Optimización No Lineal

1 Introducción

La optimización no lineal (NLP, por sus siglas en inglés) se refiere al proceso de encontrar el valor óptimo de una función objetivo $f(x)$, donde tanto esta función como las restricciones pueden ser no lineales. Este tipo de problemas se define matemáticamente como:

$$\min_{x} f(x),$$

sujeto a:

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, l,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa las variables a optimizar. En esta sección explicamos conceptos esenciales como conjuntos y funciones convexas de manera accesible.

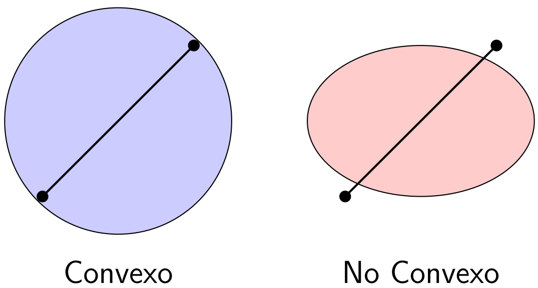
2 Conceptos Preliminares

2.1 ¿Qué es un Conjunto Convexo?

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si, para cualquier par de puntos $a, b \in D$, la línea recta que conecta ambos puntos está completamente contenida dentro del conjunto. Esto se expresa matemáticamente como:

$$\lambda a + (1 - \lambda) b \in D, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Ejemplo: Imagina un círculo en un plano 2D. Si eliges dos puntos dentro del círculo, la línea que conecta esos puntos siempre estará dentro del círculo, por lo que es un conjunto convexo.



Ejemplos de Conjuntos Convexos:

- El espacio completo $\mathbb{R}^n$.
- Un segmento de línea entre dos puntos.
- Poliedros definidos por $Ax \leq b$, donde A es una matriz y b un vector.

3 ¿Qué es una Función Convexa?

Una función $f(x)$ se denomina **convexa** si, para cualquier par de puntos x_1, x_2 en su dominio y para cualquier valor λ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

En términos sencillos, esto significa que el valor de la función en un punto intermedio entre x_1 y x_2 no es mayor que la combinación lineal (promedio ponderado) de los valores de la función en esos puntos.

3.1 Interpretación Geométrica

Geométricamente, la propiedad de convexidad implica que la gráfica de la función está por debajo o sobre la recta que une cualquier par de puntos en la curva. Esta recta se conoce como *cuerda* de la función entre x_1 y x_2.

3.2 Ejemplo : Verificar si $f(x) = x^2$ es Convexa

1. **Seleccionar dos puntos en el dominio:** Elijamos $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.
2. **Elegir un valor de λ:** Tomemos $\lambda = 0{,}5$, que representa el punto medio entre x_1 y x_2.
3. **Calcular la combinación convexa de x_1 y x_2:**

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times 3 = 2.$$

4. **Evaluar $f(x)$ en el punto intermedio:**

$$f(x) = f(2) = (2)^2 = 4.$$

5. **Calcular la combinación convexa de $f(x_1)$ y $f(x_2)$:**

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = 0{,}5 \times (1)^2 + 0{,}5 \times (3)^2 = 0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times 9 = 0{,}5 + 4{,}5 = 5.$$

6. **Comparar los resultados:**

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 4 \leq 5 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

La desigualdad se cumple, lo que indica que $f(x) = x^2$ es una función convexa en este intervalo.

7. **Generalización:** Para confirmar que la función $f(x) = x^2$ es convexa en todo su dominio, utilizaremos el criterio de la segunda derivada, que establece que si la segunda derivada de una función es no negativa en un intervalo, entonces la función es convexa en ese intervalo.

   a) **Calcular la primera derivada de $f(x)$:**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$

   La primera derivada $f'(x)$ representa la pendiente de la tangente a la curva en cada punto x.

b) **Calcular la segunda derivada de $f(x)$:**

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(2x) = 2.$$

La segunda derivada $f''(x)$ indica la concavidad de la función. Si $f''(x) > 0$, la función es convexa (curva hacia arriba); si $f''(x) < 0$, la función es cóncava (curva hacia abajo).

c) **Analizar el signo de la segunda derivada:** Observamos que:

$$f''(x) = 2 \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esto significa que la segunda derivada es constante y positiva en todo el dominio de $f(x)$.

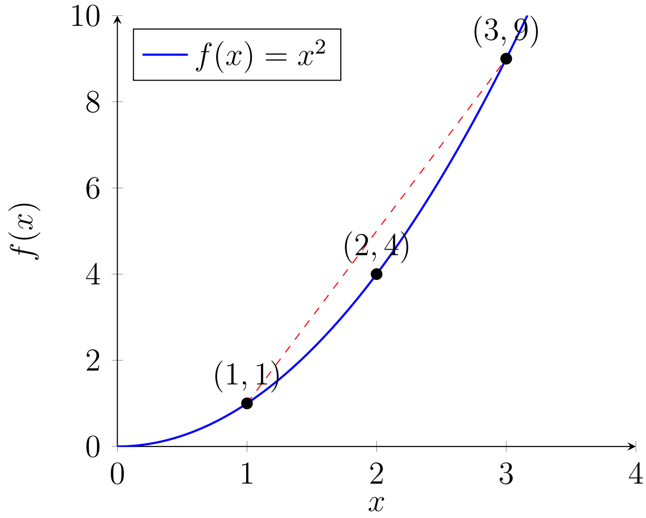
d) **Conclusión sobre la convexidad:** Dado que $f''(x) \geq 0$ para todos los valores de x, podemos afirmar que $f(x) = x^2$ es una función convexa en todo $\mathbb{R}$. Esto coincide con la definición de convexidad basada en la segunda derivada.

e) **Interpretación gráfica:** La positividad de $f''(x)$ implica que la gráfica de $f(x)$ siempre çurva hacia arriba", y cualquier línea recta que conecte dos puntos en la gráfica estará por encima de la curva entre esos puntos.

f) **Implicación en optimización:** Esta propiedad es especialmente útil en problemas de optimización, ya que garantiza que cualquier mínimo local de $f(x)$ es también un mínimo global debido a la convexidad de la función. Al demostrar que la segunda derivada de $f(x)$ es no negativa en todo su dominio, hemos generalizado que $f(x) = x^2$ es convexa en $\mathbb{R}$. Este método es aplicable a otras funciones para determinar su convexidad de manera eficiente.

3.3 Visualización Gráfica

A continuación, se presenta una gráfica que ilustra la convexidad de $f(x) = x^2$.



En la gráfica, se observa que el punto $(2, 4)$ correspondiente a $f(2)$ está por debajo de la línea recta (en rojo) que une los puntos $(1, 1)$ y $(3, 9)$.

3.4 Propiedades de las Funciones Convexas

Las funciones convexas poseen diversas propiedades que son fundamentales en el análisis matemático y la optimización. A continuación, se detallan algunas de las propiedades más importantes, junto con sus demostraciones y ejemplos.

1. **Combinación Convexa de Funciones Convexas:** Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones convexas en un intervalo I, entonces cualquier combinación lineal no negativa de ellas también es convexa. Es decir, si $\alpha, \beta \geq 0$, entonces la función $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ es convexa en I.

   Demostración:

   Sea $x_1, x_2 \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$. Debido a la convexidad de $f(x)$ y $g(x)$, tenemos:

   $$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$
   $$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2).$$

   Multiplicando la primera desigualdad por α y la segunda por β:

   $$\alpha f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \alpha\lambda f(x_1) + \alpha(1 - \lambda)f(x_2),$$
   $$\beta g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \beta\lambda g(x_1) + \beta(1 - \lambda)g(x_2).$$

   Sumando ambas desigualdades:

   $$\alpha f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+\beta g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda(\alpha f(x_1)+\beta g(x_1))+(1-\lambda)(\alpha f(x_2)+\beta g(x_2)).$$

   Por lo tanto:

   $$h(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda h(x_1) + (1 - \lambda)h(x_2),$$

   lo que demuestra que $h(x)$ es convexa en I.

2. **Multiplicación por un Escalar Positivo:** Si $f(x)$ es una función convexa y $\gamma \geq 0$, entonces la función $h(x) = \gamma f(x)$ también es convexa.

   Demostración:

   Tomando $x_1, x_2 \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$, por la convexidad de $f(x)$:

   $$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

   Multiplicando ambos lados por $\gamma \geq 0$:

   $$\gamma f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \gamma\lambda f(x_1) + \gamma(1 - \lambda)f(x_2) = \lambda(\gamma f(x_1)) + (1 - \lambda)(\gamma f(x_2)).$$

   Esto muestra que $h(x)$ es convexa en I.

3. **Criterio de la Segunda Derivada:** Si una función $f(x)$ es dos veces diferenciable y su segunda derivada es no negativa en un intervalo I, es decir, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces $f(x)$ es convexa en ese intervalo.

   Demostración:

   La segunda derivada de una función proporciona información sobre la curvatura de su gráfica. Si $f''(x) \geq 0$, la función está çurvando hacia arriba", lo que es característico de las funciones convexas. Formalmente, para $x_1, x_2 \in I$ y $x \in [x_1, x_2]$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$f'(x_2) - f'(x_1) = f''(c)(x_2 - x_1).$$

Dado que $f''(c) \geq 0$ y $x_2 - x_1 \geq 0$, se deduce que:

$$f'(x_2) \geq f'(x_1).$$

Esto indica que $f'(x)$ es creciente en I. Por lo tanto, la función $f(x)$ es convexa en I.

4. **Funciones Lineales:** Toda función lineal de la forma $f(x) = ax + b$ es tanto convexa como cóncava en $\mathbb{R}$.

   Demostración:

   Para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in [0, 1]$, tenemos:

   $$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) = a(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+b = \lambda(ax_1+b)+(1-\lambda)(ax_2+b) = \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

   Dado que se cumple la igualdad exacta, la función lineal es convexa y cóncava simultáneamente.

5. **Epígrafe de una Función Convexa:** El conjunto de puntos por encima de la gráfica de una función convexa, conocido como epígrafe, es un conjunto convexo.

   Demostración:

   El epígrafe de f es el conjunto:

   $$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}.$$

   Para cualquier par de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{epi}(f)$ y $\lambda \in [0, 1]$, consideremos el punto:

   $$(x, y) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2).$$

   Dado que $y_1 \geq f(x_1)$ y $y_2 \geq f(x_2)$, tenemos:

   $$y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2),$$

   donde la última desigualdad se debe a la convexidad de f. Por lo tanto, $(x, y) \in \text{epi}(f)$, lo que demuestra que el epígrafe es convexo.

   Esta propiedad es esencial en optimización convexa, ya que permite utilizar herramientas y teoremas del análisis convexo para estudiar y resolver problemas de minimización de funciones convexas.

6. **Mínimos Locales son Mínimos Globales:** En una función convexa definida en un conjunto convexo, cualquier mínimo local es también un mínimo global.

   Demostración:

   Supongamos que x^* es un mínimo local de f, es decir, existe un entorno U de x^* tal que:

   $$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in U.$$

Para cualquier $x \in I$, consideramos $\lambda \in [0,1]$ tal que $x = \lambda x^* + (1-\lambda)x$. Por convexidad:

$$f(x) \geq f(\lambda x^* + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x).$$

Reordenando:

$$f(x) \geq f(x^*).$$

Por lo tanto, x^* es un mínimo global de f.

Esta propiedad simplifica significativamente la búsqueda de mínimos en problemas de optimización, ya que garantiza que encontrar un mínimo local es suficiente.

La función $f(x) = x^2$ es convexa en todo su dominio porque satisface la condición de convexidad para cualquier par de puntos y cualquier valor de λ en $[0,1]$. Además, su segunda derivada es constante y positiva, lo que refuerza esta conclusión. Comprender la convexidad es fundamental en áreas como la optimización, ya que las funciones convexas tienen propiedades que facilitan el análisis y la resolución de problemas.

4 Actividad

1. Demuestre que la función $f(x) = 3x + 2$ es convexa en $\mathbb{R}$.
2. Verifique si la función $f(x) = x^3$ es convexa, cóncava o ninguna de las dos en el intervalo $[0, \infty)$.
3. Sea $f(x) = e^{2x}$. Demuestre que $f(x)$ es una función convexa en $\mathbb{R}$ utilizando el criterio de la segunda derivada.
4. Considere la función $f(x) = \ln(x)$ definida en $(0, \infty)$.
   a) Determine si $f(x)$ es convexa o cóncava en su dominio.
   b) Justifique su respuesta utilizando las propiedades de la segunda derivada.
5. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.
   a) Encuentre los intervalos en los que $f(x)$ es convexa y los intervalos en los que es cóncava.
   b) Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.