Tarea final

Matemáticas

Juan Cantero Jimenez

17 de diciembre, 2021

Ejercicio 1

1. Para $x \leq 0$, téngase en cuenta que la para $x \leq 0$ $f_{k,\lambda}(x)$ es constante e igual a 0, mientras que para $x > 0$ $f_{k,\lambda}(x)$ es $x^{k-1}\lambda^k e^{-\lambda x}$. Puesto que no existe ningún valor de x que anule ambas regiones de la función, el dominio $f_{k,\lambda}(x)$ es $\mathbb{R}$
2. Para conocer el valor de la función cuando esta tiende a $+\infty$ será necesario calcular el límite de cuando $x^{k-1}\lambda^k e^{-\lambda x}$ tiende a $+\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} = f_{k,\lambda}(x) = x^{k-1}\lambda^k e^{-\lambda x} = \frac{x^{k-1}\lambda^k}{e^{\lambda x}} = \frac{\infty}{\infty}$$
Puesto que en el denominador tenemos una función exponencial, esta tenderá más rápido a infinito y en consecuencia:
$$\lim_{x\to+\infty} = f_{k,\lambda}(x) = x^{k-1}\lambda^k e^{-\lambda x} = \frac{x^{k-1}\lambda^k}{e^{\lambda x}} = 0$$
El limite de cuando la función tiende a $-\infty$ es igual a 0 puesto que $f_{k,\lambda}(x)$ para $x \leq 0$ es constante e igual a 0:
$$\lim_{x\to-\infty} f_{k,\lambda}(x) = 0$$
3. Para el estudio de los extremos relativos así como de las regiones de crecimiento y decrecimiento será necesario obtener la primera derivada:
$$f_{k,\lambda}(x) = x^{k-1}\lambda^k e^{-\lambda x},\ para\ x > 0$$
Para simplificar el calculo de la derivada primera, y en el siguiente apartado de la segunda, se reescribe la ecuación como:
$$g_{k,\lambda}(x) = log(f_{k,\lambda}(x))$$
$$f_{k,\lambda}(x) = e^{g_{k,\lambda}(x)}$$
$$g_{k,\lambda}(x) = log(x^{k-1}\lambda^k e^{-\lambda x}) = klog(x) - log(x) + klog(\lambda) - \lambda x$$
Así la primera derivada puede ser calculada como:
$$f_{k,\lambda}(x) = e^{g_{k,\lambda}(x)}$$
$$f'_{k,\lambda}(x) = e^{g_{k,\lambda}(x)} g'_{k,\lambda}(x) = e^{g_{k,\lambda}(x)}\left(\frac{k-1}{x} - \lambda\right)$$
Puesto que $e^{g_{k,\lambda}(x)}$ solo puede ser positivo, el signo de la primera derivada viene dado por el paréntesis:
$$\frac{k-1}{x} - \lambda = 0;\ x = \frac{k-1}{\lambda}$$
Será necesario estudiar el signo a ambos lados de $x = \frac{k-1}{\lambda}$, así para $k = 2,\ \lambda = 2,\ \frac{k-1}{x} - \lambda$ es 0 en $x = \frac{1}{2}$, para valores mayores de $x = \frac{1}{2}$ la primera derivada es negativa y $f_{k,\lambda}(x)$ decreciente, mientras que para valores menores que $x = \frac{1}{2}$ la primera derivada es positiva y en consecuencia $f_{k,\lambda}(x)$ creciente. De forma mas general $f_{k,\lambda}(x)$ es constante e igual a 0 desde $(-\infty, 0]$, crece en el intervalo $(0, \frac{k-1}{\lambda})$ y decrece en el intervalo $(\frac{k-1}{\lambda}, \infty)$. Puesto que se sabe que $f_{k,\lambda}(x)$ es 0 en $x \leq 0$ y el limite cuando tiende a $+\infty$ es cero se puede garantizar que para $k > 1, \lambda > 0$ el punto $x = \frac{k-1}{\lambda}$ es un máximo absoluto.

4. Para el estudio de las regiones de concavidad y convexidad será necesario obtener la segunda derivada:

$$f'_{k,\lambda}(x) = e^{g_{k,\lambda}(x)} g'_{k,\lambda}(x)$$
$$h_{k,\lambda}(x) = e^{g_{k,\lambda}(x)}$$
$$f'_{k,\lambda}(x) = h_{k,\lambda}(x) g'_{k,\lambda}(x)$$
$$f''_{k,\lambda}(x) = h'_{k,\lambda}(x) g'_{k,\lambda}(x) + h_{k,\lambda}(x) g''_{k,\lambda}(x)$$
$$h'_{k,\lambda}(x) = e^{g_{k,\lambda}(x)} \left(\frac{k-1}{x} - \lambda \right)$$
$$g''_{k,\lambda}(x) = \frac{-k+1}{x^2}$$
$$f''_{k,\lambda}(x) = e^{g_{k,\lambda}(x)} \left(\frac{k-1}{x} - \lambda \right) \left(\frac{k-1}{x} - \lambda \right) + e^{g_{k,\lambda}(x)} \left(\frac{-k+1}{x^2} \right) =$$
$$e^{g_{k,\lambda}(x)} \left[\left(\frac{k-1}{x} - \lambda \right)^2 - \frac{k-1}{x^2} \right] = e^{g_{k,\lambda}(x)} \left(\frac{(k-1)^2}{x^2} + \lambda^2 - \frac{2\lambda(k-1)}{x} + \frac{-k+1}{x^2} \right) =$$
$$e^{g_{k,\lambda}(x)} \left(\frac{\lambda^2 x^2 - 2\lambda(k-1)x + k^2 - 3k + 2}{x^2} \right) = e^{g_{k,\lambda}(x)} x^{-2} \left(\lambda^2 x^2 - 2\lambda(k-1)x + k^2 - 3k + 2 \right)$$

Puesto que $e^{g_{k,\lambda}(x)} x^{-2}$ no puede ser 0, el signo de la segunda derivada viene dado por,

$$\lambda^2 x^2 - 2\lambda(k-1)x + k^2 - 3k + 2$$

e x^{-2}. Si reescribimos,

$$\lambda^2 x^2 - 2\lambda(k-1)x + k^2 - 3k + 2 = 0$$
$$a = \lambda^2$$
$$b = -2\lambda(k-1)$$
$$c = k^2 - 3k + 2$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si se substituye obtenemos,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2\lambda k - 2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 k^2 + 4\lambda^2 - 8\lambda^2 k - 4\lambda^2 k^2 + 12k\lambda^2 - 8\lambda^2}}{2^2} = \frac{k - 1 \pm \sqrt{-1+k}}{\lambda}$$
$$a = \frac{k - 1 - \sqrt{-1+k}}{\lambda}$$
$$b = \frac{k - 1 + \sqrt{-1+k}}{\lambda}$$

en orden de facilitar la explicación, la evaluación del signo se ha realizado con un scrip de R

```
f <- function(x){
  x^(k-1)*lambda^k*exp(-lambda* x)
}
g <- function(x){
  k*log(x)-log(x)+k*log(lambda)-lambda*x
}
fd <- function(x){
  exp(g(x))*(((k-1)/x)-lambda)
}
```

```r
fdd <- function(x){
  exp(g(x))*(x^-2)*(lambda^2*x^2-2*lambda*(k-1)*x+k^2-3*k+2)
}

k = 1.9
lambda = 1
epsilon = 1e-4
a = {((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda}[1]
b = {((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda}[2]
a

## [1] -0.0486833

b

## [1] 1.848683

result = c(menor_a=fdd(a-epsilon),
       a = fdd(a),
       mayor_a=fdd(a+epsilon),
       menor_b=fdd(b-epsilon),
       b = fdd(b),
       mayor_b=fdd(epsilon+b))

## Warning in log(x):  NaNs produced
## Warning in log(x):  NaNs produced
## Warning in log(x):  NaNs produced
## Warning in log(x):  NaNs produced
## Warning in log(x):  NaNs produced
## Warning in log(x):  NaNs produced

result

##       menor_a             a       mayor_a       menor_b             b
##           NaN           NaN           NaN -1.519763e-05  7.113421e-17
##       mayor_b
##  1.519439e-05

k = 2.1
lambda = 1
epsilon = 1e-4
a = {((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda}[1]
b = {((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda}[2]
a

## [1] 0.05119115

b

## [1] 2.148809

result = c(menor_a=fdd(a-epsilon),
       a = fdd(a),
```

```
       mayor_a=fdd(a+epsilon),
       menor_b=fdd(b-epsilon),
       b = fdd(b),
       mayor_b=fdd(epsilon+b))
result

##       menor_a             a       mayor_a       menor_b             b
##  2.897659e-03 -1.224596e-14 -2.886636e-03 -1.229061e-05  0.000000e+00
##       mayor_b
##  1.228829e-05

k = 5
lambda = 2
epsilon = 1e-4
a = {((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda}[1]
b = {((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda}[2]
a

## [1] 1

b

## [1] 3

result = c(menor_a=fdd(a-epsilon),
       a = fdd(a),
       mayor_a=fdd(a+epsilon),
       menor_b=fdd(b-epsilon),
       b = fdd(b),
       mayor_b=fdd(epsilon+b))
result

##       menor_a             a       mayor_a       menor_b             b
##  0.0034647564  0.0000000000 -0.0034644100 -0.0005711521  0.0000000000
##       mayor_b
##  0.0005710569

k = 9
lambda = 0.5
epsilon = 1e-4
a = {((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda}[1]
b = {((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda}[2]
a

## [1] 10.34315

b

## [1] 21.65685

result = c(menor_a=fdd(a-epsilon),
       a = fdd(a),
       mayor_a=fdd(a+epsilon),
```

```
       menor_b=fdd(b-epsilon),
       b = fdd(b),
       mayor_b=fdd(epsilon+b))
result

##      menor_a            a      mayor_a      menor_b            b      mayor_b
##  0.003838890  0.000000000 -0.003838884 -0.001130126  0.000000000  0.001130096
```

Como se puede observar para $k > 1, \lambda > 0$ la expresión de la segunda derivada posee dos puntos de corte con el eje x, a y b. Cabe destacar que para valores de $k < 2$ el punto $a < 0$ y no estaría en el dominio de $f_{k,\lambda}(x)$, esto se ha comprobado de forma empírica. En general para $k > 1, \lambda > 0$ la segunda derivada es positiva desde (0,a) y por tanto $f_{k,\lambda}(x)$ es convexa, en el intervalo (a, b) la segunda derivada es negativa y por tanto $f_{k,\lambda}(x)$ es cóncava y por último desde (b, $+\infty$) la segunda derivada es positiva y por tanto la $f_{k,\lambda}(x)$ convexa. Además la función posee para $k > 1, \lambda > 0$ dos puntos de inflexión siempre que $a > 0$.

5. Para el caso $k = 1$, $f_{k,\lambda}(x)$ no posee extremos relativos debido a que la función siempre es decreciente. Esto se puede comprobar atendiendo a la primera derivada realizada en el apartado 3. El término $e^{g_{k,\lambda}(x)}$ siempre es positivo, el término $\frac{k-1}{x} - \lambda$ para $k = 1$ tomará siempre el valor de $-\lambda$. Así la primera derivada siempre es negativa y en consecuencia $f_{k,\lambda}(x)$ siempre es decreciente para $x > 0$

Para el caso $k = 1$ y $x > 0$ la función, que toma la forma de una exponencial negativa, así como su primera y segunda derivada son:

$$f_{k,\lambda}(x) = \lambda^k e^{-\lambda x}$$
$$f'_{k,\lambda}(x) = -\lambda^{k+1} e^{-\lambda x}$$
$$f''_{k,\lambda}(x) = \lambda^{k+2} e^{-\lambda x}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ debido a que la función siempre existe para $x > 0$ y para $x \leq 0$ siempre es 0. La primera derivada siempre es negativa por lo que $f_{k,\lambda}(x)$ siempre es decreciente para $x > 0$. La segunda derivada siempre es postiva por lo que $f_{k,\lambda}(x)$ siempre es convexa. Además $f_{k,\lambda}(x)$ no posee ni extremos relativos, ni puntos de inflexión. Por último el limite de cuando $f_{k,\lambda}(x)$ tiende a ∞:

$$\lim_{x \to -\infty} f_{k,\lambda}(x) = \lambda^k e^{-\lambda x} = \frac{\lambda^k}{\infty} = 0$$

A continuación se muestrán los plots de las curvas que se piden en el ejercicio

```
par(mfrow=c(2,2))

f <- function(x){
  x^(k-1)*lambda^k*exp(-lambda* x)
}
g <- function(x){
  log(x^(k-1)*(lambda^k)*exp(-lambda* x))
}
fd <- function(x){
  exp(g(x))*(((k-1)/x)-lambda)
}
fdd <- function(x){
  exp(g(x))*(x^-2)*(lambda^2*x^2-2*lambda*(k-1)*x+k^2-3*k+2)
}
k = 0.5
lambda = 1
```

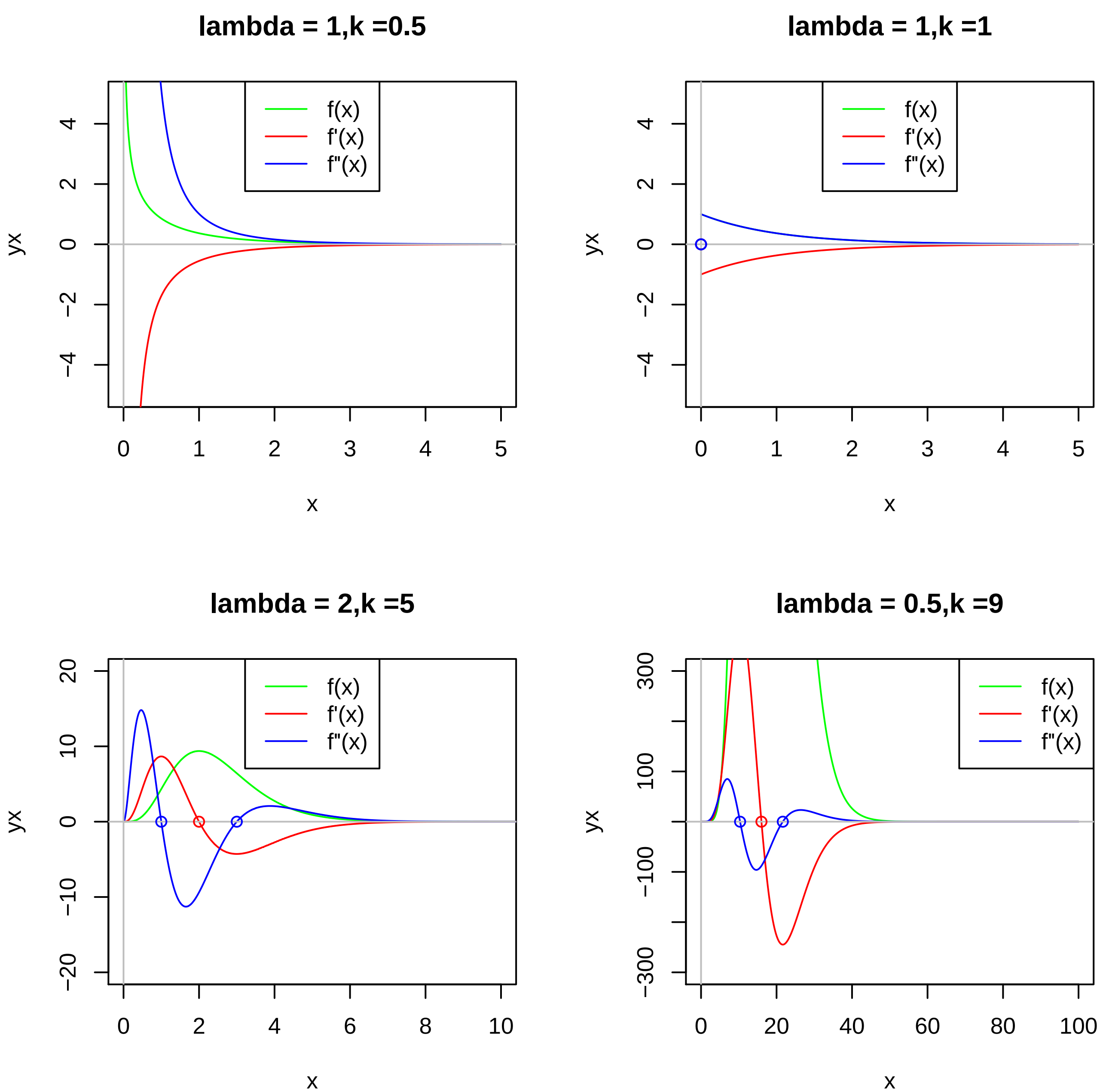
```
x <- (0:5000)/1000
yx <- f(x)
dyx <- fd(x)
ddyx <- fdd(x)
plot(x,yx, col="green","l",ylim = c(-5,5),xlim=c(0,5))
lines(x,dyx,col="red")
lines(x,ddyx,col="blue")
abline(h=0,v=0, col="grey")
x0 = (k-1)/lambda
points(x0, 0, col ="red")
a = lambda^2
b = -2*lambda*(k-1)
c = k^2-3*k+2
x1_ = ((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda
```

```
## Warning in sqrt(-1 + k):  NaNs produced
```

```
points(x1_, rep(0,2),col="blue")
legend("top", legend=c("f(x)","f'(x)", "f''(x)"), col = c("green","red","blue"), lty=rep(1, 2))
title(main=paste("lambda = ",lambda,",","k =", k,sep=""))


k = 1
lambda = 1
x <- (0:5000)/1000
yx <- f(x)
dyx <- fd(x)
ddyx <- fdd(x)
plot(x,yx, col="green","l",ylim = c(-5,5),xlim=c(0,5))
lines(x,dyx,col="red")
lines(x,ddyx,col="blue")
abline(h=0,v=0, col="grey")
x0 = (k-1)/lambda
points(x0, 0, col ="red")
a = lambda^2
b = -2*lambda*(k-1)
c = k^2-3*k+2
x1_ = ((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda
points(x1_, rep(0,2),col="blue")
legend("top", legend=c("f(x)","f'(x)", "f''(x)"), col = c("green","red","blue"), lty=rep(1, 2))
title(main=paste("lambda = ",lambda,",","k =", k,sep=""))
k = 5
lambda = 2
x <- (0:50000)/1000
yx <- f(x)
dyx <- fd(x)
ddyx <- fdd(x)
plot(x,yx, col="green","l",ylim = c(-20,20),xlim=c(0,10))
lines(x,dyx,col="red")
lines(x,ddyx,col="blue")
abline(h=0,v=0, col="grey")
x0 = (k-1)/lambda
```

```
points(x0, 0, col ="red")
a = lambda^2
b = -2*lambda*(k-1)
c = k^2-3*k+2
x1_ = ((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda
points(x1_, rep(0,2),col="blue")
legend("top", legend=c("f(x)","f'(x)", "f''(x)"), col = c("green","red","blue"), lty=rep(1, 2))
title(main=paste("lambda = ",lambda,",","k =", k,sep=""))
k = 9
lambda = 0.5
x <- (0:5000)/50
yx <- f(x)
dyx <- fd(x)
ddyx <- fdd(x)
plot(x,yx, col="green","l",ylim = c(-300,300),xlim=c(0,100))
lines(x,dyx,col="red")
lines(x,ddyx,col="blue")
abline(h=0,v=0, col="grey")
x0 = (k-1)/lambda
points(x0, 0, col ="red")
a = lambda^2
b = -2*lambda*(k-1)
c = k^2-3*k+2
x1_ = ((k - 1) + c(-1, 1)*sqrt(-1+k))/lambda
points(x1_, rep(0,2),col="blue")
legend("topright", legend=c("f(x)","f'(x)", "f''(x)"), col = c("green","red","blue"), lty=rep(1, 2
title(main=paste("lambda = ",lambda,",","k =", k,sep=""))
```



En conclusión creo que lo mostrado en los plots, concuerda de forma acertada con los expuesto en el análisis teórico de $f_{k,\lambda}(x)$, y en especial en lo mostrado en el caso especial de $k = 1$ y $0 < k < 1$.
Por último se muestra la integral desde 0 hasta $+\infty$ de $f_{k,\lambda}(x)$ para los casos pedidos:

```
f <- function(x){
  x^(k-1)*lambda^k*exp(-lambda* x)
}
k = 0.5
lambda = 1
integrate(f, 0, Inf)

## 1.772454 with absolute error < 2e-05

k = 1
```

```
lambda = 1
integrate(f, 0, Inf)

## 1 with absolute error < 5.7e-05

k = 5
lambda = 2
integrate(f, 0, Inf)

## 24 with absolute error < 4.5e-05

k = 9
lambda = 0.5
integrate(f, 0, Inf)

## 40320 with absolute error < 9e-04
```

Ejercicio 2a

1.
```
n = 1:7
factorial(n-1)

## [1]   1   1   2   6  24 120 720

gamma(n)

## [1]   1   1   2   6  24 120 720

factorial(n-1) == gamma(n)

## [1] TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
```

2.
```
n = 1:7
fx <- function(x,k=1,lambda=1){
  (x^(k-1))*(lambda^k)*exp(-lambda*x)
}
dummy=sapply(n, function(n){
cat("\n")
cat("n=",n,"\n",sep="")
j= integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)$value
cat("##",
   "integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)$value \n",
   j,"\n",
   "##",
   "gamma(n) \n",
   gamma(n), "\n",sep="")
  #integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)£value
```

```
  #gamma(n)
cat("\n")
})

##
## n=1
## ##integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)$value
## 1
## ##gamma(n)
## 1
##
##
## n=2
## ##integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)$value
## 1
## ##gamma(n)
## 1
##
##
## n=3
## ##integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)$value
## 2
## ##gamma(n)
## 2
##
##
## n=4
## ##integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)$value
## 6
## ##gamma(n)
## 6
##
##
## n=5
## ##integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)$value
## 24
## ##gamma(n)
## 24
##
##
## n=6
## ##integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)$value
## 120
## ##gamma(n)
## 120
##
##
## n=7
## ##integrate(fx, 0, Inf, k=n, lambda=1)$value
## 720
## ##gamma(n)
```

```
## 720
```

Ejercicio 2b

```r
kk = 0.5
lambdaa = 1

f <- function(x,k=kk,lambda=lambdaa){
  wrap <- function(x){
    if (x >0){(x^(k-1))*(lambda^k)*exp(-lambda*x)}else{0}
  }
  if (length(x) > 1){
    sapply(x, wrap)
  }else(wrap(x))
}
## 1a
integrate(f,0,1)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.8427008

pgamma(1, kk, lambdaa)

## [1] 0.8427008

## 1b
integrate(f,0,0)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0

pgamma(0, kk, lambdaa)

## [1] 0

## 1c
integrate(f,0,kk)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.6826895

pgamma(kk, kk, lambdaa)

## [1] 0.6826895

## 2
integrate(f,0,2*kk)$value*(1/gamma(kk))-integrate(f,0,0)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.8427008

pgamma(2*kk, kk, lambdaa)-pgamma(0, kk, lambdaa)
```

```
## [1] 0.8427008

## 3
integrate(f,0,Inf)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.9999999

integrate(dgamma, 0, Inf, shape=kk, rate=lambdaa)

## 0.9999999 with absolute error < 1.1e-05

kk = 1
lambdaa = 1

f <- function(x,k=kk,lambda=lambdaa){
  wrap <- function(x){
    if (x >0){(x^(k-1))*(lambda^k)*exp(-lambda*x)}else{0}
  }
  if (length(x) > 1){
    sapply(x, wrap)
  }else(wrap(x))
}
## 1a
integrate(f,0,1)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.6321206

pgamma(1, kk, lambdaa)

## [1] 0.6321206

## 1b
integrate(f,0,0)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0

pgamma(0, kk, lambdaa)

## [1] 0

## 1c
integrate(f,0,kk)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.6321206

pgamma(kk, kk, lambdaa)

## [1] 0.6321206

## 2
integrate(f,0,2*kk)$value*(1/gamma(kk))-integrate(f,0,0)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.8646647
```

```r
pgamma(2*kk, kk, lambdaa)-pgamma(0, kk, lambdaa)

## [1] 0.8646647

## 3
integrate(f,0,Inf)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 1

integrate(dgamma, 0, Inf, shape=kk, rate=lambdaa)

## 1 with absolute error < 5.7e-05

kk = 5
lambdaa = 2

f <- function(x,k=kk,lambda=lambdaa){
  wrap <- function(x){
    if (x >0){(x^(k-1))*(lambda^k)*exp(-lambda*x)}else{0}
  }
  if (length(x) > 1){
    sapply(x, wrap)
  }else(wrap(x))
}
## 1a
integrate(f,0,1)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.05265302

pgamma(1, kk, lambdaa)

## [1] 0.05265302

## 1b
integrate(f,0,0)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0

pgamma(0, kk, lambdaa)

## [1] 0

## 1c
integrate(f,0,kk)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.9707473

pgamma(kk, kk, lambdaa)

## [1] 0.9707473

## 2
integrate(f,0,2*kk)$value*(1/gamma(kk))-integrate(f,0,0)$value*(1/gamma(kk))
```

```r
## [1] 0.9999831

pgamma(2*kk, kk, lambdaa)-pgamma(0, kk, lambdaa)

## [1] 0.9999831

## 3
integrate(f,0,Inf)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 1

integrate(dgamma, 0, Inf, shape=kk, rate=lambdaa)

## 1 with absolute error < 1.9e-06

kk = 9
lambdaa = 0.5

f <- function(x,k=kk,lambda=lambdaa){
  wrap <- function(x){
    if (x >0){(x^(k-1))*(lambda^k)*exp(-lambda*x)}else{0}
  }
  if (length(x) > 1){
    sapply(x, wrap)
  }else(wrap(x))
}
## 1a
integrate(f,0,1)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 3.43549e-09

pgamma(1, kk, lambdaa)

## [1] 3.43549e-09

## 1b
integrate(f,0,0)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0

pgamma(0, kk, lambdaa)

## [1] 0

## 1c
integrate(f,0,kk)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 0.04025731

pgamma(kk, kk, lambdaa)

## [1] 0.04025731

## 2
integrate(f,0,2*kk)$value*(1/gamma(kk))-integrate(f,0,0)$value*(1/gamma(kk))
```

```
## [1] 0.5443474

pgamma(2*kk, kk, lambdaa)-pgamma(0, kk, lambdaa)

## [1] 0.5443474

## 3
integrate(f,0,Inf)$value*(1/gamma(kk))

## [1] 1

integrate(dgamma, 0, Inf, shape=kk, rate=lambdaa)

## 1 with absolute error < 2.2e-08
```

Ejercicio 3a

1.
```
par(mfrow=c(1,1))
L = 1000
P <- function(t, L, c, a){
  L/(1+c*exp(a*t))
}
t = c(0,1,2,3,4)
pt = c(200,400,650,850,950)
y = log((L/pt)-1)
```

La relación entre los parámetros (α, β) y (a,c) es:

$$log\left(\frac{L}{P(t)} - 1\right) = \alpha + \beta t$$
$$log\left(\frac{L}{\frac{L}{1+ce^{at}}} - 1\right) = \alpha + \beta t$$
$$log\left(ce^{at}\right) = \alpha + \beta t$$
$$log(c) + at = \alpha + \beta t,\ si\ t = 0$$
$$log(c) = \alpha;\ c = e^{\alpha}$$
$$\beta = a$$

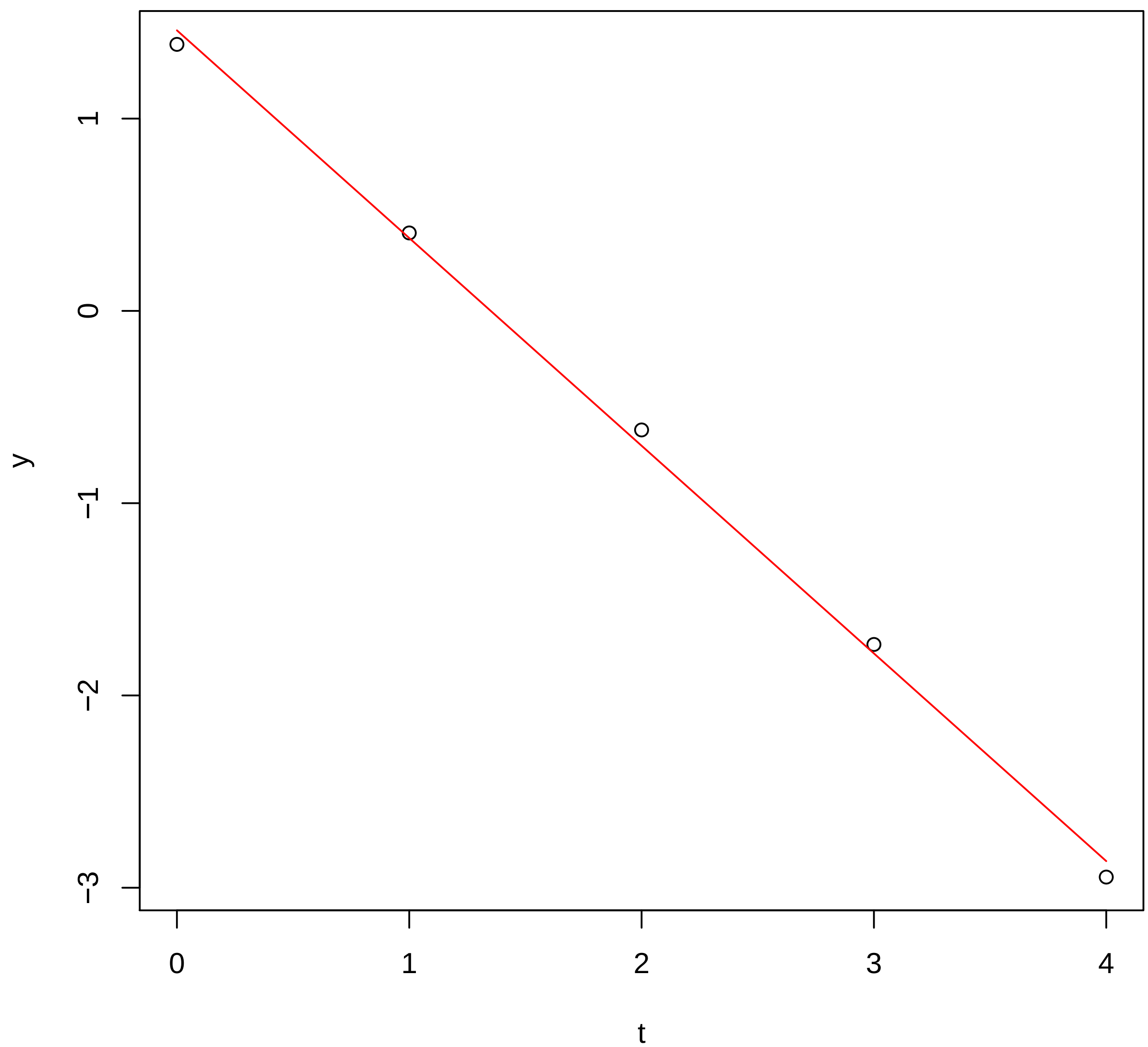
2.
```
tabla <- NULL
tabla <- rbind(t,y)
rownames(tabla) <- c("t", "y")
tabla

##       [,1]      [,2]       [,3]      [,4]      [,5]
## t 0.000000 1.0000000  2.0000000  3.000000  4.000000
## y 1.386294 0.4054651 -0.6190392 -1.734601 -2.944439
```

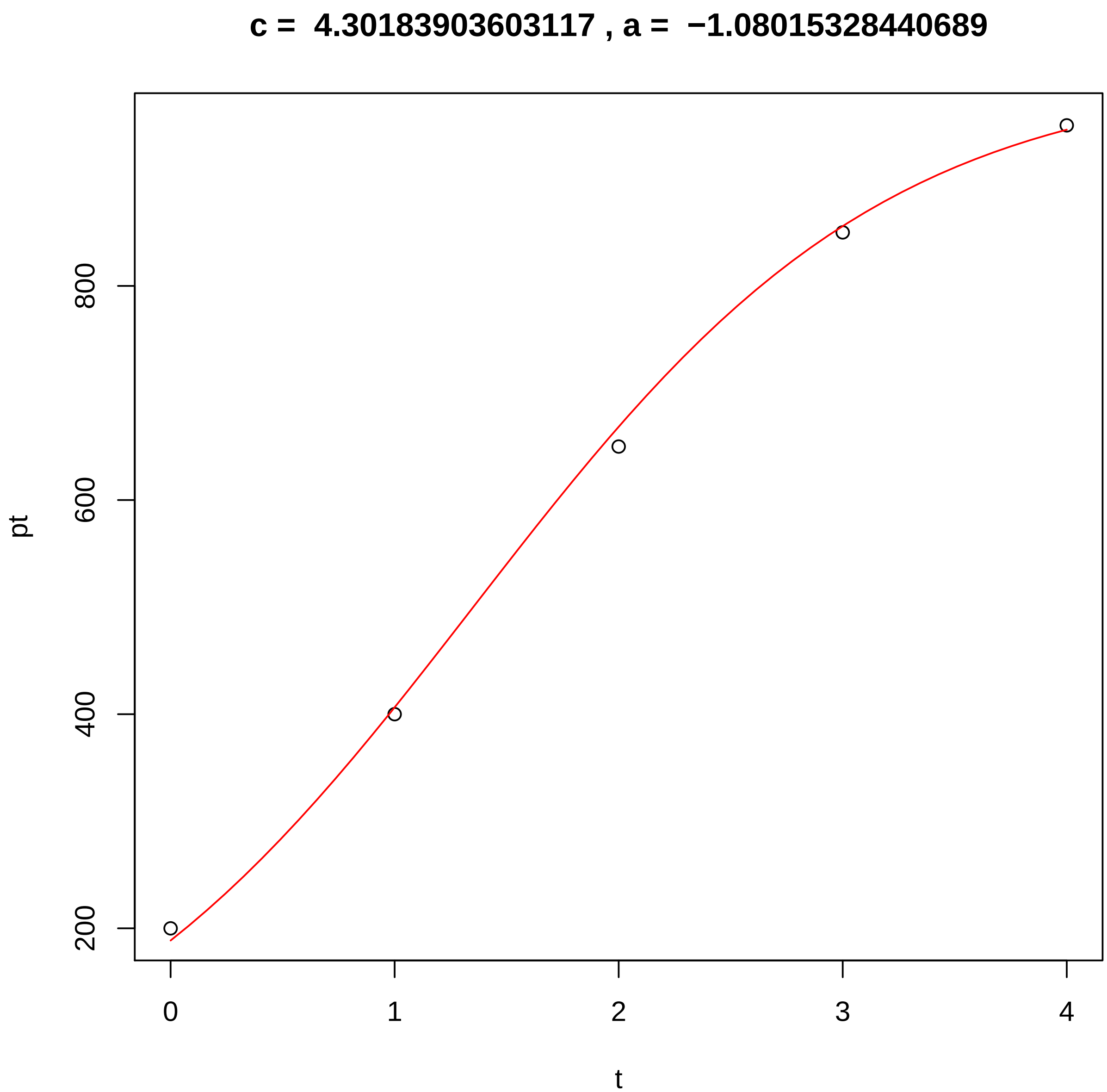
3.
```
co = lsfit(tabla[1,], tabla[2,])$coefficients
names(co) <- c("alpha","beta")
co

##     alpha      beta
##  1.459043 -1.080153

t_ = seq(0, 4, length.out=50)
y_ = t_*co[2] + co[1]
plot(t,y)
lines(t_, y_, col="red")
```



4.
```r
t_ = seq(0, 4, length.out=50)
p_ = P(t_, L, exp(co[1]), co[2])
plot(t,pt)
lines(t_, p_, col="red")
title(main=paste("c = ", exp(co[1]), ",", "a = ", co[2]))
```



Ejercicio 3b

1.

$$\begin{cases} 1.3864 = \alpha + \beta * 0 \\ 0.4054 = \alpha + \beta * 1 \\ -0.6190 = \alpha + \beta * 2 \\ -1.7346 = \alpha + \beta * 3 \\ -2.944 = \alpha + \beta * 4 \end{cases}$$

2.
```
A = cbind(rep(1, 5), 0:4)
A

##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    1    1
## [3,]    1    2
## [4,]    1    3
## [5,]    1    4

q = y
y

## [1]  1.3862944  0.4054651 -0.6190392 -1.7346011 -2.9444390
```

3.
```
t(A)%*%A

##      [,1] [,2]
## [1,]    5   10
## [2,]   10   30

t(A)%*%q

##           [,1]
## [1,]  -3.50632
## [2,] -17.81417
```

4.
```
solve(t(A)%*%A, t(A)%*%q)

##           [,1]
## [1,]  1.459043
## [2,] -1.080153

co #coeficientes calculados en el ejercico 3a

##     alpha      beta
##  1.459043 -1.080153
```