Tarea 6

Mátemáticas para Bioestadística
Juan Cantero Jimenez
30 de noviembre, 2021

1. *Comprueba que las funciones definidas por la fórmula (1) son solución de la ecuación diferencial $y' = -2y^2$ para cualquier valor de A.*

Para comprobar que la formula 1 es solución de la ecuación diferencial $y' = -2y^2$ se debe de obtener el valor de y' y $-2y^2$ si coinciden, la formula 1 será solución de la ecuación.

$$y = \frac{1}{A+2t}$$
$$y' = \frac{-2}{(A+2t)^2}, -2y^2 = -2 * \frac{1}{(A+2t)^2} = \frac{-2}{(A+2t)^2}$$

Como ambos términos son iguales, la formula 1 es solución de la ecuación diferencial.

2. *Estudia lo más rigurosamente posible el comportamiento de la familia de funciones dadas por la fórmula (1), según el valor de A. En particular analiza los siguientes puntos:*

- *a el dominio de las funciones de la familia.*
- *b las asıntotas horizontales y verticales.*
- *c las regiones de crecimiento y decrecimiento.*
- *d las regiones de concavidad y convexidad.*
- *e los extremos relativos y puntos de inflexión.*

a Al tratarse de una función racional, el dominio serán todos los puntos que no hagan al denominador cero así:

$$0 = A + 2t; t = \frac{-A}{2},\ Dominio = \mathbb{R} - \frac{-A}{2}$$

b La asíntota vertical puede obtenerse estudiando el límite de la función en los puntos no definidos en el dominio:

$$\lim_{t \to \frac{-A}{2}} \frac{1}{A+2t} = \frac{1}{0} = \infty$$

Como el límite tiende a infinito, la función tiene una asíntota en el punto $\frac{-A}{2}$.
Las asíntotas horizontales pueden obtenerse estudiando el limite de la función cuando tiende a infinito:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{A+2t} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función posee una asíntota horizontal en la recta $y = 0$.

c Las regiones de crecimiento y decrecimiento pueden estudiarse mediante el símbolo de la derivada primera, que se calculo en el ejercicio 1. El numerador siempre es negativo, y el denominador es un polinomio que al estar elevado al cuadrado siempre será positivo, así la primera derivada siempre será negativa, y en consecuencia la función siempre decrecerá en su dominio.

d Las regiones de concavidad y convexidad pueden estudiarse mediante el signo de la segunda derivada:

$$y'' = \frac{8}{(A+2t)^3}$$

El numerador siempre se positivo y el denominador al estar al cubo dependerá del signo del polinomio de su interior. Este posee un valor de 0 en el punto $\frac{-A}{2}$ así que se deberá de estudiar el signo a ambos lados de $\frac{-A}{2}$. Los valores menores a $\frac{-A}{2}$ serán negativos y por tanto la segunda derivada será negativa, y valores superiores a dicho punto serán positivos y por tanto esta positiva. Así la función será cóncava desde $-\infty$ hasta $\frac{-A}{2}$ y convexa desde este punto hasta $+\infty$.

e Puesto que la función siempre decrece no posee ni máximos ni mínimos. Como el cambio en la concavidad de la función se da en una asíntota vertical, la función no posee puntos de inflexión.

3. *Se sabe que la tassa de infectados en un cierto instante, correspondiente a $t = 0$ era de 0,5. ¿Qué curva de la familia es la única solución del Problema de Valores Iniciales (PVI)?Lo anterior es equivalente a encontrar qué valor de A cumple que la tasa de infectados para $t = 0$ era de 0,5.*

$$y(0) = 0.5$$
$$0.5 = \frac{1}{A}; A = \frac{1}{0.5} = 2$$

El valor de A que satisface el PVI es $A = 2$.

4.*¿Cuál será la tasa de infectados en el instante $t = 3$?*

$$y = \frac{1}{2+2*3} = \frac{1}{8}$$

La tasa de infectados en el instante $t = 3$ es de $\frac{1}{8}$.

5.*¿A partir de qué instante la tasa de infectados será inferior a 0.1?*

$$y = 0.1$$
$$0.1 = \frac{1}{2+2*t}; t = 4$$

A partir de $t = 4$ la función valdrá menos de 0.1

6.*Utiliza el comando integrate de R para calcular la integral definida de la función (1) con el valor de A deducido en un apartado anterior en el intervalo [0, 4] y también en el intervalo [0, $+\infty$].*

```r
fx <- function(x){1/(2+2*x)}

integrate(fx,0,4)

## 0.804719 with absolute error < 1.8e-09

integrate(fx,0,Inf)

## Error in integrate(fx, 0, Inf):  maximum number of subdivisions reached
```

7. *Intenta buscar una función primitiva de la función (1). Comprueba los resultados numéricos del apartado anterior de manera analıtica utilizando el teorema de Barrow.*

$$f'(x) = \frac{1}{A+2t}$$
$$F(x) = \frac{\log(A+2t)}{2}$$
$$F(4) - F(0) = 0.804719$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\log(A+2t)}{2} = \infty$$