Algoritmia y Complejidad

Tema 4. Programación dinámica

1.- Introducción.

TÉCNICA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA.

- Como el esquema voraz:
  - Se emplea típicamente para resolver problemas de optimización.
  - Permite resolver problemas mediante una secuencia de decisiones, como el esquema voraz.

- A diferencia del esquema voraz:
  - Se producen varias secuencias de decisiones y solamente al final se sabe cuál es la mejor de ellas.

1.- Introducción.

TÉCNICA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA.

- El método de divide y vencerás ataca de inmediato el caso completo, que a continuación dividimos en subcasos más pequeños.

- La programación dinámica empieza por los subcasos más pequeños, y por tanto más sencillos. Combinando sus soluciones, obtenemos las respuestas para subcasos de tamaños cada vez mayores, hasta que finalmente llegamos a la solución del caso original.

2.- Principio de Optimalidad.

- La técnica de programación dinámica está basada en el **Principio de Optimalidad de Bellman**:

  "Cualquier subsecuencia de decisiones de una secuencia óptima de decisiones que resuelve un problema también debe ser óptima respecto al subproblema que resuelve."

- Este principio no es aplicable a todos los problemas que nos podamos encontrar. Por ejemplo cuando buscamos la utilización óptima de unos recursos limitados. Aquí la solución óptima de un caso puede no ser obtenida por la combinación de soluciones óptimas de 2 o más subcasos, si los recursos utilizados en esos subcasos suman más que el total de recursos disponibles.

3.- El problema de la mochila

- Se nos da un cierto número de objetos y una mochila. Esta vez suponemos que los objetos no se pueden fragmentar en trozos más pequeños, así que podemos decidir si tomamos un objeto o lo dejamos, pero sin fraccionarlo. Para i=1,2…n, supongamos que el objeto i tiene un peso positivo w_i y un valor positivo v_i. La mochila puede llevar un peso que no supere W. Nuestro objetivo es llenar la mochila de tal forma que se maximice el valor de los objetos incluidos, respetando la limitación de capacidad. Sea $x_i=0$ si decidimos no tomar el objeto i o bien 1 si lo incluimos. El enunciado del problema sería:

$$\text{maximizar} \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad \text{con la restricción} \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \leq W$$

Donde $v_i>0$, $w_i>0$ y $x\epsilon\{0,1\}$ para $1\leq i \leq n$

3.- El problema de la mochila

- El algoritmo voraz no se podría aplicar porque x_i tiene que ser 0 o 1.
- Supongamos que están disponibles tres objetos, el primero de los cuales pesa 6 unidades y tiene un valor de 8, mientras que los otros dos pesan 5 unidades cada uno y tienen un valor de 5 cada uno. Si la mochila puede llevar 10 unidades, entonces la carga óptima incluye a los dos objetos más ligeros, con un valor total de 10.
- El algoritmo voraz, comenzaría por seleccionar el objeto que pesa 6 unidades, puesto que es el que tiene un mayor valor por unidad de peso. Sin embargo, si los objetos no se pueden romper , el algoritmo no podrá utilizar la capacidad restante de la mochila. La carga que produce, consta de un solo objeto, y tiene un valor de 8 nada más.

3.- El problema de la mochila

- Por tanto, llenaremos las entradas de la tabla empleando la regla general:

$$V[i, j] = \text{máx}(V[i-1, j], V[i-1, j-w_i] + v_i)$$

- Para las entradas fuera de límites definidos V[0,j]=0 cuando j>=0, y V[i,j]=−∞ para todo i cuando j<0.

Límite de peso:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

Figura 8.4. La mochila, empleando programación dinámica

3.- El problema de la mochila

- Los valores por unidad de peso son 1,3, 3.6, 3.67 y 4. Si solo podemos transportar un máximo de 11 unidades de peso, entonces la tabla muestra que podemos componer una carga cuyo valor es 40.
- La tabla V nos permite recuperar el valor de la carga óptima y su composición. En el ejemplo comenzamos por examinar V[5,11]. Como V[5,11]=V[4,11] pero V[5,11] $\neq$V[4,11-w_5]+v_5, una carga optima no puede incluir el objeto 5. A continuación, V[4,11] $\neq$ V[3,11] pero V[4,11] = V[3,11-w_4]+v_4, así que una carga óptima deber incluir al objeto 4. Ahora V[3,5] $\neq$ V[2,5] pero V[3,5] = V[2,5-w_3]+v_3, así que una carga óptima deber incluir al objeto 3. Prosiguiendo de esta forma, encontramos que V[2,0] = V[1,0] y que V[1,0] = V[0,0], así que una carga óptima no incluye al objeto 2 ni al objeto 1. Así, solo hay una carga óptima que consta de los objetos 3 y 4.

4.- Cálculo del coeficiente binomial

- Supongamos que $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{si } 0 < k < n \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Si calculamos directamente $\binom{n}{k}$

```
función C(n, k)
    si k = 0 o k = n entonces devolver 1
    sino devolver C(n–1, k–1) + C(n–1, k)
```

4.- Cálculo del coeficiente binomial.

- Muchos de los valores C(i,j), con $i<n$ y $j<k$ se calculan una y otra vez. Dado que el resultado final se obtiene sumando un cierto número de unos, el tiempo de este algoritmo es desproporcionado.

- Si utilizamos una tabla de resultados intermedios (triángulo de Pascal) entonces obtenemos un algoritmo más eficiente.

4.- Cálculo del coeficiente binomial.

	0	1	2	3	...	k-1	k
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...	
n-1						$C(n-1,k-1)$ +	$C(n-1,k)$
n							$C(n,k)$

5.- El campeonato mundial.

- En una competición hay dos equipos A y B que juegan un máximo de 2n-1 partidas, y el ganador es el primer equipo que consiga n victorias. No hay empates, y para cualquier partido dado hay una probabilidad constante p de que el equipo A sea el ganador, y q= 1-p de que pierda y gane el equipo B.
- Sea P(i,j) la probabilidad de que gane el equipo A, cuando todavía necesita i victorias más para conseguirlo, mientras que el equipo B necesita j victorias para ganar.
- Antes del primer partido, la probabilidad de que gane el equipo A es P(n,n): ambos equipos necesitan n victorias para ganar.
- Si el equipo A gana P(0,i))=1, con $1 \leq i \leq n$
- Si el equipo B gana P(i,0)=0 con $1 \leq i \leq n$

5.- El campeonato mundial.

- Entonces:

$$P(i, j) = pP(i-1, j) + qP(i, j-1), \quad i \geq 1, j \geq 1$$

- Calculamos P(i,j) de la siguiente forma:

```
función P(i, j)
    si i = 0 entonces devolver 1
    sino si j = 0 entonces devolver 0
    sino devolver pP(i–1, j) + qP(i, j–1)
```

- Sea T(k) el tiempo necesario en el caso peor para calcular P(i,j), con k=i+j. Vemos que:

$$T(1) = c$$
$$T(k) \leq 2T(k\text{-}1) + d, \quad k > 1$$

c y d constantes.

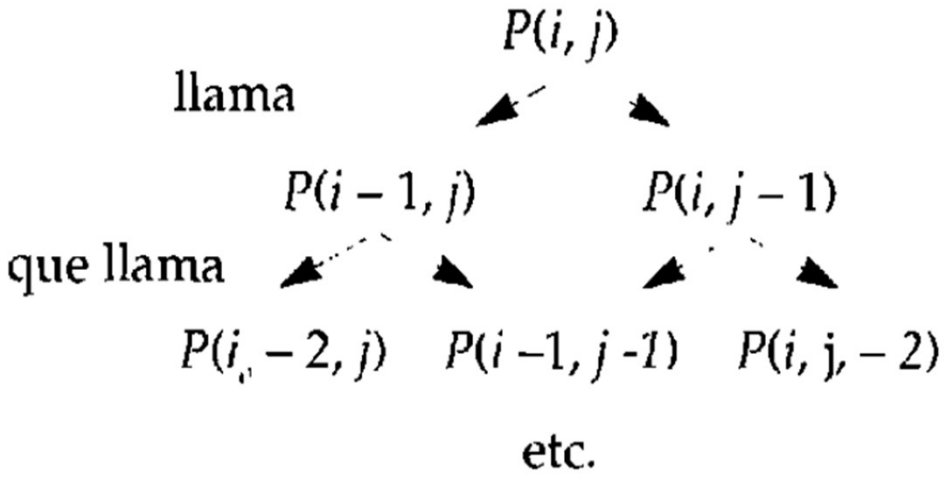
5.- El campeonato mundial.

- Reescribiendo T(k-1) en términos de T(k-2) y así sucesivamente, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
T(k) &\le 4T(k-2) + 2d + d, \quad k > 1 \\
&\vdots \\
&\le 2^{k-1}T(1) + (2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 2 + 1)d \\
&= 2^{k-1}c + (2^{k-1} - 1)d \\
&= 2^k(c/2 + d/2) - d
\end{aligned}
$$

- T(k) esta en $O(2^k)$ que es $O(4^n)$ si i=j=n.

5.- El campeonato mundial.



Aquí se calcula muchas veces el valor de cada P(i,j).

Es mejor usar una tabla para almacenar esos valores.

5.- El campeonato mundial.

```
función serie(n, p)
    matriz P[0..n,0..n]
    q ← 1– p
    {Llenamos desde la esquina izquierda hasta la diagonal principal}
    para s ← 1 hasta n hacer
        P[0, s] ← 1; P[s, 0] ← 0
        para k ← 1 hasta s – 1 hacer
            P[k, s – k] ← pP[k–1, s – k] + qP[k, s – k – 1]
    {Llenamos desde debajo de la diagonal principal hasta la esquina derecha}
    para s ← 1 hasta n hacer
        para k ← 0 hasta n – s hacer
            P[s + k, n – k] ← pP[s + k – 1, n – k] + qP[s + k, n – k – 1]
    devolver P[n, n]
```

6.- Devolver cambio.

- El algoritmo voraz es muy eficiente pero funciona solamente en un número limitado de casos.
- Con ciertos sistemas monetarios o cuando faltan monedas de una cierta denominación o su número es limitado, el algoritmo puede encontrar una respuesta que no sea óptima o no hallar respuesta.
- Ejemplo: Tenemos monedas de 1, 4 y 6 unidades. Si tenemos que cambiar 8 unidades, el algoritmo voraz devuelve una moneda de 6 unidades y dos de una unidad, es decir, tres monedas. Pero podemos hacerlo mejor dando dos monedas de cuatro unidades.

6.- Devolver cambio.

- Comenzamos con C[i,0]=0 para todos los valores de i. La tabla del ejemplo sería la siguiente:

Cantidad:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2

Figura 8.3 Devolver cambio empleando programación dinámica

- Nos da la solución para todos los casos que supongan un pago de 8 unidades o menos.
- Y el algoritmo sería el siguiente:

6.- Devolver cambio.

```
función monedas(N)
    {Devuelve el mínimo número de monedas necesarias
        para cambiar  N unidades. El vector d[1..n]
        especifica las denominaciones: en el ejemplo hay monedas
        de 1, 4 y 6 unidades}
    vector d[1..n] = [1, 4, 6]
    matriz c[1..n, 0..N]
    para i ← 1 hasta n hacer c[i, 0] ← 0
    para i ← 1 hasta n hacer
        para j ← 1 hasta N hacer
            si i = 1 y  j < d[i] entonces c[i, j] ← +∞
            sino si i = 1 entonces c[i, j] ← 1+ c[1, j – d[1]]
            sino si j < d[i] entonces c[i, j] ← c[i–1, j]
            sino c[i, j] ← mín(c[i – 1, j],1+c[i, j – d[i]])
    devolver c[n, N]
```

7.- Caminos mínimos.

- Sea G=(N,A) un grafo dirigido, N es el conjunto de nodos y A el conjunto de aristas. Deseamos calcular la longitud del camino mas corto entre cada par de nodos. Supongamos que los nodos de G están numerados desde 1 hasta n, así que N={1,2,…,n}, y sea L la matriz que da las longitudes de las aristas, con L[i,i]=0 para i=1,2,…,n, L[i,j]>=0 para todo i y j, y L[i,j]=∞ si no existe la arista (i,j).
- Es aplicable el Principio de Optimalidad: si k es un nodo del camino mínimo entre i y j, entonces la parte del camino que va desde i hasta k, y la parte del camino que va desde k hasta j deber ser optimo también.
- Construimos una matriz D que da la longitud del camino mas corto entre un par de nodos.

7.- Caminos mínimos.

- Si D_k representa la matriz D después de la k-esima iteración (D_0=L), entonces la comprobación necesaria debe implementarse en la forma:

$$D_k[i, j] = \min(D_{k-1}[i, j], D_{k-1}[i, k] + D_{k-1}[k, j])$$

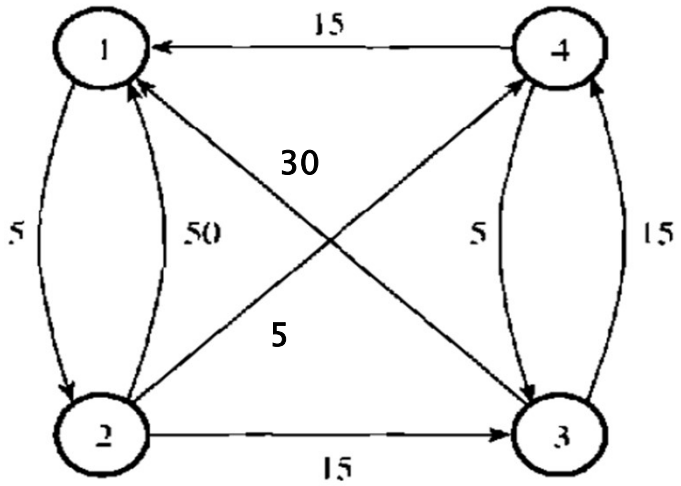
- Hemos utilizado el hecho de que un camino optimo que pase por k no visitara k dos veces.

7.1– Algoritmo de Floyd.

```
función Floyd(L[1..n, 1..n]): matriz[1..n, 1..n]
    matriz D[1..n, 1..n]
    D ← L
    para k ← 1 hasta n hacer
        para i ← 1 hasta n hacer
            para j ← 1 hasta n hacer
                D[i, j] ← min(D[i, j], D[i, k] + D[k, j])
    devolver D
```

7.- Caminos mínimos.

- Ejemplo:



$$D_0 = L = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty \\ 50 & 0 & 15 & 5 \\ 30 & \infty & 0 & 15 \\ 15 & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty \\ 50 & 0 & 15 & 5 \\ 30 & 35 & 0 & 15 \\ 15 & 20 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 20 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 5 \\ 30 & 35 & 0 & 15 \\ 15 & 20 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 20 & 10 \\ 45 & 0 & 15 & 5 \\ 30 & 35 & 0 & 15 \\ 15 & 20 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 15 & 10 \\ 20 & 0 & 10 & 5 \\ 30 & 35 & 0 & 15 \\ 15 & 20 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

7.- Caminos mínimos.

- Ejemplo:
- En la k-esima iteración, los valores de la k-esima fila y dela k-esima columna de D no cambian, porque D{k,k} es siempre 0. Por tanto, no hace falta proteger estos valores al actualizar D. Esto nos permite utilizar una única D nxn.
- Tiempo: $O(n^3)$
- Con el algoritmo de Dijkstra el tiempo es el mismo pero la sencillez del algoritmo de Floyd hace que tenga una constante oculta mas pequeña, y por tanto sea más rápido en practica.
- Normalmente, deseamos saber cual es el camino mas corto, y no solamente su longitud. En tal caso, utilizaremos una segunda matriz P, cuyos elementos tienen todos ellos un valor inicial 0. El bucle mas interno del algoritmo pasa a ser

7.- Caminos mínimos.

- Ejemplo:

$$\textbf{si } D[i,k]+D[k,j]<D[i,j] \textbf{ entonces } \begin{array}{l} D[i,j] \leftarrow D[i,k]+D[k,j] \\ P[i,j] \leftarrow k \end{array}$$

- Cuando se detiene el algoritmo, P[i,j] contiene el numero de la ultima iteración que haya dado lugar a un cambio en D[i,j]. Para recuperar el camino mas corto desde i hasta j, se examina P[i,j]. Si P[i,j]=0, entonces D[i,j] nunca ha cambiado, y el camino mínimo pasa directamente por la arista (i,j); en caso contario, si P[i,j]=k, entonces el camino mas corto desde i hasta j pasa por k. Se examina recursivamente P[i,k] y P[k,j] para buscar cualquier otro posible nodo intermedio que este en el camino mas corto. En el ejemplo anterior P pasa a ser

7.- Caminos mínimos.

- Ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Dado que P[1,3]=4, el camino mínimo desde 1 hasta 3 pasa por 4. Examinando P[1,4] y P[4,3], descubrimos que entre 1 y 4 hay que pasar por 2, pero que de 4 a 3 pasamos directamente. Los recorridos desde 1 hasta 2 y desde 2 hasta 4 son directos. Por tanto, el camino mínimo desde 1 hasta 3 es 1,2,4,3.