Matemáticas para Bioestadística

Juan Cantero Jimenez

2 de noviembre, 2019

Ejercicio 1

1. Vamos a comparar las funciones potenciales $f_1(x) = 3x^2$ y $f_2(x) = x^4$ con la ayuda de R. Observa el programa $dibujar\_funciones.R$

```
M <-2
l <- c(0, max(M^4, 3*M^2))
curve(3*x^2, -M, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col =1)
curve(x^4, -M, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col=2, add=T)
legend("bottomleft",c("3*x^2","x^4"),col=c(1,2),lty=c(1,1))
```

Este programa dibuja dos funciones en la misma ventana de R. Su funcionamiento es el siguiente:

- La primera lınea define una variable llamada M y le asigna el valor 2. Esta variable la usaremos para definir los rangos horizontal y vertical de las gráficas.
- La segunda lınea define otra variable llamada l y le asigna el vector$\{max(M^4, 3M^2)\}$. Esta variable l la usaremos para definir el rango vertical de las gráficas.
- Las lıneas tercera y cuarta dibujan las gráficas de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, respectivamente, mediante la orden curve.
- La lınea 5 añade una leyenda.

Notad que en la lınea 3 hemos especificado como lımites para dibujar la gráfica -M y M (en el eje horizontal) y el valor de la variable l en el vertical (mediante el modificador ylim). El valor de l que hemos asignado está puesto a propósito para que abarque el rango de las dos funciones. Modificando el valor de M se modificarán consecuentemente los rangos tanto del eje horizontal como del vertical. Esto lo hacemos ası porque R no lo hace automáticamente. Fijaos también que en la lınea 4 hemos hecho lo mismo que en la 3 y además hemos añadido la opción add=T, para que al dibujar la segunda función no borre la primera.

2. Crea un fichero llamado $dibujar\_funciones.R$ con el programa de arriba. Experimenta con él hasta que te familiarices con su funcionamiento. Puedes cambiar el valor de M, los lımites de la representación gráfica, las funciones, etc.

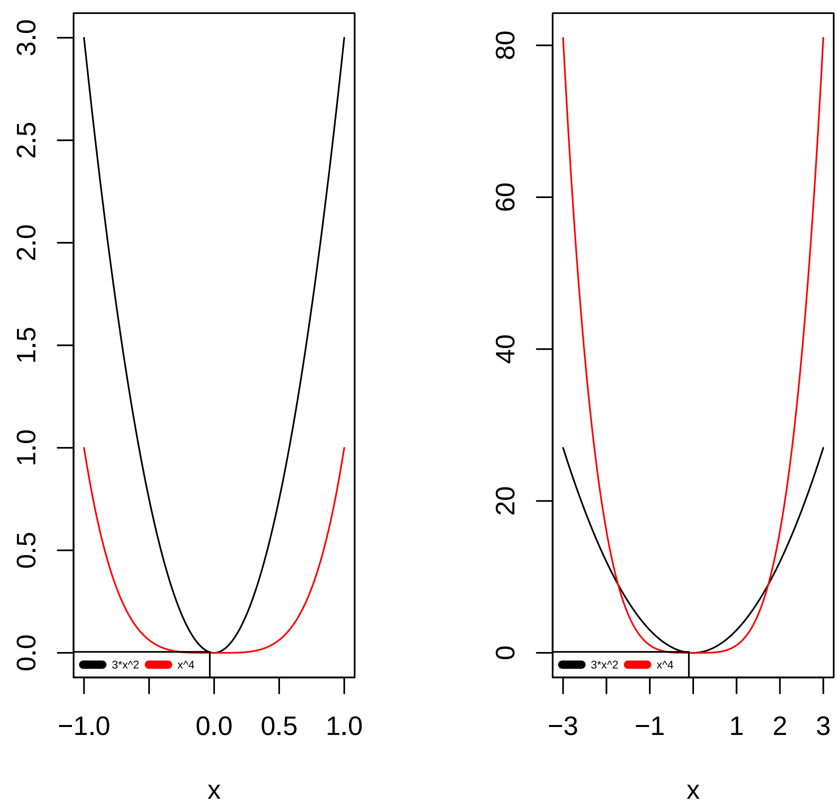
```
par(mfrow=c(1,2))
for (x in c(1,3)){
M <-x
l <- c(0, max(M^4, 3*M^2))

curve(3*x^2, -M, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col =1)
curve(x^4, -M, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col=2, add=T)
legend("bottomleft",
c("3*x^2","x^4"),
col=c(1, 2) ,
lty=c(1,1),
lwd=5,cex=0.40, horiz = TRUE,inset=0 )
}
```

3. Dibuja las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tomando primero el valor M = 1 y luego M = 3. ¿Qué puedes decir sobre el crecimiento de estas dos funciones cuando la x es grande?

```
par(mfrow=c(1,2))
for (x in c(1,3)){
M <-x
```

```
l <- c(0, max(M^4, 3*M^2))
curve(3*x^2, -M, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col =1)
curve(x^4, -M, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col=2, add=T)
legend("bottomleft",
c("3*x^2","x^4"),
col=c(1, 2) ,
lty=c(1,1),
lwd=5,cex=0.40, horiz = TRUE,inset=0 )
}
```



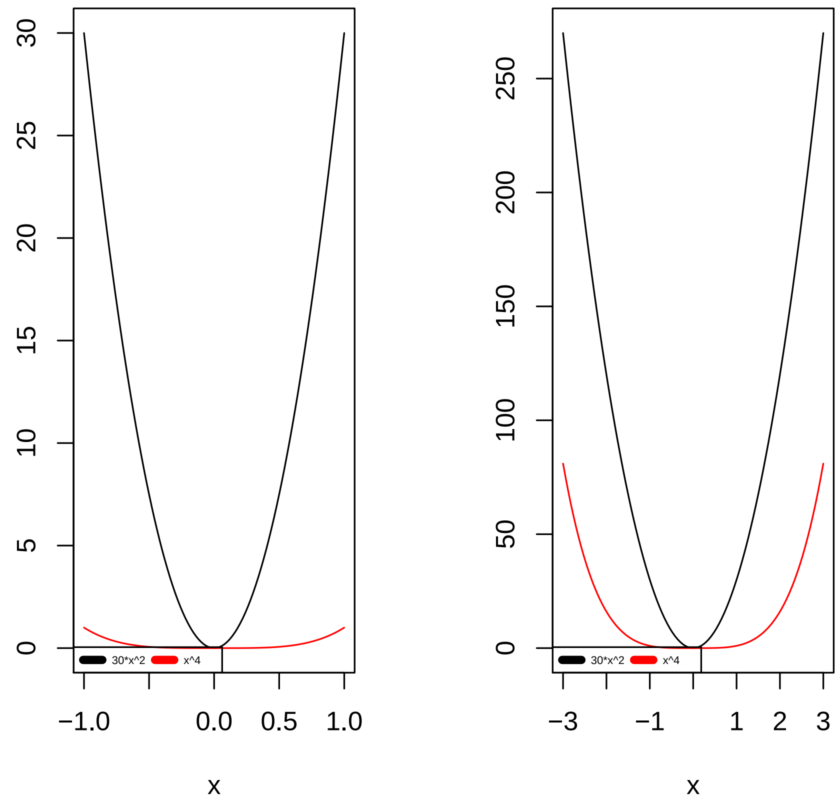
Cuando la x es grande el término dominante es la función potencial, esto explica que la función $f_1(x) = 3x^2$ crezca en un inicio mas que la función $f_2(x) = x^4$ teniendo un exponente menor. Ambas tienden a infinito cuando x tiende a infinito.

4. Cambia la función $f_1(x)$ de forma que ahora valga $f_1(x) = 30x^2$. Analiza el crecimiento de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ de forma similar al ejercicio anterior. ¿Qué puedes decir sobre el crecimiento de estas dos funciones cuando la x es grande?

```
par(mfrow=c(1,2))
for (x in c(1,3)){
  M <-x
  l <- c(0, max(M^4, 30*M^2))

  curve(30*x^2, -M, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col =1)
  curve(x^4, -M, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col=2, add=T)

  legend("bottomleft",
  c("30*x^2","x^4"),
  col=c(1, 2) ,
  lty=c(1,1),
  lwd=5,cex=0.40, horiz = TRUE,inset=0 )
}
```



En este apartado ocurre lo mismo que en el anterior salvo que al ser el valor de la constante que multiplica a x, 30, para valores pequeños de x la función $f_1(x) = 30x^2$ crecerá mucho más que la función $f_2(x) = x^4$ aunque el exponente de la x sea mayor. En el infinito ambas funciones tienden a infinito.

Ejercicio 2

Vamos a comparar la función exponencial $g_1(x) = e^x$ y la función polinómica $g_2(x) = x^3 + 2x + 5$ con la ayuda de R. Para ello:

1. Crea un programa similar al del ejercicio anterior que te permita dibujar

estas funciones.

```
par(mfrow=c(2,2))
for (x in c(1,3,5,8)){
  M <-x
  l <- c(0, max(exp(M), (M^3)+2*M+5))
  print(l)
  curve(exp(x), -M, M, xlab="x",
  ylab="", ylim=l, col =1)
  curve(x^3+2*x+5, -M, M, xlab="x",
  ylab="", ylim=l, col=2, add=T)

  legend("bottomleft",
  c("e^x","x^3+2*x+5"),
  col=c(1, 2),
  lty=c(1,1),
  lwd=5,cex=0.40, horiz = TRUE,inset=0 )
}
```

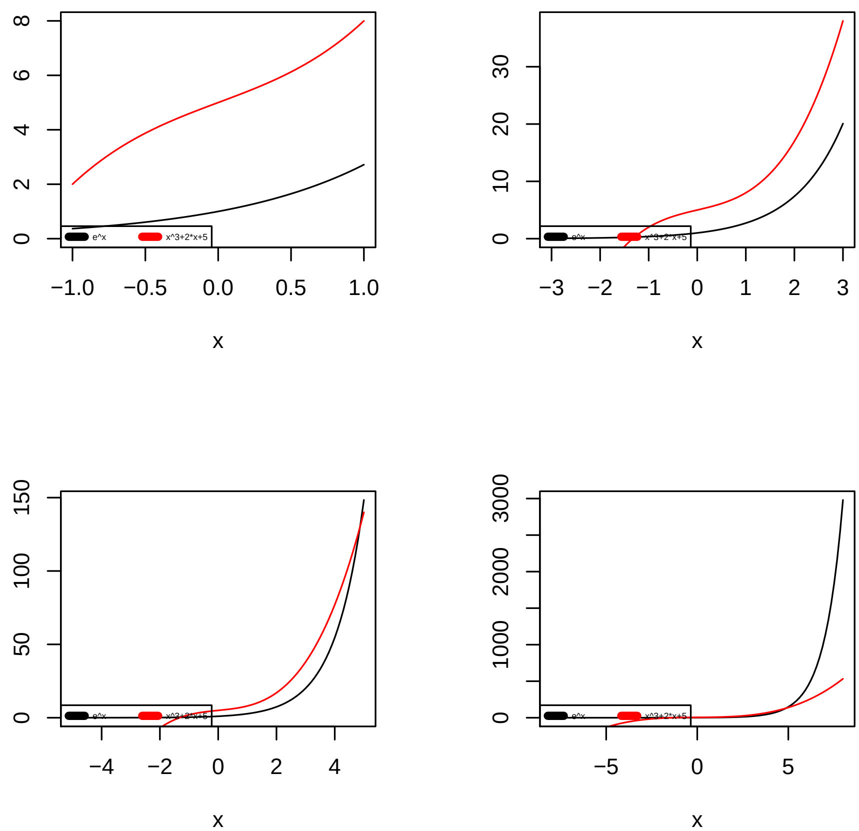
2. Dibuja las funciones $g_1(x)$ y $f_2(x)$ tomando varios valores de M. ¿Qué puedes decir sobre el crecimiento de estas dos funciones cuando la x es grande? ¿Cómo se comportan estas funciones cuando la x es negativa?

```
 par(mfrow=c(2,2))
for (x in c(1,3,5,8)){
  M <-x
  l <- c(0, max(exp(M), (M^3)+2*M+5))

  curve(exp(x), -M, M, xlab="x",
  ylab="", ylim=l, col =1)
  curve(x^3+2*x+5, -M, M, xlab="x",
  ylab="", ylim=l, col=2, add=T)

  legend("bottomleft",
  c("e^x","x^3+2*x+5"),
  col=c(1, 2),
```

```
  lty=c(1,1),
  lwd=5,cex=0.40, horiz = TRUE,inset=0 )
}
```



Ambas funciones tienden a infinito cuando la x tiende a infinito, solo que la función exponencial $g_1(x) = e^x$ crecerá muchisimo más rápido que la otra función.
Cuando la x toma valores negativos la función $g_1(x) = e^x$ toma valores positivos y se acerca a 0 de forma asintótica por último la función $g_2(x) = x^3 + 2x + 5$ toma valores negativos.

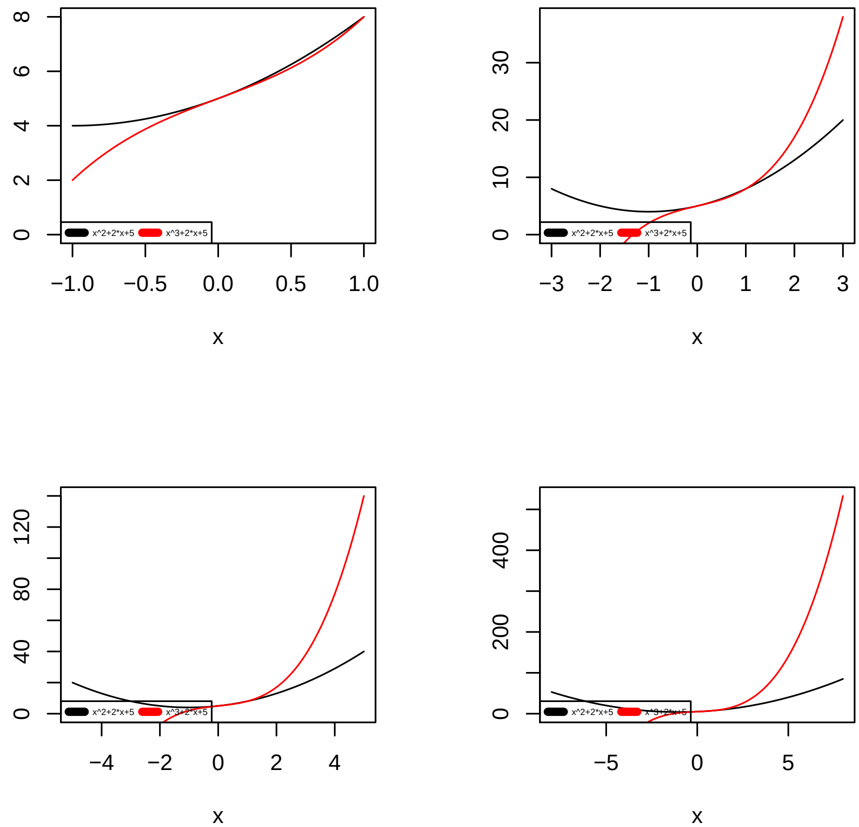
3. Cambia la función $g_1(x)$ de forma que ahora valga $g_1(x) = x^2 + 2x + 5$.

¿Cómo cambia el comportamiento de la función?

```
par(mfrow=c(2,2))
for (x in c(1,3,5,8)){
  M <-x
  l <- c(0, max((M^2)+2*M+5, (M^3)+2*M+5))

  curve((x^2)+2*x+5, -M, M, xlab="x",
  ylab="", ylim=l, col =1)
  curve(x^3+2*x+5, -M, M, xlab="x",
  ylab="", ylim=l, col=2, add=T)

  legend("bottomleft", c("x^2+2*x+5","x^3+2*x+5"),
  col=c(1, 2) , lty=c(1,1), lwd=5,cex=0.40, horiz = TRUE,inset=0 )
}
```



La nueva función $g_1(x)$ se comportará como se describió anteriormente para x positivas, pero para valores negativos de x, en este caso la función $g_1(x)$ tomará valores positivos.

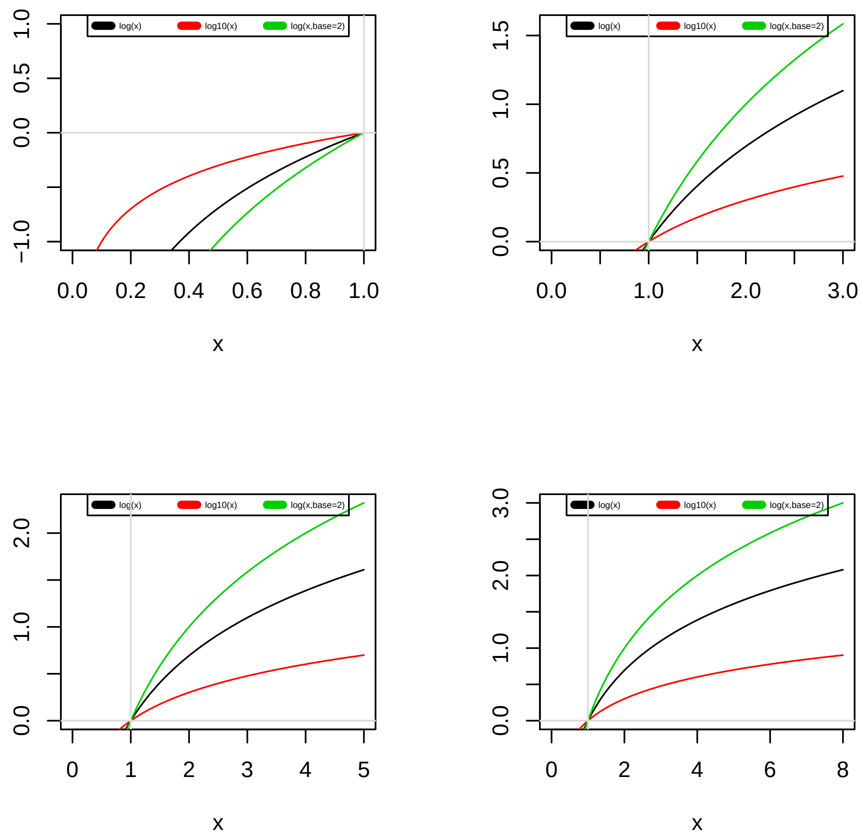
Ejercicio 3

Vamos a comparar las funciones logarıtmica $h_1(x) = log(x) = log_e(x)$,$h_2(x) = log_{10}(x)$ y $h_3(x) = log_2(x)$. Para ello:

1. Dibuja las tres funciones mediante un programa en R similar al que has utilizado en los ejercicios anteriores.

```r
par(mfrow=c(2,2))
for (x in c(1,3,5,8)){
  M <-x
  l <- c(0, max(log(M), log10(M),log(M,base=2)))

  curve(log(x), 0, M, xlab="x",
  ylab="", ylim=l, col =1)
  curve(log10(x), 0, M, xlab="x",
  ylab="", ylim=l, col=2, add=T)
  curve(log(x,base=2), 0, M, xlab="x",
  ylab="", ylim=l, col=3, add=T)
  legend("top",
  c("log(x)","log10(x)","log(x,base=2)"), col=c(1, 2,3) ,
  lty=c(1,1,1),
  lwd=5,
  cex=0.40, horiz = TRUE,inset=0 )
  abline(h=0,col=gray(0.85))
  abline(v=1,col=gray(0.85))
}
```



2. ¿Cómo se comporta la función cuando cambiamos la base del logaritmo?
   La función crecerá mas cuanto menor sea su exponente. Esto es lógico pues al ser el valor mayor, para un mismo valor de x, el exponente al que se eleve la potencia deberá de ser menor.

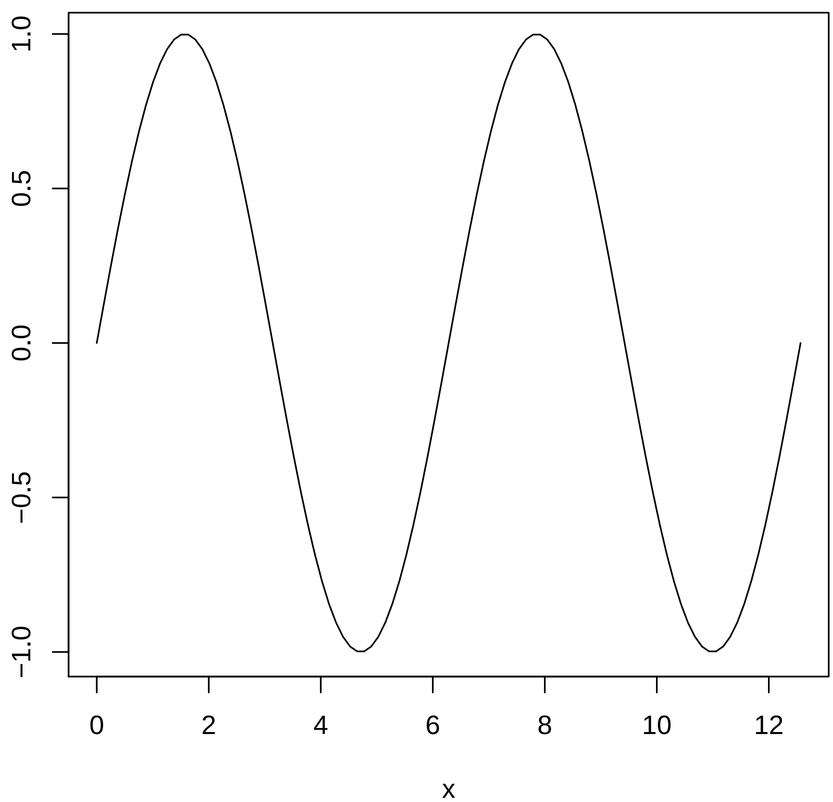
3. ¿Por qué las tres gráficas coinciden en el punto x = 1?
   El logaritmo de 1, siempre vale 0, sea cual sea el exponente.

Ejercicio 4

Vamos a estudiar el comportamiento de las funciones trigonométricas.

1. Dibuja, mediante el comando curve, la función $f(x) = sen(x)$ en el intervalo $[0,\, 4\pi]$.

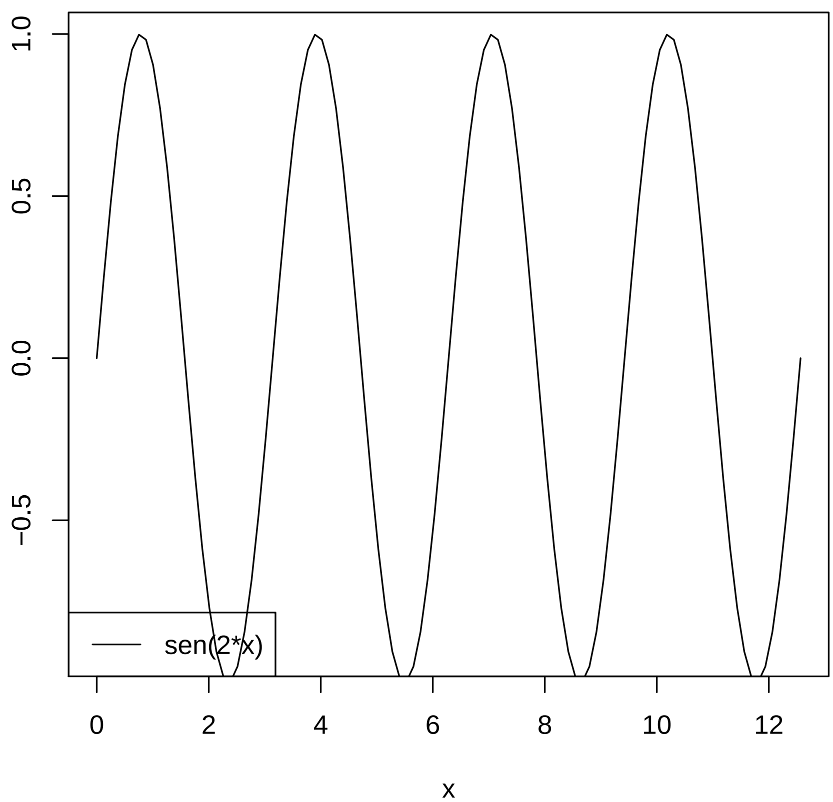
```
par(mfrow=c(1,1))
M <-4*pi
l <- c(min(sin(1:(4*pi))), max(sin(1:(4*pi))))
curve(sin(x), 0, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col =1)
```



2. Dibuja la función $f(x) = sen(2x)$ en el intervalo $[0,\, 4\pi]$. ¿Qué diferencias observas entre las funciones $sen(x)$ y $sen(2x)$?

```
M <-4*pi
l <- c(min(sin( 2*(1:(4*pi)) )),
max(sin( 2*(1:(4*pi)) )))
curve(sin(2*x), 0, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col =1)

legend("bottomleft", c("sen(2*x)"), col=c(1) , lty=c(1) )
```

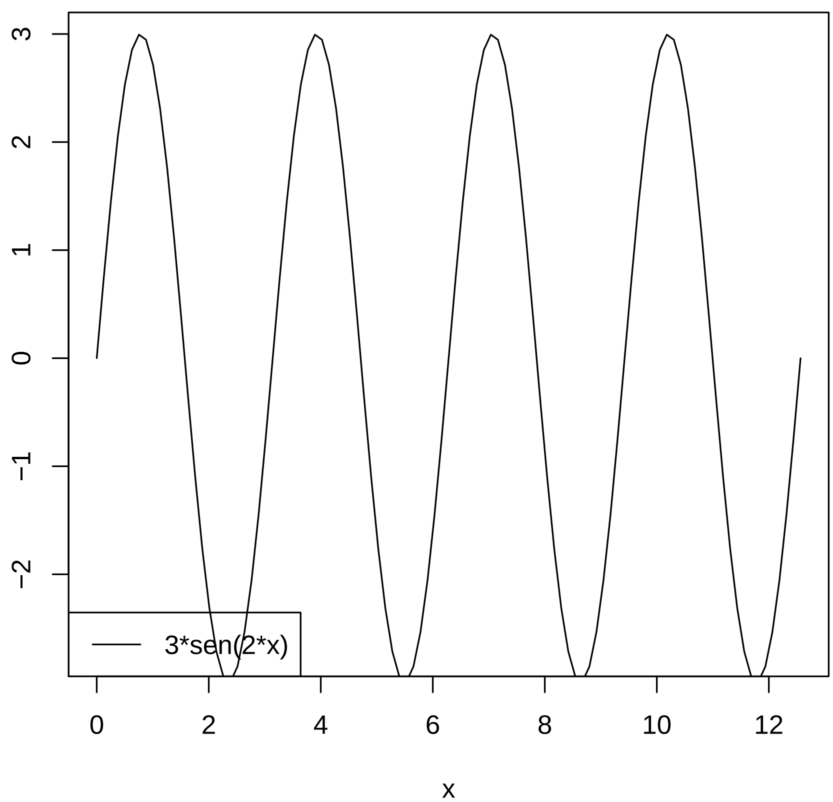


El periodo de la función $sen(2x)$, es la mitad del periodo de la función $sen(x)$.

3. Dibuja la función $f(x) = 3sen(2x)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$. ¿Qué diferencias observas entre las funciones $3sen(2x)$ y $sen(2x)$?

```
M <-4*pi
l <- c(min(3*sin( 2*(1:(4*pi)) )),
max(3*sin( 2*(1:(4*pi)) )))
curve(3*sin(2*x), 0, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col =1)

legend("bottomleft", c("3*sen(2*x)"), col=c(1) , lty=c(1) )
```

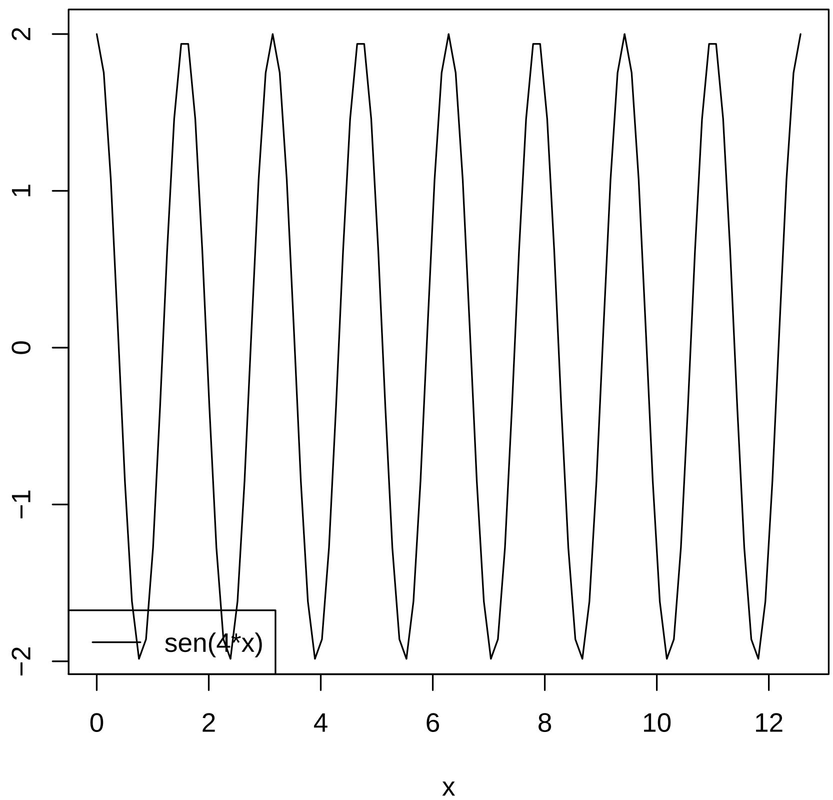


En este caso los periodos son los mismos, pero en este caso la función $3sen(2x)$ oscila entre -3 y 3.

4. Dibuja la función $f(x) = 2cos(4x)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$. ¿Qué diferencias observas entre las funciones $3sen(2x)$ y $2cos(4x)$?

```
M <-4*pi
l <- c(min(2*cos( 4*(1:(4*pi)) )),
max(2*cos( 4*(1:(4*pi)) )))
curve(2*cos(4*x), 0, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col =1)

legend("bottomleft", c("sen(4*x)"), col=c(1) , lty=c(1) )
```



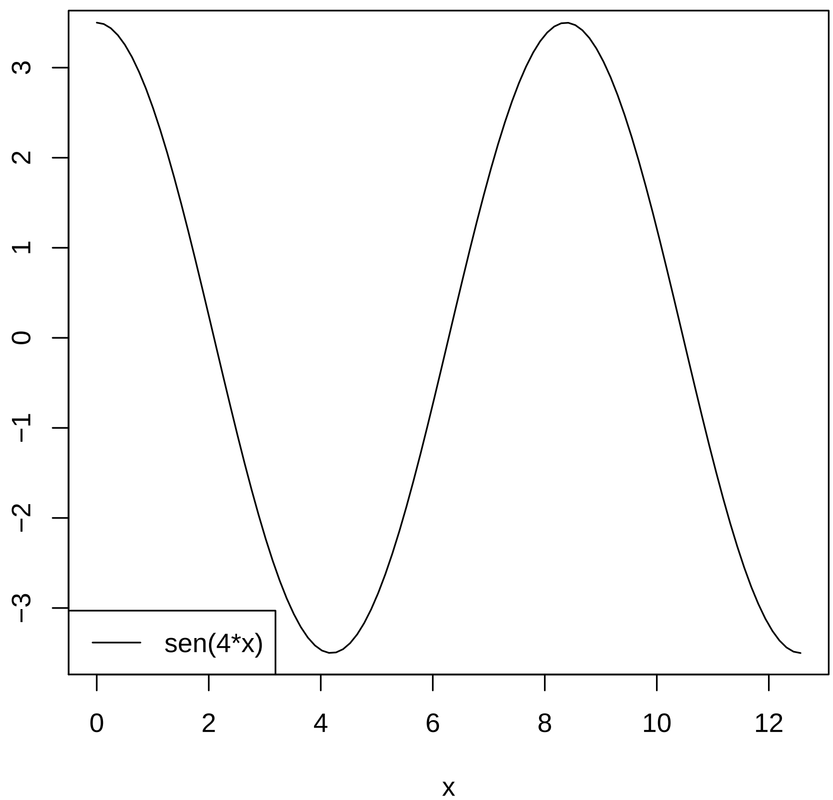
En este caso las funciones poseen distinto periodo así como distinto rango de oscilación, la función $3sen(2x)$ entre -3 y 3 y la función $2cos(4x)$ entre -2 y 2.

5. Construye una función trigonométrica que haga un ciclo y medio en el

intervalo $[0, 4\pi]$ y que tome un valor máximo de 3,5 en el punto x = 0.

```
    M <-4*pi
y <- sin(  (3.5*pi)+(3/4*(1:M)) )*-3.5
l <- c(min(y),max(y))
curve(sin((3/4)*x + 3.5*pi)*-3.5,
0, M, xlab="x", ylab="", ylim=l, col =1)

legend("bottomleft", c("sen(4*x)"), col=c(1) , lty=c(1) )
```



La función que se ha creado es la siguiente $-3.5\pi sen(0.75x + 3.5\pi)$.

Como se puede ver en el plot creado, la función toma un valor máximo de 3.5 en x=0, y posee un ciclo y medio en el intervalo [0, 4π].