Ejercicios de Probabilidad y Simulación

Tema 1: Probabilidad, una medida de la incertidumbre

Juan Cantero Jimenez

20 de Octubre, 2021

3. *Juan y Marta son poco puntuales. Cuando quedan juntos a una hora, la probabilidad de que Juan sea puntual es 0.4, mientras que la probabilidad de que Marta llegue tarde es 0.55. Sabiendo que la probabilidad de que al menos uno de los dos llegue a la hora acordada es 0.7, calcular la probabilidad de que los dos sean puntuales.*

$$P(Juan\ llegue\ puntual) = P(J) = 0.4$$

$$P(Juan\ no\ llegue\ puntual) = P(\bar{J}) = 1 - P(J) = 0.6$$

$$P(Marta\ no\ llegue\ puntual) = P(\bar{M}) = 0.55$$

$$P(Marta\ llegue\ puntual) = P(M) = 1 - P(\bar{M}) = 0.45$$

$$P(al\ menos\ uno\ de\ los\ dos\ llega\ puntual) = P(J \cup M) = 0.7$$

Se propone calcular la probabilidad de que Marta y Juan lleguen puntuales esto es equivalente a:

$$P(J \cap M)$$

Para calcular dicha probabilidad es necesario usar la siguiente propiedad

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),\ \Omega = \{A, B\}$$

que permite relacionar las probabilidades individuales con la unión y la intersección de ambas, así despejando la intersección y sustituyendo se obtiene el resultado deseado:

$$P(J \cap M) = P(J) + P(M) - P(J \cup M) =$$

$$0.4 + 0.45 - 0.7 = 0.15$$

4. *Juan (el del ejercicio anterior) ha quedado ahora con su hermano David. La probabilidad de que los dos sean puntuales es 0.1 y la de que los dos lleguen tarde es 0.2. Calcular la probabilidad de que David sea puntual.*

$$P(Juan\ y\ David\ sean\ puntuales) = P(J \cap D) = 0.1$$

$$P(Juan\ y\ David\ no\ sean\ puntuales\ ) = P(\bar{J} \cap \bar{D}) = 0.2$$

Se propone calcular la probabilidad de que David llegue puntual esto es equivalente a:

$$P(D)$$

Para calcular este valor es necesario usar la propiedad mencionada en el ejercicio anterior, así como

$$1 - P(A \cap B) = P(\bar{A} \cup \bar{B}),\ \Omega = A, B$$

o el contrario de la intersección es equivalente a la unión de las negaciones, lo que permite calcular la probabilidad $P(J \cup D)$, así obteniendo este valor, despejando $P(D)$ y sustituyendo se obtiene:

$$P(J \cup D) = 1 - P(\bar{J} \cap \bar{D}) =$$

$$1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(D) = P(J \cup D) - P(J) + P(J \cap D) =$$

$$0.8 - 0.4 + 0.1 = 0.5$$

8. *En una fábrica de tornillos hay cuatro máquinas trabajando en paralelo. La máquina 1 produce el 35 % de los tornillos, y solo el 5 % de ellos son defectuosos. Similarmente las máquinas 2, 3 y 4 producen el 30 %, el 20 % y el 15 % del total, y sus porcentajes de tornillos defectuosos son 4 %, 2 % y 2 % respectivamente. Calcular las probabilidades de que un tornillo elegido al azar entre los fabricados por esas máquinas sea:*

a. Defectuoso y fabricado por la maquina i (i = 1,2,3,4).
b. Defectuoso.
c. No defectuoso.
d. Fabricado por la máquina 2 y no defectuoso.

$$P(pieza\ fabricada\ por\ maquina\ 1) = P(M_1) = 0.35$$

$$P(pieza\ defectuosa\ fabricada\ por\ maquina\ 1) = P(D|M_1) = 0.05$$

$$P(pieza\ fabricada\ por\ maquina\ 2) = P(M_2) = 0.30$$

$$P(pieza\ defectuosa\ fabricada\ por\ maquina\ 2) = P(D|M_2) = 0.04$$

$$P(pieza\ fabricada\ por\ maquina\ 3) = P(M_3) = 0.20$$

$$P(pieza\ defectuosa\ fabricada\ por\ maquina\ 3) = P(D|M_3) = 0.02$$

$$P(pieza\ fabricada\ por\ maquina\ 4) = P(M_4) = 0.15$$

$$P(pieza\ defectuosa\ fabricada\ por\ maquina\ 4) = P(D|M_4) = 0.02$$

Para calcular las probabilidades pedidas en los apartados a y b será necesario hacer uso de la fórmula del producto:

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B),\ \Omega = \{A, B\}$$

a.

$$P(M_1 \cap D) = P(D|M_1) * P(M_1) = 0.05 * 0.35 = 0.0175$$

$$P(M_2 \cap D) = P(D|M_2) * P(M_2) = 0.04 * 0.30 = 0.0120$$

$$P(M_3 \cap D) = P(D|M_3) * P(M_3) = 0.02 * 0.20 = 0.0040$$

$$P(M_4 \cap D) = P(D|M_4) * P(M_4) = 0.02 * 0.15 = 0.0030$$

b.

$$P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) + P(M_3 \cap D) + P(M_4 \cap D) =$$
$$0.0175 + 0.0120 + 0.0040 + 0.0030 = 0.0365$$

c.

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.0365 = 0.9635$$

d.

$$P(M_2 \cap \bar{D}) = P(\bar{D}|M_2) * P(M_2) = (1 - 0.04) * 0.30 = 0.288$$