Secciones cónicas y ecuaciones polares

Juan Camilo Grisales Arias, *UNIR*

***Abstract*—This document addresses three problems involving conic sections and polar equations. It analyzes the focal distance of an elliptical reflector, calculates the focal height of a parabolic radio telescope antenna, and generates Archimedean spirals using programming. Each solution includes detailed calculations and graphical representations.**

I. Introducción

Este trabajo aborda tres problemas distintos relacionados con las secciones cónicas y las coordenadas polares, demostrando su aplicación en diversos campos como la óptica y la radioastronomía. El primer problema explora las propiedades de una elipse para determinar la distancia que separa una fuente de luz y un receptor dentro de un reflector elíptico. Esta aplicación destaca las propiedades reflectantes de las elipses y su uso en el enfoque de la luz u otras ondas. El segundo problema utiliza la geometría parabólica de una antena de radiotelescopio para calcular la posición de su punto focal, un aspecto crucial en la recepción de señales. Este problema subraya la aplicación de las parábolas en la recolección y concentración de señales. Finalmente, el tercer problema aborda la visualización de las espirales de Arquímedes, mostrando el uso de coordenadas polares para representar y generar curvas complejas. Esto enfatiza la versatilidad de las coordenadas polares en la descripción y generación de formas geométricas intrincadas. Las soluciones presentadas combinan cálculos analíticos con representaciones gráficas para proporcionar una comprensión completa de los conceptos involucrados.

II. Problema 1: Reflector Elíptico

A. Planteamiento del problema

Un haz de luz es emitido desde una fuente F1, este rayo se refleja dentro de un recinto elíptico, sin importar la dirección hacia donde apunte, siempre llegará a su receptor F2 (ver Fig. 1). Considera el centroide en la coordenada C(30,25), su eje mayor horizontal con una longitud de 90 cm y su eje menor vertical con 30cm de longitud. ¿Qué distancia separa a la fuente del receptor? Justifica tu respuesta y elabora una representación en el plano bidimensional ubicando los vértices, distancia entre focos y ejes.

Datos:

- Centro: $C(30, 25)$
- Eje mayor horizontal: $90\,\text{cm}$
- Eje menor vertical: $30\,\text{cm}$

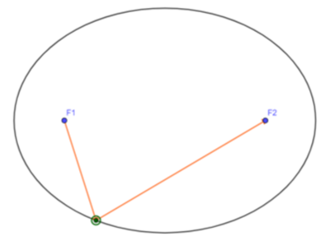

Fig. 1. Reflexión de la luz en una elipse. El rayo emitido desde el foco $F1$ se refleja hacia el foco $F2$, demostrando una propiedad fundamental de las elipses.

B. Desarrollo

El semieje mayor y menor son:

$$a = \frac{90}{2} = 45\,\text{cm}$$
$$b = \frac{30}{2} = 15\,\text{cm}$$

La distancia focal se calcula como:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{45^2 - 15^2} = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}\,\text{cm}$$

Las coordenadas de los focos son:

$$F_1 = (30 - 30\sqrt{2},\ 25)$$
$$F_2 = (30 + 30\sqrt{2},\ 25)$$

C. Conclusión

La distancia que separa la fuente del receptor es:

$$\text{Distancia} = 2c = 60\sqrt{2}\,\text{cm}$$

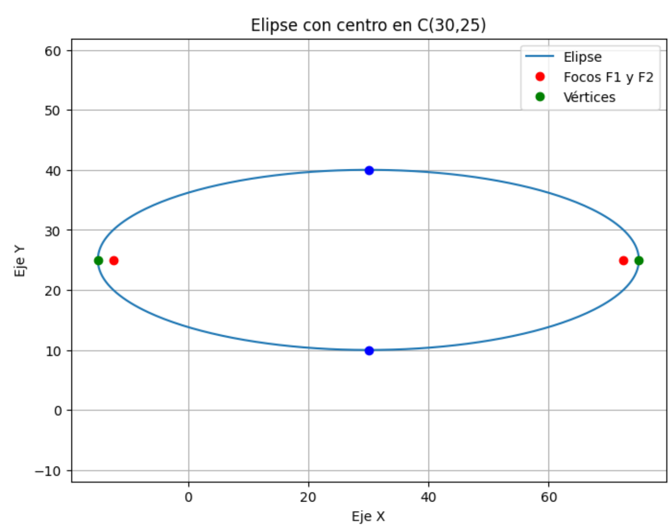

Fig. 2. Representación de la elipse con sus elementos característicos

III. Problema 2: Cálculo de la altura de la primera cabina focal del radiotelescopio

A. *Planteamiento del Problema*

Un radiotelescopio es una antena de uso especializado para la captación de ondas de radio emitidas desde fuentes astronómicas (cuerpos celestes).

Fig. 3. Diagrama esquemático de un radiotelescopio de reflector parabólico móvil, que ilustra sus componentes principales, incluyendo el reflector parabólico, la estructura de soporte, las cabinas focales, el reflector secundario, el receptor, el sistema de seguimiento, y la sala de control.

Si la antena tiene un diámetro de 14 m y una profundidad de 2.7 m, ¿a qué altura se debe ubicar la primera cabina focal (ver imagen de referencia)? Elabora una representación en el plano bidimensional como una sección cónica junto con la posición focal y justifica tu respuesta.

B. *Desarrollo*

Para resolver este problema utilizaremos las propiedades de la parábola:

1) Datos Conocidos
   - Diámetro (D) = $14\,\mathrm{m}$
   - Profundidad (h) = $2.7\,\mathrm{m}$
2) La ecuación de la parábola con vértice en el origen es:
$$y = ax^2$$
3) Para encontrar el parámetro a, usamos el punto (D/2, h):
$$h = a(D/2)^2$$
4) La distancia focal f está relacionada con el parámetro a mediante:
$$f = \frac{1}{4a}$$

Cálculo del parámetro a:

- Ecuación:
$$2.7 = a(7)^2$$
- Sustituyendo:
$$a = \frac{2.7}{49} \approx 0.055102$$

Altura focal (f):

- Ecuación:
$$f = \frac{1}{4a}$$
- Sustituyendo:
$$f = \frac{1}{4(0.055102)} \approx 4.5 \text{ metros}$$

C. *Resultados y gráficas*

Podemos comprobar los resultados utilizando el siguiente código Python, que genera una representación visual de la sección del radiotelescopio y verifica las dimensiones calculadas.

Se presentan 2 códigos con leves diferencias que nos permiten apreciar varias perspectivas.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Valores dados
diametro = 14  # metros
profundidad = 2.7  # metros

# Ecuación de una parábola: y = (1/(4f)) * x^2
# Necesitamos encontrar la distancia focal f

# La parábola está definida de tal manera que en x = diametro/2, y = profundidad
x_borde = diametro / 2  # x en el borde del plato
y_borde = profundidad   # y en el borde del plato

# Resolver para la distancia focal f
# Usando la ecuación de la parábola: y = x^2 / (4f)
# Por lo tanto, f = x^2 / (4y)
distancia_focal = x_borde**2 / (4 * y_borde)

print(f"Distancia focal (desde el vértice hasta el punto focal): {distancia_focal:.2f} metros")

# Generar valores x e y para la parábola
x = np.linspace(-x_borde, x_borde, 400)
y = (x**2) / (4 * distancia_focal)

# Graficar la parábola
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x, y, label='Plato Parabólico')

# Graficar el punto focal
plt.plot(0, distancia_focal, 'ro', label='Punto Focal')

# Graficar la línea de profundidad
plt.hlines(y_borde, -x_borde, x_borde, colors='k', linestyles='dashed', label='Profundidad del Plato')

# Etiquetas y título
plt.title('Plato Parabólico y Punto Focal')
plt.xlabel('Distancia Horizontal (m)')
plt.ylabel('Profundidad (m)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.gca().invert_yaxis()  # Invertir eje y para que coincida con la orientación típica del plato

plt.show()
```

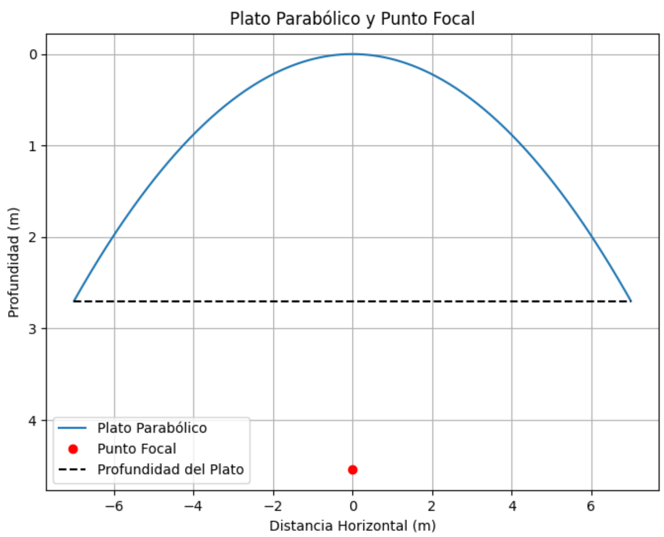

Fig. 4. Representación del plato parabólico del radiotelescopio con el punto focal indicado. La profundidad del plato está marcada con una línea discontinua.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Crear figura y ejes
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 8))

# Datos de la parábola
x = np.linspace(-7, 7, 1000)
a = 2.7/49  # Coeficiente calculado anteriormente
y = a * x**2

# Graficar parábola
ax.plot(x, y, 'b-', linewidth=2, label='Reflector parabólico')

# Punto focal
ax.plot([0], [4.5], 'ro', markersize=8, label='Punto focal (F)')

# Líneas de medición
ax.arrow(-7, -0.5, 14, 0, head_width=0.2, head_length=0.3, fc='k', ec='k', length_includes_head=True)
ax.arrow(7.5, 0, 0, 2.7, head_width=0.2, head_length=0.3, fc='k', ec='k', length_includes_head=True)
ax.arrow(-7.5, 0, 0, 4.5, head_width=0.2, head_length=0.3, fc='k', ec='k', length_includes_head=True)

# Texto para medidas
ax.text(0, -1, '14 m', ha='center')
ax.text(8, 1.35, '2.7 m', va='center')
ax.text(-8, 2.25, '4.5 m', va='center')

# Configuración de los ejes
ax.spines['left'].set_position('zero')
ax.spines['bottom'].set_position('zero')
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)

# Límites y etiquetas
ax.set_xlim(-9, 9)
ax.set_ylim(-2, 6)
ax.set_xlabel('x (metros)')
ax.set_ylabel('y (metros)')
ax.set_title('Sección transversal del radiotelescopio')

# Leyenda
ax.legend()

# Ajustar layout
plt.tight_layout()

# Guardar figura
plt.show()
```

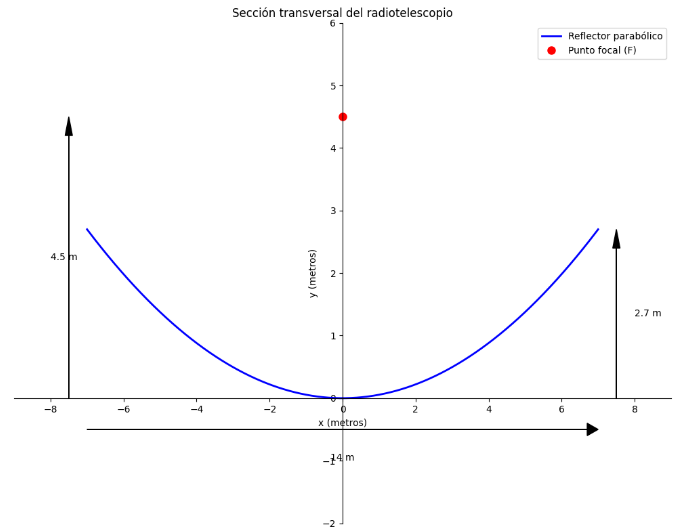

Fig. 5. Sección transversal del radiotelescopio mostrando el reflector parabólico y el punto focal. Las dimensiones del diámetro y la profundidad están indicadas.

Resultados finales:

- **Altura focal:** $4.5\,\mathrm{m}$
- **Parámetro a:** $0.055\,102$
- **Diámetro:** $14\,\mathrm{m}$
- **Profundidad:** $2.7\,\mathrm{m}$

La primera cabina focal debe ubicarse a una altura de 4.5 metros desde el vértice de la parábola para lograr la captación óptima de las ondas radioeléctricas.

IV. Problema 3: Espirales de Arquímedes

A. *Planteamiento del Problema*

La espiral de Arquímedes es una curva que describe la trayectoria de un punto que se mueve a velocidad constante a lo largo de una recta que gira sobre un punto fijo con velocidad angular constante. Esta curva tiene aplicaciones importantes en diversos campos de la ingeniería, incluyendo el diseño de compresores y otros dispositivos mecánicos. En este problema, se requiere generar una representación gráfica de las espirales de Arquímedes en sus dos variantes, utilizando coordenadas polares.

B. *Desarrollo*

La ecuación polar de la espiral de Arquímedes está dada por:

$$r = a\theta$$

donde:

- r es la distancia desde el origen al punto en la curva
- a es una constante que determina la separación entre vueltas sucesivas
- θ es el ángulo en radianes

Para generar la espiral inversa, utilizamos la ecuación:

$$r = -a\theta$$

El siguiente código en Python genera ambas espirales utilizando estas ecuaciones:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Crear un arreglo de ángulos theta
theta = np.linspace(0, 4 * np.pi, 1000)

# Parámetros para las espirales
a = 0.5  # Factor de escala

# Espiral de Arquímedes positiva
r1 = a * theta

# Espiral de Arquímedes invertida
r2 = a * (4 * np.pi - theta)

# Configurar el gráfico polar
fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': 'polar'})

# Graficar las espirales
ax.plot(theta, r1, label='Espiral positiva')
ax.plot(theta, r2, label='Espiral invertida')

# Añadir título y leyenda
ax.set_title('Dos espirales de Arquímedes invertidas')
ax.legend()

# Mostrar el gráfico
plt.show()
```

Fig. 6. Código Python para la generación de las espirales de Arquímedes

C. Resultados

La ejecución del código anterior produce las siguientes representaciones gráficas de cómo funciona un compresor con 2 espirales de Arquimedes invertidas:

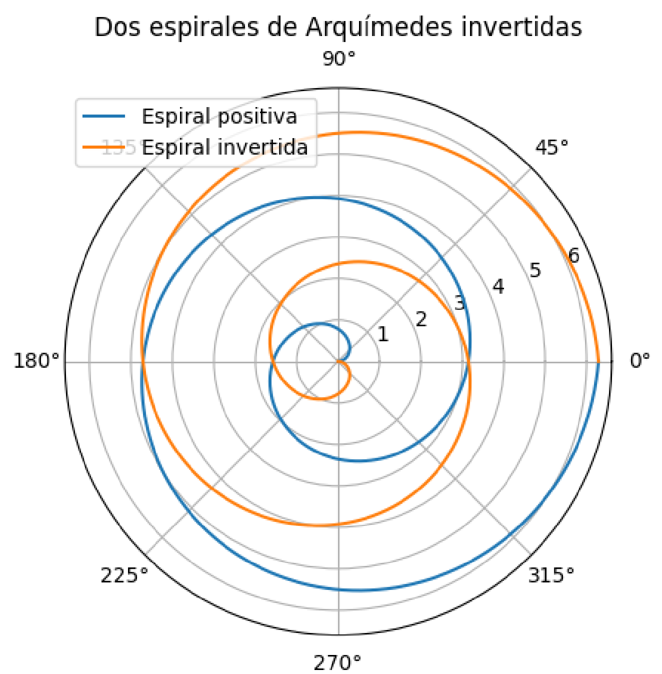

Fig. 7. Representación gráfica de las espirales de Arquímedes. (Izquierda) Espiral con ecuación $r = a\theta$. (Derecha) Espiral inversa con ecuación $r = -a\theta$.

D. Análisis

Las gráficas muestran claramente las características principales de las espirales de Arquímedes:

- La distancia entre vueltas sucesivas es constante $(2\pi a)$
- La espiral directa (izquierda) se desarrolla en sentido antihorario desde el origen
- La espiral inversa (derecha) se desarrolla en sentido horario desde el origen
- Ambas espirales mantienen una tasa de crecimiento constante respecto al ángulo de giro

Esta geometría es particularmente útil en aplicaciones como compresores, donde se requiere una separación constante entre las vueltas para mantener un flujo uniforme del fluido. La naturaleza de la curva permite una transición suave y continua, ideal para aplicaciones mecánicas donde se busca minimizar la turbulencia y optimizar la eficiencia del sistema.

V. Conclusión

Este trabajo ha explorado la aplicación de las secciones cónicas y las coordenadas polares a través de tres problemas.

Problema 1: Reflector Elíptico: La distancia que separa la fuente de luz del receptor en el reflector elíptico, calculada a partir de las propiedades geométricas de la elipse, es de $60\sqrt{2}$ cm. Este resultado demuestra la importancia de la propiedad reflectante de las elipses en la concentración de energía, con aplicaciones directas en óptica e ingeniería.

Problema 2: Cálculo de la altura de la primera cabina focal del radiotelescopio: La altura óptima para la primera cabina focal del radiotelescopio, determinada a partir de las propiedades de la parábola, es de 4.5 metros. La verificación mediante simulación computacional confirma la precisión del cálculo y la importancia de la geometría parabólica para la concentración de ondas de radio.

Problema 3: Espirales de Arquímedes: La generación de las espirales de Arquímedes, tanto directa como inversa, utilizando coordenadas polares, ilustra la versatilidad de este sistema de coordenadas para representar curvas complejas. La constancia en la separación entre las vueltas, característica fundamental de esta espiral, la hace ideal en aplicaciones donde se requiere un movimiento uniforme y controlado, como en el diseño de ciertos mecanismos mecánicos.

Conclusión General: En conjunto, este trabajo ha demostrado la amplia aplicabilidad de las secciones cónicas y las coordenadas polares en diversos campos de la ingeniería y la ciencia, destacando la importancia de la geometría en la resolución de problemas del mundo real.