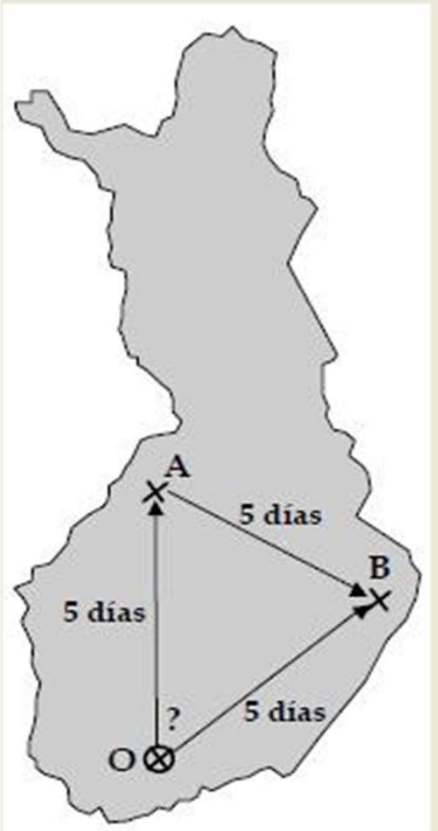
Algoritmia y Complejidad

Tema 6. Algoritmos no deterministas.

1.- Introducción.

- Una historia sobre un tesoro, un dragón, un computador, un elfo y un doblón.
  - En A o B hay un **tesoro** de *x* lingotes de oro pero no sé si está en A o B.
  - Un **dragón** visita cada noche el tesoro llevándose *y* lingotes.
  - Sé que si permanezco 4 días más en O con mi **computador** resolveré el misterio.
  - Un **elfo** me ofrece un trato: Me da la solución ahora si le pago el equivalente a la cantidad que se llevaría el dragón en 3 noches.



1.- Introducción.

- ¿Qué debo hacer?
- Si me quedo 4 días más en O hasta resolver el misterio, podré llegar al tesoro en 9 días, y obtener $x-9y$ lingotes.
- Si acepto el trato con el elfo, llego al tesoro en 5 días, encuentro allí $x-5y$ lingotes de los cuales debo pagar $3y$ al elfo, y obtengo $x-8y$ lingotes.
- Es mejor aceptar el trato pero…

… ¡hay una solución mejor!

¿Cuál?

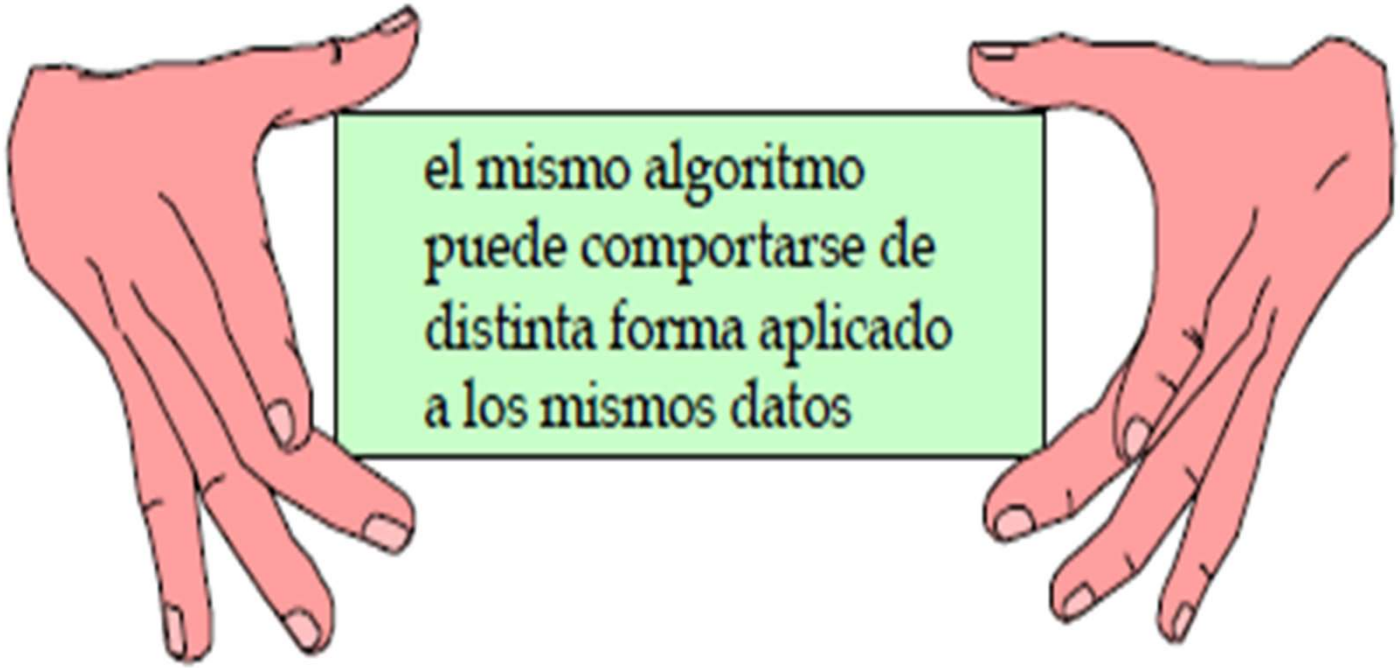
- ¡Usar el **doblón** que me queda en el bolsillo!
- Lo lanzo al aire para decidir a qué lugar voy primero (A o B).

1.- Introducción.

- Si acierto a ir en primer lugar al sitio adecuado, obtengo x–5y lingotes.
- Si no acierto, voy al otro sitio después y me conformo con x–10y lingotes.
- El beneficio esperado medio es x–7'5y.
- ¿Qué hemos aprendido?
  - En algunos algoritmos en los que aparece una decisión, es preferible a veces elegir aleatoriamente antes que perder tiempo calculando qué alternativa es la mejor.
  - Esto ocurre si el tiempo requerido para determinar la elección óptima es demasiado frente al promedio obtenido tomando la decisión al azar.

1.- Introducción.

- Característica fundamental de un algoritmo probabilista:



1.- Introducción.

- Un comentario sobre “el azar” y “la incertidumbre”:
  - A un algoritmo probabilista se le puede permitir calcular una solución equivocada, con una probabilidad pequeña.
  - Un algoritmo determinista que tarde mucho tiempo en obtener la solución puede sufrir errores provocados por fallos del hardware y obtener una solución equivocada.
    - Es decir, el algoritmo determinista tampoco garantiza siempre la certeza de la solución y además es más lento.

1.- Introducción.

- Más aún:

Hay problemas para los que no se conoce ningún algoritmo (determinista ni probabilista) que dé la solución con certeza y en un tiempo razonable (por ejemplo, la duración de la vida del programador, o de la vida del universo…):

Es mejor un algoritmo probabilista rápido que dé la solución correcta con una cierta probabilidad de error.

Ejemplo: decidir si un nº de 1000 cifras es primo.

2.- Algoritmos de Monte Carlo: Introducción

- Sea p un número real tal que $0<p<1$.Un algoritmo de Monte Carlo es **p-correcto** si:

- Devuelve una solución correcta con probabilidad mayor o igual que p, cualesquiera que sean los datos de entrada.

- A veces, p dependerá del tamaño de la entrada, pero nunca de los datos de la entrada en sí.

2.1- Comprobación de primalidad

- Un problema muy relevante que se puede resolver con el método de Monte Carlo es el de determinar si un numero es primo.
- Es el algoritmo de Monte Carlo más conocido.
- Este problema es especialmente útil para las técnicas criptográficas, que se basan en la factorización de números muy grandes en factores primos.
- No se conoce ningún algoritmo determinista que resuelva este problema en un tiempo razonable para números muy grandes (cientos de dígitos decimales).

2.1- Comprobación de primalidad

- En los últimos años hemos asistido a una expansión sin precedentes en el uso de la criptografía de clave publica, incluso en el ámbito de las relaciones institucionales, como es el caso del DNI electrónico y del pasaporte electrónico. Estos documentos y otros muchos necesitan utilizar números primos (generalmente de gran tamaño) como elementos básicos para generar las claves o para otros estadios del protocolo criptográfico.

- El algoritmo probabilístico más utilizado es el de Miller-Rabin, que se basa en el teorema menor de Fermat(1640):

2.1- Comprobación de primalidad

- **Sea n un número primo. Entonces a^{n-1} mod n=1 para cualquier entero a tal que 1<=a<=n-1**

  Por ejemplo, sean n = 7 y a = 5. Entonces,

  $a^{n-1} = 5^6 = 15625 = 2232x\ 7 + 1$

- Utilizaremos la versión contrapositiva de este teorema: Si n y a son enteros tales que 1<= a <= n y

  a^{n-1}mod n ≠ 1, entonces n no es un número primo.

- Aunque no lo hemos visto, existe un algoritmo basado en la técnica Divide y Vencerás que permite realizar la exponenciación modular (resolver a^n mod z) que está en O(log n) ([BB97], p.279).

- Utilizando dos propiedades elementales de aritmética modular:

$$xy \bmod z = [(x \bmod z)\ \ (y \bmod z)] \bmod z$$

$$(x \bmod z)^y \bmod z = x^y \bmod z$$

2.1– Comprobación de primalidad

- fun expomod(a, n, z) // calcula a^n mod z

```
 i=n
 r=1
 x=a mod z
 mientras i > 0 hacer
     si (i es impar) entonces
              r = rx mod z
     x =  x^2 mod z
     i =ent(i /2)
  fin mientras
  devolver r
fin fun
```

2.1- Comprobación de primalidad

- Para verificar que un número n es primo, habrá que comprobar que todos los valores a entre 1 y n-1 cumplen que $a^{n-1} \bmod n = 1$.
- Podríamos probarlo con un solo numero elegido al azar entre 1 y n-1.
- Por ejemplo, una primera versión del algoritmo probabilista es:

```
fun Fermat(n)
    a = uniforme(1..n-1)
    si expomod(a,n-1,n)=1 entonces devolver cierto
    sino   devolver falso
fin fun
```

2.1- Comprobación de primalidad

- Cuando Fermat(n) devuelva falso estaremos seguros de que n no es primo.
- Sin embargo, si Fermat(n) devuelve cierto no podemos concluir nada ...

Este ejemplo demuestra la forma de trabajar de los algoritmos tipo Monte Carlo.

2.2- Elemento mayoritario de un vector.

Ejemplo: Decir si un vector tiene un elemento mayoritario

Se quiere comprobar si hay algún elemento en un vector que aparezca en más de la mitad de las componentes. Vamos a tomar un dato cualquiera al azar, contamos sus apariciones y si son más de $\frac{N}{2}$ entonces es el elemento mayoritario.

```
Función MayoritarioMonteCarlo(E v: vector,
                              E N: Natural) dev Lógico
    x ← v[aleatorio(1..N)]
    total ← 0
    Desde i ← 1 hasta N Hacer
        Si (v[i] = x) entonces total ← total + 1
    fDesde
    Devolver (total > N ÷ 2)
ffun
```

2.2- Elemento mayoritario de un vector.

Para los vectores no mayoritarios este método tiene probabilidad 1 de acertar (ya que ningún elemento se repite más de N/2 veces). Para los vectores que sí tienen un elemento mayoritario, el método acierta con probabilidad mayor que 1/2 , exactamente con probabilidad:

p=(*#apariciones del elemento mayoritario)/N*

luego falla con $P_f<1/2$. *No está mal. Se podría* mejorar haciendo:

```
Función MayoritarioMonteCarlo2(v, N)
        Si MayoritarioMonteCarlo(v, N) entonces
                Devolver Verdad
        si no
                Devolver MayoritarioMonteCarlo(v, N)
```

2.2- Elemento mayoritario de un vector.

Ahora, suponiendo que v sea mayoritario, solo fallará si el MayoritarioMC falla dos veces, luego MayoritarioMC2 falla con probabilidad $p < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, luego su utilidad sería mayor que $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Para generalizarlo a una cota de error $\varepsilon > 0$

```
Función MayoritarioMonteCarlo_ε(v, N, e)
    p ← 1
    m ← Falso
    Repetir
        p ← p/2
        m ← MayoritarioMonteCarlo(v, N)
    Hasta m O (p < e)
    Devolver m
```

3.- Algoritmo de las Vegas: Introducción.

Un algoritmo de Las Vegas **nunca** da una solución falsa.

- Toma decisiones al azar para encontrar una solución antes que un algoritmo determinista.
- Si no encuentra solución lo admite.

Hay dos tipos de algoritmos de Las Vegas, atendiendo a la posibilidad de no encontrar una solución:

a) Los que **siempre** encuentran una solución correcta, aunque las decisiones al azar no sean afortunadas y la eficiencia disminuya.

b) Los que **a veces**, debido a decisiones desafortunadas, no encuentran una solución.

3.- Algoritmo de las Vegas: Introducción.

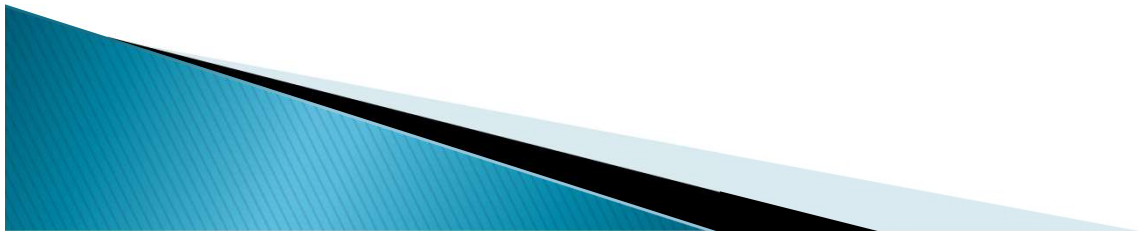
El primer tipo (a): los que siempre encuentran la solución correcta.

- Se aplican a problemas en los que la versión determinista es mucho más rápido en el caso promedio que en el caso peor (Ej. Quicksort).
  - Coste peor (n^2) y coste promedio O(nlogn).
- Los algoritmos de las Vegas pueden reducir o eliminar las diferencias de eficiencia para distintos datos de entrada.
  - Con mucha probabilidad, los casos que requieran mucho tiempo con el método determinista se resuelven ahora mucho más deprisa.
  - En los casos en los que el algoritmo determinista sea muy eficiente, se resuelven ahora con mas coste.
  - En el caso promedio, no se mejora el coste.
- Uniformización del tiempo de ejecución para todas las entradas de igual tamaño.

3.- Algoritmo de las Vegas: Introducción.

El segundo tipo (b): a veces no dan respuesta.

- Son aceptables si fallan con probabilidad baja.
- Si fallan se vuelven a ejecutar con los mismos datos de entrada.
- Se utilizan para resolver problemas para los que no se conocen algoritmos deterministas eficientes que los resuelvan.
- Tiempo de ejecución no está acotado pero es razonable con una elevada probabilidad.



3.- Algoritmo de las Vegas: Introducción.

- Se presentan en forma de procedimiento con una variable éxito que toma valor cierto si se obtiene solución y falso en otro caso.

  LV(x, solución, éxito)

  donde x representa los datos de entrada.
- Sea p(x) la probabilidad de éxito si la entrada es x.
- Los algoritmos de Las Vegas exigen que p(x)>0 para todo x.
- Sea la siguiente función

```
fun repetirLV(x)
    repetir
        LV(x, solución, éxito)
    hasta éxito
    devolver solución
fin fun
```

3.- Algoritmo de las Vegas: Introducción.

- El número de pasadas del bucle es 1/p(x).
- Sea t(x) el tiempo esperado de repetirLV(x).
- La primera llamada a LV tiene éxito al cabo de un tiempo s(x) con probabilidad p(x).
- La primera llamada a LV fracasa al cabo de un tiempo f (x) con probabilidad 1- p(x).
- El tiempo esperado total en este caso es f (x) + t(x), porque después de que la llamada a LV fracase volvemos a estar en el punto de partida (y por tanto volvemos a necesitar un tiempo t(x)).
- Así, t(x) = p(x)s(x) + (1-p(x))(f (x) + t(x)).

3.- Algoritmo de las Vegas: Introducción.

- Resolviendo la ecuación anterior se obtiene:

$$t(x) = s(x) + \frac{1-p(x)}{p(x)} f(x)$$

Esta ecuación es la clave para optimizar el rendimiento de este tipo de algoritmos.

Examen

Se diseña un algoritmo de Monte Carlo para determinar si un elemento de un vector aparece en más de un cuarto de sus componentes ¿Cuántas veces tenemos que repetir el algoritmo para asegurarnos que el error del algoritmo es menor del 10%?