Universidad Nacional del Altiplano - Puno

Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

Métodos de Optimización

Trabajo Encargado - N° 003: Cap.2-Ejercicio-2.5

Docente: Fred Torres Cruz

Autor: Juan Carlos Anquise Vargas

Código: 191062

3 de octubre de 2024

Exercise 2.5. *Let $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ by $x \mapsto \ln x$ (i.e., $f(x) = \ln x$). Prove that f is monotonically increasing continuous bijection. [Note: this exercise assumes some familiarity with topics in Calculus/Elementary Real Analysis.]*

Figura 1: Planteamiento del Problema 2.5

SOLUCION DEL EJERCICIO N° 2.5:

Para demostrar que la funcion f:(0, infinito) -> R definida por
f(x) = ln(x) es una biyeccion continua y monótonamente creciente,
aqui tenemos la solucion de paso a paso.

1) Demostrar que f es monótonamente creciente

1.1) Definición de función monótonamente creciente:

Una función
f es monótonamente creciente en un intervalo
I si para cualesquiera
X1, X2 pertenece I tales que X1 < X2 se cumple que X1 < X2
se cumple que f(X1) < f(X2).

1.2) calcular la derivada

La derivad de f(x) = ln(x) es:

f'(x) = 1/x

Para X > 0, f'(x) > 0.

1.3) Conclusión sobre la moonotonía

Dado que f'(x) > 0 para x > 0, se concluye que f(x) es monótonamente
creciente en (0,infinito).

2) Demostrar que es continua

2.1) Continuidad de f:

La función ln(x) es continua en su dominio (0, infinito). Esto se puede
demostrar utilizando la definicion de continuidad, que implica que:

lim f(x) = f(c) para todo c que pertenece (0, infinito).
x->c

Por lo tanto, f es continua en (0, infinito)

3) Demostrar que f es una biyección

3.1) Inyectiva

Para demostrar que f es inyectiva, supongamos que f(X1) = f(X2):

$$\ln(X1) = \ln(X2) \Rightarrow X1 = X2$$

Por lo tanto, f es inyectiva

3.2) Sobreyectiva:

Para demostrar que f es sobreyectiva, debemos mostrar que para cada Y pertenece a R existe un X pertenece (0, infinito) tal que f(x) = y.

Si tomamos Y pertenece R, podemos resolver ln(x) = y.

$$x = e^y$$

Dado que e^y > 0 para todo Y, esto implica que x pertenece (0, infinito). Así que existe un x para cada y.

Entonces como f es inyectiva y sobreyectiva, concluimos que f es una biyeccion.

Por lo tanto:
Se concluye que es monótonamente creciente, continua, inyectiva y sobreyectiva, por tanto es una biyectiva.