

# Compendio

- las demostraciones más tomadas -



por **Gianfranco Feliziani**  
digitalización **Lucas Killy**

<b>Convergencia de Gauss - Seidel</b>	<b>4</b>
<b>Derivadas</b>	<b>5</b>
Derivada primera hacia adelante	5
Derivada primera hacia atrás	5
Derivada primera central	6
Derivada segunda	6
Derivada primera asimétrica	7
<b>Autovalores y autovectores</b>	<b>8</b>
Método de la potencia	8
Método de la potencia inversa	10
<b>Integración</b>	<b>10</b>
Regla de trapecios simple	10
Regla de trapecios compuesta	12
Regla de Simpson simple	13

## Condición de convergencia para punto fijo

Sea  $x_s$  el punto fijo de  $g(x)$ , entonces:

$$x_s = g(x_s) \quad (1)$$

( $x_s$  es la solución a la igualdad  $x = g(x)$ )

La fórmula de recurrencia del punto fijo es:

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad (2)$$

Al restar miembro a miembro (1) y (2)

$$x_{k+1} - x_s = g(x_k) - g(x_s)$$

Si aplicamos teorema del valor medio en el segundo miembro

$$x_{k+1} - x_s = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=\xi} \cdot (x_k - x_s) \quad , \quad x_k < \xi < x_s$$

En el primer miembro se tiene el error de la iteración  $k + 1$  y en el segundo el error de la iteración  $k$

$$\varepsilon_{k+1} = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=\xi} \cdot \varepsilon_k$$

Por lo tanto para que  $\varepsilon_{k+1}$  sea menor que  $\varepsilon_k$  se deberá cumplir que el valor absoluto de la pendiente de la función  $g(x)$  en el entorno del punto fijo deberá ser menor a 1

$$\left| \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=\xi} \right| < 1$$

Finalmente, si el error de una iteración es mayor que el de la siguiente entonces el método converge.

# Convergencia de Gauss - Seidel

Ejemplo para un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas; el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2\end{aligned}$$

La solución exacta debe verificar:

$$x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}} \quad (1) \quad \wedge \quad y = \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}} \quad (2)$$

La forma algorítmica de calcular cada iteración es:

$$x_k = \frac{b_1 - a_{12}y_{k-1}}{a_{11}} \quad (3) \quad \wedge \quad y_k = \frac{b_2 - a_{21}x_k}{a_{22}} \quad (4)$$

Si definimos el error de la iteración  $k$  como el valor exacto menos el valor aproximado:

$$\Delta x_k = x - x_k \quad \Delta y_k = y - y_k \quad \Delta y_{k-1} = y - y_{k-1}$$

Restando (1) - (3) y (2) - (4) :

$$\Delta x_k = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\Delta y_{k-1} \quad \Delta y_k = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\Delta x_k$$

Si reemplazamos uno en el otro:

$$\Delta x_k = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\Delta x_{k-1} \quad (5) \quad \Delta x_{k-1} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\Delta x_{k-2} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (5)

$$\Delta x_k = \left[ \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right]^2 \Delta x_{k-2}$$

En general:

$$\Delta x_k = \left[ \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right]^k \Delta x_0 \quad \Delta y_k = \left[ \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right]^k \Delta y_0$$

Por lo tanto si  $\left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| < 1$  el método converge, o sea, los términos de la diagonal son dominantes.

# Derivadas

## Derivada primera hacia adelante

Considero la serie de Taylor

$$f(x_s + nh) = f(x_s) + nhf'(x_s) + \frac{(nh)^2 f''(x_s)}{2!} + \frac{(nh)^3 f'''(x_s)}{3!} + \dots$$

con  $n = 1$ : 
$$f(x_s + h) = f(x_s) + hf'(x_s) + O(h^2)$$

Se puede escribir también como:

$$f_{s+1} = f_s + hf'_s + O(h^2)$$

Siendo el error de truncamiento del orden  $O(h^2)$ .

Podemos despejar la derivada primera, nótese que el error es de orden 1 debido a que dividimos toda la expresión por  $h$ .

$$f'_s = \frac{1}{h}[f_{s+1} - f_s] + O(h)$$

## Derivada primera hacia atrás

Considero la serie de Taylor

$$f(x_s + nh) = f(x_s) + nhf'(x_s) + \frac{(nh)^2 f''(x_s)}{2!} + \frac{(nh)^3 f'''(x_s)}{3!} + \dots$$

con  $n = -1$ : 
$$f(x_s - h) = f(x_s) - hf'(x_s) + O(h^2)$$

Se puede escribir también como:

$$f_{s-1} = f_s - hf'_s + O(h^2)$$

Siendo el error de truncamiento del orden  $O(h^2)$ .

Podemos despejar la derivada primera, nótese que el error es de orden 1 debido a que dividimos toda la expresión por  $h$ .

$$f'_s = \frac{1}{h}[f_s - f_{s-1}] + O(h)$$

## Derivada primera central

Considero la serie de Taylor con  $n = -1$  y  $n = +1$  y resto miembro a miembro:

$$\text{Para } n = 1: \quad f_{s+1} = f_s + hf'_s + \frac{h^2 f''_s}{2!} + \frac{h^3 f'''_s}{3!} + \dots$$

$$\text{Para } n = -1: \quad f_{s-1} = f_s - hf'_s + \frac{h^2 f''_s}{2!} - \frac{h^3 f'''_s}{3!} + \dots$$

$$f_{s+1} - f_{s-1} = 2hf'_s + \frac{2h^3 f'''_s}{6} + \dots$$

Podemos despejar la derivada primera:

$$f'_s = \frac{1}{2h} [f_{s+1} - f_{s-1}] + O(h^2)$$

## Derivada segunda

considero la serie de Taylor para  $n = 1$  y  $n = -1$  y sumo miembro a miembro:

$$\text{Para } n = 1: \quad f_{s+1} = f_s + hf'_s + \frac{h^2 f''_s}{2!} + \frac{h^3 f'''_s}{3!} + \dots$$

$$\text{Para } n = -1: \quad f_{s-1} = f_s - hf'_s + \frac{h^2 f''_s}{2!} - \frac{h^3 f'''_s}{3!} + \dots$$

$$f_{s+1} + f_{s-1} = 2f_s + h^2 f''_s + O(h)^4$$

Podemos despejar la derivada segunda:

$$f''_s = \frac{1}{h^2} [f_{s-1} - 2f_s + f_{s+1}] + O(h)^2$$

## Derivada primera asimétrica

Sean  $(x_s, x_{s+1}, x_{s+2})$  tres puntos equidistantes; se plantea que la derivada sea una combinación lineal de la función en esos puntos

$$f'_s = \alpha f_s + \beta f_{s+1} + \gamma f_{s+2}$$

Considero serie de Taylor para  $n = 1$  y  $n = 2$

$$\text{Para } n = 1: \quad f_{s+1} = f_s + hf'_s + \frac{h^2 f''_s}{2!} + \frac{h^3 f'''_s}{3!} + \dots$$

$$\text{Para } n = 2: \quad f_{s+2} = f_s + 2hf'_s + 2h^2 f''_s + \frac{4h^3 f'''_s}{3!} + \dots$$

Reemplazo en la combinación lineal y ordeno

$$f'_s = (\alpha + \beta + \gamma) f_s + (\beta + 2\gamma) hf'_s + (\beta + 4\gamma) \frac{h^2}{2!} f''_s + (\beta + 8\gamma) \frac{h^3}{3!} f'''_s + \dots$$

Para que dicha serie sea igual a la derivada primera debe cumplirse

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \wedge \quad \beta h + 2\gamma h = 1$$

Y el error de truncamiento evaluado en un punto cercano de  $x = \xi$

$$\varepsilon_r = (\beta + 4\gamma) \frac{h^2}{2} f'''_s \big|_{x=\xi}$$

Si armamos un SEL de dos ecuaciones con tres incógnitas tenemos los siguientes resultados:

$$\alpha = -\frac{1}{h} + \gamma \quad \wedge \quad \beta = \frac{1}{h} - 2\gamma$$

De modo que la derivada hacia adelante será:

$$f'_s = \left(-\frac{1}{h} + \gamma\right) f_s + \left(\frac{1}{h} - 2\gamma\right) f_{s+1} + \gamma f_{s+2}$$

Siendo el error de truncamiento:

$$\varepsilon_r = \left(-\frac{1}{h} + 2\gamma\right) \frac{h^2}{2} f_s'''|_{x=\xi}$$

Que es válido para todo valor de  $\gamma$ ; mientras  $\gamma$  sea un coeficiente no nulo el error de truncamiento local depende de  $\gamma$  y de  $h$  linealmente. En nuestro caso tomamos  $\gamma = -\frac{1}{2h}$ , así la derivada primera hacia adelante se convierte en:

$$\begin{aligned} f_s' &= -\frac{3}{2h} f_s + \frac{2}{h} f_{s+1} - \frac{1}{2h} f_{s+2} \\ f_s' &= \frac{1}{h} \left(-\frac{3}{2} f_s + 2 f_{s+1} - \frac{1}{2} f_{s+2}\right) \end{aligned}$$

Y el error de truncamiento resulta nulo así que se debe considerar el término siguiente:

$$\varepsilon_r = (\beta + 8\gamma) \frac{h^3}{3!} f_s''' = \frac{h^3}{6} f_s''' \left(-\frac{2}{h}\right) = -\frac{h^2}{3} f_s'''$$

## Autovalores y autovectores

### Método de la potencia

Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^n$  se asume que

- >  $\lambda_i$ ;  $\bar{v}_i$  son autovalores y autovectores de  $A$ , se verifica  $A \bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$
- >  $\lambda_1$  es el autovalor dominante ya que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$
- >  $A$  es diagonalizable, es decir que los  $\bar{v}_i$  son linealmente independientes y forman una base de  $\mathbb{R}^n$

Si  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$  es una base de  $\mathbb{R}^n$  entonces cualquier vector  $\bar{y}_0$  se puede escribir como combinación lineal:

$$\bar{y}_0 = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + a_3 \bar{v}_3 + \dots + a_n \bar{v}_n = \sum a_i \bar{v}_i$$

Si premultiplicamos por  $A$  obtenemos un vector  $\bar{y}_1$ :

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= A \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 &= A (a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + a_3 \bar{v}_3 + \dots + a_n \bar{v}_n) \\ \bar{y}_1 &= a_1 A \bar{v}_1 + a_2 A \bar{v}_2 + a_3 A \bar{v}_3 + \dots + a_n A \bar{v}_n \end{aligned}$$

Por definición  $A \bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$



$$\begin{aligned}\overline{y}_1 &= a_1 \lambda_1 \overline{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overline{v}_2 + a_3 \lambda_3 \overline{v}_3 + \dots + a_n \lambda_n \overline{v}_n \\ \overline{y}_1 &= \lambda_1 \left( a_1 \overline{v}_1 + a_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \overline{v}_2 + a_3 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \overline{v}_3 + \dots + a_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \overline{v}_n \right)\end{aligned}$$

Si premultiplicamos  $\overline{y}_1$  por  $A$  obtenemos un vector  $\overline{y}_2$ :

$$\begin{aligned}\overline{y}_2 &= A \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 &= A (a_1 \lambda_1 \overline{v}_1 + a_2 \lambda_2 \overline{v}_2 + a_3 \lambda_3 \overline{v}_3 + \dots + a_n \lambda_n \overline{v}_n) \\ \overline{y}_2 &= a_1 \lambda_1 A \overline{v}_1 + a_2 \lambda_2 A \overline{v}_2 + a_3 \lambda_3 A \overline{v}_3 + \dots + a_n \lambda_n A \overline{v}_n\end{aligned}$$

Por definición  $A \overline{v}_i = \lambda_i \overline{v}_i$

$$\begin{aligned}\overline{y}_2 &= a_1 (\lambda_1)^2 \overline{v}_1 + a_2 (\lambda_2)^2 \overline{v}_2 + a_3 (\lambda_3)^2 \overline{v}_3 + \dots + a_n (\lambda_n)^2 \overline{v}_n \\ \overline{y}_2 &= \lambda_1^2 \left( a_1 \overline{v}_1 + a_2 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \overline{v}_2 + a_3 \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1^2} \overline{v}_3 + \dots + a_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda_1^2} \overline{v}_n \right)\end{aligned}$$

Si repetimos este procedimiento  $k$  veces

$$\begin{aligned}\overline{y}_k &= A \overline{y}_{k-1} \\ \overline{y}_k &= \lambda_1^k \left( a_1 \overline{v}_1 + a_2 \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} \overline{v}_2 + a_3 \frac{\lambda_3^k}{\lambda_1^k} \overline{v}_3 + \dots + a_n \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \overline{v}_n \right)\end{aligned}$$

donde:

$$\overline{\varepsilon} = a_2 \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} \overline{v}_2 + a_3 \frac{\lambda_3^k}{\lambda_1^k} \overline{v}_3 + \dots + a_n \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \overline{v}_n$$

simplificando:

$$\overline{y}_k = \lambda_1^k (a_1 \overline{v}_1 + \overline{\varepsilon})$$

Como  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$  podemos ver que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} = 0 \quad \forall i = 2, 3, \dots, n \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\varepsilon}_k = \overline{0}$$

Así:

$$\overline{y}_k \simeq \lambda_1^k a_1 \overline{v}_1 \quad \overline{y}_{k+1} \simeq \lambda_1^{k+1} a_1 \overline{v}_1$$

Si tomamos el cociente entre componentes de estas dos expresiones:

$$\alpha_j(k+1) \simeq \frac{\lambda_1^{k+1} a_1(\overline{v}_1)_j}{\lambda_1^k a_1(\overline{v}_1)_j}$$

$$\alpha_j(k + 1) \simeq \lambda_1$$

Esto quiere decir que para  $k$  suficientemente grande el cociente entre los componentes de dos iteraciones sucesivas es el autovalor dominante  $\lambda_1$ ; los vectores que se obtienen se van alineando cada vez más al autovector  $\overline{v}_1$ .

## Método de la potencia inversa

Tenemos

$$A \overline{v}_i = \lambda_i \overline{v}_i$$

Premultiplicando por  $A^{-1}$

$$A^{-1} A \overline{v}_i = A^{-1} \lambda_i \overline{v}_i$$

$$I \overline{v}_i = A^{-1} \lambda_i \overline{v}_i$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \overline{v}_i = A^{-1} \overline{v}_i$$

$\frac{1}{\lambda_i}$  es el autovalor dominante asociado a  $\overline{v}_i \Rightarrow \eta = \frac{1}{\lambda_i}$ . El método converge al mayor  $\eta$ , o sea, al menor  $\lambda_i$ .

## Integración

### Regla de trapecios simple

Desarrollo por integración de polinomio interpolante de Lagrange de grado 1 por dos puntos  $(x_a, y_a)$  y  $(x_b, y_b)$ .

$$I = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

$$f(x) = P_1(x) + E_1(x) \quad (1)$$

Donde

$$P_1(x) = y_a l_a(x) + y_b l_b(x)$$

$$l_a(x) = \frac{x-x_b}{x_a-x_b} = -\frac{x-x_b}{x_b-x_a} \quad l_b(x) = \frac{x-x_a}{x_b-x_a}$$

El error de interpolación es

$$E_1(x) = \frac{f''(\theta)}{2!} (x - x_a)(x - x_b), \quad x_a < \theta < x_b$$

Integrando (1):

$$I = \int_{x_a}^{x_b} [y_a l_a(x) + y_b l_b(x)] dx + \int_{x_a}^{x_b} E_1(x) dx$$

Definimos paso  $h = x_b - x_a$  y ordenamos

$$I = \frac{h}{2} (y_a + y_b) + \varepsilon_1 = I_1 + \varepsilon_1$$

### Cálculo del error de interpolación

El error por trapecios simples es:

$$E_1(x) = \frac{f''(\theta)}{2!} (x - x_a)(x - x_b)$$

Integrando

$$\varepsilon_1 = \int_{x_a}^{x_b} E_1(x) dx = \frac{f''(\theta)}{2!} \int_{x_a}^{x_b} (x - x_a)(x - x_b) dx \quad (2)$$

Se hace cambio de variable mediante

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{t - 0}{1 - 0} \Rightarrow (x - x_a) = t(x_b - x_a)$$

Haciendo  $h = x_b - x_a$

$$x - x_a = ht$$

Ahora hacemos algunos artificios

$$x - x_b + (x_b - x_a) = ht$$

$$x - x_b + h = ht$$

$$x - x_b = h(t - 1)$$

$$x - x_b = h(t - 1) \quad (3)$$

$$x - x_a = ht \quad (4)$$

$$\text{derivando (4)} \quad \frac{dx}{dt} = h$$

$$dx = h dt \quad (5)$$

Reemplazando (3), (4) y (5) en (2)

$$\varepsilon_1 = \int_{x_a}^{x_b} E_1(x) dx = \frac{f''(\theta)}{2!} \int_0^1 ht h(t - 1) h dt = \frac{f''(\theta)}{2!} h^3 \int_0^1 (t^2 - t) dt$$

$$\varepsilon_1 = \left(-\frac{1}{6}h^3\right) \frac{f''(\theta)}{2!} = -\frac{1}{12}h^3 f''(\theta) \quad \text{para algún } \theta \in (x_a, x_b)$$



## Regla de trapezios compuesta

Se busca la integral

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

Dividimos todo el intervalo en subintervalos  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

Aplicamos la regla del trapecio a cada subintervalo

$$I = \frac{h_0}{2}(y_0 + y_1) + \varepsilon_1(h_0^3) + \frac{h_1}{2}(y_1 + y_2) + \varepsilon_1(h_1^3) + \dots + \frac{h_{n-1}}{2}(y_{n-1} + y_n) + \varepsilon_1(h_{n-1}^3)$$

Si todos los intervalos tienen igual longitud:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n) + E_t$$

Donde  $E_t$  es el error que se acumula al sumar los  $n$  errores, para aproximarlos hacemos:

$$E_t = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{12}h^3 f''(\theta_i) \text{ donde } \theta_1 \in (x_0, x_1), \dots, \theta_n \in (x_{n-1}, x_n)$$

$$E_t = -\frac{1}{12}h^3 \sum_{i=1}^n f''(\theta_i)$$

Se toma al promedio de las derivadas segundas en puntos interiores a cada subintervalo como aproximación de la derivada segunda en cierto punto  $\xi \in (x_0, x_n)$

$$f''(\xi) \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\theta_i)$$

Si sustituimos esta última expresión en la de  $E_t$

$$E_t = -\frac{1}{12}h^3 n f''(\xi)$$

Para eliminar  $n$  de esta expresión recordamos que todos los  $h_i$  son iguales, entonces:

$$h = \frac{(x_n - x_0)}{n}$$

$$E_t = -\frac{1}{12}h^2 h n f''(\xi) = -\frac{1}{12}h^2 \frac{(x_n - x_0)}{n} n f''(\xi)$$

$$E_t = -\frac{(x_n - x_0)}{12}h^2 f''(\xi)$$

## Regla de Simpson simple

Dada la integral

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx$$

Se integra el polinomio de Lagrange de grado 2

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \quad l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \quad l_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} [P(x) + E_2(x)] dx = \int_{x_0}^{x_2} [y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)] dx + \int_{x_0}^{x_2} E_2(x) dx$$

Donde

$$E_2(x) = \frac{f'''(x)}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Así

$$I = I_2 + \varepsilon_2$$

Donde

$$I_2 = \sum_{i=0}^2 y_i \omega_i \quad \omega_i = \int_{x_0}^{x_2} l_i(x) dx, \quad i = 0, 1, 2. \quad \varepsilon_2 = \int_{x_0}^{x_2} E_2(x) dx$$

Si todos los intervalos son iguales  $h_1 = h_2 = h$

$$I_2 = h \left[ \frac{1}{3} y_0 + \frac{4}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_2 \right]$$

$$I_2 = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$$