

RESUMEN DE

FISICA II-2020

Por:

CRISAFULLI, Francisco

INDICE

1.	UNIDAD 1: Carga eléctrica y campo eléctrico (Capítulo 21)	8
1.1.	Carga eléctrica.....	8
1.1.1.	Carga eléctrica y estructura de la materia	8
1.1.2.	La carga eléctrica se conserva	8
1.2.	Conductores, aislantes y cargas inducidas.....	8
1.2.1.	Cargas por inducción(Proceso)	8
1.2.2.	Fuerzas eléctricas en objetos sin carga	9
1.3.	Ley de Coulomb (en el vacío).....	9
1.3.1.	Constantes eléctricas fundamentales	9
1.3.2.	Principio de superposición de fuerzas.....	9
1.4.	El campo eléctrico y las fuerzas eléctricas	9
1.4.1.	Campo eléctrico	9
1.4.2.	Campo eléctrico de una carga puntual.....	10
1.5.	Cálculos de campos eléctricos	10
1.5.1.	Principio de superposición de campos eléctricos	10
1.6.	Líneas de campo eléctrico	10
1.7.	Dipolos eléctricos	11
1.7.1.	Fuerzas y par de torsión en un dipolo eléctrico	11
1.7.2.	Energía potencial de un dipolo eléctrico	11
1.7.3.	Campo en un dipolo	12
2.	UNIDAD 2: Ley de Gauss (Capítulo 22)	12
2.1.	Carga y flujo eléctrico	12
2.2.	Cálculo del flujo eléctrico	12
2.2.1.	Flujo de un campo no uniforme.....	13
2.3.	Ley de Gauss	13
2.3.1.	Carga puntual dentro de una superficie esférica.....	13
2.3.2.	Carga puntual dentro de una superficie no esférica	13
2.3.3.	Forma general de la Ley de Gauss.....	14
2.4.	Aplicaciones de la ley de Gauss.....	14
2.5.	Cálculo de campos eléctricos para distribuciones uniformes de carga***	14
2.6.	Cargas en conductores.....	15
2.6.1.	Campo en la superficie de un conductor	15
3.	UNIDAD 3: Potencial eléctricos (Capítulo 23).....	15
3.1.	Energía potencial eléctrica	15
3.1.1.	Energía potencial eléctrica en un campo uniforme	15
3.1.2.	Energía potencial de dos cargas puntuales.....	16
3.1.3.	Energía potencial de varias cargas puntuales	16
3.1.4.	Interpretación de la energía potencial eléctrica.....	16

3.2.	Potencial eléctrico	17
3.2.1.	Cálculo del potencial eléctrico.....	17
3.2.2.	Obtención del potencial a partir del campo eléctrico.....	17
3.2.3.	Electrón volts.....	17
3.3.	Calculo del potencial eléctrico	17
3.4.	Superficies equipotenciales.....	18
3.4.1.	Superficies equipotenciales y conductores.....	18
3.5.	Gradiente de potencial.....	19
4.	UNIDAD 4: Capacitancia y dieléctricos (Capítulo 24)	19
4.1.	Capacitores y capacitancia	19
4.1.1.	Calculo de la capacitancia: Capacitores en el vacío	19
4.2.	Capacitores en serie y en paralelo	20
4.2.1.	Capacitor en serie	20
4.2.2.	Capacitor en paralelo	20
4.3.	Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico	20
4.3.1.	Aplicaciones.....	21
4.3.2.	Energía del campo eléctrico	21
4.4.	Dieléctricos	21
4.4.1.	Carga inducida y polarización	21
4.4.2.	Ruptura del dieléctrico	22
4.5.	Modelo molecular de la carga inducida.....	22
5.	UNIDAD 5: Corriente, resistencia y fuerza electromotriz (Capítulo 25)	23
5.1.	Corriente eléctrica	23
5.2.	Resistividad.....	23
5.2.1.	Resistividad y temperatura	24
5.3.	Resistencia.....	24
5.3.1.	Interpretación de la resistencia	24
5.4.	Fuerza electromotriz y circuitos.....	25
5.4.1.	Fuerza electromotriz	25
5.4.2.	Resistencia interna.....	26
5.5.	Energía y potencia en circuitos eléctricos	26
5.5.1.	Potencia de una resistencia pura.....	26
5.5.2.	Potencia de salida de una fuente.....	26
5.5.3.	Potencia de entrada a una fuente	26
5.6.	Teoría de la conducción metálica.....	27
6.	UNIDAD 6: Circuitos de corriente continua (Capítulo 26)	27
6.1.	Resistores en serie y en paralelo.....	27
6.1.1.	Resistores en serie	27
6.1.2.	Resistores en paralelo	27

6.2.	Reglas de Kirchhoff	27
6.2.1.	Regla de Kirchhoff de las uniones	27
6.2.2.	Regla de Kirchhoff de las espiras	27
6.3.	Instrumentos de medición eléctrica	28
6.3.1.	Amperímetro	28
6.3.2.	Voltímetro	28
6.3.3.	Amperímetro y voltímetro en combinación.....	28
6.3.4.	Óhmetros	28
6.3.5.	Potenciómetro.....	28
6.4.	Circuitos R-C.....	28
6.4.1.	Carga de un capacitor	28
6.4.2.	Contante de tiempo	29
6.4.3.	Descarga de un capacitor.....	29
6.5.	Sistemas de distribución de energía.....	29
7.	UNIDAD 7: Campo magnético y fuerzas magnéticas (Capítulo 27).....	29
7.1.	Magnetismo.....	29
7.2.	Campo magnético.....	29
7.2.1.	Fuerzas magnéticas sobre cargas móviles	30
7.2.2.	Medición de campos magnéticos con cargas de prueba.....	30
7.3.	Líneas de campo magnético y flujo magnético.....	30
7.3.1.	Flujo magnético y ley de Gauss del magnetismo.....	30
7.4.	Movimiento de partículas con carga en un campo magnético.....	31
7.5.	Aplicaciones del movimiento de partículas con carga.....	31
7.5.1.	Selector de velocidad	31
7.5.2.	Experimento de e/m de Thomson	31
7.5.3.	Espectrómetros de masa	32
7.6.	Fuerza magnética sobre un conductor por el que circula una corriente.....	32
7.7.	Fuerza y momento de torsión sobre una espira de corriente	32
7.7.1.	Par de torsión magnético: Forma vectorial.....	33
7.7.2.	Energía potencial para un dipolo magnético	33
7.7.3.	Par de torsión magnético: Espiras y bobinas	34
7.7.4.	Dipolo magnético en un campo magnético no uniforme.....	34
7.7.5.	Dipolos magnéticos y cómo funcionan los imanes	34
7.8.	El motor de corriente continua.....	34
7.9.	El efecto Hall.....	34
8.	UNIDAD 8: Fuentes de campo magnético (Capítulo 28).....	34
8.1.	Campo magnético de una carga en movimiento	34
8.2.	Campo magnético de un elemento de corriente	35
8.3.	Campo magnético de un conductor recto por el que circula una corriente	35

8.4.	Fuerza entre conductores paralelos	36
8.4.1.	Definición de ampere	36
8.5.	Campo magnético de una espira circular de corriente.....	36
8.5.1.	Campo magnético sobre el eje de una bobina	37
8.6.	Ley de Ampere	37
8.6.1.	Ley de Ampère para un conductor largo y recto	37
8.6.2.	Ley de Ampère: Enunciado general.....	38
8.7.	Aplicaciones de la ley de Ampere.....	38
8.8.	Materiales magnéticos.....	39
8.8.1.	El magnetón de Bohr	39
8.8.2.	Paramagnetismo	39
8.8.3.	Diamagnetismo.....	39
8.8.4.	Ferromagnetismo.....	39
9.	UNIDAD 9: Inducción electromagnética (Capítulo 29)	39
9.1.	Experimentos de inducción	39
9.2.	Ley de Faraday	40
9.3.	Ley de Lenz	41
9.3.1.	Ley de Lenz y respuesta de cambio.....	41
9.4.	Fuerza electromotriz por movimiento	41
9.4.1.	Fem de movimiento: Forma general.....	42
9.5.	Campos eléctricos inducidos	42
9.6.	Corrientes parásitas.....	43
9.7.	Corriente de desplazamiento	43
9.8.	Ecuaciones de Maxwell	43
9.8.1.	Simetría en las ecuaciones de Maxwell	43
10.	UNIDAD 10: Inductancia (Capítulo 30).....	44
10.1.	Inductancia mutua	44
10.2.	Auto inductancia e inductores	44
10.2.1.	Los inductores como elementos de un circuito.....	45
10.2.2.	Aplicaciones de los inductores	45
10.3.	Energía de campo magnético.....	45
10.3.1.	Energía almacenada en un inductor.....	45
10.3.2.	Densidad de la energía magnética	46
10.4.	El circuito R-L.....	46
10.4.1.	Crecimiento de la corriente en un circuito R – L	47
10.4.2.	Decaimiento de la corriente en un circuito R – L	47
10.5.	El circuito L-C.....	48
10.5.1.	Oscilaciones eléctricas en un circuito L-C	49
10.5.2.	Energía en un circuito L-C	49

10.6.	El circuito L-R-C en serie.....	49
10.6.1.	Análisis del circuito L-R-C.....	50
11.	UNIDAD 11: Ondas electromagnéticas (Capítulo 32)	51
11.1.	Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas.....	51
11.1.1.	Generación de la radiación electromagnética (Lo dejo???).....	52
11.2.	Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz	52
11.2.1.	Una onda electromagnética plana simple	52
11.2.2.	Propiedades clave de las ondas electromagnéticas.....	52
11.2.3.	Deducción de la ecuación de onda electromagnética.....	52
11.3.	Ondas electromagnéticas sinusoidales	52
11.3.1.	Campo de una onda sinusoidal.....	53
11.3.2.	Ondas electromagnéticas en la materia	53
11.4.	Energía e intensidad en ondas electromagnéticas	53
11.4.1.	Flujo de energía electromagnética y el vector Poynting	53
11.4.2.	Flujo de cantidad de movimiento electromagnética y presión de radiación.....	54
11.5.	El espectro electromagnético.....	54
12.	UNIDAD 12: Naturaleza y propagación de la luz (Capítulo 33)	55
12.1.	Introducción a la luz.....	55
12.2.	Polarización.....	55
12.2.1.	Filtros polarizadores.....	55
12.3.	Ley de Malus	55
	56
12.4.	Ley de Brewster (Polarización por reflexión)	56
13.	UNIDAD 13: Interferencia (Capítulo 35).....	57
13.1.	Interferencia y fuentes coherentes	57
13.1.1.	Interferencia destructiva y constructiva.....	57
13.2.	Interferencia de luz de dos fuentes	58
13.2.1.	Interferencia constructiva y destructiva con dos ranuras	59
13.3.	Intensidad en patrones de interferencia	59
13.3.1.	Amplitud en la interferencia de dos fuentes.....	60
13.3.2.	Intensidad en la interferencia de dos fuentes.....	60
13.3.3.	Diferencia de fase y trayectoria.....	60
13.4.	Interferencia en películas finas	61
13.4.1.	Películas delgadas y gruesas.....	62
13.4.2.	Anillos de newton	63
13.4.3.	Recubrimientos reflectantes y no reflectantes	64
13.5.	El interferómetro de Michelson	64
14.	UNIDAD 14: Difracción (Capítulo 36)	65
14.1.	Difracción de Fresnel y Fraunhofer.....	65

14.2.	Difracción producida por una sola ranura	65
14.3.	Intensidad en la configuración de una sola ranura	66
14.3.1.	Máximos de intensidad en el patrón de una solo ranura.....	67
14.3.2.	Anchura del patrón de una sola ranura.....	67
14.4.	Ranuras múltiples	67
14.4.1.	Dos ranuras de ancho finito	67
14.4.2.	Múltiples ranuras.....	68
14.5.	La rejilla de difracción	68
14.6.	Aberturas circulares y poder de resolución.....	68

1. UNIDAD 1: Carga eléctrica y campo eléctrico (Capítulo 21)

Estudiaremos la fuerza del electromagnetismo, la cual es una parte de la Física que estudia las interacciones eléctricas y magnéticas; estas interacciones implican partículas con carga eléctrica (atributo fundamental). La carga eléctrica está cuantizada y obedece la ley de la conservación.

Los objetos cargados eléctricamente se ven acelerados por las fuerzas eléctricas

1.1. Carga eléctrica

La interacción entre cargas eléctricas en reposo (o casi en reposo) se le llama electroestática. La carga eléctrica puede ser positiva (vidrio frotado con seda) o negativa (plástico frotado con piel). Los objetos con cargas del mismo signo se repelen y objetos con signos opuestos se atraen, la materia neutra contiene igual cantidad de cargas positivas y negativas. Una aplicación tecnológica es la impresora láser.

1.1.1. Carga eléctrica y estructura de la materia

Analizaremos la estructura y propiedades eléctricas de los átomos, que son los bloques que constituyen la materia ordinaria.

La estructura de los átomos se describe en términos de tres partículas: el electrón (e^-), con carga negativa; el protón (e^+), cuya carga es positiva; y el neutrón, sin carga. Los protones y electrones son combinaciones de otras entidades llamadas quarks (partícula elemental), que son imposibles de observar en forma aislada hasta el momento.

Los protones y neutrones forman un núcleo y alrededor de este se encuentran los electrones, los cuales se mantienen dentro del átomo mediante fuerzas eléctricas de atracción ejercida sobre ellos por el núcleo cargado positivamente. Los protones y los neutrones permanecen dentro del núcleo, debido a la atracción de la fuerza nuclear fuerte, que vence la repulsión eléctrica entre los protones. Los efectos de la fuerza nuclear fuerte no llegan más allá del núcleo.

La carga del protón y el electrón es $e^+ = 1,6021 \times 10^{-19}$ y $e^- = -1,6021 \times 10^{-19}$, respectivamente.

El número de electrones o protones en un átomo neutro se le llama número atómico (Z). Si se pierden uno o más electrones, la estructura con carga positiva se llama ion positivo. El ion negativo es aquel que ha ganado uno o más electrones. Tal ganancia o perdidas de electrones se llama ionización.

1.1.2. La carga eléctrica se conserva

Tenemos dos principios sumamente importantes:

- Principio de conservación de carga: La carga eléctrica en un sistema cerrado permanece constante. (La carga no se crea ni se destruye, solo se transfiere de un cuerpo a otro)
- 2º Principio: La magnitud de la carga del electrón o protón es la unidad natural de carga.

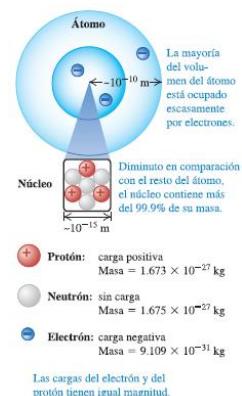
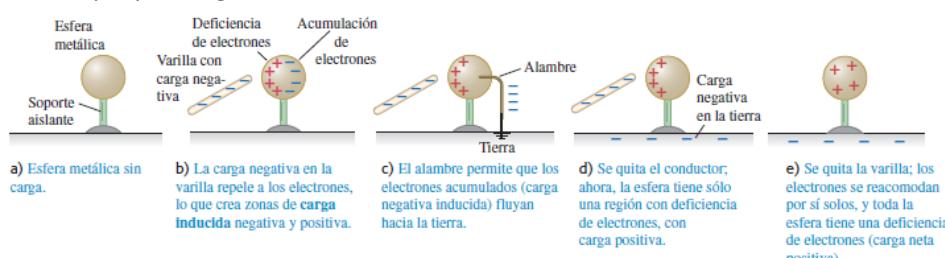
1.2. Conductores, aislantes y cargas inducidas

Los materiales conductores son aquellos que facilitan el movimiento de cargas a través de ellos debido a que poseen electrones libres. Los materiales aislantes no facilitan el movimiento de cargas a través de ellos porque no tienen electrones libres en su interior. La mayor parte de los metales son buenos conductores, en tanto que los no metales son aislantes en su mayoría.

También existen los materiales semiconductores que tienen propiedades intermedias entre los conductores y aislantes.

1.2.1. Cargas por inducción (Proceso)

El proceso de carga por inducción es cuando un cuerpo cargado da a otro cuerpo una carga de signo contrario, sin que el primero pierda su propia carga.



1.2.2. Fuerzas eléctricas en objetos sin carga

Un cuerpo con carga ejerce fuerzas sobre objetos sin carga. Esta interacción es un objeto de carga inducida, la cual ocasiona un cambio ligero de cargas dentro de las moléculas. Este efecto se llama polarización. La imagen del costado es un ejemplo, de manera similar sucede lo mismo si el peine tiene carga positiva las moléculas del aislante se reacomodan produciendo una fuerza neta de atracción

1.3. Ley de Coulomb (en el vacío)

La ley de Coulomb dice:

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (1.1) \quad [N]$$

donde k es un constante de proporcionalidad. Se utiliza el valor absoluto por que las cargas pueden ser positivas o negativas pero la fuerza (F) siempre es positiva.

Las direcciones de las fuerzas que las dos cargas ejercen sobre la otra siempre son a lo largo de la recta que las une. Cuando las cargas q_1 y q_2 tienen el mismo signo las fuerzas son de repulsión; cuando las cargas tienen signos opuestos, las fuerzas son de atracción. Las dos fuerzas obedecen la tercera ley de Newton; siempre tienen la misma magnitud y dirección opuesta, aun cuando las cargas no tengan igual magnitud.

Las interacciones eléctricas dependen de las cargas eléctricas y pueden ser de atracción o de repulsión; mientras que las gravitacionales dependen de la masa y siempre son de atracción.

1.3.1. Constantes eléctricas fundamentales

La unidad en SI

- para la carga eléctrica se llama Coulomb $[Q] = [C]$
- para la constante $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$
- para épsilon cero $\epsilon_0 \cong 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

1.3.2. Principio de superposición de fuerzas

Cuando dos cargas ejercen fuerzas de manera simultánea sobre una tercera carga, la fuerza total que actúa sobre la carga es la suma vectorial de las fuerzas que las dos cargas ejercerían individualmente.

Solo para cargas puntuales en el vacío, si hay materia la fuerza se altera debido a las cargas inducidas.

1.4. El campo eléctrico y las fuerzas eléctricas

1.4.1. Campo eléctrico

Supongamos que B tiene una carga q_0 y sea \vec{F}_0 la fuerza eléctrica (acción a distancia) de A sobre B. Ambos cuerpos cargados positivamente se repelen. Otro enfoque es verlo como un proceso de dos etapas:

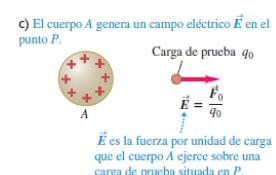
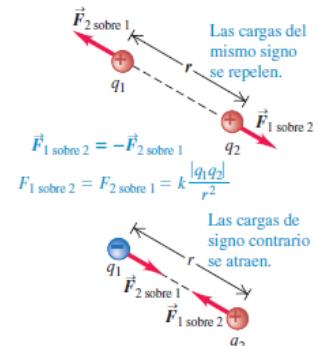
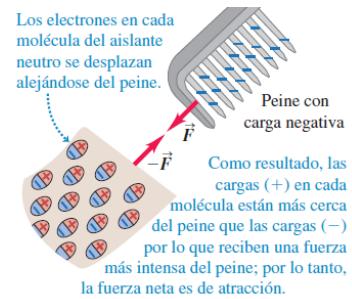
Primero imaginemos que el cuerpo A modifica de algún modo las propiedades del espacio que lo rodea y segundo que el cuerpo B percibe como el espacio se modifica en su posición, la respuesta es experimentar \vec{F}_0 .

Para entenderlo, primero eliminamos B y lo indicamos como P. Decimos que A produce un campo eléctrico en P (y su entorno). Este campo está presente en P incluso si no hay una carga en P. Segundo se coloca un carga puntual q_0 en el punto P, y esta experimenta \vec{F}_0 .

Decimos que el campo eléctrico es el intermediario con el que A comunica su presencia a q_0 . Debido a que q_0 experimenta una fuerza en cualquier punto del entorno de A, el campo eléctrico existe en todos esos puntos.

La fuerza eléctrica sobre un cuerpo cargado es ejercida por el campo eléctrico que otros cuerpos cargados originan. (Un cuerpo no puede ejercer una fuerza sobre sí mismo).

Para determinar si hay un campo eléctrico en un punto específico, colocamos una carga de prueba q_0 , en el punto. Si la carga de prueba experimenta una fuerza eléctrica, entonces en ese punto existe un campo eléctrico. Este campo lo producen cargas distintas de q_0 .



DEFINICION: El campo eléctrico en un punto es la fuerza eléctrica que experimenta una carga de prueba q_0 en dicho punto, dividida entre la carga q_0 . Es decir, el campo eléctrico en cierto punto es igual a la fuerza eléctrica por unidad de carga que una carga experimenta en ese punto

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \quad (1.2) \quad \left[\frac{N}{C} \right]$$

La fuerza ejercida sobre una carga puntual q_0 por un campo eléctrico

$$\vec{F}_0 = q_0 \vec{E} \quad (1.3) \quad [N]$$

Como la fuerza que ejerce q_0 sobre A produce desplazamientos en la distribución de cargas, por lo tanto el campo eléctrico de A tal vez no sea el mismo cuando q_0 está presente o ausente. Si q_0 tiende a cero el efecto sobre la distribución también.

1.4.2. Campo eléctrico de una carga puntual

Llamamos punto de origen a la posición de la carga, y punto de campo al punto P donde estamos determinando el campo. Si colocamos una pequeña carga de prueba q_0 en el punto del campo P, a una distancia r del punto de origen, la magnitud de la fuerza está dada por la ley de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|qq_0|}{r^2} \quad (1.4)$$

La magnitud del campo eléctrico en P

$$E = \frac{F_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|qq_0|}{r^2 q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$$

Si usamos el vector unitario \hat{r} queda:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \hat{r} \quad (1.5)$$

El campo eléctrico de una carga puntual siempre señala alejándose de una carga positiva y acercándose a una negativa.

En la electrostática, el campo vectorial en cada punto dentro del material de un conductor debe ser cero, donde las cargas no tienen movimiento.

Recordar que el campo eléctrico puede variar de un punto a otro, es un campo vectorial.

1.5. Cálculos de campos eléctricos

1.5.1. Principio de superposición de campos eléctricos

Para encontrar el campo originado por una distribución de cargas (q_1, q_2, q_3, \dots). En un punto dado P, cada carga puntual genera su propio campo $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \dots$ de manera que una carga de prueba q_0 colocada en P experimenta una fuerza \vec{F}_1 de la carga q_1 , una fuerza \vec{F}_2 de la carga q_2, \dots .

Por el principio de superposición de fuerzas, la fuerza total \vec{F}_0 que se ejerce sobre q_0 , es la suma vectorial de las fuerzas individuales $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = q_0 \vec{E}_1 + q_0 \vec{E}_2 + \dots$

Entonces el campo eléctrico total en P es

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

Densidades de carga:

- Densidad lineal de carga:

La distribución de carga es a lo largo de una línea, "carga por unidad de longitud". La representamos con $\lambda = \frac{Q}{L} \left[\frac{C}{m} \right]$

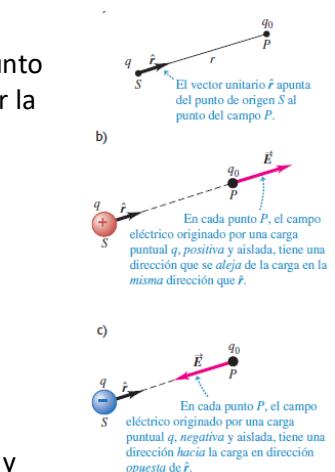
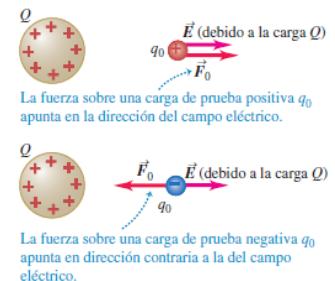
- Densidad superficial de carga

La distribución de carga es a lo largo de una superficie, "carga por unidad de área". La representamos con $\sigma = \frac{Q}{A} \left[\frac{C}{m^2} \right]$

- Densidad volumétrica de carga

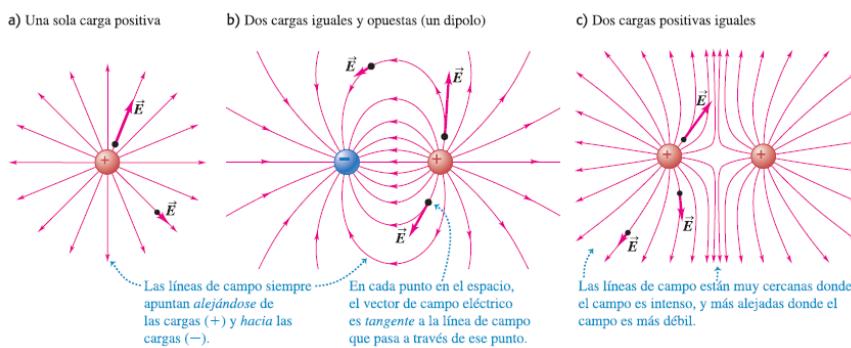
La distribución de carga es a lo largo de un volumen, "carga por unidad de volumen". La representamos con $\rho = \frac{Q}{V} \left[\frac{C}{m^3} \right]$

Ejemplos de cálculo de campos eléctricos. Campo producido por: una línea de carga, un disco con carga uniforme, un anillo con carga.



1.6. Líneas de campo eléctrico

Una línea de campo eléctrico es una línea o curva imaginaria dibujada a través de una región del espacio de manera que su tangente en cualquier punto tiene la dirección del vector \vec{E} . Estas líneas muestran la dirección de \vec{E} , si las líneas están cerca el campo es fuerte, si están separadas el campo es débil. Las líneas nunca se cruzan y no son las líneas de trayectoria.



1.7. Dipolos eléctricos

Un dipolo es un par de cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos separadas por una distancia d .

1.7.1. Fuerzas y par de torsión en un dipolo eléctrico

Coloquemos un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme. Las fuerzas F_+ y F_- en las dos cargas tienen una magnitud de qE , pero sus direcciones son opuestas y su suma es igual a cero. La fuerza neta sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme es cero.

Sin embargo, las dos fuerzas no actúan a lo largo de la misma línea, por lo que sus pares de torsión no suman cero. Los pares se calculan con respecto al centro del dipolo. Sea ϕ el ángulo entre el campo eléctrico y el eje del dipolo; entonces, el brazo de palanca tanto para como para F_+ y F_- es $(\frac{d}{2}) \operatorname{sen} \phi$. El par de torsión F_+ y F_- tienen ambos la misma magnitud de $(qE)(\frac{d}{2}) \operatorname{sen} \phi$, y los dos pares de torsión tienden a hacer girar el dipolo en el sentido horario (recordar regla de la mano derecha, tiende a girar para alinearse con el campo). Entonces, la magnitud del par de torsión neto es el doble de la magnitud de cualquier par de torsión individual:

$$\tau = (qE)(d \operatorname{sen} \phi) \quad (1.6) \quad [\text{Nm}]$$

donde $d \operatorname{sen} \phi$ es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas.

El producto de la carga q y la separación d es la magnitud de una cantidad llamada momento dipolar eléctrico, que se denota con p :

$$p = qd \quad (1.7) \quad [\text{Cm}]$$

El momento dipolar eléctrico se define como una cantidad vectorial \vec{p} . La magnitud de \vec{p} es (1.7), la dirección ocurre a lo largo del eje dipolar de la carga negativa a la positiva.

En términos de p , el momento de torsión es:

$$\tau = pE \operatorname{sen} \phi \quad (1.8)$$

También se puede escribir como:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (1.9)$$

El par de torsión es el máximo cuando \vec{p} y \vec{E} son perpendiculares, y es igual a cero cuando son paralelos o anti paralelos. El par de torsión siempre tiende a hacer que \vec{p} gire para que se alinee con \vec{E} . La posición $\phi = 0$, con \vec{p} paralelo a \vec{E} es una posición de equilibrio estable; mientras que la posición $\phi = \pi$, con \vec{p} y \vec{E} antiparalelos, es una posición de equilibrio inestable.

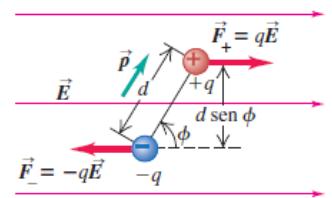
1.7.2. Energía potencial de un dipolo eléctrico

Cuando un dipolo cambia de dirección en un \vec{E} , el par de torsión del \vec{E} realiza trabajo sobre él, con el cambio de energía potencial. El trabajo dW realizado por un par de torsión durante un desplazamiento infinitesimal es $dW = \tau d\phi$ pero como el par está en la dirección que ϕ disminuye lo escribimos como $\tau = -pE \operatorname{sen} \phi$, y

$$dW = \tau d\phi = -pE \operatorname{sen} \phi$$

En un desplazamiento finito de ϕ_1 a ϕ_2 , el trabajo total realizado sobre el dipolo es:

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE \operatorname{sen} \phi) d\phi \\ = pE \cos \phi_2 - pE \cos \phi_1$$



Recordando que el trabajo es $W = U_1 - U_2$, obtenemos que la energía potencial para este sistema es:

$$U(\phi) = -pE\cos\phi$$

También se la puede escribir como:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.10)$$

La energía tiene su valor:

- Mínimo cuando $\phi = 0$ y \vec{p} es paralelo a \vec{E} .
- Máximo cuando $\phi = \pi$ y \vec{p} es antiparalelo a \vec{E} .
- Nulo cuando $\phi = \frac{\pi}{2}$ y \vec{p} es perpendicular a \vec{E} .

1.7.3. Campo en un dipolo

Completar

2. UNIDAD 2: Ley de Gauss (Capítulo 22)

La ley de Gauss ayuda a simplificar los cálculos de campo eléctrico, brinda información acerca de cómo se distribuye la carga eléctrica sobre cuerpos conductores, etc. Se trata de lo siguiente: dada cualquier distribución general de carga, se rodea con una superficie imaginaria que la encierre y luego se observa el campo eléctrico en distintos puntos de esa superficie imaginaria.

La ley de Gauss es una relación entre el campo en todos los puntos de la superficie y la carga total que ésta encierra.

2.1. Carga y flujo eléctrico

Para determinar el campo eléctrico producido por una distribución de carga conocida, existe otra manera a la presentada en la sección 1.5.

Consideramos una caja que imaginamos que está hecha de algún material que no tiene efecto sobre ningún campo eléctrico. Mejor aún, sea la caja una superficie imaginaria que puede o no encerrar una carga.

A la caja la llamaremos superficie cerrada por encerrar un volumen. Para determinar el campo que genera la carga del interior, colocamos una carga de prueba q_0 y con la medición de la fuerza \vec{F} experimentada por la carga q_0 en distintas posiciones se elabora un mapa tridimensional del campo eléctrico.

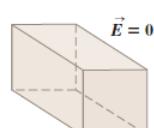
Para determinar el contenido de la caja, solo se necesita medir el campo en la superficie de la caja.

Cuando los vectores del \vec{E} apuntan hacia afuera de la superficie, decimos que existe un flujo eléctrico hacia afuera (saliente; sucede con cargas positivas). Si los vectores del \vec{E} apuntan hacia dentro de la superficie, decimos que existe un flujo hacia dentro (entrante; sucede con cargas negativas). Se puede ver en el caso b).

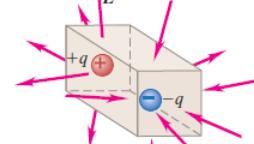
Para los casos especiales de una superficie cerrada en forma de caja rectangular y distribuciones de carga constituidas por cargas puntuales o láminas infinitas con carga, se tiene lo siguiente:

1. El hecho de que el flujo neto sea hacia el exterior o hacia el interior de una superficie cerrada depende del signo de la carga encerrada.
2. Las cargas afuera de la superficie no provocan un flujo eléctrico neto a través de la superficie.
3. El flujo eléctrico neto es directamente proporcional a la cantidad neta de carga contenida dentro de la superficie, pero es independiente del tamaño de la superficie cerrada.

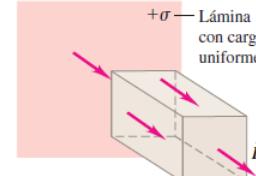
a) Sin carga dentro de la caja, flujo igual a cero



b) Carga neta igual a cero en el interior de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente



c) No hay carga dentro de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente



2.2. Cálculo del flujo eléctrico

Consideremos un área plana A perpendicular a un campo eléctrico uniforme \vec{E} . Definimos el flujo eléctrico a través de esta área como el producto de la magnitud del campo E por el área A:

$$\Phi_E = EA \quad (2.1) \quad \left[\frac{Nm^2}{C} \right]$$

Se puede imaginar el Φ_E como las líneas de campo que pasan a través de A.

Si el área A es plana pero no perpendicular al campo entonces son menos las líneas de campo que la atraviesan.

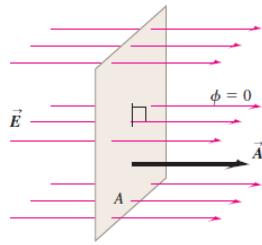
En este caso, el área que se toma en cuenta es la silueta que se observa al mirar en dirección de \vec{E} . Esta es el área A_{\perp} , que la podemos reescribir como $A \cos \phi$:

$$\Phi_E = EA_{\perp} = E A \cos \phi$$

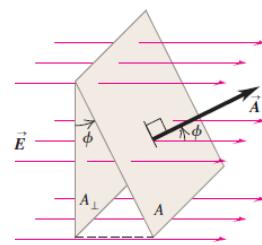
En términos del vector de área perpendicular al área, el flujo eléctrico se expresa como el producto escalar:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

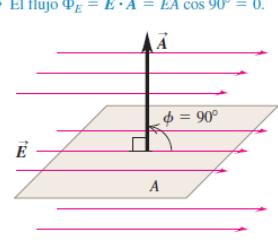
- a) La superficie está de frente al campo eléctrico:
• \vec{E} y \vec{A} son paralelos (ángulo entre \vec{E} y \vec{A} es $\phi = 0^\circ$).
• El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.



- b) La superficie está inclinada un ángulo ϕ respecto de la orientación de frente:
• El ángulo entre \vec{E} y \vec{A} es ϕ .
• El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.



- c) La superficie está de canto en relación con el campo eléctrico:
• \vec{E} y \vec{A} son perpendiculares (el ángulo entre \vec{E} y \vec{A} es $\phi = 90^\circ$).
• El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90^\circ = 0$.



La dirección de un vector de área se puede representar empleando un vector unitario perpendicular al área; \hat{n} significa "normal". De esta forma:

$$\vec{A} = A \hat{n}$$

Una superficie tiene dos lados, por lo que hay dos direcciones posibles para \hat{n} y \vec{A} . Siempre se debe especificar cuál es la dirección elegida.

2.2.1. Flujo de un campo no uniforme

Si el campo eléctrico es no uniforme, o si A es una superficie curva; dividimos A en muchos elementos dA que cada uno tiene un vector unitario \hat{n} perpendicular a él, y un área vectorial $d\vec{A} = \hat{n} dA$. Para obtener el flujo total, calculamos el flujo a través de cada elemento y resolvemos la integral de superficie:

$$\Phi_E = \int E \cos \phi dA = \int E_{\perp} dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (2.2)$$

En la ecuación (2.2) el flujo eléctrico $\int E_{\perp} dA$ es igual al valor medio de la componente perpendicular del campo eléctrico, multiplicado por el área de la superficie. Ésta es la misma definición del flujo eléctrico a que se llegó en la sección 2.1.

2.3. Ley de Gauss

2.3.1. Carga puntual dentro de una superficie esférica

Partiendo de una sola carga puntual positiva q , las líneas de campo se extienden en forma radial hacia afuera en todas las direcciones por igual.

Colocamos la carga en el centro de una superficie esférica imaginaria con radio R .

La magnitud del campo eléctrico en cada punto de la superficie está dada por:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} q$$

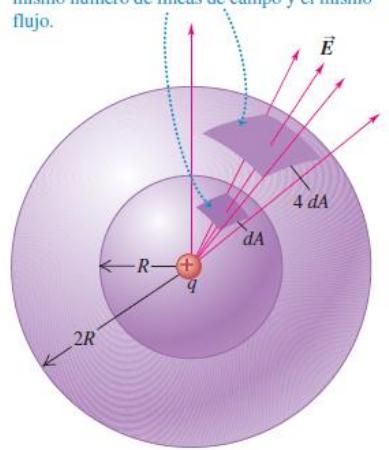
En cada punto de la superficie, \vec{E} es perpendicular a ésta, y su magnitud es la misma en todos los puntos. El flujo eléctrico total es el producto de la magnitud del campo E por el área total $A = 4\pi R^2$ de la esfera:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{q}{R} (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

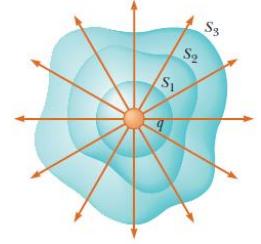
El flujo es independiente del radio R de la esfera; sólo depende de la carga q encerrada por la esfera. En la figura se puede ver que el R de la segunda esfera es dos veces más grande y que se proyecta un área dA 4 veces mayor. Pero el campo eléctrico es inversamente proporcional a r^2 , la magnitud del campo es sobre la esfera mayor es $1/4$ de la magnitud sobre la esfera menor. Así, el flujo es el mismo para las dos esferas.

2.3.2. Carga puntual dentro de una superficie no esférica

A través de estos dos elementos de área pasa el mismo número de líneas de campo y el mismo flujo.



Ahora considere varias superficies cerradas que rodean una carga q , como se muestra en la figura. La superficie S_1 es esférica pero las superficies S_2 y S_3 no lo son. Por la ecuación 2.3, el flujo que pasa a través de S_1 tiene un valor de q/ϵ_0 . Como se explicó en la sección anterior, el flujo es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que atraviesan dicha superficie. La figura muestra que el número de líneas a través de S_1 es el mismo número de líneas que pasan a través de las superficies no esféricas S_2 y S_3 . Por lo tanto, el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada que rodea a una carga puntual q tiene un valor de q/ϵ_0 y es independiente de la forma de la superficie.



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

Ahora considere una carga puntual localizada en el exterior de una superficie cerrada con forma arbitraria. Cualquier línea de campo eléctrico que entre en la superficie saldrá de la misma en algún otro punto. El número de líneas de campo eléctrico que entran es igual al número que salen. Por lo tanto, el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada que no rodea a ninguna carga es igual a cero.

2.3.3. Forma general de la Ley de Gauss

Para la obtención de la forma general de la ley de Gauss: Suponga que la superficie encierra no sólo una carga puntual q , sino varias cargas, q_1, q_2, q_3, \dots . El campo eléctrico total (resultante) \vec{E} en cualquier punto es la suma vectorial de los campos de las cargas individuales. Sea Q_{enc} la carga total encerrada por la superficie $Q_{enc} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$. Sea también \vec{E} el campo total en la posición del elemento de área $d\vec{A}$ de la superficie, y sea E_\perp su componente perpendicular al plano de ese elemento. Luego, se puede escribir una ecuación como la (2.4) para cada carga y su campo correspondiente y luego sumar los resultados. Al hacerlo se obtiene el enunciado general de la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0 .

Recordar que las superficies cerradas, también llamadas superficies gaussiana, son imaginarias y que las cargas exteriores no contribuyen al flujo total (neto) a través de la superficie.

Además, la ecuación (2.5) se puede escribir de varias maneras:

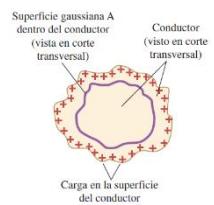
$$\Phi_E = \oint E \cos\phi dA = \oint E_\perp dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

2.4. Aplicaciones de la ley de Gauss

Cuando en un conductor sólido se coloca un exceso de carga que se encuentra en reposo, se encuentra en su totalidad en la superficie, no en el interior del material.

En una situación electrostática (con todas las cargas en reposo) el campo eléctrico \vec{E} en cada punto en el interior de un material conductor es igual a cero. Si \vec{E} no fuera cero, las cargas en exceso se moverían. Suponga que se construye una superficie gaussiana dentro del conductor.

Como $\vec{E} = 0$ en cualquier lugar de la superficie, la ley de Gauss requiere que la carga neta dentro de la superficie sea igual a cero. Si se comprime la superficie hasta que encierre una región tan pequeña que se pueda considerar un punto P; la carga en ese punto debe ser igual a cero. Esto se puede hacer en cualquier parte dentro del conductor, por lo que no puede haber carga en exceso en ningún punto dentro de un conductor sólido; toda carga excedente debe encontrarse en la superficie del conductor.



2.5. Cálculo de campos eléctricos para distribuciones uniformes de carga***

- Campo de una carga lineal
- Campo de una esfera conductora con carga
- Campo de una lámina plana infinita cargada
- Campo entre láminas conductoras paralelas y con cargas opuestas
- Campo de una esfera con carga uniforme

Campo eléctrico de varias distribuciones simétricas de carga: En la siguiente tabla se listan los campos eléctricos generados por varias distribuciones simétricas de carga. En la tabla, q , Q , λ y σ se refieren a las *magnitudes* de las cantidades.

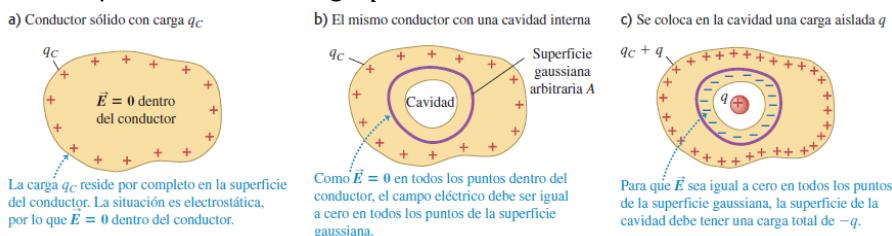
Distribución de la carga	Punto en el campo eléctrico	Magnitud del campo eléctrico
Una sola carga puntual	Distancia r desde q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
Carga q en la superficie de una esfera conductora de radio R	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = 0$
Alambre infinito, carga por unidad de longitud λ	Distancia r desde el alambre	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
Cilindro conductor infinito con radio R , carga por unidad de longitud λ	Cilindro exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
	Cilindro interior, $r < R$	$E = 0$
Esfera aislante sólida con radio R , carga Q distribuida de manera uniforme en todo el volumen	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$
Placa infinita cargada con carga uniforme por unidad de área σ	Cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Dos placas conductoras con cargas opuestas con densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$	Cualquier punto entre las placas	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

2.6. Cargas en conductores

En situaciones electrostáticas, el campo eléctrico en todo punto de un conductor es cero, y que cualquier exceso de carga sobre un conductor sólido se localiza por completo en la superficie. Caso a)

Para el caso b) se puede probar que la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser igual a cero, ya que $\vec{E} = 0$ en toda la superficie gaussiana. La demostración se ve en la próxima unidad en la sección 3.4.1.

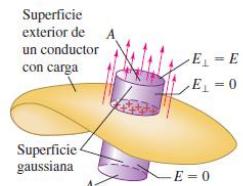
En el último caso suponga que se coloca un cuerpo con carga q dentro de una cavidad en el interior de un conductor. El conductor está descargado y aislado de la carga q . En todos los puntos de la superficie A, por la ley de Gauss la carga total dentro debe ser igual a cero. Por lo tanto, debe haber una carga $-q$ distribuida sobre la superficie de la cavidad, enviada ahí por la carga q en el interior de la cavidad. La carga total en el conductor debe ser igual a cero, por lo que debe haber una carga $+q$ ya sea en su superficie exterior o dentro del material. Pero en la sección 22.4 se demostró que en una situación electrostática no puede haber ninguna carga excedente dentro del material de un conductor. Así, se concluye que la carga $+q$ debe estar en la superficie externa. Con el mismo razonamiento, si el conductor tuviera originalmente una carga q_C , entonces la carga total en la superficie exterior debe ser $q_C + q$ después de que se insertó la carga q en la cavidad.



2.6.1. Campo en la superficie de un conductor

Se construye una superficie gaussiana en forma de pequeño cilindro. Una cara del cilindro queda dentro del conductor y la otra fuera. El campo eléctrico es cero en el interior del conductor y en las paredes de la superficie gaussiana (por ser paralelo) pero en la cara exterior tiene un valor de E_\perp . Por lo tanto, el flujo total es $\Phi_E = E_\perp A$ y la carga encerrada en la superficie es $q = \sigma A$. A partir de la ley de Gauss el campo de un conductor es:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E_\perp A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



3. UNIDAD 3: Potencial eléctricos (Capítulo 23)

Recordamos que:

- El trabajo efectuado por una fuerza desde punto a hasta un punto b es: $W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F \cos \phi dl$
- Si la fuerza es conservativa el trabajo se puede expresar como $W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b = -\Delta U$
- Si el único trabajo es realizado por fuerzas conservativas (la energía se conserva) $K_a + U_a = K_b + U_b$

3.1. Energía potencial eléctrica

3.1.1. Energía potencial eléctrica en un campo uniforme

El campo ejerce una fuerza hacia abajo con magnitud $F = q_0E$ sobre una carga de prueba positiva q_0 . A medida que la carga se mueve hacia abajo una distancia d del punto a al punto b , la fuerza sobre la carga de prueba es constante e independiente de su localización. Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico es:

$$W_{a \rightarrow b} = Fd = q_0Ed \quad (3.1) \quad [J = \frac{N}{m}]$$

Este trabajo es positivo, toda vez que la fuerza está en la misma dirección que el desplazamiento neto de la carga de prueba.

La componente y de la fuerza eléctrica, $F_y = -q_0E$, es constante, y no hay componentes x o z . Esto es exactamente análogo a la fuerza gravitatoria; para esta fuerza, existe una componente y constante $F_y = -mg$, y las componentes x y z son iguales a cero. A partir de esta analogía se puede concluir que la fuerza ejercida sobre q_0 es conservativa, igual que la fuerza gravitatoria. Esto significa que el trabajo $W_{a \rightarrow b}$ efectuado por el campo es independiente de la trayectoria. Este trabajo puede representarse con una función de energía potencial U . La energía potencial para la fuerza eléctrica $F_y = -q_0E$ es:

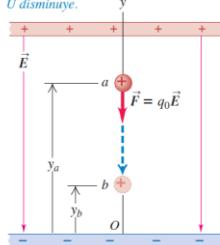
$$U = q_0Ey \quad (3.2) \quad [J]$$

Cuando la carga de prueba se mueve de la altura y_a hasta y_b , el trabajo realizado sobre la carga esta dado:

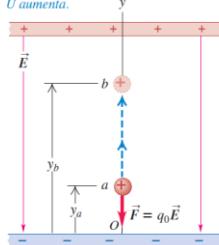
$$W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) = q_0E(y_a - y_b)$$

Sea positiva o negativa la carga de prueba, se aplica la siguiente regla general: U aumenta si la carga de prueba se mueve en la dirección opuesta a la fuerza eléctrica y el trabajo es negativo; U disminuye si q_0 se mueve en la misma dirección que la fuerza eléctrica y el trabajo es positivo.

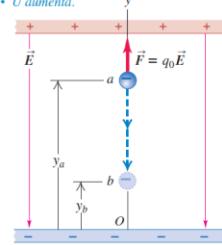
- a) La carga positiva se desplaza en dirección de \vec{E} :
- El campo realiza un trabajo **positivo** sobre la carga.
 - U **disminuye**.



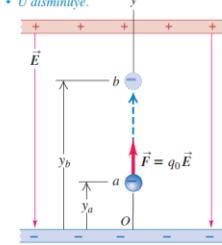
- b) La carga positiva se desplaza en dirección opuesta a \vec{E} :
- El campo realiza un trabajo **negativo** sobre la carga.
 - U **aumenta**.



- a) La carga negativa se desplaza en la dirección de \vec{E} :
- El campo realiza trabajo **negativo** sobre la carga.
 - U **aumenta**.



- b) La carga negativa se desplaza en dirección opuesta a \vec{E} :
- El campo realiza trabajo **positivo** sobre la carga.
 - U **disminuye**.



3.1.2. Energía potencial de dos cargas puntuales

La energía potencial U cuando la carga de prueba esta a cualquier distancia r es :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} \quad (3.3)$$

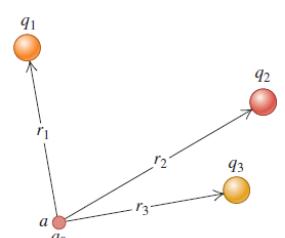
La energía potencial U dada por la ecuación (3.3) es una propiedad compartida de las dos cargas q y q_0 ; es una consecuencia de la interacción entre estos dos cuerpos. Si la distancia entre las dos cargas cambia de r_a a r_b , el cambio en energía potencial es el mismo si q permanece fija y q_0 se mueve, o si q_0 se mantiene fija y es q la que se mueve. Por esta razón, nunca se usa la frase "la energía potencial eléctrica de una carga puntual"

La demostración está en la página 783-784 del Sears.

3.1.3. Energía potencial de varias cargas puntuales

Suponga que el campo eléctrico en el que se desplaza la carga q_0 se debe a varias cargas puntuales q_1, q_2, q_3, \dots . Y a distancias r_1, r_2, r_3, \dots de q_0 , como se ilustra. El campo eléctrico total en cada punto es la suma vectorial de los campos debidos a las cargas individuales, y el trabajo total realizado sobre q_0 durante cualquier desplazamiento es la suma de las contribuciones de las cargas individuales. De la ecuación (3.3) se concluye que la energía potencial asociada con la carga de prueba q_0 en el punto a es la suma algebraica (no la suma vectorial):

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots \right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (3.4)$$



3.1.4. Interpretación de la energía potencial eléctrica

Le podemos dar dos puntos de vista a la energía potencial eléctrica:

Cuando una partícula se desplaza del punto a al punto b , el trabajo que realiza sobre ella el campo eléctrico es $W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b$. Por lo tanto, la diferencia de energía potencial es igual al trabajo que efectúa la fuerza eléctrica

cuando la partícula se desplaza de a a b . Si U_a es mayor que U_b , el campo realiza un trabajo positivo cuando la carga “cae” de un punto de mayor potencial a uno de menor.

El segundo punto de vista es cuando debemos “subir” la partícula desde b hasta a , desde un punto de menor a mayor potencial. Para ello debemos ejercer una fuerza externa \vec{F}_{ext} que es igual y opuesta a la fuerza eléctrica. La diferencia de energía potencial se define entonces con el trabajo que debe efectuar una fuerza externa para desplazar la partícula lentamente desde b hasta a en contra de la fuerza eléctrica.

3.2. Potencial eléctrico

Se define el potencial V (escalar) en cualquier punto en el campo eléctrico como la energía potencial U por unidad de carga asociada con una cara de prueba q_0 en ese punto:

$$V = \frac{U}{q_0} \quad (3.5) \quad [V \text{ "volt"}]$$

Decimos que el trabajo por unidad de carga es:

$$\frac{W_{a \rightarrow b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b$$

$V_{ab} = V_a - V_b$ se lo suele llamar como diferencia de potencial entre a y b o como voltaje. Definimos a V_{ab} , el potencial de a con respecto a b , es igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando una UNIDAD de carga se desplaza de a a b .

La segunda manera de interpretar V_{ab} , el potencial de a con respecto a b , es igual al trabajo que debe efectuarse para desplazar con lentitud una UNIDAD de carga de b a a contra la fuerza eléctrica

3.2.1. Cálculo del potencial eléctrico

Para encontrar el potencial debido a una carga puntual q , dividimos por q_0 la ecuación (3.3):

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (3.5)$$

donde r es la distancia de la carga q al punto donde se evalúa el potencial. Si q es positiva el potencial que produce es positivo en todos los puntos y viceversa.

Para el potencial debido a un conjunto de cargas, dividimos por q_0 la ecuación (3.4):

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (3.6)$$

El potencial eléctrico debido a una colección de cargas puntuales es la suma escalar de los potenciales debidos a cada carga. Cuando se tiene una distribución continua de carga a lo largo de una línea, sobre una superficie o a través de un volumen, se divide la carga en elementos dq y la suma en la ecuación (3.6) se convierte en la integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (3.7)$$

El potencial definido por (3.6) y (3.7) es cero en puntos que están infinitamente lejos de todas las cargas.

3.2.2. Obtención del potencial a partir del campo eléctrico

Se puede determinar V a partir de la fuerza sobre una carga de prueba q_0 se escribe como $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ por lo que, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica conforme la carga de prueba se desplaza de a a b está dado por:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se divide entre q_0 , se encuentra que:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos\phi \, dl \quad (3.8)$$

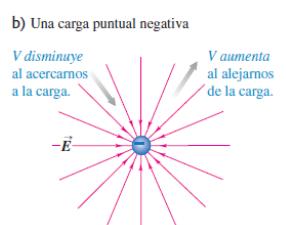
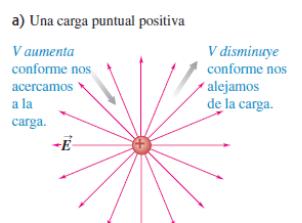
El valor de $V_a - V_b$ es independiente de la trayectoria tomada de a a b , del mismo modo en que el valor de $W_{a \rightarrow b}$ es independiente de la trayectoria.

La regla general, válida para cualquier campo eléctrico, es la siguiente:
desplazarse en la dirección de \vec{E} significa hacerlo en la dirección de V decreciente, y desplazarse contra de la dirección de \vec{E} significa moverse en la dirección de V creciente.

3.2.3. Electrón volts

3.3. Calculo del potencial eléctrico

- Esfera conductora con carga (795)
- Placas paralelas con cargas opuestas (796)

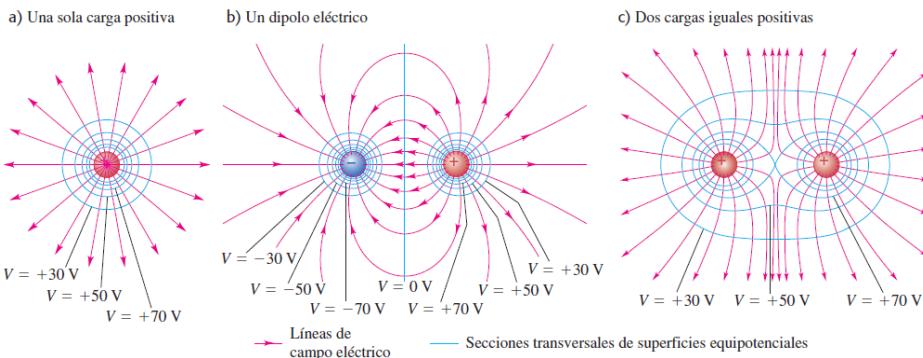


- Una línea de carga finita o un cilindro conductor con carga (797)
- Anillo de carga (797)
- Línea de carga (798)

3.4. Superficies equipotenciales

Una superficie equipotencial es una superficie tridimensional sobre la que el potencial eléctrico V es el mismo en todos los puntos. Si una carga de prueba q_0 se desplaza de un punto a otro sobre tal superficie, la energía potencial eléctrica permanece constante.

Como la energía potencial no cambia a medida que una carga de prueba se traslada sobre una superficie equipotencial, el campo eléctrico no realiza trabajo sobre esa carga. De ello se deriva que debe ser perpendicular a la superficie en cada punto, de manera que la fuerza eléctrica siempre es perpendicular al desplazamiento de una carga que se mueva sobre la superficie. El campo eléctrico en una superficie equipotencial no tiene que ser si o si constante.



3.4.1. Superficies equipotenciales y conductores

Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial. Como el campo eléctrico \vec{E} siempre es perpendicular a una superficie equipotencial, el enunciado se puede demostrar si se prueba que cuando todas las cargas están en reposo, el campo eléctrico justo afuera de un conductor debe ser perpendicular a la superficie en cada punto.

Se sabe que $\vec{E} = 0$ en el interior del conductor, si no las cargas se moverían. En particular la componente de \vec{E} tangente a la superficie es cero. Se deduce que la componente tangencial de \vec{E} también es igual a cero inmediatamente afuera de la superficie. Si no fuera así, una carga podría recorrer una trayectoria rectangular parcialmente dentro y parcialmente fuera y volvería a su punto de partida con una cantidad neta de trabajo realizado sobre ella. Esto violaría la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos. Así, \vec{E} es perpendicular a la superficie en cada punto, lo que prueba nuestra aseveración.

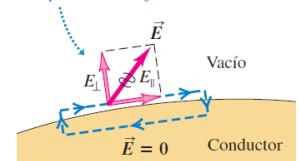
Demostraremos el caso b) de la sección 2.6. En una situación electrostática, si un conductor contiene una cavidad en cuyo interior no hay carga, entonces no puede haber carga neta en ningún lugar de la superficie de la cavidad.

Una cavidad dentro de un conductor

Ahora considere que un conductor de forma arbitraria contiene una cavidad como se muestra en la figura 25.21. Suponga que no hay cargas en el interior de la cavidad. En este caso, el campo eléctrico en el interior de la cavidad debe ser igual a cero, sin importar la distribución de la carga en la superficie exterior del conductor, como se mencionó en la sección 24.4. Además, el campo en la cavidad es igual a cero aun si existe un campo eléctrico en el exterior del conductor.

Para probarlo, recuerde que todos los puntos del conductor tienen el mismo potencial eléctrico y, por tanto, dos puntos cualesquiera \textcircled{A} y \textcircled{B} en la superficie de la cavidad

Un campo eléctrico imposible
Si el campo eléctrico inmediatamente afuera de un conductor tuviera una componente tangencial $E_{||}$, una carga podría moverse en una espira con trabajo neto realizado.



deben de estar al mismo potencial. Ahora imagine que existe un campo \vec{E} en la cavidad y evalúe la diferencia de potencial $V_{\textcircled{B}} - V_{\textcircled{A}}$ definida en la ecuación 25.3:

$$V_{\textcircled{B}} - V_{\textcircled{A}} = - \int_{\textcircled{A}}^{\textcircled{B}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Debido a que $V_{\textcircled{B}} - V_{\textcircled{A}} = 0$, la integral de $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ debe ser cero para todas las trayectorias entre dos puntos cualesquiera \textcircled{A} y \textcircled{B} en el conductor. La única manera de que esto pueda ser válido para *todas* las trayectorias es si \vec{E} es igual a cero en *cualquier* sitio de la cavidad. Entonces, una cavidad rodeada por paredes conductoras es una región libre de campo eléctrico, siempre y cuando no existan cargas en el interior de la misma.



Figura 25.21 Un conductor en equilibrio electrostático con una cavidad. El campo eléctrico en el

3.5. Gradiente de potencial.

Si se conoce el potencial en varios puntos podemos determinar el \vec{E} . Si consideramos que V es función de las coordenadas (x, y, z) de un punto del espacio, demostraremos que las componentes de \vec{E} se relacionan con la derivadas parciales de V con respecto a x, y y z .

Recordamos la ecuación (3.8): $V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$, aquí $V_a - V_b$ es el potencial de a con respecto a b , es decir, el cambio de potencial encontrado en un desplazamiento de b a a . Esto se escribe

$$V_a - V_b = \int_a^b dV = - \int_b^a dV$$

donde dV es el cambio infinitesimal del potencial que acompaña un elemento infinitesimal $d\vec{l}$ de la trayectoria de b a a . Si se comparan estas ecuaciones:

$$- \int_b^a dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Estas integrales deben ser iguales para cualquier par de límites a y b , y para que eso se cumpla los integrandos deben ser iguales, por lo tanto para cualquier $d\vec{l}$:

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si escribimos a \vec{E} y $d\vec{l}$ en términos de sus coordenadas $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ y $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Suponga que el desplazamiento es paralelo al eje x , por lo tanto $dy = dz = 0$. Entonces $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, de forma análoga se obtienen para las componentes y y z .

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}; & E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}; & E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \\ \vec{E} &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}V \end{aligned}$$

En cada punto, el gradiente de potencial señala en la dirección en que V se incrementa con más rapidez con un cambio de posición. De esta forma, en cada punto la dirección de \vec{E} es la dirección en que V disminuye más rápido y siempre es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa a través del punto.

4. UNIDAD 4: Capacitancia y dieléctricos (Capítulo 24)

Un capacitor es un dispositivo que almacena energía potencial eléctrica y carga eléctrica.

4.1. Capacitores y capacitancia

Dos conductores cualesquiera separados por un aislador (o vacío) forman un capacitor. Inicialmente tienen carga neta de cero y se transfieren electrones de un conductor al otro (carga del capacitor). Los dos conductores tienen igual magnitud de carga, pero signos opuestos, pero la carga neta sigue siendo cero. En los circuitos se los representa $\text{---}|\text{+}|$ $\text{---}|-\text{---}$

Si se aumenta la carga, aumenta la densidad de carga en cada punto, el campo eléctrico en cada punto y por lo tanto la diferencia de potencial entre los conductores (todos aumentan de manera proporcional a la carga). Sin embargo, la capacitancia no aumenta. Decimos que la capacitancia es una medida de la aptitud de un capacitor de almacenar energía y es la razón entre la carga y la diferencia de potencial:

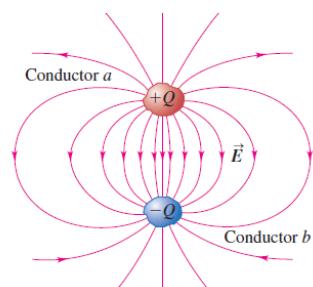
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \quad (4.1) \quad [\text{F}] \text{ "farad"}$$

A mayor capacitancia mayor será la magnitud de Q por lo tanto mayor será la cantidad de energía almacenada. El valor de la capacitancia solo depende del tamaño y forma de los conductores y la naturaleza de los materiales entre ellos.

4.1.1. Cálculo de la capacitancia: Capacitores en el vacío

En el caso de dos placas paralelas con carga, sabemos que la magnitud del campo eléctrico producido por una placa es $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ y que la diferencia de potencial es $V_{ab} = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$

Si reemplazamos esto en la ecuación (4.1), obtenemos que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas es:



$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4.2)$$

Recordar que la capacitancia solo depende de la geometría del capacitor, es independiente de la de la carga Q o la diferencia de potencial

4.2. Capacitores en serie y en paralelo

4.2.1. Capacitor en serie

Ambos capacitores están descargados, al aplicar la ddp los capacitores se cargan. Ambos llegan a la misma magnitud pero primero la placa superior de C_1 adquiere una carga positiva Q . El campo eléctrico de esta carga positiva atrae otra carga negativa hacia la placa inferior de C_1 hasta que todas las líneas de campo que comienzan en la placa superior terminan en la placa inferior. Para ello se requiere que la placa inferior tenga carga $-Q$. Estas cargas negativas tuvieron que venir de la placa superior de C_2 , la cual se carga positivamente con carga $+Q$. Luego, esta carga positiva atrae la carga negativa $-Q$ desde la conexión en el punto b a la placa inferior de C_2 .

La magnitud de las cargas en todas las placas es la misma; las diferencias de potencial entre los puntos a , b y c son:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \\ \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (1)$$

La capacitancia equivalente C_{eq} de la combinación en serie, se puede sustituir por un capacitor equivalente de capacitancia C_{eq} :

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad (2)$$

Si combinamos (1) y (2) obtenemos:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.3)$$

Esto se puede extender para cualquier número de capacitores.

4.2.2. Capacitor en paralelo

Las placas superiores están conectadas mediante alambres conductores para formar una superficie equipotencial, al igual que las placas inferiores.

En este caso la diferencia de potencial para todos los capacitores es la misma. Pero cuando los capacitores se cargan las cargas que llegan a cada uno no son necesariamente iguales ya que llegan de manera independiente desde la fuente (puede ser desde una batería) de voltaje V_{ab} . Las cargas para cada capacitor son:

$$Q_1 = C_1 V \quad Q_2 = C_2 V$$

La carga total Q de la combinación, es decir, la carga total en el capacitor equivalente es:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

Por lo que:

$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2$$

La capacitancia equivalente de la combinación

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (4.4)$$

Esto se puede extender para cualquier número de capacitores. No hay carga por inducción, las cargas llegan por la FEM (carga directa)

4.3. Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

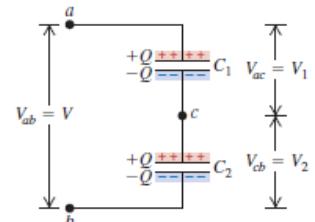
La energía potencial eléctrica almacenada en un capacitor cargado es exactamente igual a la cantidad de trabajo requerido para cargarlo, es decir, para separar cargas opuestas y colocarlas en los diferentes conductores.

Podemos determinar la energía potencial U mediante el cálculo del trabajo W . Suponga que la carga final de capacitor es Q y la diferencia de potencial es V ; y tienen la siguiente relación $V = \frac{Q}{C}$

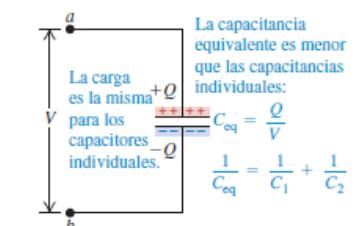
a) Dos capacitores en serie

Capacitores en serie:

- Los capacitores tienen la misma carga Q .
- Sus diferencias de potencial se suman: $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}$.



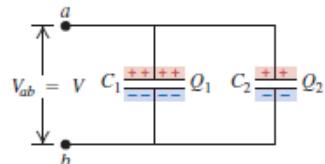
b) El capacitor equivalente único



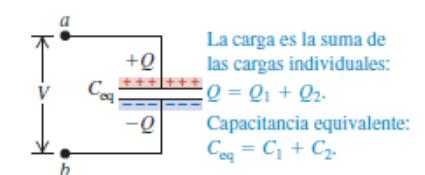
a) Dos capacitores en paralelo

Capacitores en paralelo:

- Los capacitores tienen el mismo potencial V .
- La carga en cada capacitor depende de su capacitancia: $Q_1 = C_1 V$, $Q_2 = C_2 V$.



b) El capacitor equivalente único



Sean q y v la carga y potencial, respectivamente, en una etapa intermedia; entonces $v = \frac{q}{C}$. En esta etapa el trabajo dW que se requiere para transferir un elemento de carga dq es:

$$dW = vdq = \frac{q dq}{C}$$

El trabajo total W para incrementar la carga del capacitor de cero a Q , es:

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (3)$$

Esto también es igual al trabajo total realizado por el campo eléctrico sobre la carga cuando el capacitor se descarga. La carga final almacenada es $Q = CV$.

Si se define la energía potencial de un capacitor sin carga como igual a cero, entonces W en la ecuación (3) es igual a la energía potencial U del capacitor con carga y la podemos expresar como:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad (4.5)$$

4.3.1. Aplicaciones

4.3.2. Energía del campo eléctrico

Para cargar un capacitor trasladamos electrones de una placa a otra, para ello realizamos trabajo contra el campo eléctrico. Podemos considerar que la energía estuviese almacenada en el campo, entre las placas.

Definimos la densidad de energía como la energía potencial por unidad de volumen:

$$u = \frac{\frac{1}{2} CV^2}{Ad} \quad (4)$$

Recordando que $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ y que $V = Ed$, si los reemplazamos en la ecuación (4)

$$u = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (Ed)^2}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4.6)$$

Esta relación es válida para cualquier capacitor con vacío (para cualquier configuración de campo eléctrico en el vacío). La energía del campo eléctrico es la misma energía potencial eléctrica.

4.4. Dieléctricos

Los dieléctricos son materiales no conductores que se colocan entre las placas de un capacitor, estos cumplen 3 funciones:

- Mantiene separadas las placas
- Aumenta la máxima diferencia de potencial porque cualquier material aislante experimenta una ionización parcial que permite la conducción a través de él, si se somete a un campo grande.
- Aumenta la capacitancia porque hace que la ddp disminuya

La capacitancia original es $C_0 = Q/V_0$ y la capacitancia con el dieléctrico es $C = Q/V$. Igualando las Q porque estas son iguales definimos a la razón de C a C_0 (igual a la razón de V a V_0) como la constante dieléctrica

$$K = \frac{C}{C_0} \quad (4.7)$$

También se puede expresar como:

$$V = \frac{V_0}{K} \quad (4.8)$$

Material	K	Material	K
Vacio	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (a 1 atm)	1.00059	Plexiglás	3.40
Aire (a 100 atm)	1.0548	Vidrio	5-10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.28	Glicerina	42.5
Mica	3-6	Agua	80.4
Mylar	3.1	Titanato de estroncio	310

4.4.1. Carga inducida y polarización

Cuando se inserta un dieléctrico en el capacitor y la carga es constante, la ddp disminuye así también lo hace el campo eléctrico y la densidad superficial de carga, entonces:

$$E = \frac{E_0}{K} \quad (4.9)$$

La carga superficial en las placas no cambia, pero en cada superficie del dieléctrico aparece una carga inducida de signo contrario. El dieléctrico era neutro y lo sigue siendo, las cargas superficiales inducidas surgen por la redistribución de las cargas dentro del dieléctrico, esto se llama polarización.

Denotamos a σ_i como la densidad superficial de carga inducida en el dieléctrico y a σ como la densidad superficial de carga en cada lado del capacitor. La carga superficial neta en cada lado del capacitor es $(\sigma - \sigma_i)$, el campo entre las placas es $E = \sigma_{neta}/\epsilon_0$, entonces

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Si reemplazamos (5) en la ecuación (4.9) obtenemos la densidad superficial de carga inducida:

$$\sigma_i = \sigma \left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad (4.10)$$

Llamamos permitividad del dieléctrico y lo denotamos como ϵ a:

$$\epsilon = K\epsilon_0 \quad (4.11)$$

En términos de ϵ , el campo eléctrico dentro del dieléctrico se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (4.12)$$

La capacitancia con un dieléctrico presente se transforma en:

$$C = KC_0 = \frac{K\epsilon_0 A}{d} = \epsilon \frac{A}{d} \quad (4.13)$$

Lo mismo sucede para la densidad de energía u es:

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad (4.14)$$

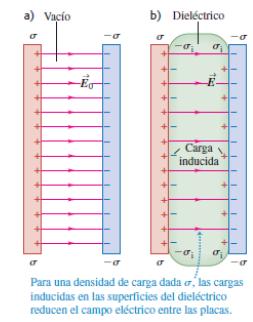
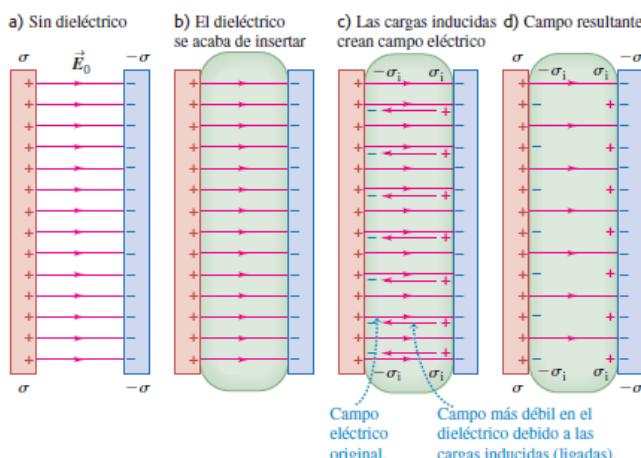
4.4.2. Ruptura del dieléctrico

Esto ocurre cuando el campo eléctrico es tan grande que arranca los electrones del dieléctrico convirtiéndolo en un conductor. La magnitud máxima del campo a la que se puede someter un dieléctrico se llama rigidez dieléctrica (Se ve afectada por la temperatura, impurezas, irregularidades y otros factores).

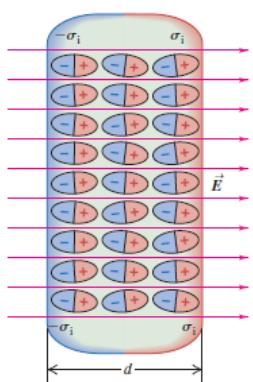
4.5. Modelo molecular de la carga inducida.

Las moléculas que tienen la misma cantidad de cargas positivas que negativas pero distribuidas por toda la molécula, es decir, muchos dipolos son moléculas polares. En ausencia de un campo eléctrico las moléculas polares se orientan al azar, pero cuando se aplica un campo estas tienden a alinearse con el campo. En ausencia de un campo eléctrico las moléculas no polares no son dipolos eléctricos, pero cuando hay un campo las cargas positivas y negativas de las moléculas se separan ligeramente, debido al campo, y la convierte en una molécula polar, con dipolos inducidos.

La redistribución de las cargas, en cualquier de estas dos moléculas, origina una capa de carga superficial del dieléctrico. Las cargas no tienen libertad de moverse por estar unidas a una molecular, se las llama cargas ligadas. Esta redistribución se llama polarización y se dice que el material esta polarizado. A continuación, se muestra el proceso:



24.20 La polarización de un dieléctrico en un campo eléctrico \vec{E} da lugar a la formación de capas delgadas de cargas ligadas en las superficies, lo que crea densidades de carga superficiales σ_i y $-\sigma_i$. Por claridad, se han exagerado los tamaños de las moléculas.



5. UNIDAD 5: Corriente, resistencia y fuerza electromotriz (Capítulo 25)

Una corriente eléctrica consiste en cargas en movimiento de una región a otra, cuando es una trayectoria cerrada se llama circuito eléctrico. Los circuitos son un medio de transportar la energía de un lugar a otro.

5.1. Corriente eléctrica

Definimos la corriente como la carga neta que fluye a través del área por unidad de tiempo, por lo tanto:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1) \quad [A] \text{ "ampere"}$$

Si tenemos segmentos de dos materiales diferentes portadores de corriente; y las cargas en movimiento son positivas, la fuerza eléctrica ocurre en la misma dirección que y la velocidad de deriva es de izquierda a derecha. Ahora si las cargas son negativas, la fuerza eléctrica es opuesta a y la velocidad de deriva es de derecha a izquierda. En ambos casos hay un flujo neto de carga positiva de izquierda a derecha, y las cargas positivas terminan a la derecha de las negativas. Definimos que la corriente, va en la dirección en la que hay un flujo de carga positiva. La corriente no es un vector, siempre va a lo largo del conductor.

La corriente se puede expresar en términos de la velocidad de deriva v_d . Consideremos la situación de la figura, que ilustra un conductor con área de sección transversal A y un campo eléctrico dirigido de izquierda a derecha. Suponemos que las cargas libres en el conductor son positivas (la v_d y el campo van en la misma dirección); que hay n partículas con carga en movimiento por unidad de volumen, donde n es la concentración de partículas [m^{-3}]; que todas las partículas se mueven con la misma v_d . En un intervalo de tiempo dt , cada partícula se mueve una distancia $v_d dt$. El volumen del cilindro es $A v_d dt$, y el número de partículas dentro es $n A v_d dt$. Si cada partícula tiene una carga q , la carga dQ que fluye hacia fuera por el extremo del cilindro durante el tiempo dt es:

$$dQ = q(A n v_d dt) = n q A v_d dt$$

Y la corriente es:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n |q| v_d A \quad (5.2)$$

La corriente por unidad de área de la sección transversal se denomina densidad de corriente J :

$$J = \frac{I}{A} = n |q| v_d \quad (5.3) \quad \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

$$\vec{J} = n q \vec{v}_d \quad (5.4)$$

Se usa el valor absoluto porque la corriente no depende del signo de la carga. La densidad de corriente describe cómo fluyen las cargas en cierto punto, la corriente describe la forma en que fluyen las cargas a través de un objeto extendido,

La velocidad de deriva v_d . Para comprender, considere un conductor en donde los portadores de carga son electrones libres. Si el conductor está aislado, es decir, la diferencia de potencial es cero (no hay un campo eléctrico), estos electrones se mueven aleatoriamente. Los electrones colisionan repetidamente con los átomos metálicos, y su movimiento es complicado y en zigzag. Cuando se aplica una diferencia de potencial a un conductor (por ejemplo, mediante una batería), se establece un campo eléctrico; este campo ejerce una fuerza eléctrica sobre los electrones, lo que produce una corriente. Además del movimiento zigzagueante producido por las colisiones con los átomos metálicos, los electrones se trasladan despacio a lo largo del conductor (en dirección opuesta a E) con la velocidad de arrastre v_d . El movimiento aleatorio de los electrones tiene una rapidez media alrededor de 10^6 , la rapidez de deriva es muy baja, alrededor de 10^{-4} .

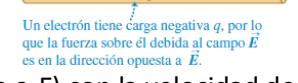
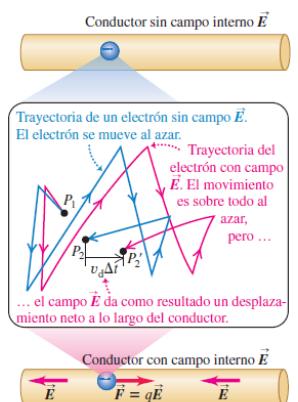
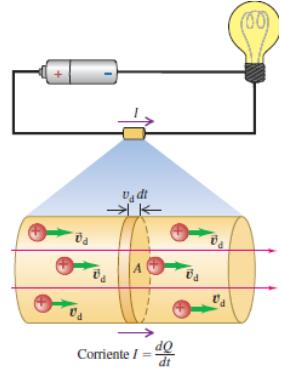
5.2. Resistividad

Para ciertos materiales la razón de las magnitudes de E y J es constante; esta relación se llama ley de Ohm

La resistividad ρ de un material (depende de la temperatura) se define como la razón de las magnitudes del campo eléctrico y la densidad de corriente:

$$\rho = \frac{E}{J} \quad (5.5) \quad \left[\frac{Vm}{A} = \Omega m \right]$$

Un conductor perfecto tendría una resistividad igual a cero; y un aislante perfecto tendría resistividad infinita.



$$\rho = \frac{E}{J} \quad (5.5) \quad \left[\frac{Vm}{A} = \Omega m \right]$$

El reciproco de la resistividad es la conductividad. A mayor conductividad menor resistividad y viceversa. Un material que obedece la ley de Ohm es un conductor óhmico o lineal(a una temperatura dada, ρ es una cte. y no depende del valor de E , los que no la obedecen se llaman no óhmicos o no lineales(J depende de E de manera complicada).

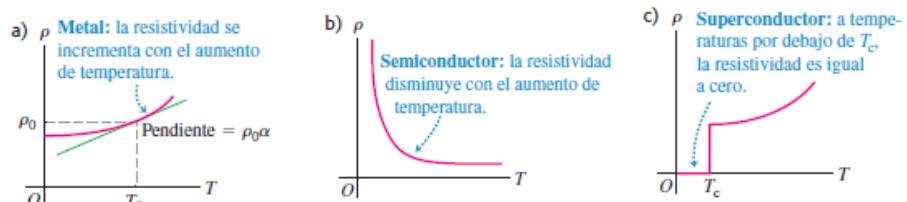
5.2.1. Resistividad y temperatura

La resistividad de un conductor metálico casi siempre se incrementa al aumentar la temperatura, porque los iones del conductor vibran con mayor amplitud, lo que hace más probable que un electrón en movimiento colisione con un ion, dificultando la deriva de los electrones y reduciendo la corriente. En un intervalo de temperatura (entre 0°C hasta 100°C aprox.) la resistividad se representa por la ecuación:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (5.6)$$

donde ρ_0 es la resistividad de una temperatura de referencia T_0 y α [$^{\circ}\text{C}^{-1}$] es el coeficiente de temperatura de resistividad para cada material.

En el caso de los semiconductores la ρ disminuye porque se desprenden más electrones con el aumento de la temperatura. Los superconductores se comportan como un metal pero cuando llegan a la temperatura critica su ρ cae a 0. En estos materiales si se establece una corriente, esta continua sin necesidad de un campo eléctrico.



5.3. Resistencia

Para un conductor con resistividad ρ y densidad \vec{J} en un punto, el campo está dado por (5.5) $\vec{E} = \rho \vec{J}$

Suponga un conductor de área transversal A y longitud L . Sea V la ddp entre los extremos(del más alto al más bajo), de modo que sea positiva. La dirección de I va del extremo de mayor al de menor potencial, porque la corriente fluye en dirección del campo y este fluye en la dirección del potencial decreciente. Si la densidad de corriente y el campo son uniformes decimos que:

$$I = JA \quad y \quad V = EL \quad (1)$$

Si las reemplazamos en la ecuación (5.5), nos queda:

$$\frac{V}{L} = \frac{\rho I}{A} \quad o \quad V = \frac{\rho I L}{A} \quad (5.7)$$

Esto demuestra que cuando ρ es constante, I es proporcional a la ddp V .

La razón de V a I se llama resistencia R :

$$R = \frac{V}{I} \quad (5.8) \quad [\Omega] "ohm"$$

y decimos que la resistencia se relaciona con la resistividad del material mediante la ecuación

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (5.9)$$

Además, si ρ es constante la resistencia también lo es en materiales óhmicos y la ecuación

$$V = IR \quad (5.10)$$

Suele identificarse con la ley de ohm. Es importante entender que el contenido real de la ley de Ohm es la proporcionalidad directa (para ciertos materiales) de V con respecto a I , o de J con respecto a E . La ecuación (5.8) o la (5.9) definen la resistencia R para cualquier conductor, ya sea que cumpla o no la ley de Ohm, pero sólo cuando R es constante es correcto llamar a esta relación ley de Ohm.

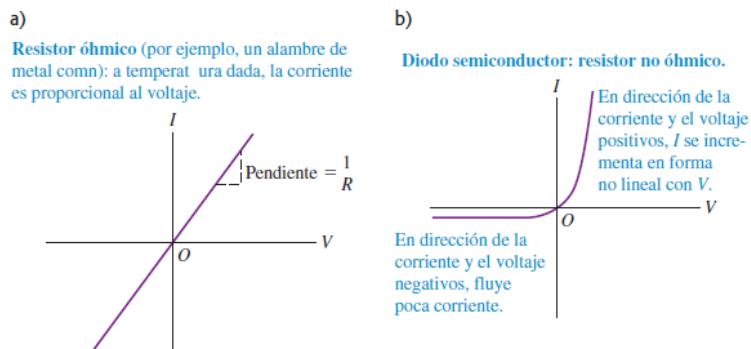
5.3.1. Interpretación de la resistencia

La resistencia de un conductor cambia con la temperatura y está dado aproximadamente por:

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (5.11)$$

donde R_0 es la resistencia a una temperatura de referencia T_0 y α [$^{\circ}\text{C}^{-1}$] es el coeficiente de temperatura de resistividad para cada material.

El dispositivo de un circuito hecho para tener un valor específico de resistencia entre sus extremos se llama resistor.



Si hay una bombilla conectada a un cable la mayoría de la energía se pierde en la bombilla, la cual se convierte en luz y calor en el filamento del alambre. Para los cables de la casa, se utiliza una resistencia de resistividad baja y sección transversa grande para mantener la resistencia baja.

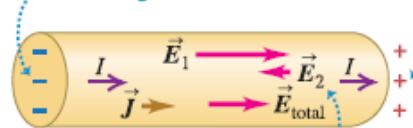
5.4. Fuerza electromotriz y circuitos

Para que un conductor tenga una corriente constante, la trayectoria debe ser cerrada (circuito completo), de lo contrario la corriente empieza a disminuir hasta llegar a cero. A continuación, se explica:

a) Un campo eléctrico \vec{E}_1 producido dentro de un conductor aislado genera una corriente

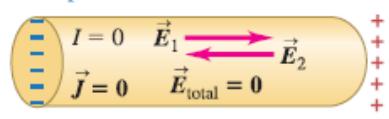


b) La corriente hace que en los extremos se acumule carga.



La carga acumulada produce un campo opuesto \vec{E}_2 , lo que reduce la corriente.

c) Al cabo de un lapso muy corto \vec{E}_2 tiene la misma magnitud que \vec{E}_1 ; entonces, el campo total es $\vec{E}_{\text{total}} = \mathbf{0}$ y la corriente cesa por completo.

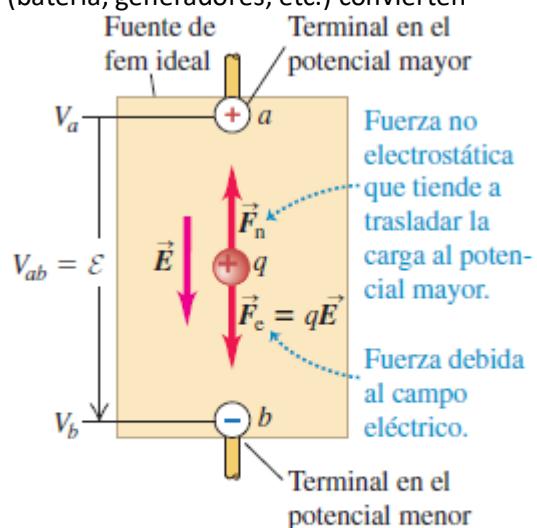


5.4.1. Fuerza electromotriz

Para mantener una corriente constante en un circuito completo, tenemos que la energía potencial debe ser la misma al final y al principio del recorrido. Pero siempre hay una disminución de la energía potencial cuando se desplazan cargas a través de un conductor con resistencia. Así que debe haber una parte en el circuito en la que la energía potencial se incremente. Es como una fuente de agua.

En los circuitos completos para mantener la corriente constante incluyen un dispositivo (fuente de fem) que proporcione una fem (fuerza electromotriz, aunque no es una fuerza). Es un término mal empleado, es una cantidad de energía por unidad de carga. La unidad es el volt [$V = \frac{J}{C}$], es decir, una fem de 1.5 V realiza 1.5 J por cada coulomb de carga. La fem la denotaremos como \mathcal{E} . Las fuentes de fem (batería, generadores, etc.) convierten energía de alguna forma (mecánica, química, etc.) en energía potencial eléctrica y la transfieren al circuito. Las fuentes ideales de fem mantienen una ddp constante entre sus terminales.

La figura es un diagrama de una fuente de fem ideal que mantiene una ddp entre los conductores a y b , llamados terminales del dispositivo. La terminal a se mantiene a un potencial más alto que la terminal b . Asociado con esta ddp hay un campo eléctrico en la región que rodea a las terminales, tanto adentro como afuera de la fuente. El campo eléctrico en el interior del dispositivo está dirigido de a a b . Una carga q dentro de la fuente experimenta una fuerza eléctrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Pero la fuente suministra además una influencia adicional, la cual se representa como una fuerza no electrostática \vec{F}_n . Esta fuerza empuja la carga de b a a "cuesta arriba" y contra la fuerza eléctrica. Así, mantiene la ddp entre las terminales. Si no estuviera presente, la carga fluiría entre las terminales hasta que la ddp fuera igual a cero. El origen de \vec{F}_n depende de la fuente. En una batería está asociada con procesos de difusión que es el resultado de reacciones químicas.



Cuando la fuente de fem no es parte de un circuito cerrado, $F_n = F_e$ y no hay movimiento neto de carga entre las terminales.

Si una carga positiva q se desplaza de b a a en el interior de la fuente, la fuerza no electrostática realiza una cantidad positiva de trabajo sobre la carga. Este desplazamiento es opuesto a la fuerza electrostática por lo que la energía potencial asociada con la carga se incrementa en una cantidad igual a qV_{ab} , donde $V_{ab} = V_a - V_b$ es la diferencia de potencial (positivo) del punto a con respecto al punto b . Para la fuente ideal de fem que se ha descrito, \vec{F}_e y \vec{F}_n tienen igual magnitud pero dirección opuesta, por lo que el trabajo total realizado sobre la carga q es igual a cero; hay un aumento de la energía potencial pero ningún cambio en la energía cinética de la carga. Es como levantar un libro del piso a un estante elevado con rapidez constante. El incremento en energía potencial es igual al trabajo no electrostático W_n , por lo que $q\mathcal{E} = qV_{ab}$ o bien,

$$V_{ab} = \mathcal{E} \quad (5.12)$$

Ahora, consideremos que se forma un circuito completo conectando un alambre con resistencia R a las terminales de una fuente. La ddp entre las terminales a y b establece un campo eléctrico dentro del alambre; esto hace que la corriente fluya alrededor de la espira de a hacia b , del potencial más alto al más bajo. Donde el alambre se dobla, persisten cantidades iguales de carga positiva y negativa en el “interior” y en el “exterior” del doblez. Estas cargas ejercen las fuerzas que hacen que la corriente siga los dobleces del alambre. De la ecuación (5.10), la ddp entre los extremos del alambre está dada por $V_{ab} = IR$. Al combinarse con la ecuación (5.12), se obtiene:

$$\mathcal{E} = V_{ab} = IR \quad (5.13)$$

Es decir, cuando una carga positiva q fluye alrededor del circuito, el aumento de potencial a medida que pasa a través de la fuente ideal es numéricamente igual a la caída de potencial $V_{ab} = IR$ conforme pasa por el resto del circuito. Una vez que se conocen \mathcal{E} y R , esta relación determina la corriente en el circuito.

5.4.2. Resistencia interna

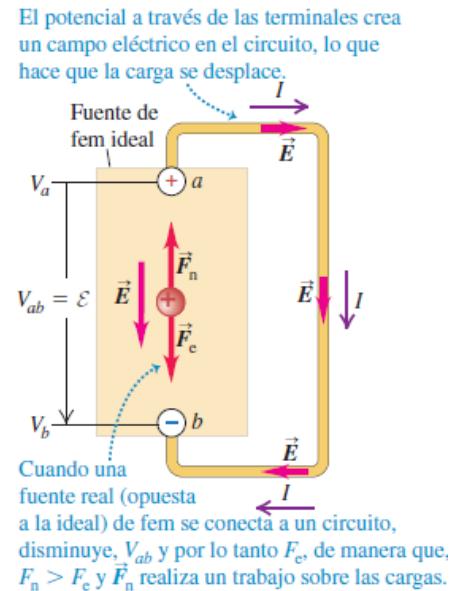
Las fuentes reales de fem presentan una resistencia interna y la denotamos con r . Si se comporta de acuerdo a la ley de ohm, r es constante e independiente de la corriente I , entonces la ddp entre las terminales es:

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \quad (5.14)$$

Llamamos a V_{ab} , voltaje terminal.

La corriente en el circuito externo conectado a las terminales de las fuentes sigue determinado por $V_{ab} = IR$

$$\mathcal{E} - Ir = IR \quad o \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (5.15)$$



5.5. Energía y potencia en circuitos eléctricos

En los circuitos eléctricos nos interesa la rapidez con la que la energía se proporciona a un elemento de circuito o se extrae de él. Sea I la corriente, entonces en un intervalo de tiempo dt pasa una cantidad de carga $dQ = I dt$ a través del elemento. El cambio en la energía potencial para esta cantidad de carga es $V_{ab} dQ = V_{ab} I dt$. Si esta expresión se divide entre dt , se obtiene la rapidez a la que se transfiere la energía hacia afuera o hacia dentro. La relación de transferencia de energía por unidad de tiempo es la potencia, y se denota mediante P ; por lo tanto, escribimos

$$P = V_{ab}I \quad (5.16) \quad [W] "watt"$$

5.5.1. Potencia de una resistencia pura

La potencia entregada a un resistor es:

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R} \quad (5.17)$$

5.5.2. Potencia de salida de una fuente

La potencia eléctrica neta de salida de la fuente:

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I - I^2r \quad (5.18)$$

Donde $\mathcal{E}I$ representa la rapidez de conversión de la energía no eléctrica a eléctrica y I^2r es la tasa a la que se disipa energía eléctrica en la resistencia interna.

5.5.3. Potencia de entrada a una fuente

La potencia eléctrica neta de alimentación a la fuente:

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I \mp I^2r \quad (5.18)$$

Donde $\mathcal{E}I$ representa la rapidez de conversión de la energía eléctrica a no eléctrica y I^2r es la tasa a la que se disipa energía eléctrica en la resistencia interna.

Poner ejemplos en los subíndices.

5.6. Teoría de la conducción metálica.

6. UNIDAD 6: Circuitos de corriente continua (Capítulo 26)

Es posible hacer una combinación de resistores, obteniendo un resistor único el cual tiene una resistencia llamada resistencia equivalente:

$$R_{eq} = \frac{V_{ab}}{I}$$

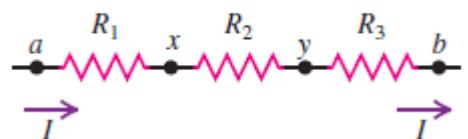
6.1. Resistores en serie y en paralelo

6.1.1. Resistores en serie

Cuando se conectan en secuencia varios elementos de circuito con una sola trayectoria de corriente entre los puntos, se dice que están conectados en serie. La corriente debe ser la misma en todos los resistores, por lo tanto la ddp entre el punto a y b es la suma de las ddp "parciales" (usamos $V = IR$):

$$\begin{aligned} V_{ax} &= IR_1 & V_{xy} &= IR_2 & V_{yb} &= IR_3 \\ V_{ab} &= V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = I(R_1 + R_2 + R_3) \\ \frac{V_{ab}}{I} &= R_1 + R_2 + R_3 \\ R_{eq} &= R_1 + R_2 + R_3 + \dots \end{aligned} \quad (6.1)$$

a) R_1, R_2 y R_3 en serie



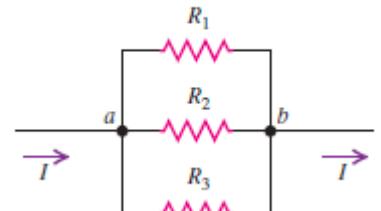
La resistencia equivalente de cualquier número de resistores en serie es igual a la suma de sus resistencias individuales

6.1.2. Resistores en paralelo

Cada resistor ofrece una trayectoria alternativa entre los puntos, decimos que están conectados en paralelos. La ddp entre las terminales de cada resistor debe ser las mismas, la corriente es la suma de la corriente en cada resistor es (usamos $I = V/R$):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_{ab}}{R_1} & I_2 &= \frac{V_{ab}}{R_2} & I_3 &= \frac{V_{ab}}{R_3} \\ I &= I_1 + I_2 + I_3 = V_{ab} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\ \frac{I}{V_{ab}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \end{aligned} \quad (6.2)$$

b) R_1, R_2 y R_3 en paralelo



Para cualquier número de resistores en paralelo, el recíproco de la resistencia equivalente es igual a la suma de los recíprocos de sus resistencias individuales.

Como $V_{ab} = I_1 R_1 = I_2 R_2 \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$, esta igualdad demuestra que para dos resistores en paralelo circula más corriente por la trayectoria de menor resistencia

6.2. Reglas de Kirchhoff

Una unión en un circuito es el punto en que se unen tres o más conductores y una espira es cualquier trayectoria cerrada de conducción.

6.2.1. Regla de Kirchhoff de las uniones

La suma algebraica de las corrientes en cualquier unión es igual a cero.

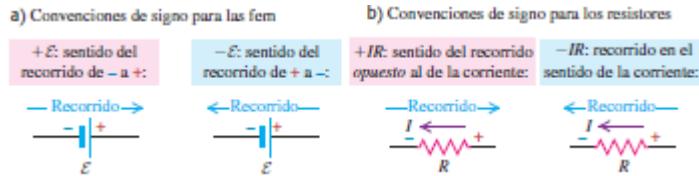
$$\sum I = 0$$

6.2.2. Regla de Kirchhoff de las espiras

La suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier espira, incluso las asociadas con las fem y las de elementos con resistencia, debe ser igual a cero.

$$\sum V = 0$$

Para aplicar esta regla se necesitan algunas convenciones de signos:



6.3. Instrumentos de medición eléctrica

6.3.1. Amperímetro

6.3.2. Voltímetro

6.3.3. Amperímetro y voltímetro en combinación

6.3.4. Óhmetros

6.3.5. Potenciómetro

6.4. Circuitos R-C

6.4.1. Carga de un capacitor

Suponemos una fem ideal y se desprecia la resistencia de todos los conductores de conexión.

Comenzamos con un capacitor descargado, en $t = 0$ se cierra el interruptor y la corriente comienza a cargar el capacitor. En $t = 0$ la ddp v_{bc} es igual a cero y según la regla de Kirchhoff, el voltaje v_{ab} a través de R es igual a \mathcal{E} . Llamaremos I_0 a la corriente inicial ($t = 0$) en R como $I_0 = v_{ab}/R = \mathcal{E}/R$.

Mientras el capacitor se va cargando, v_{bc} aumenta y v_{ab} disminuye lo que corresponde a una baja de corriente. La suma de los voltajes es constante e igual a \mathcal{E} . Cuando el capacitor se cargó por completo, la corriente y v_{ab} son cero y $v_{bc} = \mathcal{E}$.

Sea q la carga en el capacitor e i la corriente del circuito al cabo de cierto tiempo t luego de cerrar el interruptor, tenemos:

$$v_{ab} = iR \quad v_{bc} = \frac{q}{C}$$

Utilizando la regla de Kirchhoff:

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \quad (1)$$

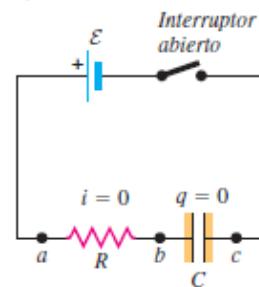
En la ecuación (1)

- Cuando $t = 0 \rightarrow q = 0$ y encontramos que $I_0 = \mathcal{E}/R$
- Si no hay capacitor la corriente sería constante e igual a \mathcal{E}/R

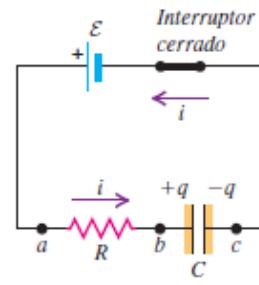
Cuando el capacitor se carga completamente la corriente es cero y obtenemos la carga final:

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Q_f}{RC} \quad \rightarrow \quad Q_f = C\mathcal{E} \quad (6.6)$$

a) Capacitor descargado al inicio



b) Carga del capacitor



Cuando el interruptor se cierra, a medida que transcurre el tiempo, la carga en el capacitor se incrementa y la corriente disminuye.

Si i es la tasa a la carga llega a la placa izquierda (cerca del punto b), entonces $i = \frac{dq}{dt}$; reemplazándolo en (1):

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$$

Reordenando:

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrando (colocamos q' y t' para poder utilizar q y t en los límites):

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - C\mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

Entonces la carga instantánea viene dada por:

$$q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (6.7)$$

La derivada de q respecto del tiempo es la corriente instantánea:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6.8)$$

6.4.2. Contante de tiempo

6.4.3. Descarga de un capacitor

El capacitor está cargado con una carga Q_0 , quitamos la batería y cerramos el circuito en un instante $t = 0$, en ese momento $q = Q_0$ (el capacitor comienza a descargarse).

Con el mismo sentido positivo de la corriente, por la regla de Kirchhoff tenemos:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \quad (2)$$

La corriente i es negativa porque la carga positiva q está saliendo de la placa izquierda, por lo que la corriente va en sentido opuesto al de la figura. La corriente inicial es $I_0 = -Q_0/RC$.

Para encontrar como q e i varían en el tiempo integramos (2)

$$\int_{Q_0}^q \frac{dq'}{q'} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Entonces la carga instantánea q en descarga del capacitor es:

$$q = Q_0e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6.9)$$

La derivada de q respecto del tiempo es la corriente instantánea

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6.8)$$

Mientras el capacitor se carga, la tasa instantánea a la que:

- la batería entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$
- la energía eléctrica se disipa en el resistor es i^2R
- la energía se almacena en el capacitor es $i\nu_{bc} = iq/C$

La potencia suministrada por la batería es:

$$\mathcal{E}i = iR + \frac{q}{C}$$

Se puede demostrar que la mitad de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor y la otra mitad se disipa en la resistencia.

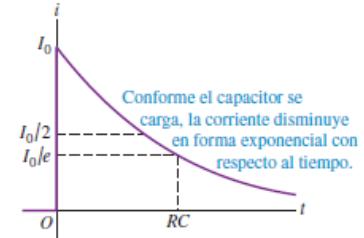
6.5. Sistemas de distribución de energía.

7. UNIDAD 7: Campo magnético y fuerzas magnéticas (Capítulo 27)

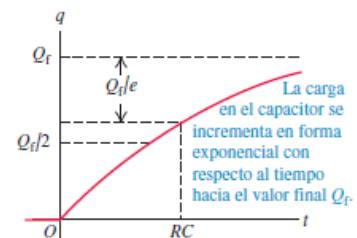
7.1. Magnetismo

7.2. Campo magnético

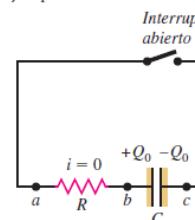
a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga



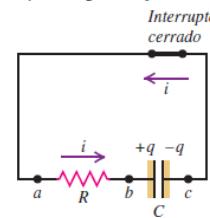
b) Gráfica de la carga de un capacitor contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga



a) Capacitor inicialmente cargado

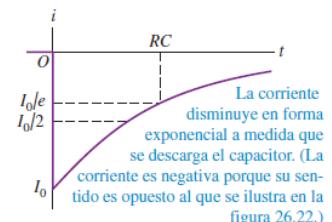


b) Descarga del capacitor

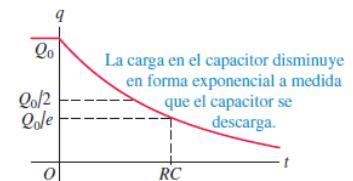


Cuando se cierra el interruptor, tanto la carga en el capacitor como la corriente disminuyen con el tiempo.

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en descarga



b) Gráfica de la carga del capacitor contra el tiempo para un capacitor en descarga



Una carga o corriente móvil crea un campo magnético (además del eléctrico) en el espacio circundante y este campo ejerce una fuerza \vec{F} sobre cualquier otra carga o corriente en movimiento en el campo. El campo magnético es un campo vectorial y lo representaremos mediante \vec{B} .

7.2.1. Fuerzas magnéticas sobre cargas móviles

La fuerza magnética ejercida sobre una carga en movimiento tiene cuatro características esenciales:

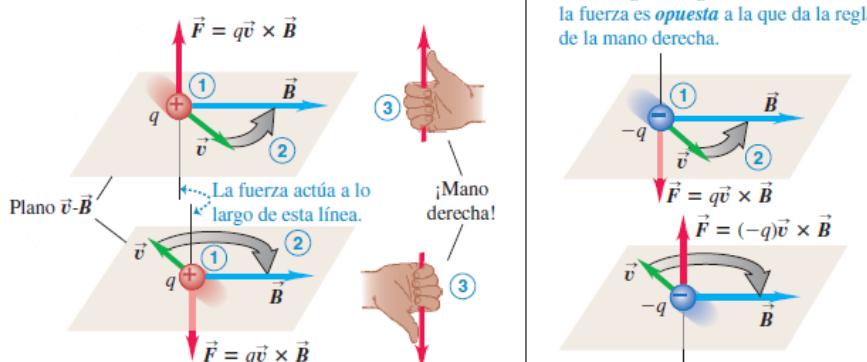
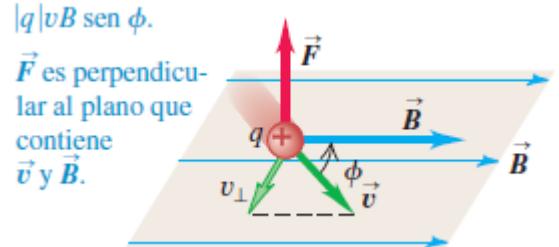
- Su magnitud es proporcional a la magnitud de la carga.
- La magnitud de la fuerza también es proporcional a la magnitud del campo.
- Depende de la velocidad de la partícula.
- No tiene la misma dirección que el campo magnético, sino que siempre es perpendicular tanto a \vec{B} como a la velocidad \vec{v} .

Además, la magnitud F de la fuerza es proporcional a la componente de \vec{v} perpendicular al campo. La dirección de \vec{F} siempre es perpendicular al plano que contiene a \vec{B} y \vec{v} , utilizando la regla de la mano derecha. La magnitud de \vec{F} está dada por:

$$F = |q|v_{\perp}B = |q|vB \sin \phi$$

La fuerza sobre una carga q que se mueve con velocidad \vec{v} en un campo magnético está dada, tanto en magnitud como en dirección:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.1) \quad \left[\frac{N}{A \cdot m} = T \right] \text{"Tesla"}$$



7.2.2. Medición de campos magnéticos con cargas de prueba

Cuando una partícula cargada se mueva a través de una región del espacio en que estén presentes los campos eléctrico y magnético, ambos ejercerán fuerzas sobre la partícula. La fuerza total es:

$$\vec{F}_{total} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Para esto se utiliza un haz de electrones dde un tubo de rayos catódicos, su funcionamiento es muy simple. Pág. 921

7.3. Líneas de campo magnético y flujo magnético

El campo magnético se representa usando líneas de campo magnético (si las líneas están cerca la magnitud del campo es grande, si están separadas es chica). Las líneas del campo no apuntan en la dirección de la fuerza. Como es tridimensional se usa un punto (·) que representa un vector dirigido hacia fuera del plano, y una cruz que denota que el vector se dirige hacia el plano (×). El campo es tangencial a las líneas, las cuales son siempre cerradas.

7.3.1. Flujo magnético y ley de Gauss del magnetismo

Definimos el flujo magnético Φ_B a través de una superficie al igual que definimos el flujo eléctrico. Se puede dividir cualquier superficie en elementos de área dA . Para cada elemento se determina B_{\perp} , donde $B_{\perp} = B \cos \phi$.

Definimos el flujo magnético $d\Phi_B$ a través de esta área como normal:

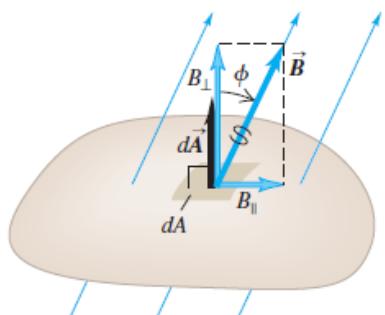
$$d\Phi_B = B_{\perp}dA = B \cos \phi dA = \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (7.2)$$

El flujo magnético *total* a través de la superficie es la suma de las contribuciones desde los elementos de área individuales:

$$\Phi_B = \int B_{\perp}dA = \int B \cos \phi dA = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (7.3) \quad \left[\frac{Nm}{A} = Tm^2 = Wb \right] \text{"weber"}$$

Si \vec{B} es uniforme sobre un área plana \vec{A} , entonces:

$$\Phi_B = BA \cos \phi = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (7.5)$$



El flujo magnético es una cantidad escalar.

El flujo magnético total a través de una superficie cerrada siempre es igual a cero, porque al no existir monopolos magnéticos la carga siempre es nula:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (7.4)$$

La ecuación (7.3) recibe el nombre de ley de gauss del magnetismo. Las líneas de campo no tienen extremos, siempre forman espiras cerradas

Si en (7.2) el dA forma ángulos rectos con las líneas de campo, entonces $B_{\perp} = B$; si se denota al área dA_{\perp} :

$$B = \frac{d\Phi_B}{dA_{\perp}}$$

Es decir, la magnitud del campo magnético es igual al flujo por unidad de área a través de un área que forma un ángulo recto con el campo magnético. Por esta razón, al campo magnético en ocasiones se le llama densidad de flujo magnético.

7.4. Movimiento de partículas con carga en un campo magnético

Una partícula con carga positiva, con velocidad \vec{v} en un campo magnético \vec{B} . La fuerza siempre es perpendicular a la velocidad por lo tanto solo puede cambiar su dirección, es decir, la fuerza nunca realiza trabajo sobre la partícula. El movimiento de una partícula solo bajo la influencia de campo magnético ocurre con rapidez constante. A partir de esto \vec{F} y \vec{v} son constantes y se observa una trayectoria circular (si la carga es negativa va en sentido horario). Con la fuerza magnética y la aceleración centrípeta y la segunda ley de newton:

$$F = |q|vB = m \frac{v^2}{R}$$

donde m es la masa de la partícula. Obtenemos el radio de una órbita circular en un campo magnético:

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad (7.6)$$

Sabiendo que la rapidez angular $\omega = v/R$:

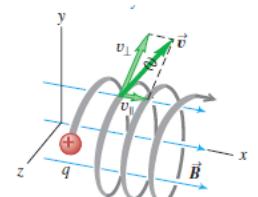
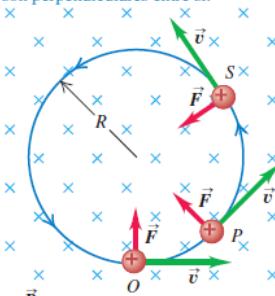
$$\omega = \frac{v}{R} = v \frac{|q|B}{mv} = \frac{|q|B}{m}$$

El número de revoluciones por unidad de tiempo es $f = \omega/2\pi$, es independiente de R . La llamamos frecuencia del ciclotrón.

Si la dirección de la velocidad inicial no es perpendicular al campo, la componente de la velocidad paralela al campo es constante porque no hay fuerza paralela al campo. Así que la partícula se mueve en un patrón helicoidal. El radio de la hélice está dado por la ecuación (7.4) pero ahora $v = v_{\perp}$.

El movimiento de una partícula cargada en un campo magnético no uniforme es más complejo.

Una carga que se mueve con ángulos rectos con respecto a un campo \vec{B} uniforme se mueve en círculo a rapidez constante, porque \vec{F} y \vec{v} siempre son perpendiculares entre sí.

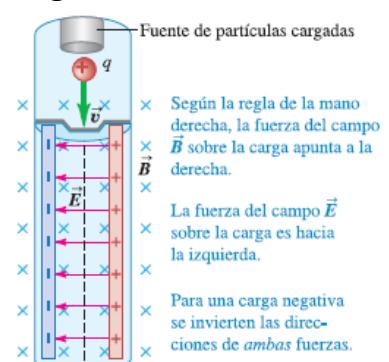
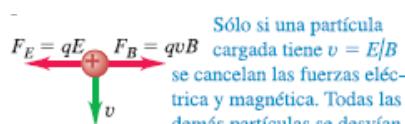


7.5. Aplicaciones del movimiento de partículas con carga

7.5.1. Selector de velocidad

En un haz de partículas no todas tienen la misma velocidad. El campo eléctrico es hacia la izquierda y el campo magnético está en el plano de la figura. Si q es positiva, la fuerza eléctrica es a la izquierda con magnitud qE , en tanto que la magnética es a la derecha con magnitud qvB . Se ajustan las magnitudes del campo eléctrico y magnético para que las fuerzas sobre las partículas se anulen y solo aquellas partículas con una velocidad deseada no se desvíen, entonces:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -qE + qvB = 0 \rightarrow v = \frac{E}{B}$$



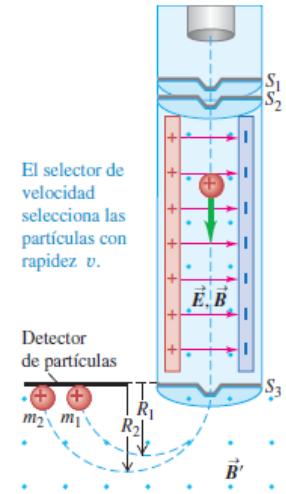
7.5.2. Experimento de e/m de Thomson

7.5.3. Espectrómetros de masa

Este instrumento sirve para medir las masas de iones y así conocer masas atómicas y moleculares.

Se forma un haz estrecho de iones cuando pasan por las ranuras S_1 y S_2 . Despues, pasan a través de un selector de velocidad con campos \vec{E} y \vec{B} para conseguir iones con una velocidad v . Por ultimo, los iones pasan hacia una región con un campo magnético \vec{B}' perpendicular a la figura, donde se mueven en arcos circulares con radio R determinado por la ecuación (7.4) $R = mv/qB'$. Los iones con masas diferentes golpean al detector (es una placa fotográfica) en diferentes puntos, y se miden los valores de R . Se supone que cada ion perdió un electrón, por lo que la carga neta de cada ion es simplemente $+e$. Se calcula la masa m del ion.

Experimentos posteriores han demostrado que elementos tienen varios isótopos, es decir, átomos que son idénticos en cuanto a su comportamiento químico, pero diferentes en su masa debido a que tienen distinto número de neutrones en su núcleo.



7.6. Fuerza magnética sobre un conductor por el que circula una corriente

Para calcular la fuerza sobre un conductor con corriente, primero veremos la fuerza sobre una sola carga en movimiento.

Tenemos un segmento de alambre conductor de longitud l y área transversal A ; la corriente va de abajo hacia arriba. El conductor está en un campo \vec{B} tal como se muestra. Suponemos que las cargas son positivas. La fuerza media en cada carga es $\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}$. Para encontrar la fuerza total en todas las cargas, usamos el número de cargas por unidad de volumen; donde n es el numero de cargas y Al es el volumen. Entonces la magnitud de la fuerza total en este segmento es:

$$F = (nAl)(qv_d A)(lB) = (nqv_d A)(lB)$$

Recordando que la densidad de corriente es $J = nqv_d$ y que JA es la corriente total I :

$$F = I l B$$

Si el campo no es perpendicular al alambre sino que forma un ángulo ϕ , solo la componente perpendicular de \vec{B} ejerce una fuerza:

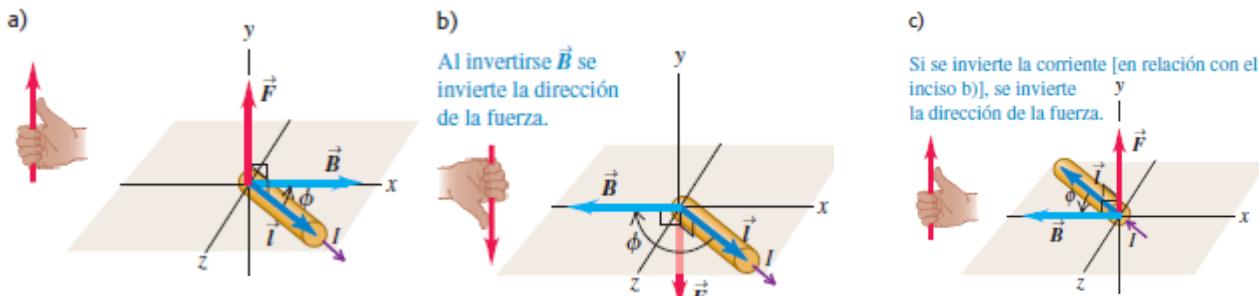
$$F = I l B \sin \phi \quad (1)$$

Utilizamos la regla de la mano derecha. A la ecuación (1) la reescribimos como el producto vectorial y el segmento de alambre se representa con un vector \vec{l} en dirección de la corriente:

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \quad (7.7)$$

Para el caso que el conductor no fuera recto lo dividimos en segmentos infinitesimales e integramos a lo largo del alambre para obtener la fuerza total:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

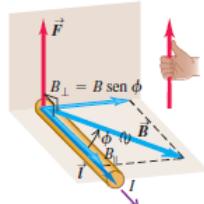
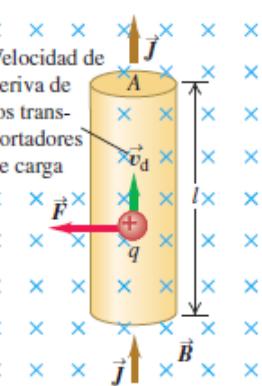


Si la carga q fuera negativa tendríamos una corriente ascendente correspondiente a una velocidad de deriva descendente. Pero como q ahora es negativa, la dirección de la fuerza es la misma que antes.

7.7. Fuerza y momento de torsión sobre una espira de corriente

Generalmente los conductores forman espiras cerradas, la fuerza o el par de torsión que generan se utilizan en altavoces o galvanómetros.

Analizaremos el caso de una espira rectangular, con lados de longitudes a y b . La fuerza \vec{F} sobre el lado derecho (longitud a) va hacia $+x$, sobre este lado \vec{B} es perpendicular a la dirección de I , es:



$$F = IaB \quad (1)$$

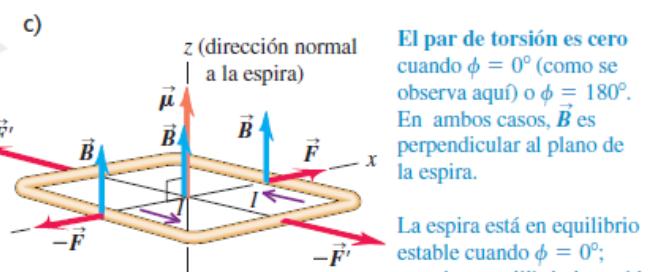
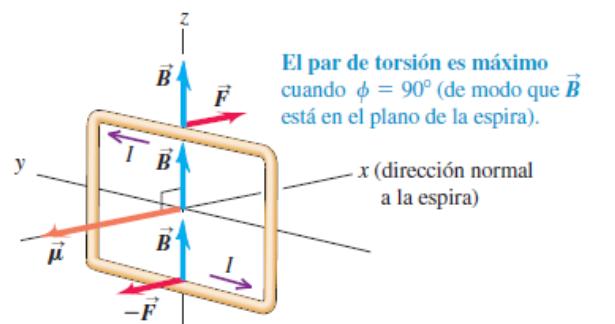
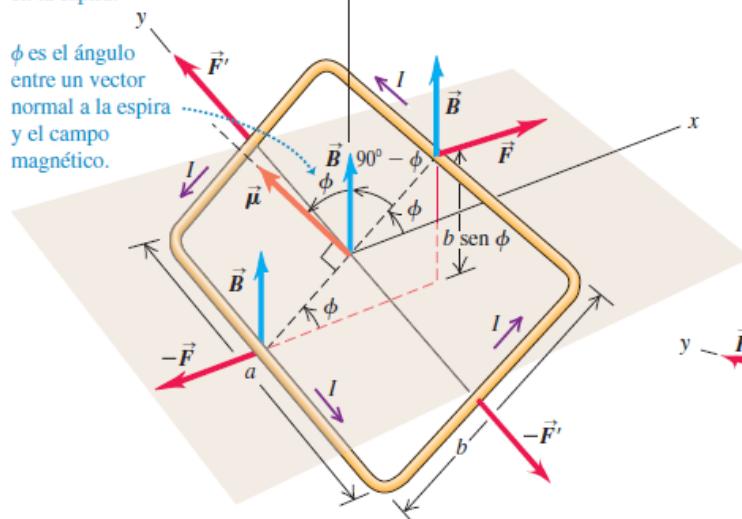
Sobre el lado opuesto actúa una fuerza $-\vec{F}$, con la misma magnitud pero dirección opuesta. Los lados con longitud b forman un angulo $(90^\circ - \phi)$ con la dirección de \vec{B} , las fuerzas tienen dirección opuesta y la magnitud es:

$$F' = IbB\sin(90^\circ - \phi) = IbB\cos\phi$$

La fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme es cero, pero generalmente no lo es el par torsión neto.

Los dos pares de fuerzas que actúan sobre la espira se cancelan, por lo que no hay fuerza neta que actúe sobre ella.

Sin embargo, las fuerzas en los lados a de la espira (\vec{F} y $-\vec{F}'$) producen un par de torsión $\tau = (IBa)(b\sin\phi)$ en la espira.



Las fuerzas $-\vec{F}'$ y \vec{F}' generan un par de torsión neto igual a cero, no es el caso para las fuerzas \vec{F} y $-\vec{F}$. Según la regla de la mano derecha los pares de torsión van en dirección $+y$, por lo tanto el par de torsión neto $\vec{\tau}$ también va en esa dirección y la magnitud está dada por:

$$\tau = 2F(b/2)\sin\phi = (IBa)(b\sin\phi) \quad (2)$$

Sabiendo que el área de la espira es $A = ab$, reescribimos (2)

$$\tau = IA\sin\phi \quad (7.8)$$

El producto IA se denomina momento dipolar magnético o momento magnético de la espira, el cual se denota con el símbolo μ :

$$\mu = IA$$

Es análogo al momento dipolar eléctrico. La ecuación (7.6) también la podemos escribir como:

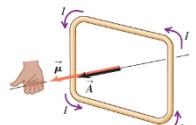
$$\tau = \mu B \sin\phi \quad (7.9)$$

El par de torsión tiende a hacer girar la espira en la dirección en que disminuye ϕ , es decir, hacia su posición de equilibrio estable.

7.7.1. Par de torsión magnético: Forma vectorial

La dirección de $\vec{\mu}$ se define como la perpendicular al plano de la espira, con sentido determinado por la regla de la mano derecha. A la ecuación (7.9) la podemos reescribir como el producto vectorial:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (7.10)$$



El par de torsión es máximo cuando $\vec{\mu}$ y \vec{B} son perpendiculares, y es igual a cero cuando son paralelos o antiparalelos. En la posición de equilibrio estable, $\vec{\mu}$ y \vec{B} son paralelos.

Este resultado es una analogía directa del par de torsión ejercido por un campo eléctrico sobre un dipolo eléctrico con momento dipolar: $\vec{p} \cdot \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

7.7.2. Energía potencial para un dipolo magnético

Cuando un dipolo magnético cambia de orientación en un campo magnético, éste realiza trabajo sobre aquél. En un desplazamiento angular infinitesimal $d\phi$ el trabajo dW está dado por $\tau d\phi$, y hay un cambio correspondiente en la energía potencial. La energía potencial es mínima cuando $\vec{\mu}$ y \vec{B} son paralelos, y es máxima si son anti paralelos. Usando la simetría entre las interacciones dipolares eléctricas y magnéticas, sabemos que:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\phi \quad (7.11)$$

7.7.3. Par de torsión magnético: Espiras y bobinas

Todas las ecuaciones de torsión se pueden utilizar para el caso de una espira que se puede aproximar mediante un número muy grande de espiras rectangulares que llevan corrientes iguales en el mismo sentido horario. las fuerzas y los pares de torsión sobre los lados de dos espiras adyacentes entre sí se cancelan, y las únicas fuerzas y pares de torsión que no se cancelan se deben a corrientes en torno a la frontera.

También se puede generalizar para el caso de una bobina con N espiras planas, lo que hacemos es multiplicar por un factor de N cada fuerza, el momento magnético, el par de torsión y la energía potencial. Por ejemplo para un solenoide el momento magnético $\mu = NIA$ y obtenemos:

$$\tau = NIBA \sin\phi \quad (7.12)$$

El par de torsión es máximo cuando dicho eje es perpendicular al campo magnético, y es igual a cero cuando son paralelos. El efecto de este par de torsión es que tiende a hacer girar el solenoide hacia una posición donde su eje es paralelo al campo.

7.7.4. Dipolo magnético en un campo magnético no uniforme

7.7.5. Dipolos magnéticos y cómo funcionan los imanes

7.8. El motor de corriente continua

7.9. El efecto Hall

Las fuerzas que actúan sobre las cargas en movimiento de un conductor en un campo magnético se demuestran mediante el efecto hall:

Consideramos un conductor de forma plana; tenemos una corriente, una campo magnético y una velocidad de deriva de magnitud v_d . Lo mostramos para cargas negativas y positivas. En ambos casos la fuerza magnética va hacia arriba, produciendo que una carga móvil sea impulsada hacia el borde superior.

La acumulación de estas cargas móviles continua hasta que el campo eléctrico \vec{E}_c se hace lo suficientemente grande para generar una fuerza eléctrica de la misma magnitud que la fuerza magnética pero en dirección opuesta (ya no hay fuerza que desvíe las cargas). El campo eléctrico produce una ddp, llamada voltaje de Hall o fem de Hall.

$$\sum F = 0 \rightarrow qE_z + qv_d B_y = 0 \rightarrow E_z = -v_d B_y \quad (1)$$

De (1) podemos decir que si la carga es positiva la componente z del campo es negativa y a la inversa. La densidad de corriente es:

$$J_x = nqv_d \quad (2)$$

Si igualamos v_d en las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

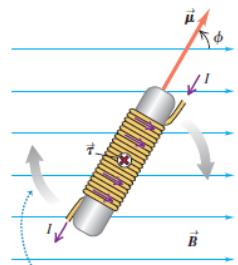
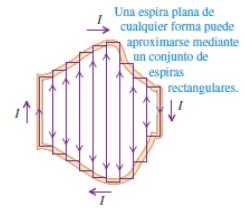
$$nq = \frac{-J_x B_y}{E_z} \quad (7.12)$$

J_x, B_y y E_z se pueden medir, q es igual a la magnitud de carga del electrón, por lo que el efecto Hall nos permite medir n (concentración de cargas portadoras de corriente).

Gracias al efecto Hall se sabe que en materiales semiconductores conducen mediante un proceso conocido como conducción por huecos, dentro de los materiales hay huecos que antes estaban ocupados por electrones pero ahora están vacíos. La falta de electrones es equivalente a una carga positiva. Cuando un electrón se desplaza para llenar un hueco, deja otro hueco atrás. El hueco emigra en dirección opuesta a la del electrón.

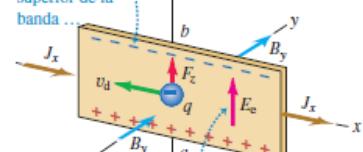
8. UNIDAD 8: Fuentes de campo magnético (Capítulo 28)

8.1. Campo magnético de una carga en movimiento



a) Portadores de carga negativa (electrones)

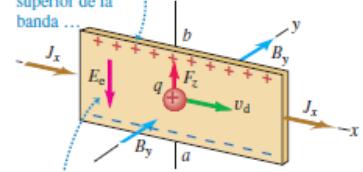
Los portadores de carga son empujados hacia la parte superior de la banda ...



... por lo que el punto a tiene un potencial mayor que el punto b .

b) Portadores de carga positiva

Los portadores de carga otra vez son empujados hacia la parte superior de la banda ...



... de modo que la polaridad de la diferencia de potencial es opuesta a la de los portadores de carga negativa.

Llamaremos punto de fuente a la ubicación de la carga en movimiento en un instante dado, y punto de campo al punto P donde pretendemos calcular el campo. Los experimentos demuestran que la magnitud de \vec{B} también es proporcional a $|q|$ y a $1/r^2$, pero la dirección de \vec{B} no es a lo largo de la línea que va del punto de fuente al punto de campo, sino que es perpendicular al plano que contiene esta línea y al vector velocidad. Además, la magnitud B del campo también es proporcional a la rapidez v y al seno del ángulo ϕ . Así, la magnitud del campo magnético en el punto P está dada por:

$$B = \frac{\mu_0 |q| v \sin\phi}{4\pi r^2} \quad (8.1)$$

Si definimos el vector unitario \hat{r} que apunta desde el punto de fuente al punto de campo, podemos definir el producto vectorial como:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (8.2)$$

Si q es negativa la dirección del campo magnético es opuesta a la de la figura. Esto es para campo magnéticos con velocidad constante.

8.2. Campo magnético de un elemento de corriente

Existe el principio de superposición de campos magnéticos:

El campo magnético total generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos generados por las cargas individuales.

Calculamos el \vec{B} producido por un segmento corto $d\vec{l}$ de un conductor que transporta corriente. Sabiendo que el volumen es $A dl$ y que hay n partículas con carga en movimiento por unidad de volumen, la carga total dQ que se mueve en el segmento es:

$$dQ = nqA dl \quad (1)$$

Las cargas en movimiento del segmento son equivalentes a una sola carga dQ con velocidad \vec{v}_d . Entonces la magnitud del campo $d\vec{B}$ es:

$$dB = \frac{\mu_0 |dQ| v \sin\phi}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 n|q| A v_d dl \sin\phi}{4\pi r^2} \quad (2)$$

Sabiendo que $I = n|q|A v_d$ de (2) obtenemos:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin\phi}{4\pi r^2} \quad (8.3)$$

La ecuación (3) expresada de forma vectorial se puede reescribir como:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (8.4)$$

donde $d\vec{l}$ es un vector con longitud dl , en la misma dirección que la corriente.

Las ecuaciones (8.3) y (8.4) son la ley de Biot y Savart, la cual se utiliza para encontrar el campo magnético debido a la corriente en un circuito completo en cualquier punto del espacio.

Si integramos (8.3), podremos obtener el campo para diversos ejemplos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

8.3. Campo magnético de un conductor recto por el que circula una corriente

Utilizando la ecuación (8.3) encontramos el campo $d\vec{B}$ generado por segmento $dl = dy$. De la figura vemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\sin\phi = \sin(\pi - \phi) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$. Además por la regla de la mano derecha la dirección de todos los $d\vec{B}'s$ generados por los segmentos dl son hacia el plano.

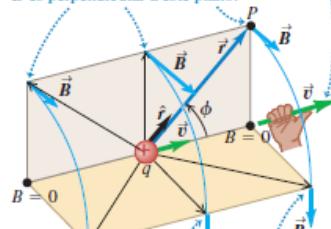
La magnitud del campo total \vec{B} es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (1)$$

Regla de la mano derecha para el campo magnético debido a una carga positiva que se mueve a velocidad constante: Apunte el pulgar de su mano derecha en dirección de la velocidad. Ahora sus dedos se cierran alrededor de la carga en dirección de las líneas del campo magnético. (Si la carga es negativa, las líneas del campo van en sentido opuesto.)

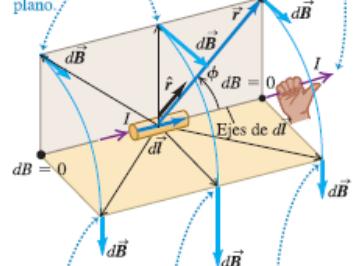
Para estos puntos de campo, \vec{r} y \vec{v} quedan en el plano color beige, y \vec{B} es perpendicular a este plano.



Para estas líneas de campo, \vec{r} y \vec{v} quedan en el plano color dorado, y \vec{B} es perpendicular a este plano.

Regla de la mano derecha para el campo magnético debido a un elemento de corriente: apunte el pulgar de su mano derecha en dirección de la corriente. Ahora cierre sus dedos alrededor del elemento de corriente en dirección de las líneas de campo magnético.

Para estos puntos de campo, \vec{r} y $d\vec{l}$ están en el plano color beige, y $d\vec{B}$ es perpendicular a este plano.



Para estos puntos de campo, \vec{r} y $d\vec{l}$ se encuentran en el plano color dorado, y $d\vec{B}$ es perpendicular a este plano.

Cuando α es mucho mayor que x , $\sqrt{x^2 + \alpha^2}$ es aproximadamente igual a α y la ecuación (1) se convierte en:

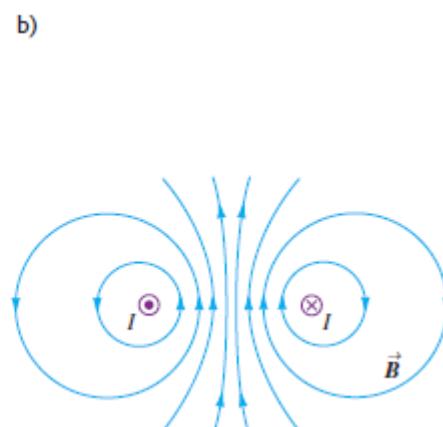
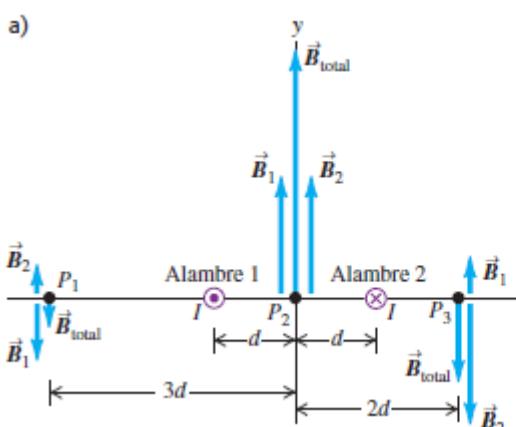
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (2)$$

Esta situación física presenta una simetría axial (simetría alrededor de un eje) respecto del eje y . Entonces el campo de tener la misma magnitud en todos los puntos de un círculo con centro en el conductor y perpendicular a él, la dirección del campo es tangente a ese círculo. La ecuación (2) se puede reescribir como:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (8.5)$$

Recordar que las líneas del campo magnético siempre forman espiras cerradas y nunca tienen extremos, para cualquier forma del conductor, en este caso se ven como en la figura.

Este es un ejemplo del campo magnético producido por dos alambres con corrientes en direcciones opuestas:



8.4. Fuerza entre conductores paralelos

Si tenemos dos conductores largos, rectos y paralelos, separados por una distancia r y que portan corriente I e I' en el mismo sentido. Cada conductor se encuentra en el campo magnético producido por el otro, por lo que cada uno experimenta una fuerza. Según la ecuación (8.5), el conductor inferior produce un campo sobre el de arriba de magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

De acuerdo con la ecuación (7.5), la fuerza que ejerce este campo sobre el conductor superior es $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$, donde \vec{L} está en la dirección de I' y tiene magnitud L . Deducimos que la magnitud de esta fuerza es:

$$F = I' L B = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r}$$

Definimos la fuerza por unidad de longitud F/L como:

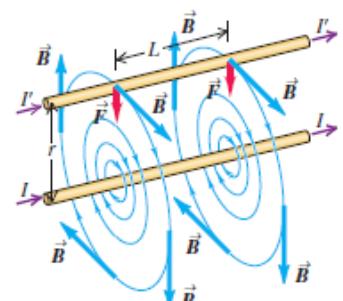
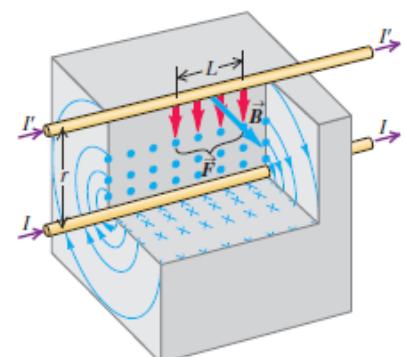
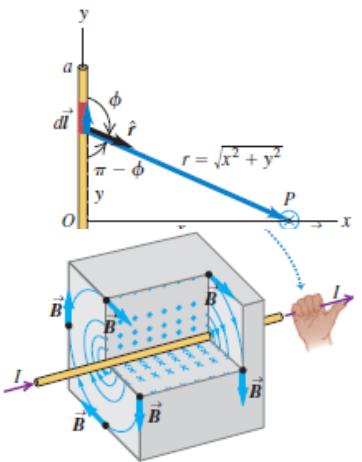
$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \quad (8.6)$$

La corriente en el conductor superior también origina un campo en el inferior. Dos aplicaciones sucesivas de la regla de la mano derecha se demuestra que la fuerza sobre el conductor inferior va hacia arriba. Así, dos conductores paralelos que transportan corrientes en el mismo sentido se atraen uno al otro y dos conductores paralelos que transportan corrientes en sentido opuesto se repelen entre sí.

8.4.1. Definición de ampere

Un ampere es la corriente invariable que, si está presente en dos conductores paralelos de longitud infinita y separados por una distancia de un metro de espacio vacío, provoca que cada conductor experimente una fuerza de exactamente 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.

8.5. Campo magnético de una espira circular de corriente



Si tenemos un conductor circular de radio a que conduce una corriente I , los campos magnéticos de los alambres rectos que transportan la corriente se cancelan entre sí.

Para medir el campo en un punto P sobre el eje de la espira a una distancia x , usamos la ley de Biot y Savart (8.4). Vemos que $d\vec{l}$ y \hat{r} son perpendiculares y que $r^2 = x^2 + a^2$, por lo tanto la magnitud dB del campo debido al $d\vec{l}$ es:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{(x^2 + a^2)}$$

Las componentes del vector $d\vec{B}$ son:

$$dB_x = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad y \quad dB_y = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Vemos que por la simetría para cada elemento $d\vec{l}$ hay otro elemento en el lado opuesto de la espira, con dirección opuesta. Para la componente x de $d\vec{B}$ se suman pero en la componente y se cancelan, por lo tanto solo tenemos dB_x . Integraremos dB_x

$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{adl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dl$$

La integral de dl es la circunferencia del círculo, entonces:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi a = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (8.7)$$

La dirección del campo magnético sobre el eje de una espira portadora de corriente está dada por la regla de la mano derecha. Si se cierran los dedos de la mano derecha alrededor de la espira en la dirección de la corriente, el pulgar derecho apunta en la dirección del campo.

8.5.1. Campo magnético sobre el eje de una bobina

Si se tiene una bobina que consiste en N espiras, todas con el mismo radio. La separación entre las espiras es tan pequeña que el plano de cada una está prácticamente a la misma distancia x del punto de campo P . Cada espira contribuye por igual al campo, y el total es N veces el campo producido por una sola espira sobre el eje:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (8.8)$$

El valor máximo del campo está en $x = 0$, el centro de la espira o bobina:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \quad (8.9)$$

Estas ecuaciones son solo sobre el eje de la espira.

8.6. Ley de Ampere

La ley de Ampère está formulada no en términos del flujo magnético, sino de la integral de línea de alrededor de una trayectoria cerrada que se denota como:

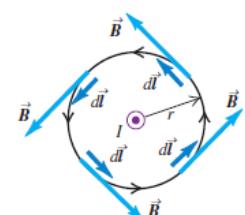
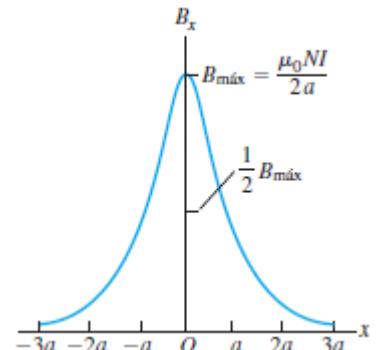
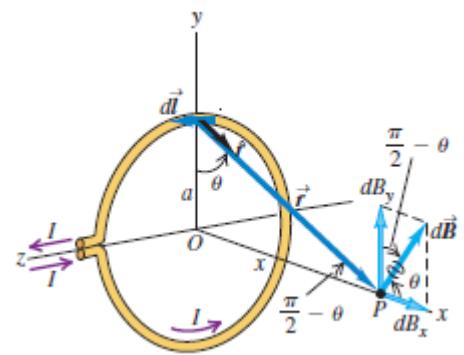
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Para evaluar esta integral, se divide la trayectoria en segmentos infinitesimales para cada uno de los cuales se calcula el producto escalar, y se suman los resultados. En general, \vec{B} varía de un punto al otro, y se debe emplear el valor de \vec{B} en la ubicación de cada $d\vec{l}$.

8.6.1. Ley de Ampère para un conductor largo y recto

Consideremos el campo magnético generado por un conductor largo y recto que transporta una corriente I . La magnitud del campo está dado por la ecuación (8.5) $B = \mu_0 I / 2\pi r$ y las líneas de campo magnético son círculos con centros en el conductor. Tomamos la integral de línea de \vec{B} a un círculo de radio r y sabemos que $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$ por ser paralelos; r es constante y así lo será B . La integral de línea queda como:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I$$



Vemos que la integral es independiente del radio del círculo. Si la trayectoria de integración es en sentido opuesto ahora $\vec{B} \cdot d\vec{l} = -B dl$ y la integral de línea es $-\mu_0 I$.

Para determinar el signo de la corriente usamos la regla de la mano derecha, dobrando los dedos de la mano alrededor de la trayectoria de integración en la dirección de esta y el pulgar nos indica la dirección de la corriente positiva. Las corrientes que pasan a través de la trayectoria de integración en esta dirección son positivas; aquéllas en dirección opuesta son negativas.

Si no hay corriente que pase a través del área limitada por la trayectoria la integral de línea es cero, esto se puede demostrar con el próximo ejemplo:

A lo largo del arco circular ab de radio r_1 , \vec{B} y $d\vec{l}$ son paralelos, $B_1 = \mu_0 I / 2\pi r_1$; a lo largo del arco circular cd de radio r_2 , \vec{B} y $d\vec{l}$ son antiparalelos, $B_2 = -\mu_0 I / 2\pi r_2$. El campo es perpendicular a $d\vec{l}$ en cada punto de las secciones

rectas bc y da , por lo que $B = 0$, y estas secciones no contribuyen a la integral de línea, que en total es:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 \int_a^b dl + (0) \int_b^c dl + (-B_2) \int_c^d dl + (0) \int_d^a dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} (r_1 \theta) + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} (r_2 \theta) + 0 = 0$$

La magnitud en cd es mayor que en ab , pero en este último la trayectoria es mayor, por lo que las contribuciones de los dos arcos se cancelan exactamente.

8.6.2. Ley de Ampère: Enunciado general

Supongamos que tenemos varios conductores largos y rectos que pasan a través de la superficie limitada por la trayectoria de integración. El campo magnético total en cualquier punto es de la trayectoria es la suma vectorial de los campos generados por cada conductor. Entonces la integral de línea es μ_0 multiplicado por la suma algebraica de las corrientes(utilizando la regla de los signos). Todo conductor que no esté encerrado por una trayectoria puede contribuir al valor del campo en todos los puntos, pero las integrales de línea de sus campos alrededor de la trayectoria son cero.

De esta forma, el enunciado de la ley de Ampere es:

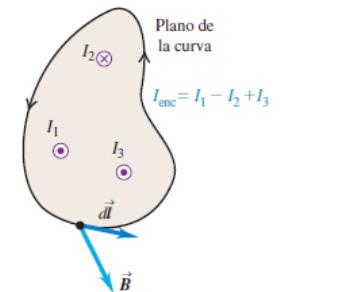
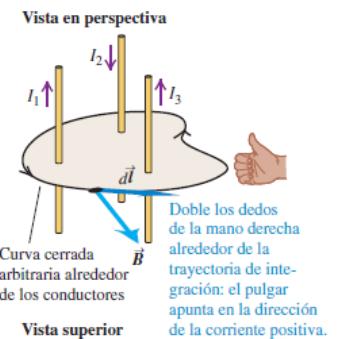
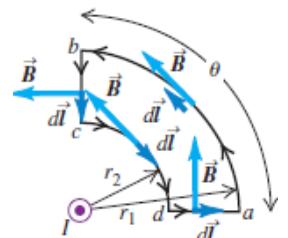
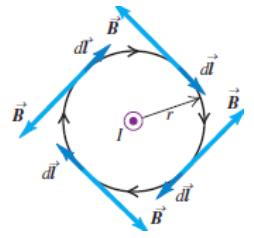
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (8.10)$$

La ecuación (8.10) también es válida para conductores y trayectorias de cualquier forma, pero su geometría es más complicada.

Recordar que si la integral de líneas es cero, esto no necesariamente significa que $\vec{B} = 0$ a todo lo largo de la trayectoria, sino sólo que la corriente total a través de un área limitada por la trayectoria es igual a cero. La fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento no es conservativa. Una fuerza conservativa sólo depende de la posición del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza, pero la fuerza magnética sobre una partícula con carga y en movimiento también depende de la velocidad de la partícula.

La ley de Ampère resulta ser válida sólo si las corrientes son estables y si no están presentes materiales magnéticos o campos eléctricos que varíen con el tiempo.

8.7. Aplicaciones de la ley de Ampere



Distribución de corriente	Punto en el campo magnético	Magnitud del campo magnético
Conductor largo y recto	Distancia r desde el conductor	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Espira circular de radio a	Sobre el eje de la espira	$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$
	En el centro de la espira	$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$ (para N espiras, multiplique estas expresiones por N)
Conductor largo y cilíndrico de radio R	Dentro del conductor, $r < R$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$
	Afuera del conductor, $r > R$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Solenoides largo, con devanado compacto y n vueltas por unidad de longitud, cerca de su punto medio	Dentro del solenoide, cerca del centro	$B = \mu_0 n I$
	Afuera del solenoide	$B \approx 0$
Solenoides toroidal (toroide) con devanado compacto y N vueltas	Dentro del espacio encerrado por los devanados, a una distancia r del eje de simetría.	$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$
	Afuera del espacio encerrado por los devanados	$B \approx 0$

8.8. Materiales magnéticos.

Las bobinas de transformadores, motores, generadores y electroimanes casi siempre tienen núcleos de hierro para incrementar el campo magnético y confinarlo a las regiones deseadas.

Describiremos los orígenes atómicos de las propiedades magnéticas, estudiaremos las tres grandes clases de comportamiento magnético que ocurren en los materiales: paramagnetismo, diamagnetismo y ferromagnetismo.

8.8.1. El magnetón de Bohr

8.8.2. Paramagnetismo

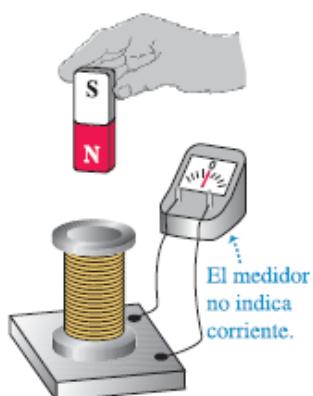
8.8.3. Diamagnetismo

8.8.4. Ferromagnetismo

9. UNIDAD 9: Inducción electromagnética (Capítulo 29)

9.1. Experimentos de inducción

a) Un imán fijo NO induce una corriente en una bobina.

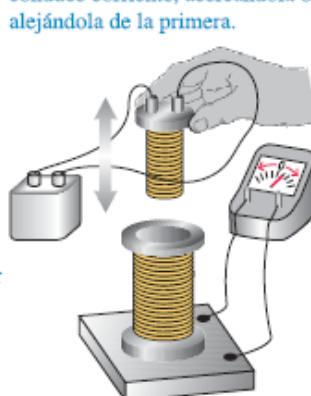


Todas estas acciones SÍ inducen una corriente en la bobina. ¿Qué tienen en común?*

b) Mover el imán acercándolo o alejándolo de la bobina.



c) Mover una segunda bobina que conduce corriente, acercándola o alejándola de la primera.



d) Variar la corriente en la segunda bobina (cerrando o abriendo el interruptor).



*Provocan que el campo magnético a través de la bobina cambie.

Se conecta una bobina de alambre a un galvanómetro, luego se coloca la bobina entre los polos de un electroimán cuyo campo magnético se pueda modificar. A continuación, se describe lo que se observa:

- 1) Cuando no hay corriente en el electroimán ($\vec{B} = 0$), el galvanómetro no indica corriente.
- 2) Cuando el electroimán se enciende, hay una corriente momentánea a medida que se incrementa \vec{B} .
- 3) Cuando \vec{B} es constante la corriente cae a cero.

- 4) Si reducimos el área de su sección transversal de la bobina. Se detecta corriente sólo durante la deformación. Cuando aumentamos el área, hay corriente en sentido opuesto, pero sólo mientras el área cambia.
- 5) Si se gira la bobina algunos grados en torno a un eje horizontal, se detecta corriente durante la rotación en el mismo sentido que cuando se redujo el área. Cuando se hace girar de regreso la bobina, hay una corriente en sentido opuesto.
- 6) Si se saca la bobina bruscamente del campo magnético, hay corriente durante el movimiento, en el mismo sentido que cuando se redujo el área.
- 7) Si reducimos el número de espiras de la bobina, hay corriente durante el proceso en el mismo sentido que cuando se redujo el área. Si enrollamos más espiras en la bobina, hay una corriente en sentido opuesto.
- 8) Cuando se desconecta el electroimán, hay una corriente momentánea en el sentido opuesto al de la corriente cuando fue activado.
- 9) Cuanto más rápido se efectúen estos cambios, mayor es la corriente.
- 10) Si se repiten todos estos experimentos con una bobina que tenga la misma forma, pero diferente material y resistencia, la corriente en cada caso es inversamente proporcional a la resistencia total del circuito. Esto demuestra que las fem inducidas que ocasionan la corriente no dependen del material de la bobina, sino sólo de su forma y del campo magnético.

El elemento común en todas estas observaciones es el flujo magnético cambiante Φ_B . El sentido de la fem inducida depende de si el flujo aumenta o disminuye. Las fem inducidas son el resultado de la acción de fuerzas no electroestáticas.

9.2. Ley de Faraday

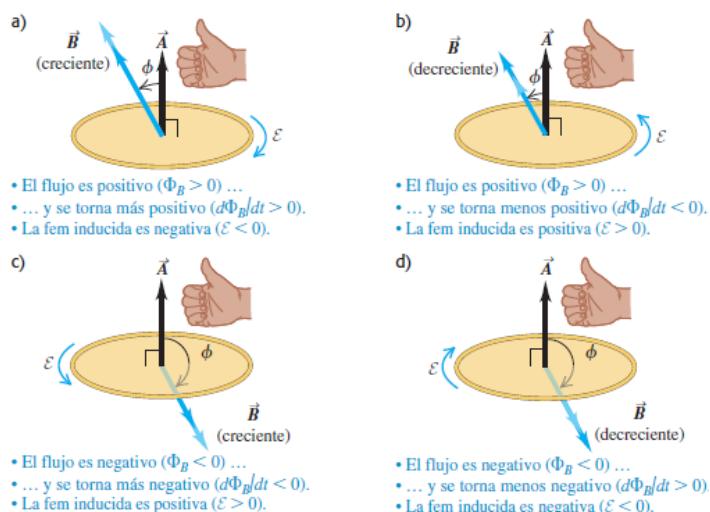
Recordando las ecuaciones de flujo magnético (7.2), (7.3) y (7.5). La ley de Faraday de la inducción establece:

La fem inducida en una espira cerrada es igual a la negativa de la tasa de cambio del flujo magnético de la espira con respecto al tiempo

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (9.1)$$

La dirección de una fem o corriente inducida se calcula con la ecuación (9.1) y se utilizan las siguientes reglas para los signos:

- 1) Definir una posición positiva para el vector área (puede ser cualquiera de las dos, pero al definirla una respetarla).
- 2) A partir de las direcciones de \vec{B} y \vec{A} , determine el signo del flujo magnético Φ_B y su tasa de cambio $d\Phi_B/dt$.
- 3) Determine el signo de la fem o corriente inducida. Si el flujo es creciente, de manera que $d\Phi_B/dt$ es positiva, entonces la fem o corriente inducida es negativa; si el flujo es decreciente, entonces $d\Phi_B/dt$ es negativa y la fem o corriente inducida es positiva.
- 4) Determine la dirección de la fem o corriente inducida con la mano derecha. Si la fem o corriente inducida en el circuito es positiva, está en la misma dirección de los dedos doblados; si es negativa, se encuentra en la dirección opuesta.



Para el caso de una bobina con N espiras con un flujo que varía a la misma tasa en cada espira. La fem total en una bobina con N espiras es:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (9.2)$$



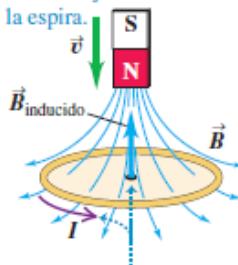
9.3. Ley de Lenz

La ley de Lenz es un método alternativo conveniente para determinar la dirección de una corriente o fem inducida y establece:

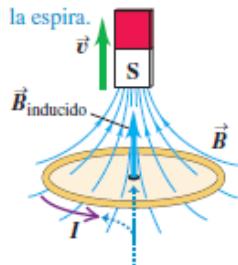
La dirección de cualquier efecto de la inducción magnética es la que se opone a la causa del efecto.

Si el flujo en un circuito fijo cambia la corriente inducida establece un campo magnético. Dentro del área limitada por el circuito, este campo es opuesto al campo original si éste se incrementa, pero tiene la misma dirección que el campo original si éste disminuye. Es decir, la corriente inducida se opone al cambio en el flujo a través del circuito.

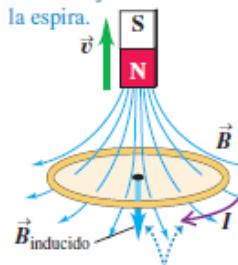
- a) El movimiento del imán ocasiona un flujo creciente hacia abajo a través de la espira.



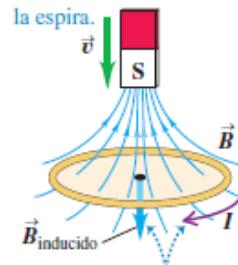
- b) El movimiento del imán ocasiona un flujo decreciente hacia arriba a través de la espira.



- c) El movimiento del imán produce un flujo decreciente hacia abajo a través de la espira.



- d) El movimiento del imán ocasiona un flujo creciente hacia arriba a través de la espira.



El campo magnético inducido es *hacia arriba* para oponerse al cambio del flujo. Para producir el campo inducido, la corriente inducida debe ir *en sentido antihorario*, vista desde arriba de la espira.

El campo magnético inducido es *hacia abajo* para oponerse al cambio del flujo. Para producir este campo inducido, la corriente inducida debe ir *en sentido horario*, vista desde arriba de la espira.

9.3.1. Ley de Lenz y respuesta de cambio

Una corriente inducida siempre se opone a cualquier cambio en el flujo magnético, ¿cómo es posible entonces que el flujo cambie? La respuesta es que la ley de Lenz sólo da la dirección de una corriente inducida; la magnitud de la corriente depende de la resistencia del circuito. Cuanto mayor es la resistencia, menor es la corriente inducida que se opone al cambio de flujo y más fácil es que tenga lugar el cambio de flujo.

A la inversa, cuanto menor es la resistencia del circuito, mayor es la corriente inducida y más difícil es el cambio del flujo.

El caso extremo ocurre cuando la resistencia del circuito es igual a cero. Entonces, la corriente inducida en la continuará fluyendo aun después de que la fem inducida haya desaparecido. Gracias a esta corriente persistente, se observa que el flujo a través de la espira es exactamente el mismo que había antes de que el imán comenzara a moverse, por lo que el flujo a través de la espira de resistencia nula nunca cambia.

9.4. Fuerza electromotriz por movimiento

El campo magnético es uniforme, una partícula q en la varilla experimenta una fuerza magnética $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ con magnitud $F = |q|vB$. Supondremos que q es positiva, por lo tanto el sentido de la fuerza es hacia arriba, de b hacia a .

Esta fuerza magnética hace que las cargas libres en la varilla se muevan, creando un exceso de carga positiva en a y de carga negativa b . Esto crea un campo eléctrico en la varilla, en el sentido que va de a hacia b (opuesto a \vec{B}). La carga continúa acumulándose en los extremos hasta que se hace suficientemente grande para que la fuerza eléctrica hacia abajo (con magnitud qE) cancele exactamente la fuerza magnética hacia arriba (con magnitud qvB). De esta forma, $qE = qvB$, y las cargas están en equilibrio.

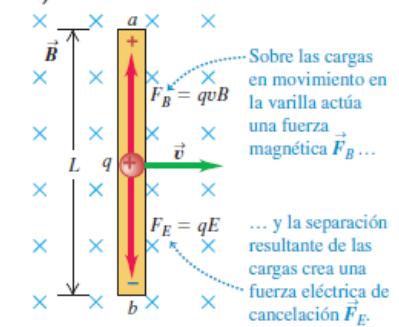
La magnitud de la ddp V_{ab} es igual a la magnitud del campo eléctrico E multiplicada por la longitud L de la varilla. De acuerdo con el análisis anterior, $E = vB$, por lo que:

$$V_{ab} = EL = vBL \quad (9.3)$$

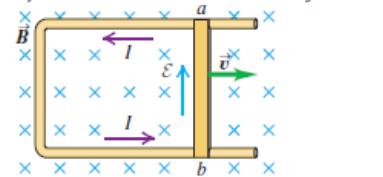
con el punto a en un potencial mayor que el b .

Supongamos que la varilla se desliza a lo largo de un conductor fijo con forma de U (como b). Ninguna fuerza magnética actúa sobre las cargas en el conductor fijo, pero la carga que estaba cerca de los puntos a y b se redistribuye en el conductor fijo, y crea un campo eléctrico dentro de este. Este campo establece una corriente en el sentido que se indica. La varilla móvil se ha vuelto una fuente de fuerza electromotriz; dentro de ella, la carga se mueve del potencial más bajo al más alto, y en lo que resta del circuito se mueve del potencial mayor

a) Varilla aislada en movimiento



b) Varilla conectada a un conductor fijo



La fem E en la varilla móvil crea un campo eléctrico en el conductor fijo.

al menor. Esta fem se denomina fuerza electromotriz de movimiento, y se denota con \mathcal{E} . Del análisis anterior, la magnitud de esta fem es

$$\mathcal{E} = vBL \quad (9.4)$$

Si R es la resistencia del circuito del conductor en forma de U y la varilla corrediza, la corriente inducida I en el circuito está dada por $vBL = IR$. La fem de movimiento es un caso particular de la ley de Faraday.

9.4.1. Fem de movimiento: Forma general

Podemos definir la fem de movimiento para un conductor de cualquier forma que se mueva en un campo magnético, uniforme o no (suponiendo que el campo magnético en cada punto no varía con el tiempo). Para un elemento $d\vec{l}$ del conductor, la contribución $d\mathcal{E}$ a la fem es la magnitud dl multiplicada por la componente de $\vec{v} \times \vec{B}$ (la fuerza magnética por unidad de carga) paralela a $d\vec{l}$ es decir

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Para cualquier espira conductora cerrada, la fem total es:

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (9.5)$$

Esta expresión parece diferente del enunciado original de la ley de Faraday, ecuación (9.1), según la cual $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$. No obstante, las dos formas son equivalentes. Se puede demostrar que la tasa de cambio del flujo magnético a través de una espira conductora en movimiento está dada por el negativo de la expresión en la ecuación (9.5). Cuando se tienen conductores fijos en campos magnéticos cambiantes, no es posible utilizar la ecuación (9.5); en tal caso, la ecuación (9.1) es la única forma correcta de expresar la ley de Faraday.

9.5. Campos eléctricos inducidos

Cuando un conductor se mueve en un campo magnético, la fem inducida se entiende en términos de fuerzas magnéticas que actúan sobre las cargas del conductor. Pero una fem inducida también se presenta cuando hay un flujo cambiante a través de un conductor fijo. En este tipo de situación, ¿qué es lo que empuja las cargas alrededor del circuito?

Consideremos un solenoide largo y delgado, con área de sección transversal A y n espiras por unidad de longitud, está rodeado en su centro por una espira conductora circular. Una corriente I en el solenoide establece un campo magnético a lo largo de su eje con magnitud $B = \mu_0 nI$. Ignoramos el campo fuera del solenoide y suponemos que el vector de área \vec{A} apunta en la misma dirección que \vec{B} , entonces el flujo magnético Φ_B a través de la espira es:

$$\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$$

Cuando la corriente I en el solenoide cambia con el tiempo, el flujo magnético también cambia y, de acuerdo con la ley de Faraday, la fem inducida en la espira está dada por:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA \frac{dI}{dt}$$

Si la resistencia de la espira es R , la corriente inducida I' en la espira, es $I' = \mathcal{E}/R$

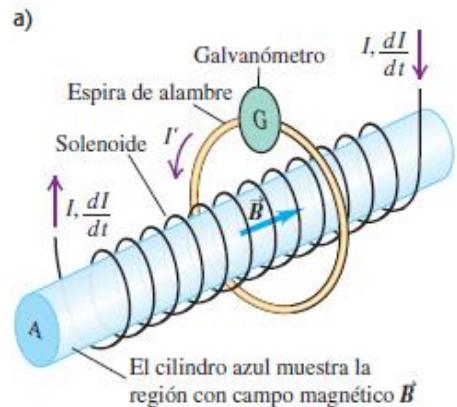
Pero, ¿qué fuerza hace que las cargas se muevan alrededor de la espira? No puede ser una fuerza magnética porque el conductor no se está moviendo en un campo magnético. Nos vemos obligados a concluir que tiene que haber un campo eléctrico inducido en el conductor causado por el flujo magnético cambiante. Pero es un campo eléctrico raro, porque cuando una carga q completa una vuelta alrededor de la espira, el trabajo total realizado sobre ella por el campo eléctrico debe ser igual al producto de q por la fem \mathcal{E} . Es decir, el campo eléctrico en la espira no es conservativo, porque la integral de línea de alrededor de una trayectoria cerrada no es igual a cero. Esta integral de línea, que representa el trabajo realizado por el campo inducido por unidad de carga, es igual a la fem inducida \mathcal{E} :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$$

Para este caso, la ley de Faraday se puede plantear como:

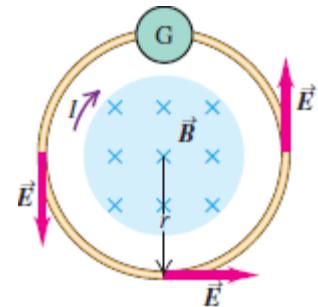
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (9.6)$$

Solo es válida si la trayectoria alrededor de la cual se integra es constante.



Un ejemplo donde podemos aplicar la ecuación (9.6) es en la figura del costado. Si consideramos la espira circular fija de radio r . En virtud de la simetría cilíndrica, el campo eléctrico tiene la misma magnitud en todos los puntos del círculo y es tangente a éste en cada. (La simetría también permitiría que el campo fuera radial, pero entonces la ley de Gauss requeriría la presencia de una carga neta dentro del círculo, y no hay ninguna.) La integral de línea de la ecuación (9.6) se vuelve tan sólo la magnitud E multiplicada por la circunferencia $2\pi r$ de la espira, y obtenemos:

$$E = \frac{1}{2\pi r} \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|$$



Revisar ejemplo 29.29

9.6. Corrientes parásitas

9.7. Corriente de desplazamiento

Apuntes de la catedra

9.8. Ecuaciones de Maxwell

Reuniremos todas las relaciones entre campos eléctrico y magnéticos y sus fuentes. Son cuatro ecuaciones llamadas, ecuaciones de Maxwell.

La primera es sencillamente la ley de Gauss para campos eléctricos, la ecuación (2.5), la cual afirma que la integral de superficie de E_\perp sobre cualquier superficie cerrada es igual a $1/\epsilon_0$ multiplicado por la carga total Q_{enc} encerrada dentro de la superficie:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (9.7)$$

La segunda es la relación análoga para campos magnéticos, ecuación (27.8), la cual establece que la integral de superficie de B_\perp sobre cualquier superficie cerrada siempre es igual a cero:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (9.8)$$

Este enunciado significa, entre otras cosas, que no hay monopolos magnéticos (cargas magnéticas individuales) que actúen como fuentes del campo magnético.

La tercera ecuación es la ley de Ampère con la corriente de desplazamiento incluida. Esta ley establece que tanto la corriente de conducción i_C como la corriente de desplazamiento $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ actúan como fuentes del campo magnético:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{enc} \quad (9.9)$$

La cuarta ecuación es la ley de Faraday; establece que un campo magnético cambiante o un flujo magnético inducen un campo eléctrico:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (9.10)$$

Si hay un flujo magnético cambiante, la integral de línea en la ecuación (9.10) es diferente de cero, lo que demuestra que el campo producido por un flujo magnético cambiante no es conservativo. Recuerde que esta integral de línea debe llevarse a cabo sobre una trayectoria cerrada constante.

En general, el campo \vec{E} total en un punto en el espacio puede ser la superposición de un campo electrostático \vec{E}_c provocado por una distribución de cargas en reposo y un campo \vec{E}_n no electrostático inducido magnéticamente. Es decir:

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_n$$

La parte electrostática \vec{E}_c siempre es conservativa, por lo que $\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$. Esta parte conservativa del campo no contribuye a la integral en la ley de Faraday, de manera similar, la parte no conservativa \vec{E}_n del campo no contribuye a la integral en la ley de Gauss porque esta parte del campo no es causada por cargas estáticas. De aquí que siempre $\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{A} = 0$. Se concluye que, en todas las ecuaciones de Maxwell, es el campo eléctrico total; estas ecuaciones no hacen distinción entre campos conservativos y no conservativos.

9.8.1. Simetría en las ecuaciones de Maxwell

En el espacio vacío, donde no hay cargas, las ecuaciones (9.7) y (9.8) tienen forma parecida, una contiene a \vec{E} y la otra a \vec{B} . Las ecuaciones (9.9) y (9.10), respectivamente, dice que un flujo eléctrico cambiante origina un campo magnético, y la otra afirma que un flujo magnético cambiante origina un campo eléctrico.

Estas últimas dos se pueden volver a reescribir incluyendo las definiciones de flujo eléctrico y magnético, $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ y $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$. En el espacio vacío donde no hay carga ni corriente de conducción, $i_C = 0$ y $Q_{enc} = 0$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (9.11)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (9.12)$$

La característica más notable de estas ecuaciones es que un campo de cualquier tipo que varíe con respecto al tiempo induce un campo del otro tipo en las regiones vecinas del espacio.

10. UNIDAD 10: Inductancia (Capítulo 30)

10.1. Inductancia mutua

Una corriente i_1 establece un campo magnético, y algunas de líneas de este campo pasan a través de la bobina 2. Φ_{B2} es el flujo magnético a través de la bobina 2, causado por la corriente i_1 . El campo magnético es proporcional a i_1 , de manera que también Φ_{B2} es proporcional a i_1 . Cuando i_1 cambia, Φ_{B2} cambia; este flujo cambiante induce una fem \mathcal{E}_2 en la bobina 2, dada por

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt} \quad (10.1)$$

Para representar la proporcionalidad entre Φ_{B2} e i_1 , incluimos el número de espiras N_2 e introducimos una constante de proporcionalidad M_{21} , llamada inductancia mutua de las dos bobinas, escribimos

$$N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1 \quad (10.2)$$

donde Φ_{B2} es el flujo a través de una sola espira de la bobina 2. De ahí que,

$$N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

y la ecuación (10.1) se rescribe como

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (10.3)$$

Es decir, un cambio en la corriente i_1 en la bobina 1 induce una fem en la bobina 2, que es directamente proporcional a la tasa de cambio de i_1 .

Si las bobinas están en el vacío, la inductancia mutua M_{21} es una constante que sólo depende de la geometría de las dos bobinas (el tamaño, la forma, el número de espiras y la orientación de cada una, así como la separación entre ellas). Si está presente un material magnético, M_{21} también depende de las propiedades magnéticas de éste. La inductancia mutua también depende del valor de i_1 . En este análisis supondremos que cualquier material magnético que esté presente tiene una K_m constante, por lo que el flujo es directamente proporcional a la corriente y M_{21} sólo depende de la geometría.

Si analizamos el caso opuesto, en el que una corriente cambiante i_2 en la bobina 2 causa un flujo cambiante Φ_{B1} y una fem \mathcal{E}_1 en la bobina 1. Aunque las dos bobinas no son idénticas y el flujo a través de ellas no es el mismo, M_{12} siempre es igual a M_{21} . A este valor común lo llamamos simplemente inductancia mutua, y lo denotamos con M . De esta forma, podemos escribir:

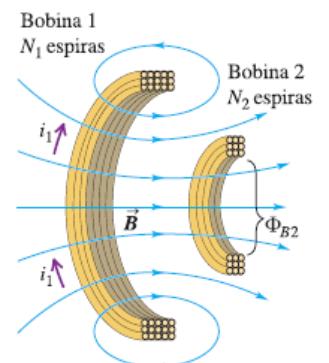
$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad y \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt} \quad (10.4)$$

donde la inductancia mutua M es:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B1}}{i_2} \quad (10.5) \quad \left[H = \frac{Wb}{A} = \frac{Vs}{A} = \Omega s = \frac{J}{A^2} \right] \text{"henry"}$$

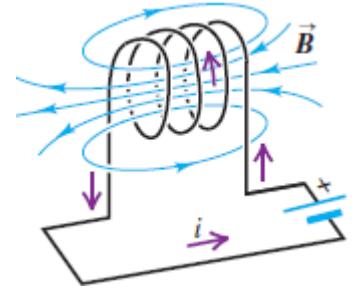
La inductancia mutua puede ser un inconveniente ya que induce fem no deseadas en otros circuitos cercanos.

Para minimizar esto, los circuitos deben diseñarse de manera que M sea tan pequeña como se pueda. También tiene aplicaciones útiles, se usa en los transformadores de corriente alterna para subir o bajar voltajes,



10.2. Auto inductancia e inductores

Si consideramos un circuito aislado que tiene una corriente, se establece un campo magnético que crea un flujo magnético a través del mismo; este flujo cambia cuando la corriente cambia. Así, cualquier circuito que tiene una corriente variable tiene una fem inducida en él por la variación en su propio campo magnético. Esta clase de fem se denomina fem autoinducida. Según la ley de Lenz, una fem autoinducida siempre se opone al cambio en la corriente que causó la fem, y de ese modo hace más difícil que haya variaciones en la corriente.



El efecto se intensifica si el circuito incluye una bobina con N espiras de alambre.

Como resultado de la corriente i , hay un flujo magnético medio Φ_B a través de cada vuelta de la bobina. En analogía con la ecuación (10.5), definimos la autoinductancia L del circuito como:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad (10.6) \quad [H]$$

Si reordenamos la ecuación (10.6) y obtenemos la derivada con respecto al tiempo, la relación entre las tasas de cambio es:

$$N \frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

De acuerdo con la Ley de Faraday, la ecuación (9.2) la fem autoinducida en una bobina de N espiras, $\mathcal{E} = -Nd\Phi_B/dt$, por lo que obtenemos:

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} \quad (10.7)$$

Gracias a esta relación es posible obtener la magnitud de L , cambie la corriente en el circuito con una tasa di/dt conocida, mida la fem inducida y obtenga el cociente para determinar el valor de L .

10.2.1. Los inductores como elementos de un circuito

Para tener una inductancia particular utilizamos un elemento llamado inductor, el símbolo habitual es 

La finalidad del inductor es oponerse a cualquier variación en la corriente a través del circuito.

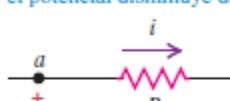
Si en un circuito no hay un inductor, utilizamos la Ley de Kirchhoff, donde el campo eléctrico producido por las cargas es conservativo. Pero cuando en el circuito hay un inductor, el campo eléctrico inducido magnéticamente dentro de las bobinas del inductor no es conservativo; y lo denotaremos con \vec{E}_n .

[VER si agrego la explicación](#)

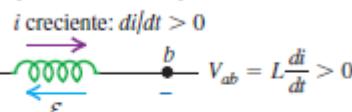
$$V_{ab} = V_a + V_b = L \frac{di}{dt}$$

Se concluye que hay una diferencia de potencial genuina entre las terminales del inductor, asociada con las fuerzas conservativas electrostáticas, aunque el campo eléctrico asociado es no conservativo. Así, está justificado usar la ley de Kirchhoff de las mallas para analizar circuitos que incluyan inductores.

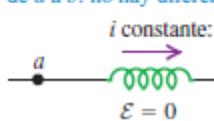
a) Resistor con corriente i que fluye de a a b : el potencial disminuye de a a b .



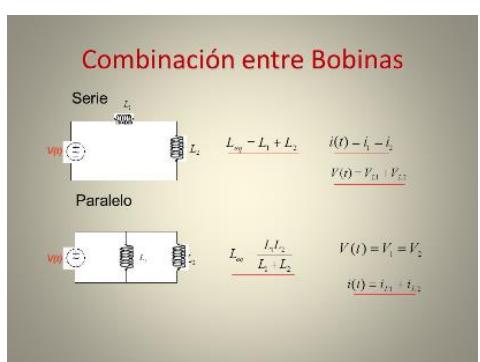
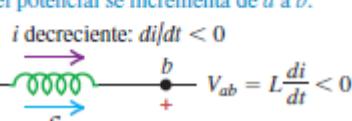
c) Inductor con corriente i creciente que fluye de a a b : el potencial disminuye de a a b .



b) Inductor con corriente constante i que fluye de a a b : no hay diferencia de potencial.



d) Inductor con corriente i decreciente que fluye de a a b : el potencial se incrementa de a a b .



10.2.2. Aplicaciones de los inductores

10.3. Energía de campo magnético

10.3.1. Energía almacenada en un inductor

El establecimiento de una corriente en un inductor requiere un suministro de energía, y un inductor que conduce corriente contiene energía almacenada.

Si la corriente inicial es igual a cero, con la inductancia L podemos calcular la energía U necesaria para establecer una corriente final I en un inductor. Suponemos que el inductor tiene una resistencia igual a cero, por lo que no se disipa energía. Sea i la corriente en cierto instante y va aumentando ($\frac{di}{dt} > 0$). El voltaje entre las terminales del

inductor en ese instante es $V_{ab} = L \frac{di}{dt}$, y la tasa P a la que se entrega energía al inductor (igual a la potencia instantánea suministrada por la fuente) es:

$$P = V_{ab}i = Li \frac{di}{dt}$$

La energía dU suministrada al inductor durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt es $dU = P dt$, por lo que $dU = Li di$

La energía total U suministrada mientras la corriente aumenta de cero a un valor final I es

$$U = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} LI^2 \quad (10.8)$$

Una vez que la corriente ha alcanzado su valor final y no se alimenta más energía al inductor. Cuando no hay corriente, la energía almacenada U es igual a cero; cuando la corriente es I , la energía es $1/2LI^2$.

Cuando la corriente disminuye de I a cero, el inductor actúa como fuente que suministra una cantidad total de energía igual a $1/2LI^2$ al circuito externo. Si interrumpimos bruscamente el circuito abriendo un interruptor la corriente disminuye con mucha rapidez, la fem inducida es muy grande. Esta fem elevada es la analogía eléctrica de la gran fuerza que ejerce un auto que choca contra un muro y se detiene en forma súbita.

10.3.2. Densidad de la energía magnética

La energía en un inductor en realidad se almacena en el campo magnético dentro de la bobina, al igual que la energía de un capacitor lo hace en el campo eléctrico entre sus placas.

Si tenemos un solenoide toroidal idea(campo magnético está en el interior del núcleo).Suponemos que el área de la sección transversal A es pequeña como para suponer que el campo magnético es uniforme en toda el área. El volumen V encerrado por el solenoide es $V \cong 2\pi r A$. La autoinductancia del solenoide toroidal con vacío dentro de sus bobinas es $L = \mu_0 N^2 A / 2\pi r$

De la ecuación (10.8), la energía U almacenada en el solenoide toroidal cuando la corriente es I es:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} I^2$$

El campo magnético y, por lo tanto, esta energía se localiza en el volumen encerrado por los devanados. La energía por unidad de volumen, o densidad de energía magnética, es $u = U/V$:

$$u = \frac{U}{2\pi r A} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 I^2}{(2\pi r)^2}$$

Esto se puede expresar en términos de la magnitud B del campo magnético dentro del solenoide toroidal

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

por lo tanto,

$$\frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2} = \frac{B^2}{\mu_0^2}$$

Cuando se sustituye este resultado en la ecuación anterior de u , se encuentra la expresión para la densidad de energía magnética en el vacío:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (10.9)$$

Ésta es la analogía magnética de la energía por unidad de volumen en un campo eléctrico en el vacío $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Cuando el material dentro del toroide no es un vacío, sino un material con permeabilidad magnética (constante) $u = K_m \mu_0$. Así, la energía por unidad de volumen en el campo magnético es:

$$u = \frac{B^2}{2\mu} \quad (10.10)$$

La ecuación (10.10) resulta ser la expresión para la energía por unidad de volumen asociada con cualquier configuración de campo magnético en un material con permeabilidad constante.

10.4. El circuito R-L

Un inductor en un circuito hace difícil que ocurran cambios rápidos en la corriente, en virtud de los efectos de la fem autoinducida. La ecuación (10.7) muestra que cuanto más grande es la tasa de cambio de la corriente, di/dt , mayor es la fem autoinducida y mayor la diferencia de potencial entre las terminales del inductor.

10.4.1. Crecimiento de la corriente en un circuito $R - L$

Suponga que ambos interruptores están abiertos y luego en $t = 0$ se cierra S_1 , al cerrarlo se conecta la combinación $R - L$ a una fuente ideal con fem constante \mathcal{E} . La corriente comienza a crecer con una tasa que solo depende de L .

Sea i la corriente en cierto momento t después que se cierra S_1 y di/dt la tasa de cambio en ese instante, la diferencia de potencial v_{ab} a través del resistor y del inductor, respectivamente, son:

$$v_{ab} = iR \quad y \quad v_{bc} = L \frac{di}{dt}$$

Aplicando la ley de Kirchhoff en sentido antihorario:

$$\mathcal{E} - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

Despejando di/dt encontramos que la tasa de aumento de la corriente viene dada por:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L} i \quad (1)$$

Cuando S_1 se cierra en $t = 0$ la corriente $i = 0$, entonces la tasa de cambio inicial de la corriente es:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{initial}} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

A medida que pasa el tiempo $(R/L)i$ aumenta y la tasa de incremento de la corriente disminuye hasta llegar a 0. La corriente llega a un valor final I . La ecuación (1) se convierte en:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{final}} = 0 = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L} i \quad \rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Vemos que I final no depende de L , es la misma que si se conectara una resistencia a la fuente con fem \mathcal{E} .

Vemos el comportamiento de la corriente en función del tiempo,

obtendremos esa ecuación. Primero reordenamos (1) para que adopte la forma:

$$\frac{di}{i - \mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L} dt$$

Integramos ambos miembros y obtenemos:

$$\int_0^i \frac{di'}{i' - \mathcal{E}/R} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt' \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{i - \mathcal{E}/R}{-\mathcal{E}/R}\right) = -\frac{R}{L} t$$

Despejando i , llegamos al resultado final:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}\right) \quad (10.11)$$

En un tiempo igual a L/R la corriente ha subido a $(1 - 1/e)$, o el 63% de su valor final. De esta forma, la cantidad L/R es una medida de la rapidez con que la corriente se aproxima a su valor final; esta cantidad se llama constante de tiempo del circuito, y se denota con τ

$$\tau = \frac{L}{R}$$

En un tiempo igual a 2τ , la corriente alcanza el 86% de su valor final; en el tiempo 5τ llega al 99.3% y en 10τ llega al 99.995%.

La energía es:

$$\mathcal{E}i = i^2 R + Li \frac{di}{dt}$$

De la potencia $\mathcal{E}i$ suministrada por la fuente, $i^2 R$ se disipa en el resistor y $Li di/dt$ es la energía almacenada en el inductor.

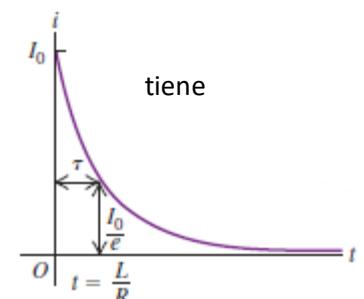
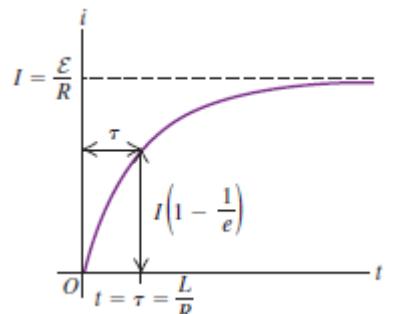
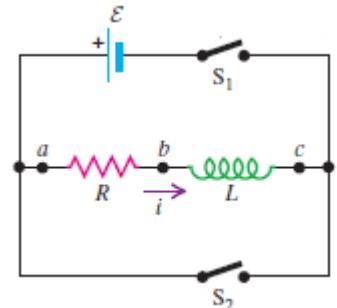
10.4.2. Decaimiento de la corriente en un circuito $R - L$

Suponemos que S_1 ha permanecido cerrado suficiente tiempo y la corriente ya un valor estable, la llamaremos I_0 . Cerramos el interruptor S_2 (al mismo tiempo que abrimos S_1 en un tiempo $t = 0$).

A partir de las leyes de Kirchhoff tenemos:

$$-iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

COMPLETAR EL ANALISIS



Llegamos a que la corriente i , varia con el tiempo de acuerdo con:

$$i = I_0 e^{-(\frac{R}{L})t} \quad (10.12)$$

La constante de tiempo, τ es el tiempo para que la corriente disminuya a $1/e$, alrededor del 37%, de su valor original. En el tiempo 2τ ha disminuido al 13.5%, en el tiempo 5τ al 0.67%, y en 10τ al 0.0045%.

La energía necesaria para mantener la corriente durante el decaimiento proviene de la energía almacenada en el campo magnético del inductor.

$$0 = i^2 R + L i \frac{di}{dt}$$

Esta ecuación demuestra que la energía almacenada en el inductor disminuye a una tasa igual a la tasa de disipación de la energía en el resistor

10.5. El circuito L-C

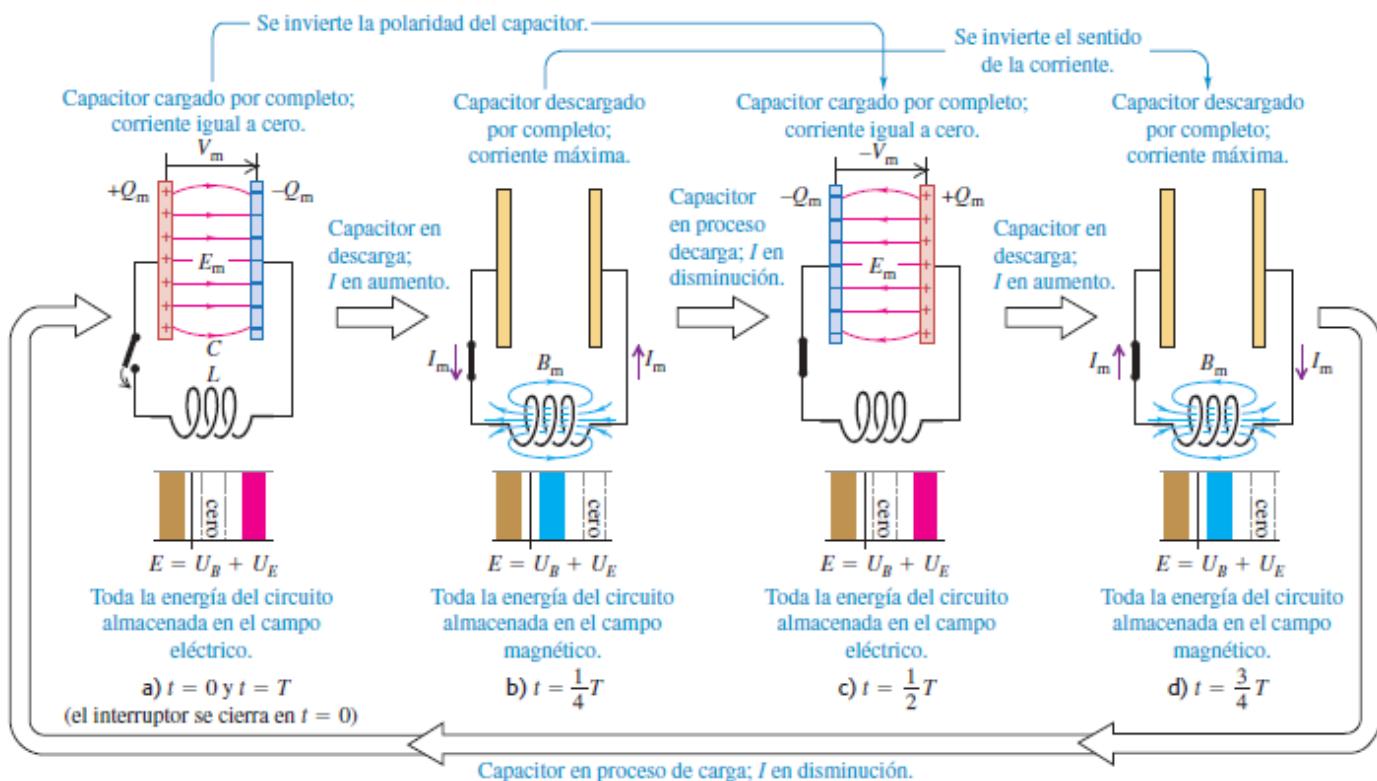
En el circuito $L - C$ se carga el capacitor con una diferencia de potencial V_m y una carga inicial $Q = CV_m$ en su placa izquierda y luego se cierra el interruptor.

El capacitor comienza a descargarse a través del inductor. A causa de la fem inducida en el inductor, la corriente no puede cambiar en forma instantánea; comienza en cero y finalmente alcanza un valor máximo I_m . Durante esta intensificación el capacitor se está descargando, en cada instante el potencial del capacitor es igual a la fem inducida, por lo que a medida que el capacitor se descarga, la tasa de cambio de la corriente disminuye. Cuando el potencial del capacitor se reduce a cero, la fem inducida también es igual a cero, y la corriente se ha estabilizado en su valor máximo I_m . En el capacitor ddp entre sus terminales (y las del inductor) ha disminuido hasta cero.

Durante la descarga del capacitor, la corriente en aumento en el inductor ha establecido un campo magnético en el espacio que lo rodea, y la energía que inicialmente estaba almacenada en el campo eléctrico del capacitor ahora lo está en el campo magnético del inductor.

Aunque el capacitor está completamente descargado, la corriente persiste (no cambia instantáneamente), y el capacitor comienza a cargarse con polaridad opuesta a la de su estado inicial. Conforme disminuye la corriente, la magnitud del campo magnético también lo hace, lo que induce una fem en el inductor en el mismo sentido que el de la corriente; esto retarda la disminución de la corriente. Con el tiempo, la corriente y el campo magnético disminuyen a cero y el capacitor queda cargado en el sentido opuesto al de su polaridad inicial, con una diferencia de potencial $-V_m$ y carga $-Q$ en su placa izquierda.

El proceso se repite ahora en sentido opuesto; un poco después, el capacitor se ha descargado una vez más y en el inductor hay una corriente en el sentido opuesto. Más tarde, la carga del capacitor recupera su valor original, y todo el proceso se repite. Si no hay pérdidas de energía, las cargas en el capacitor siguen oscilando hacia atrás y adelante indefinidamente. Este proceso se llama oscilación eléctrica.



Desde el punto de vista de la energía, las oscilaciones de un circuito eléctrico transfieren energía del campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor y viceversa. La energía total asociada con el circuito es constante. Esto es análogo a la transferencia de energía en un sistema mecánico que oscila de la energía potencial a la cinética y viceversa.

10.5.1. Oscilaciones eléctricas en un circuito L-C

Aplicamos la ley de Kirchhoff, recorriendo en sentido horario, se obtiene que:

$$-L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

como $i = dq/dt$, se deduce que $di/dt = d^2q/dt^2$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior y dividiendo por $-L$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (1)$$

La ecuación (1) es análoga a la ecuación del movimiento armónico simple

$$0 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

En este circuito la carga q del capacitor desempeña el papel del desplazamiento x , y la corriente $i = dq/dt$ es análoga a la velocidad de la partícula $v_x = dx/dt$. La inductancia L es análoga a la masa m , y el reciproco de la capacitancia $1/C$ es análogo a la constante de la fuerza k .

Recordamos que la frecuencia angular es $\omega = 2\pi f$ del oscilador armonico es $(k/m)^{1/2}$, y la posición está dada por:

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

donde la amplitud A y el ángulo de fase ϕ depende de las condiciones iniciales. Esta situación es análogo a q :

$$q = Q \cos(\omega t + \phi) \quad (10.13)$$

y la frecuencia angular ω de la oscilación está dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (10.14)$$

La ecuación (10.13) satisface la ecuación (1), cuando ω esta dado por (10.14). Al hacer esto encontramos que i :

$$i = -\omega Q \sin(\omega t + \phi) \quad (10.15)$$

Vemos que la corriente y la carga oscilan de forma sinusoidal. Si en $t = 0$ la placa izquierda del capacitor tiene su carga máx. Q y la corriente $i = 0$, entonces $\phi = 0$. Si $q = 0$ en $t = 0$, entonces $\phi \pm \pi/2\text{rad}$

10.5.2. Energía en un circuito L-C

El circuito L-C es un sistema conservativo. Sea Q la carga máxima del capacitor. La energía del campo magnético, $\frac{1}{2}Li^2$, en el inductor en cualquier momento corresponde a la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ del cuerpo oscilante, y la energía del campo eléctrico $q^2/2C$ en el capacitor corresponde a la energía potencial elástica $\frac{1}{2}kx^2$ del resorte. La suma de estas energías es igual a la energía total $Q^2/2C$ del sistema:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \quad (10.16)$$

La energía total en el circuito L-C es constante; oscila entre las formas magnética y eléctrica, del mismo modo que la energía mecánica total en el movimiento armónico simple

Al despejar i en la ecuación (10.16), se encuentra que cuando la carga en el capacidores q , la corriente i es:

$$i = \pm \sqrt{\frac{1}{LC} \sqrt{Q^2 - q^2}} \quad (10.17)$$

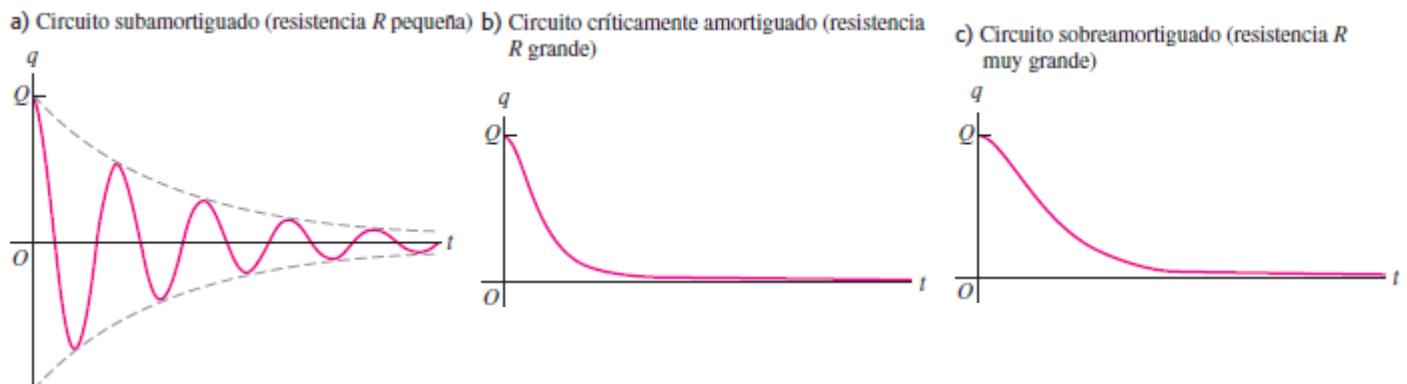
Podemos comprobar esta ecuación si sustituimos q de la ecuación (10.13) e i de la (10.15).

10.6. El circuito L-R-C en serie

Suponga que un inductor con inductancia L y un resistor de resistencia R están conectados en serie entre las terminales de un capacitor cargado, para formar un circuito en serie L-R-C. Como antes, el capacitor comienza a descargarse tan pronto como el circuito está completo. Pero en virtud de las pérdidas iR^2 en el resistor, la energía del campo magnético adquirida por el inductor cuando el capacitor está descargado por completo es menor que la energía del campo eléctrico original del capacitor. De igual forma, la energía del capacitor cuando el campo magnético ha disminuido a cero es aún más pequeña, y así sucesivamente.

Si la resistencia R es relativamente pequeña, el circuito aún oscila, pero con un movimiento

armónico amortiguado (a), y se dice que el circuito está subamortiguado. Si R se incrementa, las oscilaciones cesan con más rapidez. Cuando R alcanza cierto valor, el circuito deja de oscilar; está críticamente amortiguado (b). Para valores aún mayores de R , el circuito está sobreamortiguado (c), y la carga del capacitor se acerca a cero aún más lentamente.



10.6.1. Análisis del circuito L-R-C

Comenzamos cerrando el interruptor hacia arriba, para conectar al capacitor con una fuente de fem \mathcal{E} durante un largo tiempo hasta que el capacitor tenga su carga final $Q = C\mathcal{E}$ y que toda oscilación inicial haya cesado. En $t = 0$ se cambia el interruptor hacia abajo, eliminando la fuente y poniendo en paralelo al resistor e inductor. La corriente inicial es negativa y con sentido opuesto al de i en la figura.

Para determinar cómo varía q e i con el tiempo, aplicamos la ley de Kirchhoff en sentido *abcda*, obtenemos:

$$-iR - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Si sustituimos i por dq/dt y reordenamos, nos queda:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (1)$$

Hay métodos para obtener la solución de la ecuación (1). La forma de la solución es diferente para los casos de circuito subamortiguado (R chica) y sobreamortiguado (R grande). Cuando $R^2 < 4L/C$, la solución es:

$$q = A e^{-(\frac{R}{2L})t} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t + \phi \right) \quad (10.18)$$

donde A y ϕ son constantes. Si se obtienen las derivas de la ecuación (10.18) veremos que satisfacen (1).

Si R es igual a cero estamos en un circuito L-C. Si R es distinta de cero la frecuencia angular de la oscilación es menor que $1/(LC)^{1/2}$, decimos que la frecuencia angular ω' de las oscilaciones subamortiguadas está dada por:

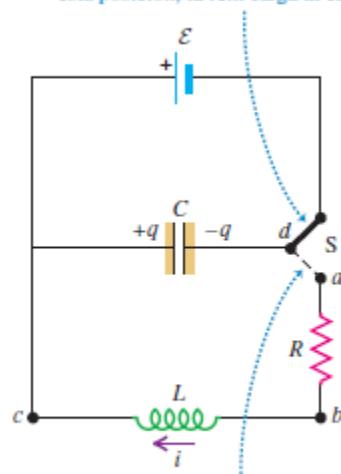
$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (10.19)$$

A medida que R se incrementa, ω' se hace cada vez más pequeña. Cuando $R^2 = 4L/C$, la cantidad bajo el radical se vuelve cero; el sistema ya no oscila y se ha llegado al caso del amortiguamiento crítico. Para valores de R aún más grandes, el sistema se comporta como sobreamortiguado, y q está dada como función del tiempo por la suma de dos funciones exponenciales decrecientes.

En forma similar, el punto de transición entre el subamortiguamiento y el sobreamortiguamiento ocurre en $b^2 = 4km$ para el sistema mecánico y en $R^2 = 4L/C$ para el eléctrico.

Las aplicaciones prácticas del circuito L-R-C en serie surgen cuando se incluye una fuente de fem con variación sinusoidal en el circuito. Un circuito como el descrito se llama de corriente alterna.

Cuando el interruptor S se encuentra en esta posición, la fem carga al capacitor.



Cuando el interruptor S pasa a esta posición, el capacitor se descarga a través del resistor y el inductor.

Analogías entre sistemas eléctricos y mecánicos

Círculo eléctrico		Sistema mecánico de una dimensión
Carga	$Q \leftrightarrow x$	Posición
Corriente	$I \leftrightarrow v_x$	Velocidad
Diferencia de potencial	$\Delta V \leftrightarrow F_x$	Fuerza
Resistencia	$R \leftrightarrow b$	Coeficiente de amortiguación viscosa
Capacitancia	$C \leftrightarrow 1/k$	($k = $ constante del resorte)
Inductancia	$L \leftrightarrow m$	Masa
Corriente = derivada respecto al tiempo de la carga	$I = \frac{dQ}{dt} \leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$	Velocidad = derivada respecto al tiempo de posición
Rapidez de cambio de la corriente = segunda derivada respecto al tiempo de la carga	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Aceleración = segunda derivada respecto al tiempo de posición
Energía en el inductor	$U_L = \frac{1}{2}LI^2 \leftrightarrow K = \frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética de un objeto en movimiento
Energía en el capacitor	$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \leftrightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$	Energía potencial almacenada en un resorte
Rapidez de pérdida de energía causada por la resistencia	$I^2R \leftrightarrow bv^2$	Rapidez de pérdida de energía causada por la fricción
Círculo RLC	$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$	Objeto amortiguado en un resorte

11. UNIDAD 11: Ondas electromagnéticas (Capítulo 32)

11.1. Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

A modo de repaso, sabemos, que cuando \vec{E} y \vec{B} no varían con el tiempo; como en el caso del campo eléctrico producido por cargas en reposo o el campo magnético de una corriente estable, podemos analizar los campos cada uno de manera independiente, sin considerar las interacciones entre ellos. Pero cuando los campos varían con el tiempo, dejan de ser independientes. La ley de Faraday plantea que un campo magnético variable en el tiempo actúa como fuente de campo eléctrico, y la ley de Ampère afirma que un campo eléctrico que cambia con el tiempo actúa como una fuente de campo magnético.

Así, cuando un campo, ya sea eléctrico o magnético, cambia con el tiempo, induce un campo del otro tipo en las regiones adyacentes del espacio. Esto nos lleva a considerar la posibilidad de la existencia de una perturbación electromagnética, consistente en campos eléctricos y magnéticos que se modifican con el tiempo, capaz de propagarse a través del espacio de una región a otra, aun cuando no exista materia en la región intermedia. Tal perturbación, en caso de existir, tendrá las propiedades de una onda, por lo que el término apropiado para nombrarla es onda electromagnética.

Maxwell demostró que una perturbación electromagnética debe propagarse en el espacio libre con una rapidez igual a la de la luz, por lo que era probable que la naturaleza de las ondas de luz fuera electromagnética. También descubrió que los principios básicos del electromagnetismo podían expresarse mediante las cuatro ecuaciones de Maxwell. Estas son: 1) la ley de Gauss de los campos eléctricos; 2) la ley de Gauss de los campos magnéticos, que demuestra la inexistencia de monopolos magnéticos; 3) la ley de Ampère, que incluye la corriente de desplazamiento; y 4) la ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (9.7)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (9.8)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{enc} \quad (9.9)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (9.10)$$

Estas ecuaciones se aplican para ambos campos en el vacío. Si hay un material presente la permitividad ϵ_0 y la permeabilidad μ_0 se sustituyen por ϵ y μ , respectivamente. Si estos valores no son constantes en la (9.7) y (9.8), deben colocarse dentro de la integral y para la (9.9) también debe incluirse en la integral cuyo resultado es $d\Phi_E/dt$

11.1.1. Generación de la radiación electromagnética (Lo dejo???)

Una manera de conseguir que una carga puntual emita ondas electromagnéticas es haciéndola oscilar en movimiento armónico simple, de manera que tenga una aceleración (excepto cuando pasa por la posición de equilibrio). La figura muestra algunas líneas de campo eléctrico producidas por una carga oscilante. Las líneas de campo no son objetos materiales; sin embargo, es útil pensar que se comportan como cuerdas. Observe que la carga no emite ondas en todas direcciones por igual; las ondas son más intensas a 90° con respecto al eje de movimiento de la carga, en tanto que no hay ondas a lo largo de este eje. Además, hay una perturbación magnética que se extiende hacia fuera de la carga, lo que no se ilustra. Puesto que las perturbaciones eléctricas y magnéticas se dispersan o irradian desde la fuente, se utiliza de manera indistinta el nombre de radiación electromagnética o el de "ondas electromagnéticas".

El físico Hertz generó por primera vez ondas electromagnéticas con longitudes de onda macroscópicas. Como fuente de ondas, Hertz utilizó cargas oscilantes en circuitos L-C y detectó las ondas electromagnéticas resultantes mediante otros circuitos sintonizados a la misma frecuencia. Hertz también produjo ondas electromagnéticas estacionarias y midió la distancia entre nodos adyacentes (media longitud de onda) para determinar la longitud de onda. Una vez que determinó la frecuencia de resonancia, encontró la rapidez de las ondas a partir de la relación entre su longitud de onda y su frecuencia, $v = \lambda f$, y estableció que era igual a la rapidez de la luz. La unidad del SI para la frecuencia recibió su nombre en honor de Hertz: un hertz (1 Hz) es igual a un ciclo por segundo.

En un transmisor de radio se hacen oscilar las cargas eléctricas a lo largo de la antena conductora, lo que produce perturbaciones oscilatorias de campo. Como en la antena hay muchas cargas que oscilan juntas, las perturbaciones son mucho más intensas y se detectan a una distancia mucho mayor. En un receptor de radio la antena también es un conductor, los campos de la onda que emana desde un transmisor distante ejercen fuerzas sobre las cargas libres dentro de la antena receptora, lo que produce una corriente oscilante que es detectada y amplificada por los circuitos del receptor.

11.2. Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz

11.2.1. Una onda electromagnética plana simple

Supongamos que tenemos un plano perpendicular al eje x , llamado frente de onda, que se desplaza en dirección $+x$, con una rapidez c . A la izquierda hay un campo eléctrico y magnético, ambos uniformes, en cada punto y la derecha por ahora no hay nada. Esta situación describe una onda electromagnética. Una onda como esta, la cual en cualquier instante los campos son uniformes en toda la extensión de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación, se llama onda plana.

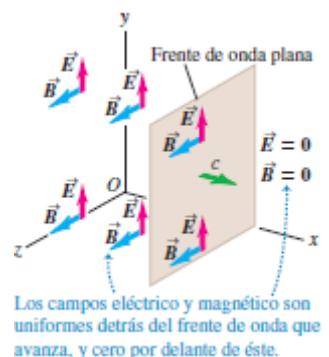
Veremos si la configuración de los campos es congruente con las ecuaciones de Maxwell. **COMPLETAR**

- 1) Leyes de Gauss para campos eléctricos y magnéticos
- 2) Ley de Faraday
- 3) Ley de Ampere

11.2.2. Propiedades clave de las ondas electromagnéticas

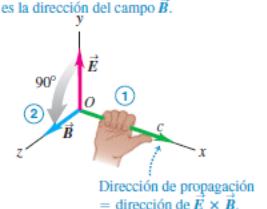
- La onda es transversal; tanto \vec{E} como \vec{B} son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Los campos eléctrico y magnético también son perpendiculares entre sí. La dirección de propagación es la dirección del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$.
- Hay una razón definida entre las magnitudes de \vec{E} y \vec{B} : $E = cB$.
- La onda viaja en el vacío con rapidez definida e invariable.
- Las ondas electromagnéticas no requieren un medio para transmitirse, a diferencia de las ondas mecánicas que si requieren. Lo que "ondula" en una onda electromagnética son los campos eléctricos y magnéticos.

11.2.3. Deducción de la ecuación de onda electromagnética



Regla de la mano derecha para una onda electromagnética

- ① Apunte el pulgar de su mano derecha en la dirección de propagación de la onda.
 - ② Imagine que hace girar 90° el campo vectorial \vec{E} en el sentido en que se doblan sus dedos.
- Ésa es la dirección del campo \vec{B} .



11.3. Ondas electromagnéticas sinusoidales

En una onda electromagnética sinusoidal, \vec{E} y \vec{B} son funciones sinusoidales del tiempo y la variación espacial del campo también es sinusoidal.

Si restringimos nuestras observaciones a una región relativamente pequeña del espacio a una distancia grande de la fuente, las ondas que pasan a través de esa área se propagan casi todas en la misma dirección, por lo que podemos tratarlas como ondas planas.

11.3.1. Campo de una onda sinusoidal

La figura muestra una onda electromagnética polarizada sinusoidal, los campos eléctricos y magnético oscilan en fase: donde uno es máximo el otro también lo es y donde uno es cero el otro también lo es, etc.

Usando la analogía de la ecuación de onda para una onda transversal que viaja en la dirección $+x$ a lo largo de una cuerda es:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Representaremos los valores instantáneos de la componente y de \vec{E} y la componente z \vec{B} , las funciones de onda son:

$$E_y(x, t) = E_{max} \cos(kx - \omega t) \quad B_z(x, t) = B_{max} \cos(kx - \omega t) \quad (11.)$$

O expresado de forma vectorial como:

$$\vec{E}(x, t) = \hat{j} E_{max} \cos(kx - \omega t) \quad \vec{B}(x, t) = \hat{k} B_{max} \cos(kx - \omega t) \quad (11.)$$

Estas ecuaciones (11.) y (11.) indican que los campos siempre están en fase. De la ecuación (32.4) obtenemos:

$$E_{max} = c B_{max} \quad (11.)$$

11.3.2. Ondas electromagnéticas en la materia

Si las ondas también puedan viajar en dieléctricos, donde la rapidez no es la misma que en el vacío. La cual la denotaremos como v y no c .

Con el mismo procedimiento que seguimos para las ondas en el vacío, encontramos que la rapidez de onda v es:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_m}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} \quad (11.)$$

Como K siempre es mayor a la unidad, la rapidez v es menor que la rapidez en el vacío en un factor de $1/\sqrt{K}$. La razón entre c y v se conoce en óptica como el índice de refracción n y es

$$\frac{c}{v} = n = \sqrt{KK_m}$$

11.4. Energía e intensidad en ondas electromagnéticas

Sabemos que hay energía asociada con las ondas electromagnéticas. Conocemos las densidades de energía (4.6) y (10.9) de campos eléctricos y magnéticos, por lo tanto, en una región del vacío donde están presentes ambos campos la densidad total de energía es:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (11.)$$

Las magnitudes de E y B están relacionadas por:

$$B = \frac{E}{c} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E \quad (11.)$$

Al combinar las ecuaciones (11.) y (11.) tenemos

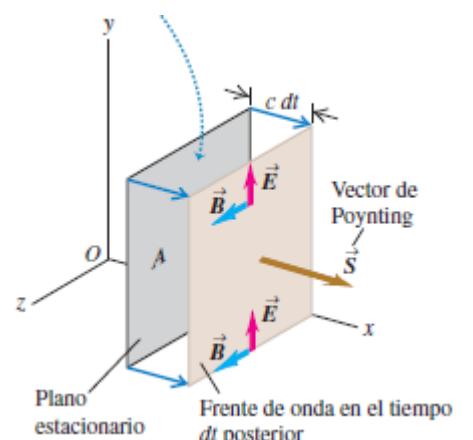
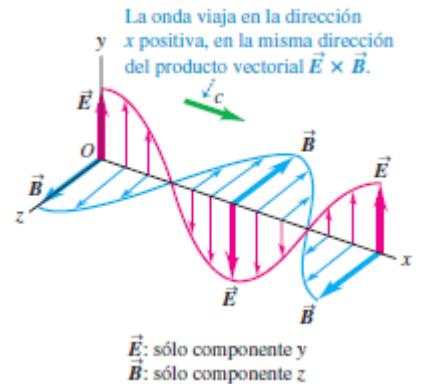
$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E)^2 = \epsilon_0 E^2 \quad (11.)$$

Esto nos dice que la densidad de energía asociada al campo \vec{E} es igual a la densidad de energía del campo \vec{B} .

11.4.1. Flujo de energía electromagnética y el vector Poynting

Las ondas viajan y transportan energía de una región a otra. Esta transferencia de energía la describimos en términos de la energía transferida por unidad de tiempo por unidad de área de sección transversal o potencia por unidad de área, para un área perpendicular a la dirección en que viaja la onda.

Para ver la relación entre el flujo y los campos, consideraremos un plano estacionario, perpendicular al eje x , que coincide con el frente de onda en



algún momento. Un dt después de eso, el frente de onda recorrió un distancia $dx = c dt$. El volumen $dV = A(c dt)$ y la energía dU de la región es:

$$dU = u dV = (\epsilon_0 E^2)(Ac dt)$$

Esta energía pasa a través del área A en el tiempo dt . El flujo de energía por unidad de tiempo por unidad de área, que llamaremos S , es:

$$S = \frac{1}{A} \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2 \quad (11.)$$

También lo podemos reescribir, usando las ecuaciones (32.15) y (32.25) como:

$$S = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{EB}{\mu_0} \quad (11.) \quad \left[\frac{J}{sm^2} = \frac{W}{m^2} \right]$$

También lo podemos definirlo de modo vectorial de la siguiente manera:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (11.)$$

EL vector \vec{S} se denomina vector de Poynting, u dirección es la misma que la dirección en la que se propaga la onda.

Para las ondas sinusoidales u ondas más complejas, donde los campos varían con el tiempo, usamos el valor medio del vector Poynting que recibe el nombre de intensidad de la radiación en ese punto.

Sustituimos las ecuaciones (32.17) en la ecuación (32.28)

$$\vec{S}(x, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} [\hat{j} E_{max} \cos(kx - \omega t)] \times [\hat{k} B_{max} \cos(kx - \omega t)]$$

Sabemos que $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ y que el $\cos^2(kx - \omega t)$ siempre es positivo, por lo que $\vec{S}(x, t)$ siempre va en dirección $+x$. La componente x del vector es:

$$S_x(x, t) = \frac{E_{max} B_{max}}{\mu_0} \cos^2(kx - \omega t) = \frac{E_{max} B_{max}}{2\mu_0} [1 + \cos 2(kx - \omega t)]$$

EL valor medio de $\cos 2(kx - \omega t)$ es cero, entonces el valor medio del vector Poynting en un ciclo completo es $\vec{S}_{med} = \hat{i} S_{med}$

$$S_{med} = \frac{E_{max} B_{max}}{2\mu_0}$$

Es decir la magnitud media de \vec{S} para una onda sinusoidal es la mitad del valor máximo. Sabiendo que $E_{max} = cB_{max}$ y $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, podemos expresar la intensidad de varias formas

$$I = S_{med} = \frac{E_{max} B_{max}}{2\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{max}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{max}^2 \quad (11.)$$

11.4.2. Flujo de cantidad de movimiento electromagnética y presión de radiación

Se puede demostrar que las ondas electromagnéticas llevan una cantidad de movimiento p con una densidad de movimiento de magnitud

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2} \quad (11.)$$

Cuando una onda electromagnética es absorbida por completo por una superficie, la cantidad de movimiento se transfiere a la superficie, que genera una fuerza. La fuerza media por unidad de área o presión de radiación p_{rad} es:

$$p_{rad} = \frac{S_{med}}{c} = \frac{I}{c} \quad (11.)$$

Si la onda se refleja por completo la cantidad de movimiento es dos veces más grande la y la presión es:

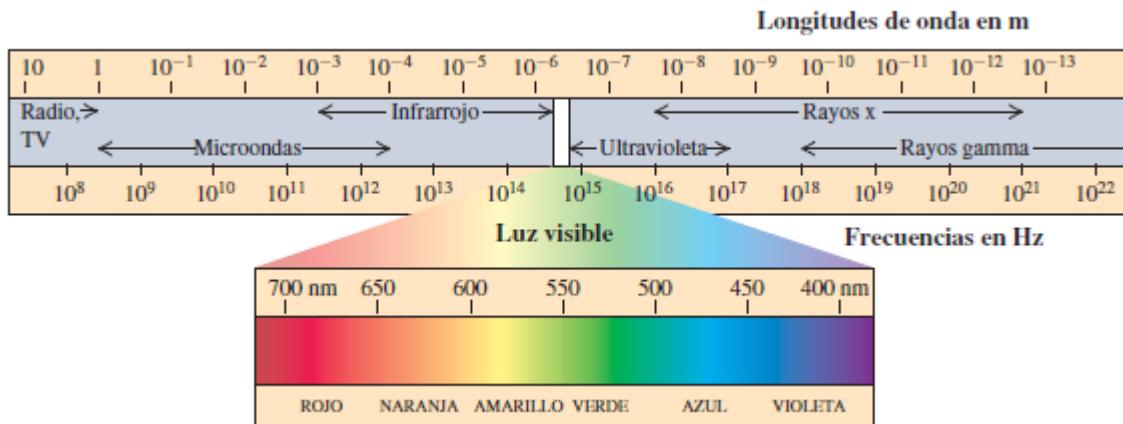
$$p_{rad} = \frac{2S_{med}}{c} = \frac{2I}{c} \quad (11.)$$

11.5. El espectro electromagnético.

A pesar de las muchas diferencias en su uso y medios de producción, todas ellas son ondas electromagnéticas con la misma rapidez de propagación (en el vacío) c . Las ondas electromagnéticas difieren en frecuencia f y longitud de onda λ , pero la relación $c = \lambda f$ en el vacío se cumple para cada una.

Nosotros sólo podemos detectar directamente una parte muy pequeña del espectro con nuestra vista, y a ese intervalo lo denominamos luz visible. Su intervalo de longitud de onda va de 400 a 700 nm, con frecuencias correspondientes de 750 a 430 THz.

La luz blanca ordinaria incluye todas las longitudes de onda visibles. Sin embargo, con el uso de fuentes o filtros especiales es posible seleccionar una banda angosta de longitudes de onda dentro de un intervalo de unos cuantos nm. Esa luz es aproximadamente monocromática (de un solo color). La luz totalmente monocromática con una sola longitud de onda es una idealización inalcanzable. Cuando usamos la expresión “luz monocromática con $\lambda = 550\text{nm}$ ” en relación con un experimento de laboratorio. La luz láser está mucho más cerca de ser monocromática que cualquiera que se obtenga de otra manera.



12. UNIDAD 12: Naturaleza y propagación de la luz (Capítulo 33)

12.1. Introducción a la luz

12.2. Polarización

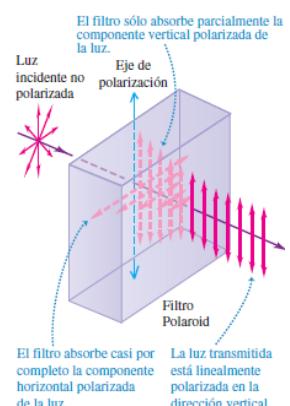
La polarización es una característica que poseen todas las ondas transversales.

Cuando una onda sólo tiene desplazamientos en y, se dice que está linealmente polarizada en la dirección y. La dirección de polarización de una onda electromagnética como la dirección del vector de campo eléctrico no del campo magnético, porque muchos detectores comunes de ondas electromagnéticas responden a las fuerzas eléctricas de los electrones en los materiales y no a las fuerzas magnéticas.

12.2.1. Filtros polarizadores

Las ondas emitidas por un transmisor de radio, generalmente, están polarizadas. En cambio, en la luz visible, es decir, la luz de fuentes ordinarias (focos) no está polarizada. Las fuentes reales de luz contienen una gran cantidad de moléculas con orientaciones al azar, por lo que la luz es una mezcla aleatoria de ondas linealmente polarizadas en todas las direcciones transversales posibles. Esta luz se llama luz no polarizada. Para crear la luz polarizada necesitamos un filtro polarizador.

Un filtro Polaroid transmite el 80% o más de la intensidad de una onda que esté polarizada en forma paralela a cierto eje en el material, llamado eje de polarización, pero sólo el 1% o menos de las ondas polarizadas perpendiculares a ese eje.

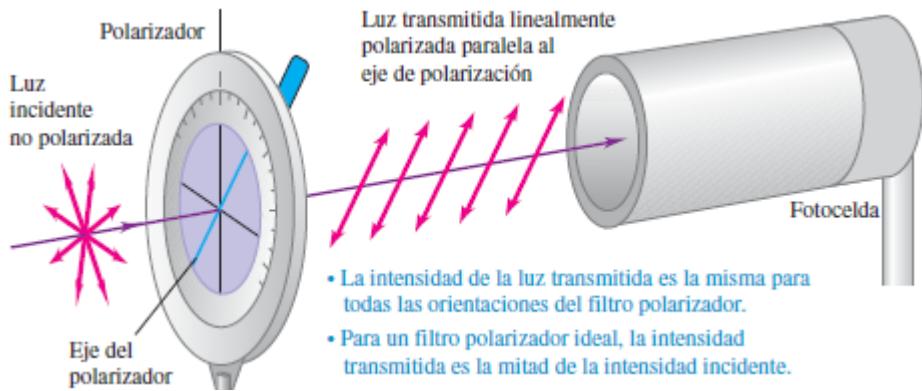


12.3. Ley de Malus

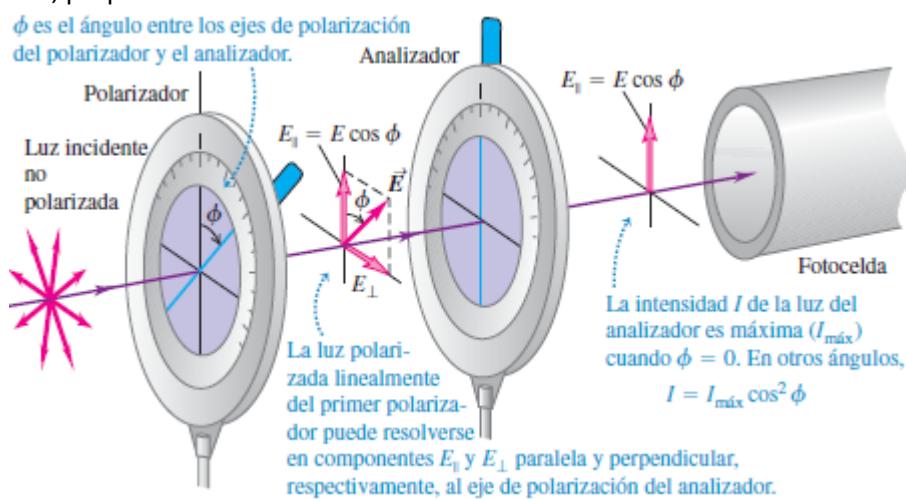
Un filtro polarizador ideal deja pasar el 100% de la luz incidente que esté polarizada en la dirección del eje de polarización del filtro, pero bloquea completamente toda la luz polarizada en forma perpendicular a ese eje. Es una idealización imposible. En la explicación supondremos que los filtros son ideales.

En la figura la luz no polarizada incide sobre un filtro polarizador plano. El eje de polarización es la línea azul. El vector \vec{E} de la onda incidente se puede representar en términos de las componentes paralela y perpendicular al eje polarizador; sólo se transmite la paralela.

En situaciones como esta la intensidad de la luz transmitida es la mitad que la de la luz incidente no polarizada, sin importar cómo se oriente el eje de polarización. Esto se debe a que podemos resolver el campo de la onda incidente en una componente paralela y otra perpendicular al eje de polarización. Como la luz incidente es una mezcla aleatoria de todos los estados de polarización, estas dos componentes son iguales en promedio. El polarizador ideal transmite sólo la componente que sea paralela al eje de polarización, por lo que sólo se transmite la mitad de la intensidad incidente.



En el caso de que se coloque un segundo polarizador o analizador, en el cual el eje de polarización del segundo forma un ángulo ϕ con el eje del primero. La luz polarizada por el primer polarizador la podemos descomponer en una componente paralela y una perpendicular al eje del polarizador. Solo la componente paralela, con amplitud $E \cos \phi$ es transmitida. Para determinar la dirección de polarización de la luz transmitida por el primer polarizador, se hace girar el analizador hasta que la fotocelda mida una intensidad de cero; el eje de polarización del primer polarizador es, entonces, perpendicular al del analizador.



Para determinar la intensidad transmitida hemos dicho que la intensidad de una onda electromagnética es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda [véase la ecuación (32.29)]. La razón entre la amplitud trasmisita y la incidente es $\cos \phi$, por lo que la razón entre la intensidad transmitida y la incidente es $\cos^2 \phi$. Así, la intensidad de la luz transmitida a través del analizador es:

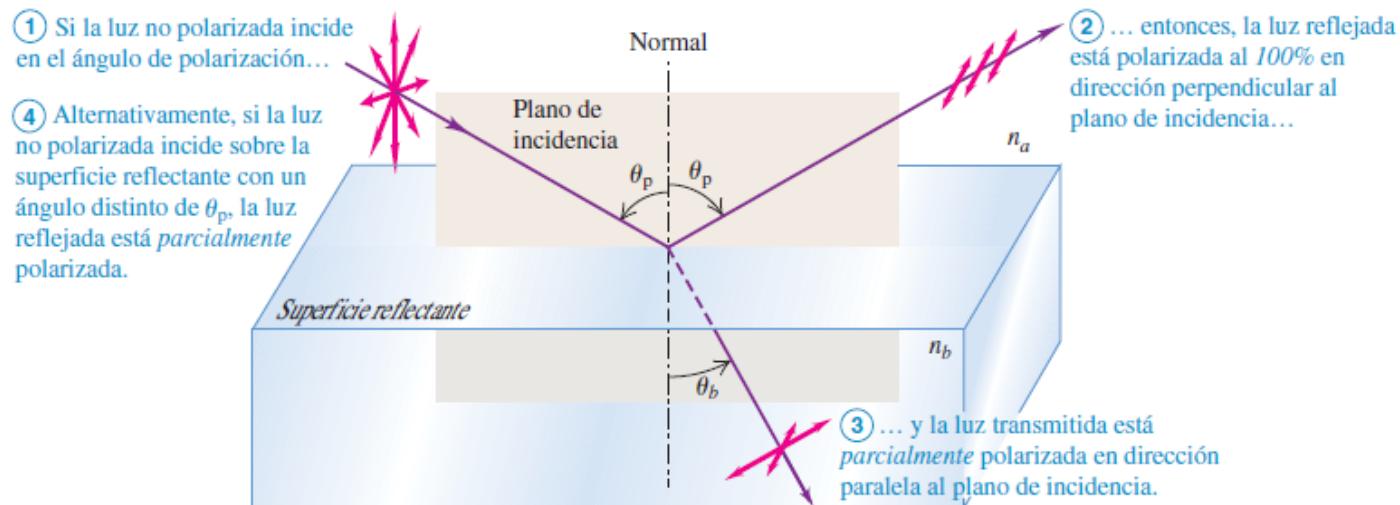
$$I = I_{\max} \cos^2 \phi \quad (12.)$$

donde I_{\max} es la intensidad máxima de la luz transmitida (en $\phi = 0$). La ley de Malus sólo se aplica si la luz incidente que pasa a través del analizador ya está linealmente polarizada.

12.4. Ley de Brewster (Polarización por reflexión)

La luz no polarizada se puede polarizar, de forma parcial o total, por reflexión. En la figura, la luz natural no polarizada incide sobre una superficie reflectante entre dos materiales ópticos transparentes; el plano que contiene los rayos incidente y reflejado y la normal a la superficie se llama plano de incidencia. Para la mayoría de los ángulos de incidencia, las ondas para las que el vector de campo eléctrico \vec{E} es perpendicular al plano de la incidencia (es decir, es paralelo a la superficie reflectante) se reflejan con más intensidad que aquellas cuyo \vec{E} yace en ese plano. En tal caso, la luz reflejada está parcialmente polarizada en la dirección perpendicular al plano de incidencia.

Pero en cierto ángulo particular de incidencia, llamado el ángulo de polarización, θ_p , la luz cuyo yace en el plano de incidencia no se refleja, sino que se refracta por completo. A ese mismo ángulo de incidencia, la luz cuyo es perpendicular al plano de incidencia se refleja parcialmente y la otra parte se refracta. Por consiguiente, la luz reflejada está completamente polarizada en forma perpendicular al plano de incidencia. La luz refractada (transmitida) está parcialmente polarizada en forma paralela a este plano; la luz refractada es una mezcla de la componente paralela al plano de incidencia, toda la cual se refracta, y el resto de la componente perpendicular.



Se descubrió que cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización θ_p , el rayo reflejado y el rayo refractado son perpendiculares entre sí. En este caso, el ángulo de refracción θ_b se vuelve el complemento de θ_p , por lo que $\theta_b = 90^\circ - \theta_p$. De acuerdo con la ley de refracción:

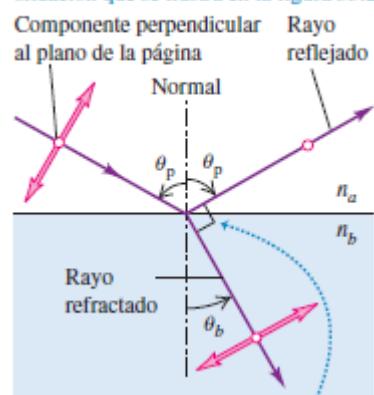
$$n_a \sin \theta_p = n_b \sin \theta_b$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} n_a \sin \theta_p &= n_b \sin(90^\circ - \theta_p) = n_b \cos \theta_p \\ \tan \theta_p &= \frac{n_b}{n_a} \quad (12.) \end{aligned}$$

Esta relación se conoce como ley de Brewster

Nota: ésta es una vista lateral de la situación que se ilustra en la figura 33.27.



13. UNIDAD 13: Interferencia (Capítulo 35)

Si dos o más ondas luminosas de la misma frecuencia se traslanan en un punto, el efecto total depende de las fases de las ondas y también de su amplitud. Los patrones resultantes de luz son consecuencia de la naturaleza ondulatoria de la luz y no es posible entenderlos sobre la base de los rayos. Los efectos ópticos que dependen de la naturaleza ondulatoria de la luz se estudian en el ámbito de la óptica física.

13.1. Interferencia y fuentes coherentes

El término interferencia se refiere a una situación en la que dos o más ondas se traslanan en el espacio. La onda total en cualquier punto e instante está dada por el principio de superposición, que establece lo siguiente:

Cuando dos o más ondas se traslanan, el desplazamiento resultante en cualquier punto y en cualquier instante se encuentra sumando los desplazamientos instantáneos que producirían en el punto las ondas individuales si cada una se presentara sola.

Cuando dos ondas idénticas que se propagan en sentidos opuestos se combinan, producen una onda estacionaria. Las ondas luminosas pueden viajar en dos o tres dimensiones. Las ondas sinusoidales son características de la luz monocromática, aunque las fuentes comunes de luz no emiten luz monocromática.

13.1.1. Interferencia destructiva y constructiva

Si tenemos dos fuentes idénticas de ondas monocromáticas S_1 y S_2 , donde ambas producen ondas de la misma amplitud y longitud de onda λ y se encuentran en fase. Dos fuentes monocromáticas de la misma frecuencia y con una relación de fase constante definida son coherentes, también se las llama ondas coherentes. Esas fuentes podrían ser dos altavoces alimentados por el mismo amplificador o dos antenas de radio energizadas por el mismo transmisor.

Si las ondas emitidas por las fuentes coherentes son transversales, como las ondas electromagnéticas, supondremos que las perturbaciones ondulatorias que producen las fuentes tienen la misma polarización. Por ej., las fuentes S_1 y S_2 podrían ser dos antenas de radio con forma de varillas orientadas paralelamente al eje z y en cualquier punto del plano xy las ondas producidas por las dos antenas tienen campos \vec{E} con sólo una componente z .

En la figura colocamos las dos fuentes de igual a amplitud, igual longitud de onda y (si las ondas son transversales) la misma polarización a lo largo del eje y y equidistantes con respecto al origen. Considere un punto a en el eje x . Por simetría, las dos distancias de S_1 a a y de S_2 a a son iguales. Así, las ondas que salen en fase llegan en fase a a . Las dos ondas se suman y la amplitud total en a es el doble de la amplitud de cada onda individual. Esto se cumple para cualquier punto sobre el eje x .

De manera similar, la distancia de S_2 a b es exactamente dos longitudes de onda mayor que la distancia de S_1 a b y de nuevo las dos ondas arriban en fase y la amplitud total es la suma de las amplitudes de las dos ondas.

En general, cuando las ondas de dos o más fuentes llegan en fase a un punto, la amplitud de la onda resultante es la suma de las amplitudes de las ondas individuales. Esto se llama interferencia constructiva. Sea r_1 la distancia que hay entre S_1 y cualquier punto P , y r_2 la distancia que hay entre S_2 y P . Para que en P ocurra la interferencia constructiva, la diferencia de las trayectorias $r_2 - r_1$ para las dos fuentes debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda λ :

$$r_2 - r_1 = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (13.1)$$

Esto sucede para los punto a y b de la figura. Pero para c la diferencia de trayectorias es la mitad de un número entero de longitudes de onda. Las ondas provenientes de las dos fuentes llegan a c medio ciclo fuera de fase. La cresta de una onda arriba al mismo tiempo que la cresta de una onda en sentido opuesto (un "valle") de la otra onda. La amplitud resultante es la diferencia entre las dos amplitudes individuales. Esta cancelación o anulación parcial de las ondas recibe el nombre de interferencia destructiva, la condición para que se produzca es:

$$r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (13.2)$$

Para cumplir con estas ecuaciones las fuentes deben tener la misma longitud de onda y estar en fase. La última condición para las ondas luminosas no hay una forma práctica de lograrlo. Para solucionar esto, se divide la luz procedente de una sola fuente de manera que parte de la luz emergen dos o más regiones del espacio para formar fuentes secundarias, donde cualquier cambio de fase en la fuente afecta a todas las fuentes secundarias por igual.

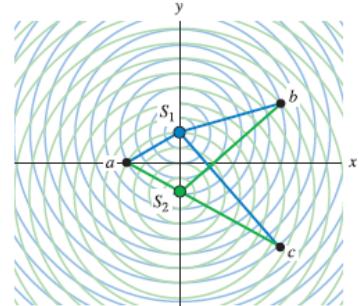
En la figura de la derecha se marcan con una curva roja todos los puntos donde ocurre interferencia constructiva. Estas curvas se llaman curvas antinodales. En la figura las curvas nodales no aparecen, pero son aquellas donde ocurre interferencia destructiva.

En las situaciones mostradas hay un patrón estacionario de curvas nodales y antinodales, pero hay un flujo neto de energía hacia fuera de las dos fuentes. Desde el punto de vista de la energía, todo lo que hace esa interferencia es "canalizar" el flujo de energía de manera que sea máximo a lo largo de las curvas antinodales, y mínimo a lo largo de las curvas nodales.

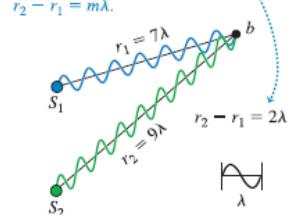
13.2. Interferencia de luz de dos fuentes

En la figura se muestra en el aparato de Young. Una fuente (no se ilustra) emite luz monocromática; sin embargo, esta luz no es apropiada para usarla en un experimento de interferencia porque las emisiones de las diferentes partes de una fuente ordinaria no están sincronizadas. Para arreglar eso, se dirige la luz a una pantalla con una ranura angosta S_0 , con ancho aproximado de 1 mm. La luz que sale de la ranura proviene sólo de una pequeña región de la fuente luminosa, de manera que la ranura S_0 se comporta de manera muy parecida a la fuente idealizada. (En versiones modernas del experimento se utiliza un láser como fuente de luz coherente, por lo que no

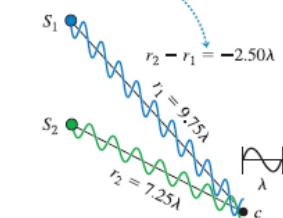
a) Dos fuentes de onda coherentes separadas por una distancia 4λ



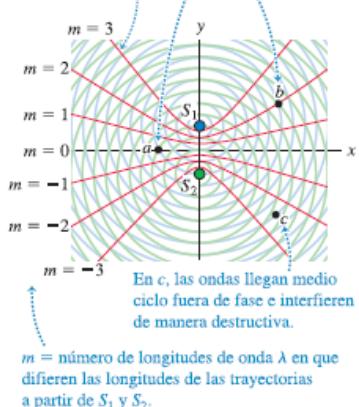
b) Condiciones para la interferencia constructiva: las ondas interfieren en forma constructiva si las longitudes de sus trayectorias difieren en un número entero de longitudes de onda:
 $r_2 - r_1 = m\lambda$.



c) Condiciones para la interferencia destructiva: las ondas interfieren en forma destructiva si las longitudes de sus trayectorias difieren en la mitad de un número entero de longitudes de onda: $r_2 - r_1 = (m + \frac{1}{2})\lambda$.



Las curvas antinodales (en color rojo) marcan las posiciones donde las ondas procedentes de S_1 y S_2 interfieren constructivamente. En a y b , las ondas llegan en fase e interfieren de manera constructiva.



$m =$ número de longitudes de onda λ en que difieren las longitudes de las trayectorias a partir de S_1 y S_2 .

se necesita la ranura S_0 .) La luz que emana de S_0 ilumina una pantalla con otras dos ranuras S_1 y S_2 , cada una con ancho aproximado de 1 mm y separadas por una distancia de entre 10 o 100 micrómetros. A partir de S_0 se propagan frentes de onda cilíndricos que llegan a S_1 y S_2 en fase porque recorren distancias iguales. Por lo tanto, las ondas que emergen de las ranuras S_1 y S_2 siempre están en fase, y son fuentes coherentes. La interferencia de las ondas de S_1 y S_2 genera un patrón en el espacio. Para visualizar esto se coloca una pantalla donde incidirá la luz de las fuentes. La pantalla se iluminará con intensidad máxima donde las ondas luminosas interfieran constructivamente y serán más oscura donde la interferencia sea destructiva.

A modo de simplificación se supone que la distancia R de las ranuras a las pantallas es tan grande en comparación con la distancia d entre las ranuras, que S_1 y S_2 a P son casi paralelas como en c). Entonces la diferencia en la longitud de las trayectorias está dada por:

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta \quad (13.3)$$

donde θ es el ángulo entre una línea de las ranuras a la pantalla y la normal al plano de las ranuras.

13.2.1. Interferencia constructiva y destructiva con dos ranuras

A partir de las ecuaciones (13.1), (13.2) y (13.3), podemos decir que la interferencia constructiva se presentan en ángulos θ en los que:

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (13.4)$$

De manera similar, la interferencia destructiva ocurre en:

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (13.5)$$

Así el patrón en la pantalla es una sucesión de bandas brillantes y oscuras, o franjas de interferencia, paralelas a las ranuras S_1 y S_2 . La siguiente figura muestra una fotografía del patrón. El centro del patrón es una banda brillante que corresponde a $m = 0$, este punto de la pantalla es equidistante a las dos ranuras.

Es posible obtener una expresión para las posiciones de los centros de las bandas brillantes en la pantalla. Sea y_m la distancia entre el centro del patrón ($\theta = 0$) y el centro de la m -ésima banda brillante. Sea θ_m el valor correspondiente de θ ; por lo tanto,

$$y_m = R \tan \theta_m$$

En experimentos como éste, las distancias y_m a menudo son mucho más pequeñas que la distancia R entre las ranuras y la pantalla. Como θ_m es muy pequeño, $\tan \theta_m$ es casi igual a $\sin \theta_m$, y

$$y_m = R \sin \theta_m$$

Al combinar esto con la ecuación (13.4) se encuentra que solamente para ángulos pequeños

$$y_m = R \frac{m\lambda}{d} \quad (13.6)$$

Es posible medir R y d , así como las posiciones y_m de las franjas brillantes, por lo que este experimento permite una medición directa de la longitud de onda λ .

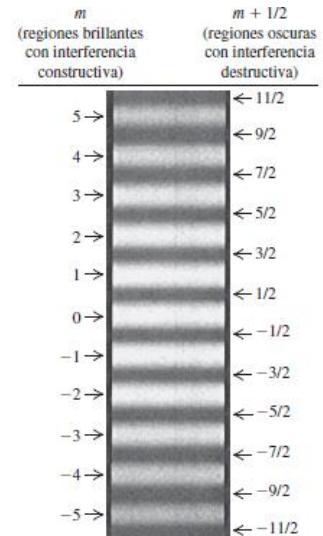
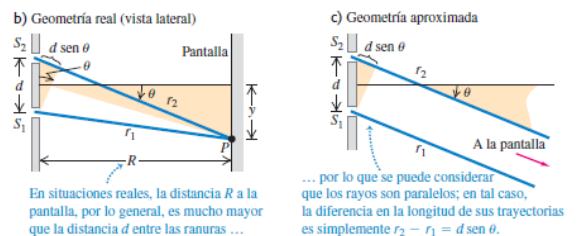
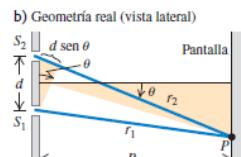
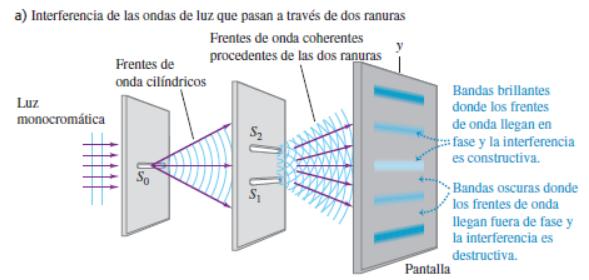
La distancia entre bandas brillantes adyacentes en el patrón es inversamente proporcional a la distancia d entre las ranuras. Cuanto más cerca estén las ranuras, más disperso será el patrón. Cuando las ranuras están muy separadas, las bandas del patrón están más próximas unas de otras.

Las ecuaciones (13.4) y (13.5) sirven para cualquier ángulo, pero la (13.6) es solo para ángulos pequeños.

13.3. Intensidad en patrones de interferencia

Para encontrar la intensidad en cualquier punto del patrón, debemos combinar los dos campos con variación sinusoidal en el punto P , tomando en cuenta la diferencia de fase de las dos ondas en P . Sabemos que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico resultante.

Para calcular la intensidad supondremos que las dos funciones sinusoidales (correspondientes a ondas de las dos fuentes) tienen igual amplitud E y que los campos \vec{E} se encuentran a lo largo de la misma línea (tienen la misma polarización). Esto supone que las fuentes son idénticas e ignora la pequeña diferencia de amplitud causada por la



diferencia de las longitudes de las trayectorias (la amplitud disminuye al aumentar la distancia desde la fuente). De acuerdo la ecuación (32.29), cada fuente daría una intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$ en el punto P . Si las dos fuentes están en fase, entonces las ondas que llegan a P difieren en fase en una cantidad proporcional a la diferencia de las longitudes de sus trayectorias. Si el ángulo de fase entre estas ondas que llegan es ϕ , entonces los dos campos eléctricos superpuestos en P :

$$E_1(t) = E \cos(\omega t + \phi)$$

$$E_2(t) = E \cos(\omega t)$$

La superposición de los dos campos en P es una función sinusoidal con cierta amplitud E_p que depende de E y de la diferencia de fase ϕ . Primero trabajaremos en el cálculo de la amplitud E_p si E y ϕ son conocidos. Después encontraremos la intensidad I de la onda resultante, que es proporcional a E_p^2 . Por último, relacionaremos la diferencia de fase ϕ con la diferencia de trayectorias.

13.3.1. Amplitud en la interferencia de dos fuentes

Para sumar las dos funciones sinusoidales utilizaremos fasores, donde cada función está representada por un fasor, cuya proyección en el eje horizontal en cualquier instante es el valor instantáneo de la función sinusoidal.

E_1 es la componente horizontal del fasor que representa la onda proveniente de la fuente S_1 , y E_2 es la componente horizontal del fasor para la onda procedente de S_2 . Como se observa en el diagrama, ambos fasores tienen la misma magnitud E , pero E_1 está un ángulo ϕ adelante de E_2 en términos de fase. Los dos fasores giran en sentido antihorario con rapidez angular constante ω , y la suma de las proyecciones en el eje horizontal en cualquier momento da el valor instantáneo del campo E total en P . Así, la amplitud E_p de la onda sinusoidal resultante en P es la magnitud del fasor rojo oscuro en el diagrama (indicado con E_p); éste es la suma vectorial de los otros dos fasores. Para encontrar E_p se utiliza la ley de los cosenos y la identidad trigonométrica $(\pi - \phi) = -\cos\phi$:

$$E_p^2 = E^2 + E^2 - 2E^2 \cos(\pi - \phi)$$

$$= E^2 + E^2 + 2E^2 \cos\phi$$

De esta forma, empleando la identidad $1 + \cos\phi = 2 \cos^2(\phi/2)$, se obtiene

$$E_p^2 = 2E^2(1 + \cos\phi) = 4E^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$E_p = 2E \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| \quad (13.7)$$

Ver ejercicio 35.48 es de forma algebraica

Cuando las ondas están en fase, $\phi = 0$ y $E_p = 2E$. Cuando están exactamente medio ciclo fuera de fase, $\phi = \pi$ y $E_p = 0$. Así, la superposición de dos ondas sinusoidales con la misma frecuencia y amplitud, pero con una diferencia de fase, produce una onda sinusoidal con la misma frecuencia y amplitud entre cero y el doble de las amplitudes individuales, de acuerdo con la diferencia de fase.

13.3.2. Intensidad en la interferencia de dos fuentes

Para ver la intensidad I en P , sabemos que I es la magnitud media del vector Poynting, S_{med} . Notar que la magnitud de nuestro campo es E_p , entonces a partir de la ecuación (11.4.1) tenemos:

$$I = S_{med} = \frac{E_p^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_p^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_p^2 \quad (13.8)$$

Vemos que I es proporcional a E_p^2 . Si sustituimos (13.7) en la última expresión de la (13.8):

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_p^2 = 2\epsilon_0 c E^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (13.9)$$

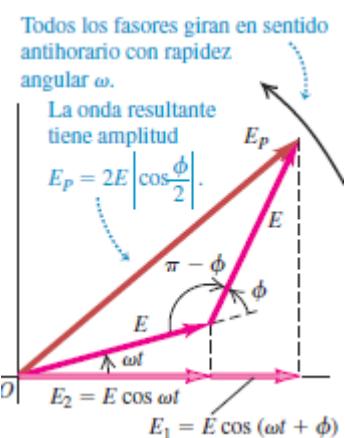
Llamamos I_0 a la intensidad máxima que es cuando la diferencia de fase es cero ($\phi = 0$)

$$I_0 = 2\epsilon_0 c E^2$$

Note que la intensidad máxima es el cuádruple de la intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$ desde cada fuente individual.

Podemos expresar la intensidad en cualquier punto a partir de I_0 , y queda como:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \quad (13.10)$$



13.3.3. Diferencia de fase y trayectoria

Sabemos que ϕ es proporcional a la diferencia de la longitud de la trayectoria desde las dos fuentes al punto P . Cuando la diferencia de trayectoria es de una longitud de onda, la diferencia de fase es de un ciclo, y $\phi = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Cuando la diferencia de fase es $\lambda/2$, $\phi = \pi \text{ rad} = 180^\circ$, y así sucesivamente. Es decir, la razón de la diferencia de fase ϕ con respecto a 2π es igual a la razón de la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1$ con respecto a λ :

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Así, una diferencia de trayectoria $(r_2 - r_1)$ ocasiona una diferencia de fase dada por:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1) \quad (13.11)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda.

Si entre las fuentes y el punto P se encuentra un material, debemos reemplazar las siguientes expresiones en la (13.11):

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad y \quad k = nk_0 \quad (13.12)$$

donde λ_0 y k_0 son en el vacío.

Si P está lejos de la fuente, según la ecuación (13.3), la diferencia de trayectoria está dada por:

$$(r_2 - r_1) = d \operatorname{sen} \theta$$

Si combinamos esto con la ecuación (13.11) obtenemos:

$$\phi = k(r_2 - r_1) = k d \operatorname{sen} \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \quad (13.13)$$

Por ultimo si sustituimos las (13.13) en la (13.10), nos queda:

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{1}{2} k d \operatorname{sen} \theta \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \right) \quad (13.14)$$

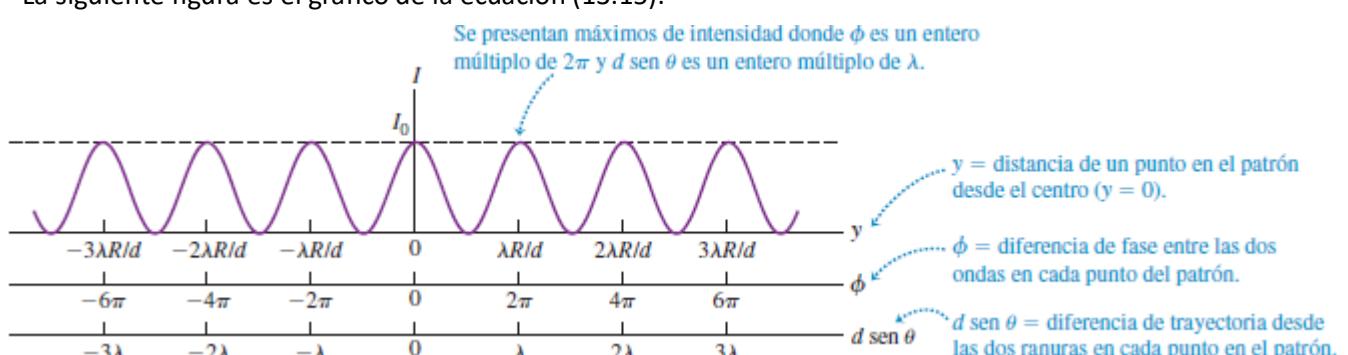
Las direcciones máximas ocurren cuando el $\cos = \pm 1$, es decir, cuando

$$\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

En el caso de que $y \ll R$, el $\operatorname{sen} \theta$ es aproxiadamente igual a y/R , de donde obtenemos otras expresiones para la intensidad en cualquier punto sobre la pantalla como función de y :

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{kdy}{2R} \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi dy}{\lambda R} \right) \quad (13.15)$$

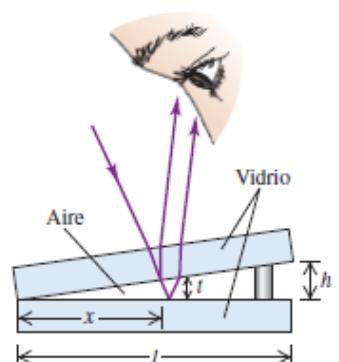
La siguiente figura es el grafico de la ecuación (13.15):



APUNTES DE LA CATEDRA. INTENSIDAD DEL PATRON DE N RANURAS

13.4. Interferencia en películas finas

Veamos una situación simplificada en la que luz monocromática se refleja en dos superficies casi paralelas con incidencia casi normal. La figura muestra dos placas de vidrio separadas por una película fina de aire. Queremos considerar la interferencia entre las dos ondas de luz reflejadas en las superficies adyacentes como se ilustra. (También ocurren reflexiones en la superficie superior de la placa de arriba y en la superficie inferior de la placa de abajo pero no las incluiremos). La diferencia de trayectoria entre las dos ondas es exactamente el doble del espesor t de la cuña de aire en cada punto. En los puntos en que $2t$ es un número entero de longitudes de onda, esperamos que haya interferencia constructiva y una zona brillante; y donde hay un valor equivalente a la mitad de un número entero de longitudes de onda, es de esperar que la interferencia sea



destructiva y que haya un área oscura. A lo largo de la línea donde las placas están en contacto, prácticamente no hay diferencia en las trayectorias, por lo que se espera una región brillante.

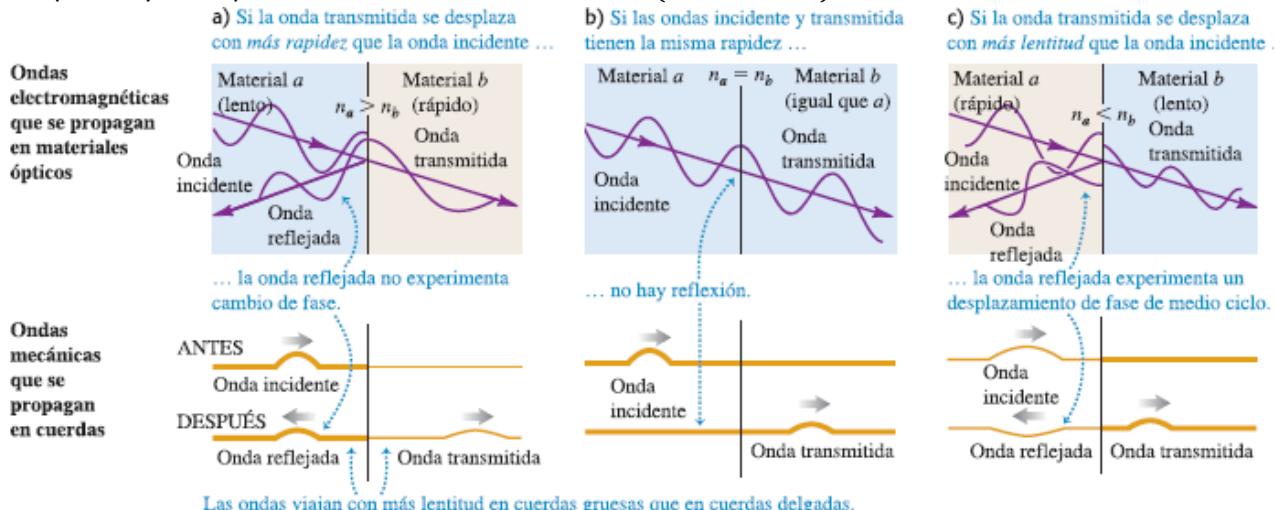
Cuando se efectúa el experimento, aparecen las franjas brillantes y oscuras, pero están intercambiadas. A lo largo de la línea donde las placas están en contacto se halla una franja oscura, no una brillante. Esto sugiere que una u otra de las ondas reflejadas ha sufrido un cambio de fase de medio ciclo durante su reflexión. En ese caso, las dos ondas que se reflejan en la línea de contacto están medio ciclo fuera de fase aun cuando tengan la misma longitud de trayectoria.

Este cambio de fase puede predecirse a partir de las ecuaciones de Maxwell, pero las obtenciones se encuentran más allá de nuestro alcance, pero el resultado es el siguiente. Suponga que una onda de luz con amplitud de campo eléctrico E_i viaja en un material óptico con índice de refracción n_a . La onda incide en dirección normal en la interfaz con otro material con índice n_b . La amplitud E_r de la onda que se refleja en la interfaz es proporcional a la amplitud E_i de la onda incidente, y está dada por

$$E_r = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} E_i \quad (13.16)$$

Este resultado demuestra que las amplitudes incidente y reflejada tienen el mismo signo cuando n_a es más grande que n_b , y signo contrario cuando n_b es mayor que n_a . Se distinguen tres casos, como se ilustra en la figura:

- a) Si $n_a > n_b$, la luz viaja con más lentitud en el primer material que en el segundo. E_r y E_i tienen el mismo signo y el desplazamiento de fase es cero
- b) Si $n_a = n_b$, la amplitud E_r de la onda reflejada es cero. No hay una onda reflejada
- c) Si $n_a < n_b$, la luz viaja con más lentitud en el segundo material que en el primero. E_r y E_i tienen signo opuesto y el desplazamiento de fase es medio ciclo (180° o π rad)



Este análisis se resume en forma matemática. Si la película tiene espesor t , la luz tiene incidencia normal y longitud de onda λ en la película; si ninguna o si ambas ondas reflejadas en las dos superficies tienen un desplazamiento de fase de medio ciclo por reflexión, las condiciones para que haya interferencia constructiva y destructiva son las siguientes, respectivamente:

$$2t = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (13.17a)$$

$$2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (13.17b)$$

Si una de las dos ondas tiene un desplazamiento de fase de medio ciclo por reflexión, las condiciones para que haya interferencia constructiva y destructiva se invierten, respectivamente:

$$2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (13.18a)$$

$$2t = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (13.18b)$$

13.4.1. Películas delgadas y gruesas

Para que dos ondas causen un patrón de interferencia estable, deben ser coherentes, con una relación de fase definida y constante. El Sol y las bombillas eléctricas emiten luz en una corriente de pequeñas ráfagas. Si la luz se refleja en las dos superficies de una película delgada, las dos ondas reflejadas forman parte de la misma ráfaga. Por lo tanto, estas ondas son coherentes y la interferencia ocurre según hemos descrito. Sin embargo, si la película es demasiado gruesa, las dos ondas reflejadas pertenecerán a ráfagas diferentes. Entre distintas ráfagas de

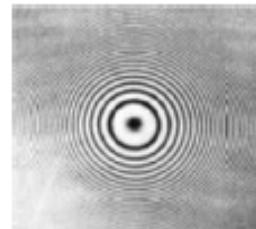
luz no hay una relación de fase definida, por lo que las dos ondas son incoherentes y no hay un patrón de interferencia fijo.

13.4.2. Anillos de newton

El experimento los anillos de Newton consiste en luz que inciden sobre una lente plana convexa que en donde la parte esférica está apoyada sobre una segunda lente plana. Entonces entre ambas, salvo en el punto de contacto donde no hay espesor, a partir del punto de contacto empieza a ver una película de aire ($n_s \cong 1$) de espesor t , entonces si se hace incidir luz perpendicularmente se puede observar desde arriba la conformación de los anillos de Newton, donde el punto central hay un fenómeno de interferencia destructiva, por eso es oscuro, y a partir de ahí debido a la doble reflexión y la inversión del cambio de fase cuando se va del aire al vidrio vamos a tener que usar las relaciones que dicen que:

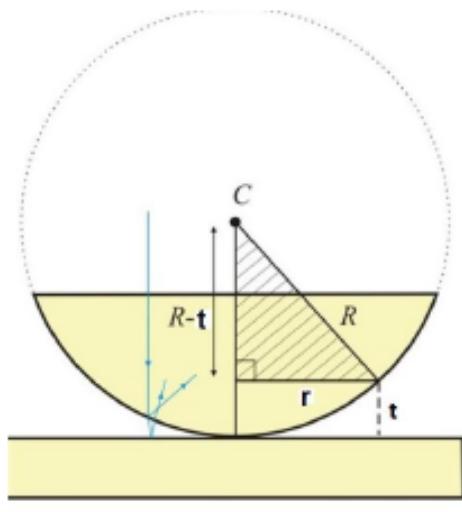
$$2t = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

va a corresponder a un anillo brillante y



$$2t = m\lambda$$

a un anillo oscuro.



Pero aquí hay que hacer un poco de geometría y suponer que si el radio de curvatura de la lente plana convexa es R y este va en vertical digamos desde el centro óptico C de la lente hasta el punto de contacto de la lente plana convexa y la lente plana, y también ese radio curvatura va a cualquier otro punto de la superficie esférica, donde a partir de ahí en vertical se mide el espesor t y también va a corresponder un radio r que va a ser el del anillo de interferencia que se va a conformar ya sea brillante (por interferencia constructiva) u oscuro (por interferencia destructiva). Entonces ahí lo que tenemos que usar cuando hacen la figura geométrica escribir el espesor t :

$$t = R - \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$t = R - \sqrt{R^2(1 - \frac{r^2}{R^2})}$$

$$t = R - R\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} = R - R(1 - \frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} \cong R - R(1 - \frac{1}{2}(\frac{r^2}{R^2}))$$

$$t = R - R - R\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)\right)$$

$$t = \frac{1}{2}(\frac{r^2}{R})$$

Para calcular máximo (brillante):

$$2t = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

$$2(\frac{1}{2}(\frac{r^2}{R})) = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

$$\left(\frac{r^2}{R}\right) = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad (\text{Película de aire})$$

Para calcular mínimo (oscuro):

$$2t = m\lambda$$

$$2(\frac{1}{2}(\frac{r^2}{R})) = m\lambda$$

$$\left(\frac{r^2}{R}\right) = m\lambda \quad (\text{Película de aire})$$

13.4.3. Recubrimientos reflectantes y no reflectantes

Los recubrimientos no reflectantes para superficies de lentes utilizan la interferencia de películas delgadas.

Sobre la superficie de la lente se deposita una película delgada de material duro transparente con índice de refracción menor que el del vidrio. La luz se refleja en ambas superficies de la capa. En ambas reflexiones la luz se refleja en un medio de índice mayor que el del medio en el que se propaga, por lo que ocurre el mismo cambio de fase en ambas reflexiones. Si el espesor de la película es la cuarta parte de la longitud de onda en la película (se supone incidencia normal), la diferencia total de las trayectorias es de media longitud de onda. De esta forma, la luz reflejada en la primera superficie está medio ciclo fuera de fase con respecto a la luz reflejada en la segunda, y hay interferencia destructiva.

El espesor del recubrimiento no reflectante se puede hacer de un cuarto de longitud de onda sólo para una longitud de onda en particular. Por lo general, ésta se elige de la parte central amarillo verdosa del espectro ($\lambda = 550 \text{ nm}$). Sirve para eliminar la luz reflejada en lentes fotográficos y también aumenta la cantidad de luz que se transmite a través de la lente.

Si se deposita sobre vidrio un material con espesor de un cuarto de onda e índice de refracción mayor que el del vidrio, entonces la reflectividad aumenta, y el material depositado se llama recubrimiento reflectante. En este caso, hay un desplazamiento de fase de medio ciclo en la interfaz aire-película, pero no en la interfaz película-vidrio, y las reflexiones en los dos lados de la película interfieren en forma constructiva.

Empleando capas múltiples de recubrimiento es posible lograr cerca del 100% de transmisión o reflexión para longitudes de onda particulares.

13.5. El interferómetro de Michelson.

Se utiliza para medir longitudes de ondas y distancias muy pequeñas. El interferómetro de Michelson toma la luz monocromática de una sola fuente la divide en dos ondas que siguen trayectorias distintas.

Un rayo de luz procedente de una fuente monocromática A incide en el divisor de haz C , que consiste en una placa de vidrio con un fino recubrimiento de plata en su lado derecho. Parte de la luz (rayo 1) pasa a través de la superficie plateada y la placa compensadora D y se refleja en el espejo M_1 . Después regresa a través de D y se refleja en C hacia el observador. El resto de la luz (rayo 2) se refleja en la superficie plateada en el punto P hacia el espejo M_2 y de regreso a través de C hacia el ojo del observador. El propósito de la placa D es garantizar que los rayos 1 y 2 pasen a través del mismo espesor de vidrio; la placa D se corta de la misma pieza de vidrio que la placa C con la finalidad de que sus espesores sean idénticos dentro de un margen de una fracción de longitud de onda. Si las distancias L_1 y L_2 son exactamente iguales y los espejos M_1 y M_2 se encuentran colocados a ángulos rectos exactos, la imagen virtual de M_1 formada por reflexión en C coincide con el espejo M_2 . Si L_1 y L_2 no son exactamente iguales, la imagen de M_1 presentará un leve desplazamiento con respecto a M_2 ; y si los espejos no son exactamente perpendiculares, la imagen de M_1 forma un ángulo pequeño con M_2 . Entonces, el espejo M_2 y la imagen virtual de M_1 desempeñan los mismos papeles que las dos superficies de una película delgada en forma de cuña (véase la sección 35.4), y la luz reflejada en estas superficies forma el mismo tipo de franjas de interferencia.

Suponga que el ángulo entre el espejo M_2 y la imagen virtual de M_1 es apenas suficientemente grande para que haya cinco o seis franjas verticales en el campo visual. Si ahora movemos despacio el espejo M_2 ya sea hacia delante o hacia atrás una distancia $\lambda/2$, la diferencia en las longitudes de las trayectorias entre los rayos 1 y 2 cambia en λ , y cada franja se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha una distancia igual a la separación entre franjas. Si observamos las posiciones de las franjas a través de un telescopio con un ocular con retículo y m franjas cruzan el retículo al mover el espejo una distancia y , entonces:

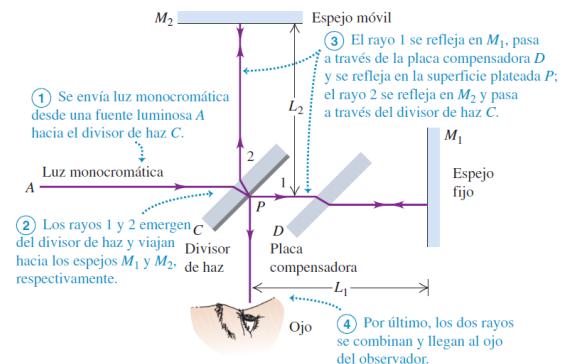
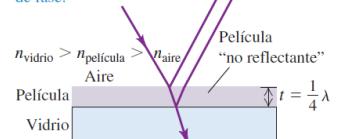
$$y = m \frac{\lambda}{2} \quad o \quad \lambda = \frac{2y}{m} \quad (13.19)$$

Si m es de varios miles, la distancia y es suficientemente grande como para poderse medir con exactitud, y es posible obtener un valor exacto para la longitud de onda λ . De manera alternativa, si se conoce la longitud de onda, se puede medir la distancia y con sólo contar las franjas cuando se mueve M_2 esa distancia.

La interferencia destructiva ocurre cuando

- la película tiene un espesor de $\frac{1}{4}\lambda$ y
- la luz sufre un cambio de fase en las dos superficies reflejantes,

por lo que las dos ondas reflejadas salen de la película cerca de $\frac{1}{2}$ de ciclo fuera de fase.



14. UNIDAD 14: Difracción (Capítulo 36)

14.1. Difracción de Fresnel y Fraunhofer

La naturaleza ondulatoria de la luz origina efectos que resultarían incomprendibles con base en el modelo simple de la óptica geométrica. Se produce una clase importante de estos efectos cuando la luz incide en una barrera que tiene una abertura o un borde. Los patrones de interferencia que se forman en tales situaciones se agrupan bajo el encabezado de difracción.

Es posible analizar los patrones de difracción con base en el principio de Huygens el cual dice: Cada punto de un frente de onda puede considerarse como la fuente de ondas secundarias, que se extienden en todas direcciones con rapidez igual a la de propagación de la onda. La posición del frente de onda en cualquier momento subsiguiente es la envolvente de las ondas secundarias en ese instante. Para hallar el desplazamiento resultante en cualquier punto, se combinan todos los desplazamientos individuales producidos por estas ondas secundarias con base en el principio de superposición, teniendo en cuenta sus amplitudes y fases relativas.

Si la fuente puntual como la pantalla están relativamente cerca del obstáculo que forma el patrón de difracción. Decimos que es una difracción de campo cercano o difracción de Fresnel. Si la fuente, el obstáculo y la pantalla están lo suficientemente alejados para considerar como paralelas todas las líneas de la fuente al obstáculo y todas las líneas del obstáculo a un punto del patrón, se denomina como una difracción de campo lejano o difracción de Fraunhofer. Estudiaremos esta última ya que es más fácil el análisis.

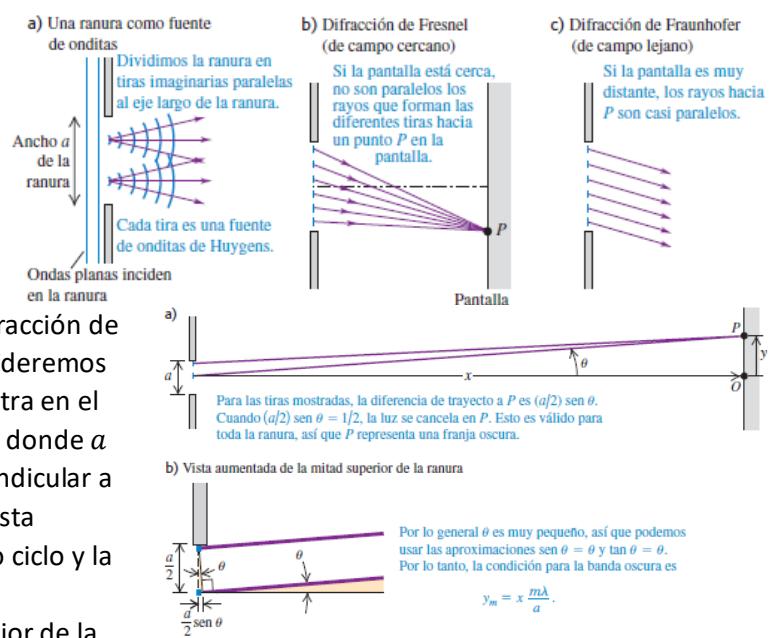
No existe una distinción fundamental entre interferencia y difracción. Anteriormente aplicamos el término interferencia a los efectos en los que intervienen ondas de un número pequeño de fuentes, dos por lo regular. La difracción se relaciona normalmente con una distribución continua de ondas de Huygens en toda el área de una abertura, o con un número muy grande de fuentes o aberturas. No obstante, ambas categorías de fenómenos están gobernadas por la misma física básica de superposición y del principio de Huygens.

14.2. Difracción producida por una sola ranura

Analizaremos el patrón de difracción que forma la luz monocromática de ondas planas (rayos paralelos) cuando emerge de una ranura larga y angosta. Cuando la luz monocromática emerge de una ranura larga y angosta, el patrón de difracción consiste en una banda central brillante (puede ser más amplia que el ancho de la ranura) bordeada de bandas oscuras y brillantes alternas, cuya intensidad decrece rápidamente. Cuanto menos ancha sea la ranura, más amplio será el patrón de difracción.

Si tomamos una vista lateral donde las ondas planas inciden en la ranura desde la izquierda, cada elemento de área de la ranura puede considerarse como fuente de ondas secundarias(Huygens). Imaginemos que dividimos la ranura en varias tiras angostas de igual anchura, paralelas a los bordes largos, y en cada tira se propagan ondas secundarias.

Con la pantalla a la derecha de las ranuras, podemos calcular la intensidad en P sumando las contribuciones de cada onda. Si la pantalla está lo suficientemente lejos podemos suponer que los rayos que inciden en P sean paralelos.



Para deducir las características del patrón de difracción de Fraunhofer correspondiente a una sola ranura, consideremos dos tiras largas (una debajo del borde superior y la otra en el centro). La diferencia de trayecto a P es $(a/2)\sin\theta$, donde a es el ancho de la ranura y θ el ángulo entre la perpendicular a la ranura y una recta del centro de la ranura a P , si esta diferencia resulta ser $\lambda/2$ hay un desfasaje de medio ciclo y la luz de las dos tiras se cancela.

De hecho cada uno de las tiras de la mitad superior de la ranura cancela la luz proveniente de una tira correspondiente de la mitad inferior produciendo una cancelación total en P , y se forma una franja oscura. La cual se presenta siempre que:

$$\frac{a}{2}\sin\theta = \pm \frac{\lambda}{2} \quad \text{o bien} \quad \sin\theta = \pm \frac{\lambda}{a} \quad (14.1)$$

El signo más menos (\pm) de la ecuación significa que hay franjas oscuras simétricas arriba y abajo del punto O .

Si dividimos la pantalla en cuartos, sextos, etc. y aplicamos el mismo razonamiento podemos demostrar que hay una franja oscura siempre que:

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{a} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (14.2)$$

No incluimos $m = 0$, porque el $\sin\theta = 0$ corresponde a una banda brillante.

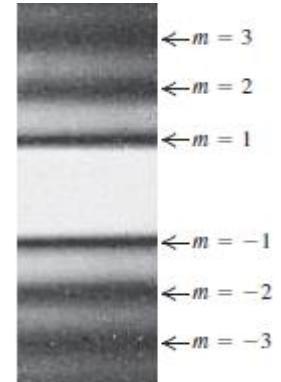
En el caso de que los valores de θ sean pequeños podemos aproximar el $\sin\theta \approx \theta$ y la ecuación (14.2) se puede expresar como:

$$\theta = \frac{m\lambda}{a} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

Si la distancia de la ranura a la pantalla es x , la distancia de la m -ésima banda oscura al centro del patrón es y_m , entonces $\tan\theta = y_m/x$. Y si θ es pequeño podemos decir que $\tan\theta \approx \theta$ y obtenemos:

$$y_m = x \frac{m\lambda}{a} \quad (14.3)$$

para un $y_m \ll x$.



14.3. Intensidad en la configuración de una sola ranura

Para deducir la expresión de la distribución de la intensidad en el patrón de interferencia, imaginamos un frente de onda plano en la ranura, subdividido en un gran número de tiras. Superponemos las contribuciones de las ondas de Huygens en P sobre una pantalla lejana, a un ángulo θ con respecto a la normal. Representamos por medio de un fasor el campo \vec{E} sinusoidalmente variable que corresponde a cada tira. La magnitud de la suma vectorial de todos los fasores en P es la amplitud E_p del campo total en ese punto. La intensidad es proporcional E_p^2 .

En b), en el centro del patrón O donde $\theta = 0$, la diferencia de trayecto cuando $x \gg a$ son insignificantes y se puede despreciar. La magnitud total es E_0 .

Las ondas que llegan desde diferentes tiras a P , a un ángulo θ de O . En este caso las diferencias de longitud de trayecto, producen una diferencia de fase. La suma vectorial de los fasores es ahora parte del perímetro de un polígono de muchos lados, y E_p , la amplitud del campo eléctrico total en P , es la cuerda. El ángulo β es la diferencia de fase total entre la onda procedente de la tira superior y la del extremo inferior. Es decir, β es la fase de la onda recibida en P proveniente del extremo superior, con respecto a la onda que se recibe en P de la tira del extremo inferior.

Si dividimos la ranura en tiras cada vez más finitas haciendo un número infinito de tiras muy angostas, la curva de los fasores se convierte en un arco de círculo d) (con una longitud de arco de E_0). El centro C de este arco se obtiene con dos rectas perpendiculares en A y B . El radio del arco es E_0/β ; la amplitud E_p del campo total en P es la cuerda AB , que es:

$$E_p = E_0 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \quad (14.4)$$

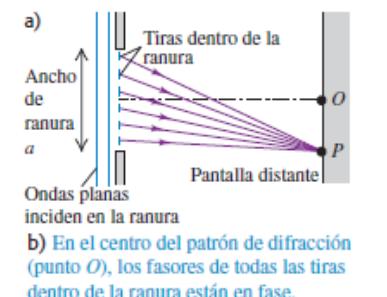
Como la intensidad en cada punto de la pantalla es proporcional al cuadrado de la amplitud dada por (14.4). Si I_0 es la intensidad cuando $\theta = 0$ y $\beta = 0$, la intensidad está dada por:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \quad (14.5)$$

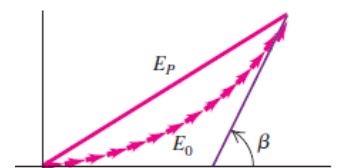
Recordando la ecuación (13.11) $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$ (diferencia de fase es $2\pi/\lambda$ por la diferencia de trayecto). Como dijimos anteriormente la diferencia de trayecto entre el rayo del extremo superior y el de la parte del medio es $(a/2)\sin\theta$, por lo tanto la diferencia entre los rayos de los dos extremos es el doble y obtenemos:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta \quad (14.6)$$

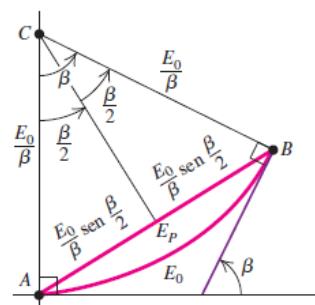
y la ecuación (14.5) queda como:



c) Diagrama del fasores en un punto ligeramente desviado del centro del patrón; β = diferencia de fase total entre los fasores primero y último.



d) Al igual que en c), pero en el límite en que la ranura se subdivide en un número infinito de tiras.



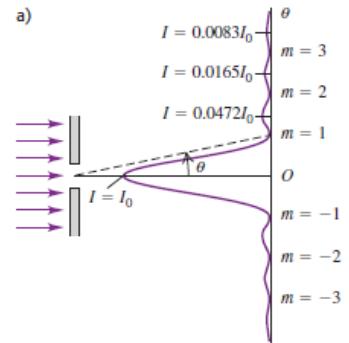
$$I = I_0 \left\{ \frac{\sin[\pi a(\sin\theta)/\lambda]}{\pi a(\sin\theta)/\lambda} \right\}^2 \quad (14.7)$$

La figura a) muestra una gráfica de la ecuación (14.7), se ve que la mayoría de la potencia de la onda se mantiene dentro de un ángulo θ con respecto a la perpendicular a la ranura, donde $\sin\theta = \lambda/a$ (primer mínimo).

En las franjas oscuras la $I = 0$ y se presenta cuando $[\sin(\beta/2)]^2 = 0$ (numerador de (14.5)), por lo que β es un múltiplo de 2π . De acuerdo con la (14.6)

$$\begin{aligned} m \cdot 2\pi &= \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \sin\theta &= \frac{m\lambda}{a} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

Esto concuerda con la ecuación (14.2). Ver que cuando $\beta = 0$ no es un mínimo, la ecuación (14.5) no está definida en $\beta = 0$.



14.3.1. Máximos de intensidad en el patrón de una sola ranura

Pensaríamos que los máximos se presentaran donde la función seno alcanza el valor de ± 1 , esto es, donde

$$\beta = \pm(2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Esto es aproximadamente correcto, pero debido al factor $(\beta/2)^2$ del denominador de la ecuación (14.5), los máximos no se presentan exactamente en tales puntos. Entonces derivamos la ecuación (14.5) con respecto a β y la igualamos a cero y obtenemos una ecuación trascendental que es necesario resolver por métodos numéricos.

Para hallar la intensidad en los máximos laterales, se sustituyen de nuevo estos valores de β en la ecuación (14.5). Y se obtiene, a partir de la primera aproximación que realizamos para los β :

$$I_m \approx \frac{I_0}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi^2} \quad (14.8)$$

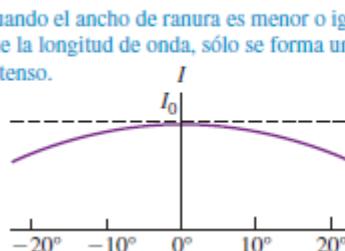
14.3.2. Anchura del patrón de una sola ranura

Si los ángulos son pequeños, la extensión angular del patrón de difracción es inversamente proporcional al ancho de la ranura a . Como λ suele ser $\ll a$, los valores de θ son tan pequeños que la aproximación $\sin\theta \approx \theta$ es buena. Con esta aproximación, la posición del primer mínimo al lado del máximo central, que corresponde a $(\beta/2 = \pi)$, es, según (14.7):

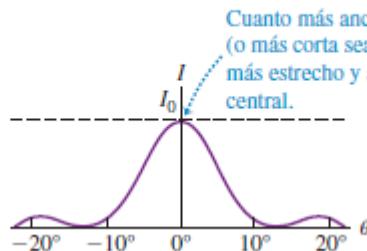
$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

Esto caracteriza la anchura (extensión angular) del máximo central, y vemos que es inversamente proporcional al ancho de ranura a . Cuando la aproximación de ángulos pequeños es válida, el máximo central es exactamente dos veces más ancho que cada máximo lateral.

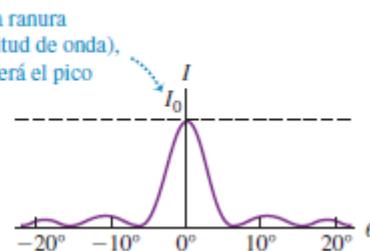
a) $a = \lambda$



b) $a = 5\lambda$



c) $a = 8\lambda$



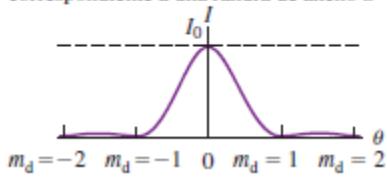
14.4. Ranuras múltiples

14.4.1. Dos ranuras de ancho finito

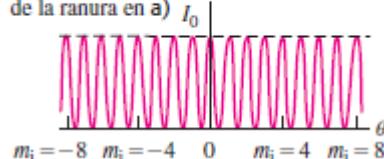
Si las ranuras son angostas en comparación con la longitud de onda, podemos suponer que la luz proveniente de cada ranura se extiende de modo uniforme en todas direcciones a la derecha de la ranura. Sin embargo, cuando las ranuras tienen un ancho finito, las crestas del patrón de interferencia de dos ranuras están moduladas por el patrón de difracción de una sola ranura característico del ancho de cada ranura. En a) m_d son los mínimos de difracción, en b) m_i son los máximos de interferencia.

Los máximos correspondientes a dos ranuras están en las mismas posiciones que antes; pero su intensidad está modulada por el patrón de una sola ranura, el cual actúa como una "envolvente" de la función de intensidad.

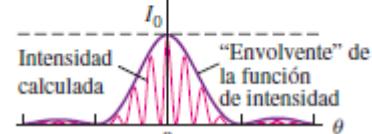
a) Patrón de difracción de una sola ranura correspondiente a una ranura de ancho a



b) Patrón de interferencia de doble ranura correspondiente a ranuras angostas, cuya separación d equivale a cuatro veces el ancho de la ranura en a) I_0



c) Cálculo del patrón intensidad para dos ranuras con ancho a y separación $d = 4a$, incluyendo los efectos tanto de la interferencia como de la difracción



La expresión de la intensidad de c) es proporcional al producto de las expresiones correspondiente a dos ranuras y a una sola ranura, ecuaciones (13.10) y (14.5)

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \quad (14.12)$$

donde ϕ es el desfasaje de 2 fasores de \vec{E} adyacentes y β es el desfasaje de las ondas provenientes de los extremos.

Habrá máximos "faltantes" siempre que d sea un múltiplo entero de a . Además, a medida que aumenta la distancia con respecto al máximo central brillante del patrón de dos ranuras, disminuye la intensidad de los máximos. Esto es consecuencia del patrón de modulación de una sola ranura que se muestra en la a); en términos matemáticos, la disminución de intensidad se debe al factor $(\beta/2)^2$ del denominador de (14.12). Cuanto más angostas sean las ranuras, tanto más amplio será el patrón de una sola ranura y más lenta será la disminución de intensidad de un máximo de interferencia al siguiente.

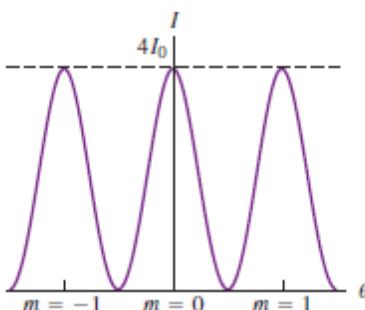
14.4.2. Múltiples ranuras

Suponga que cada ranura es estrecha en comparación con la longitud de onda, por lo que su patrón de difracción se extiende de modo casi uniforme. La figura muestra un conjunto de ocho ranuras angostas, con una distancia d entre ranuras adyacentes. Sufren interferencia constructiva los rayos que forman un ángulo θ con la normal y que llegan a P con una diferencia de trayecto entre ranuras adyacentes igual a un número entero de longitudes de onda

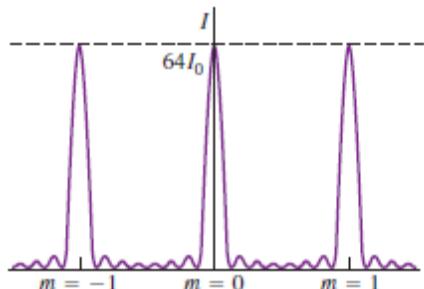
$$d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Los máximos del patrón aparecen en las mismas posiciones que en el caso de dos ranuras con la misma separación. En esta medida el patrón se asemeja al patrón de dos ranuras. Cuando hay N ranuras, hay $(N - 1)$ mínimos entre cada par de los máximos principales, y se presenta un mínimo siempre que ϕ sea un múltiplo entero de $2\pi/N$ (salvo cuando ϕ es un múltiplo entero de 2π , en cuyo caso se tiene un máximo principal).

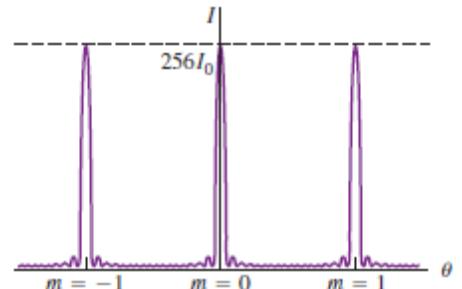
a) $N = 2$: dos ranuras producen un mínimo entre los máximos adyacentes.



b) $N = 8$: ocho ranuras producen máximos más altos y más angostos, en el mismo lugar, separados por siete mínimos.



c) $N = 16$: con 16 ranuras, los máximos son aún más altos y estrechos, con más intervención de los mínimos.



Hay pequeños máximos secundarios de intensidad entre los mínimos; éstos se reducen en comparación con el máximo principal a medida que N aumenta. Cuanto mayor sea el valor de N , más estrechos se volverán los máximos principales. Desde el punto de vista energético, la potencia total del patrón es proporcional a N . La altura de cada máximo principal es proporcional a N^2 , de modo que, por la conservación de la energía, la anchura de cada máximo principal debe ser proporcional a $1/N$.

APUNTES DE CATEDRA Y PAGINA 1245

14.5. La rejilla de difracción

14.6. Aberturas circulares y poder de resolución

El patrón de difracción que forma una abertura circular tiene un interés especial debido a su papel en la limitación de la capacidad de un instrumento óptico para resolver detalles finos. En principio, podríamos calcular la intensidad en cualquier punto P del patrón de difracción, dividiendo el área de la abertura en elementos pequeños, hallando la amplitud de onda resultante y la fase en P , e integrando después sobre el área de la abertura para determinar la amplitud e intensidad resultantes en P . Esta integración es muy compleja.

El patrón de difracción que forma una abertura circular consiste en una mancha central brillante, rodeada por una serie de anillos brillantes y oscuros. Podemos describir el patrón en términos del ángulo θ , que representa el radio angular de cada anillo. Si el diámetro de la abertura es D y la longitud de onda es λ , el radio angular θ de los anillos oscuros está dado por:

$$\operatorname{sen}\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D} \rightarrow \operatorname{sen}\theta_2 = 2.23 \frac{\lambda}{D} \rightarrow \operatorname{sen}\theta_3 = 3.24 \frac{\lambda}{D}$$

Entre estos hay anillos brillantes con radios angulares dados por:

$$\operatorname{sen}\theta = 1.63 \frac{\lambda}{D} \rightarrow \operatorname{sen}\theta = 2.68 \frac{\lambda}{D} \rightarrow \operatorname{sen}\theta = 3.70 \frac{\lambda}{D}$$

y así sucesivamente. La mancha central brillante recibe el nombre de disco de Airy.

La intensidad de los anillos brillantes decae con gran rapidez conforme aumenta el ángulo. Cuando D es mucho más grande que la longitud de onda λ la intensidad máxima del primer anillo es de sólo el 1.7% del valor en el centro del disco de Airy. La mayoría (85%) de la energía lumínica incide dentro del disco de Airy.

El criterio de Rayleigh dice que si el centro de un patrón de difracción coincide con el primer mínimo del otro los objetos están apenas resueltos (es decir, son apenas distinguibles). En ese caso, la separación angular de los centros de las imágenes está dada por $\operatorname{sen}\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$. La separación angular de los objetos es la misma que la de las imágenes formadas por un telescopio, un microscopio u otro dispositivo óptico.

La separación mínima de dos objetos que pueden ser apenas resueltos por un instrumento óptico es el límite de resolución o definición del mismo. Cuanto más pequeño sea el límite de resolución, mayor será la definición, o poder de resolución, del instrumento. La difracción fija los límites últimos a la definición de las lentes. La óptica geométrica puede hacernos creer que podemos formar imágenes tan grandes como queramos. Tarde o temprano, sin embargo, se alcanza un punto donde la imagen se hace más grande pero no más detallada.

