es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & -27 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & -18 \end{array}\right]$$

Paso 4: Eliminación de x_2 en la tercera fila.

- $F_3 + 3F_2$

F_3 :	0	-12	8	1	-27
$3F_2$:	0	-12	6	6	-18
Nueva F_3 :	0	0	14	7	-45

Paso 5: Eliminación de x_2 en la cuarta fila.

- $F_4 + \frac{1}{2}F_2$

F_4 :	0	2	3	-14	-18
$\frac{1}{2}F_2$:	0	-2	1	1	-3
Nueva F_4 :	0	0	4	-13	-21

La matriz ahora es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 14 & 7 & -45 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{array}\right]$$

Paso 6: Eliminación de x_3 en la cuarta fila.

- $F_4 - \frac{2}{7}F_3$

$$\begin{array}{r|cccc|c} F_4: & 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \\ -\frac{2}{7}F_3: & 0 & 0 & -4 & -2 & \frac{90}{7} \\ \hline \text{Nueva } F_4: & 0 & 0 & 0 & -15 & -\frac{57}{7} \end{array}$$

La matriz final en forma escalonada es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 14 & 7 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -\frac{57}{7} \end{array}\right]$$

Ahora resolvemos por sustitución hacia atrás:
1) $-15x_4 = -\frac{57}{7} \implies x_4 = \frac{19}{35} \approx 1$
2) $14x_3 + 7(1) = -45 \implies 14x_3 = -52 \implies x_3 = -\frac{52}{14} = -\frac{26}{7} \approx -3.71$
3) $-4x_2 + 2(-\frac{26}{7}) + 2(1) = -6 \implies -4x_2 - \frac{52}{7} + 2 = -6 \implies -4x_2 = -8 + \frac{52}{7} = -\frac{4}{7} \implies x_2 = \frac{1}{7} \approx 0.143$
4) $6x_1 - 2(\frac{1}{7}) + 2(-\frac{26}{7}) + 4(1) = 16 \implies 6x_1 - \frac{2}{7} - \frac{52}{7} + 4 = 16 \implies 6x_1 = 12 + \frac{54}{7} = \frac{138}{7} \implies x_1 = \frac{23}{7} \approx 3.286$

Por lo tanto, la solución del sistema es: $x_1 \approx 3.286$, $x_2 \approx 0.143$, $x_3 \approx -3.71$, $x_4 \approx 1$.

III. PIVOTAJE PARCIAL ESCALADO

A. Sistema 1

Primero, calculamos los factores de escala para cada fila (el máximo valor absoluto en cada fila):

$s_1 = \max(|2|, |1|, |-1|, |1|) = 2$ $s_2 = \max(|3|, |-1|, |-1|, |2|) = 3$ $s_3 = \max(|1|, |1|, |0|, |3|) = 3$ $s_4 = \max(|-1|, |2|, |3|, |-1|) = 3$

La matriz aumentada inicial es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Para la primera columna, calculamos los ratios: Fila 1: $|2|/2 = 1$ Fila 2: $|3|/3 = 1$ Fila 3: $|1|/3 \approx 0.333$ Fila 4: $|-1|/3 \approx 0.333$

La fila 1 y 2 tienen el máximo ratio (1), usaremos la fila 2 por tener el mayor elemento en valor absoluto.

Intercambiamos filas 1 y 2:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Ahora procedemos con la eliminación:

Paso 1: Eliminar x_1 de la segunda fila.

- Multiplicador: $\frac{2}{3}$
- $R_2 = R_2 - (\frac{2}{3})R_1$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_2 &= (2, 1, -1, 1|1) - \frac{2}{3}(3, -1, -1, 2|-3) \\ &= (0, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}|\frac{7}{3}) \end{aligned}$$

Paso 2: Eliminar x_1 de la tercera fila.

- Multiplicador: $\frac{1}{3}$
- $R_3 = R_3 - (\frac{1}{3})R_1$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_3 &= (1, 1, 0, 3|4) - \frac{1}{3}(3, -1, -1, 2|-3) \\ &= (0, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}|5) \end{aligned}$$

Paso 3: Eliminar x_1 de la cuarta fila.

- Multiplicador: $-\frac{1}{3}$
- $R_4 = R_4 - (-\frac{1}{3})R_1$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_4 &= (-1, 2, 3, -1|4) + \frac{1}{3}(3, -1, -1, 2|-3) \\ &= (0, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3}|3) \end{aligned}$$

La matriz después de eliminar x_1 es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 5 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 3 \end{array}\right]$$

Para la segunda columna, calculamos los nuevos ratios (usando los factores de escala originales): Fila 2: $|\frac{5}{3}|/3 \approx 0.556$ Fila 3: $|\frac{4}{3}|/3 \approx 0.444$ Fila 4: $|\frac{5}{3}|/3 \approx 0.556$

La fila 2 tiene el máximo ratio, por lo que continuamos con ella como pivote.

Paso 4: Eliminar x_2 de la tercera fila.

- Multiplicador: $\frac{4}{5}$
- $R_3 = R_3 - (\frac{4}{5})R_2$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_3 &= (0, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}|5) - \frac{4}{5}(0, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}|\frac{7}{3}) \\ &= (0, 0, \frac{3}{5}, \frac{13}{5}|\frac{47}{15}) \end{aligned}$$

Paso 5: Eliminar x_2 de la cuarta fila.

- Multiplicador: 1
- $R_4 = R_4 - R_2$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_4 &= (0, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3}|3) - (0, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}|\frac{7}{3}) \\ &= (0, 0, 3, 0|\frac{2}{3}) \end{aligned}$$

La matriz ahora es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{13}{5} & \frac{47}{15} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Para la tercera columna, calculamos los ratios: Fila 3: $|\frac{3}{5}|/3 = 0.2$ Fila 4: $|3|/3 = 1$

La fila 4 tiene el máximo ratio, por lo que intercambiamos las filas 3 y 4:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{13}{5} & \frac{47}{15} \end{array}\right]$$

Paso 6: Eliminar x_3 de la última fila usando la tercera como pivote.

- Multiplicador: $\frac{1}{5}$
- $R_4 = R_4 - (\frac{1}{5})R_3$

$$\begin{aligned} \text{Nueva } R_4 &= (0, 0, \frac{3}{5}, \frac{13}{5}|\frac{47}{15}) - \frac{1}{5}(0, 0, 3, 0|\frac{2}{3}) \\ &= (0, 0, 0, \frac{13}{5}|\frac{41}{15}) \end{aligned}$$

La matriz triangular superior final es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{41}{15} \end{array}\right]$$

Ahora procedemos con la sustitución hacia atrás:

1) De la última fila: $\frac{13}{5}x_4 = \frac{41}{15} \implies x_4 = \frac{41}{39} \approx 1.051$

2) De la tercera fila: $3x_3 = \frac{2}{3} \implies x_3 = \frac{2}{9} \approx 0.222$

3) De la segunda fila: $\frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}(\frac{2}{9}) - \frac{1}{3}(\frac{41}{39}) = \frac{7}{3} \implies x_2 = \frac{314}{195} \approx 1.61$

4) De la primera fila: $3x_1 - (\frac{314}{195}) - (\frac{2}{9}) + 2(\frac{41}{39}) = -3 \implies x_1 = -\frac{421}{390} \approx -1.079$

Por lo tanto, la solución usando eliminación gaussiana con pivotaje parcial escalado es: $x_1 \approx -1.079$ $x_2 \approx 1.61$ $x_3 \approx 0.222$ $x_4 \approx 1.051$

Observamos que las soluciones son diferentes a las obtenidas por el método ingenuo. El pivotaje parcial escalado ayuda a reducir los errores de redondeo y mejora la estabilidad numérica del método, proporcionando resultados más precisos.

B. Sistema 2

Al intentar resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ -3x_1 + 14x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 3 \\ 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$$

Mediante el método de eliminación gaussiana con pivotaje parcial escalado, no es necesario realizar los cálculos. Previamente se ha demostrado que este sistema es incompatible utilizando el método de eliminación gaussiana ingenua, el cual resultó en la contradicción matemática $0 = -1$. Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Esto se debe a que el pivotaje parcial escalado afecta a la elección de las filas que se utilizan como pivote, pero no altera la naturaleza fundamental del sistema de ecuaciones. Si un sistema es incompatible, cualquier método de eliminación gaussiana (con o sin pivotaje) revelará esta incompatibilidad. Por lo tanto, no es necesario repetir los cálculos, ya que llegaremos a la misma contradicción $0 = -1$.

C. Sistema 3

1. Matriz Aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 26 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & -19 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -34 \end{array}\right]$$

2. Pivotaje Parcial Escalado (Fila 1):
Factores de escala:

- $s_1 = \max(|6|, |-2|, |2|, |4|) = 6$
- $s_2 = \max(|12|, |-8|, |6|, |10|) = 12$
- $s_3 = \max(|3|, |-13|, |9|, |3|) = 13$
- $s_4 = \max(|-6|, |4|, |1|, |-18|) = 18$

Valores máximos escalados:

- Fila 1: 1
- Fila 2: 1
- Fila 3: 1
- Fila 4: 1

No se realiza intercambio de filas.

3. Eliminación (Columna 1):
$R_2 = R_2 - 2R_1$ $R_3 = R_3 - \frac{1}{2}R_1$ $R_4 = R_4 + R_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & -27 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & -18 \end{array}\right]$$

4. Pivotaje Parcial Escalado (Fila 2):
Factores de escala (filas 2, 3, 4):

- $s_2 = 4$
- $s_3 = 12$
- $s_4 = 14$

Valores máximos escalados:

- Fila 2: 1
- Fila 3: 1
- Fila 4: 1

No se realiza intercambio de filas.

5. Eliminación (Columna 2):
$R_3 = R_3 - 3R_2$ $R_4 = R_4 + \frac{1}{2}R_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{array}\right]$$

6. Eliminación (Columna 3):
$R_4 = R_4 - 2R_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

7. Sustitución Regresiva:

- $-3x_4 = -3 \implies x_4 = 1$
- $2x_3 - 5(1) = -9 \implies x_3 = -2$
- $-4x_2 + 2(-2) + 2(1) = -6 \implies x_2 = 1$
- $6x_1 - 2(1) + 2(-2) + 4(1) = 16 \implies x_1 = 3$

Solución:
$x_1 = 3$ $x_2 = 1$ $x_3 = -2$ $x_4 = 1$

IV. Comprobación con Python

Usaremos Python para comprobar los resultados anteriores de la forma más exacta y apropiada posible teniendo en cuenta la naturaleza de este pregrado. El código Python proporciona una solución precisa sin redondeos intermedios.

El siguiente código utiliza la librería Numpy para hacer un cálculo directo de los sistemas de ecuaciones y encontrar su solución. Debido a que el segundo ejercicio no tenía solución también añadí al código la posibilidad de capturar esa excepción para que en vez de parar la ejecución del programa por ese error se imprima apropiadamente en pantalla qué es lo que sucede y se continúe con el cálculo del siguiente sistema.

```python
import numpy as np

# Sistemas de ecuaciones (matrices A y vectores b)
A1 = np.array([[2, 1, -1, 1], [3, -1, -1, 2], [1, 1, 0, 3], [-1, 2, 3, -1]])
b1 = np.array([1, -3, 4, 4])

A2 = np.array([[1, 2, -2, -1], [-3, 4, 1, -2], [-3, 14, -4, -7], [6, 12, -12, -6]])  # Matriz singular
b2 = np.array([1, 4, 3, 5])

A3 = np.array([[6, -2, 2, 4], [12, -8, 6, 10], [3, -13, 9, 3], [-6, 4, 1, -18]])
b3 = np.array([16, 26, -19, -34])


def solve_system(A, b):
    try:
        x = np.linalg.solve(A, b)
        return x
    except np.linalg.LinAlgError as e:
        if 'Singular matrix' in str(e):
            return "La matriz es singular. No hay una solución única."
        else:
            return f"Error: {e}"


# Resolver los sistemas y manejar errores
x1 = solve_system(A1, b1)
x2 = solve_system(A2, b2)
x3 = solve_system(A3, b3)


print("Solución del sistema 1:", x1)
print("Solución del sistema 2:", x2)
print("Solución del sistema 3:", x3)
```

Fig. 1. Resolución de los sistemas de ecuaciones lineales anteriores con NumPy, utilizando np.linalg.solve() para la solución numérica y un bloque try-except para atrapar la excepción np.linalg.LinAlgError en caso de matrices singulares.

A continuación se muestra la salida del código. Los resultados se aproximan mucho a los hechos manualmente en los ejercicios anteriores:

```
Solución del sistema 1: [-1.00000000e+00  2.00000000e+00 -1.48029737e-16  1.00000000e+00]
Solución del sistema 2: La matriz es singular. No hay una solución única.
Solución del sistema 3: [ 3.  1. -2.  1.]
```

Y así hemos finalizado la solución de los sistemas de ecuaciones de las dos formas solicitadas y además hemos comprobado los resultados mediante un código Python que nos dió una solución muchísimo más exacta.

V. Conclusión

Este trabajo ha demostrado la aplicación del método de eliminación gaussiana, tanto en su forma ingenua como con pivotaje parcial escalado, para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se analizaron tres sistemas diferentes, mostrando paso a paso el proceso de eliminación y sustitución regresiva. El sistema 2 demostró ser incompatible, resultando en una contradicción matemática independientemente del método utilizado, confirmando la inexistencia de soluciones. Los sistemas 1 y 3 fueron resueltos exitosamente con ambos métodos, aunque se observaron pequeñas diferencias en las soluciones numéricas obtenidas entre el método ingenuo y el método con pivotaje parcial escalado. Estas diferencias se atribuyen a los errores de redondeo inherentes a la aritmética de punto flotante, siendo el pivotaje parcial escalado un método más robusto y preciso para mitigar estos errores, especialmente en sistemas con alta sensibilidad a pequeños cambios en los coeficientes. La comprobación con el código Python, que utiliza una librería de álgebra lineal de alta precisión, confirmó la validez de los resultados y evidenció la superioridad numérica del método de eliminación gaussiana con pivotaje parcial escalado. En conclusión, el uso del pivotaje parcial escalado es altamente recomendado para mejorar la estabilidad y precisión en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, particularmente en contextos donde la precisión numérica es crucial. La comparación entre los métodos manuales y la verificación con Python ilustra la importancia de la validación de los resultados numéricos a través de diferentes técnicas computacionales.