Ecuaciones diferenciales ordinarias

EDO de primer orden

2019

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales

2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Modelos

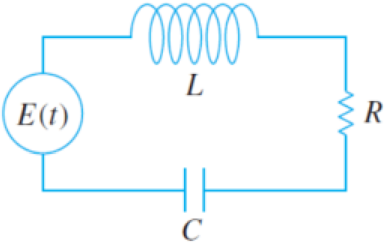
$P(t)$: población en t

Malthus 1798

$$P'(t) = kP(t)$$

Modelos

$$T(t): \text{ temperatura en } t$$
$$T_m: \text{ temperatura del medio}$$
$$T'(t) = k(T(t) - T_m)$$



a) Circuito en serie- *LRC*

$q(t)$: carga, $i(t)$: corriente.

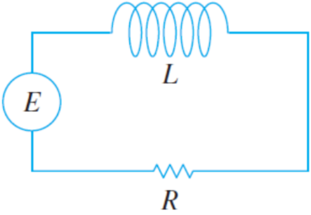
Caídas de potencial: $Li'(t)$; iR; $\frac{1}{C}q(t)$;

Segunda Ley de Kirchoff: $E(t) = Li'(t) + iR + \frac{1}{C}q(t)$

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t)$$

EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.



$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR.

Definición

Definición

Se llama ecuación diferencial a la ecuación que contiene derivadas de una o más variables con respecto a una o más variables independientes.

Recorrido

Clasificación

Clasificación de las ED:

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o pariciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x)\frac{dy}{dx} - e^x y = \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx}y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Recorrido

Definiciones

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Definición

Se llama solución explícita de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.
Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I.

Definición

Dada una ed, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Definición

Dada una ed, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.
Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Definiciones

Definición

Dada una ed, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.
Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.
Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Definiciones

Definición

Dada una ed, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.
Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.
Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Distinguir dominio de definición de la función f en cuanto solución y como función.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.Verificar que $y(x) = 0$ también es solución (singular).

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.Verificar que $y(x) = 0$ también es solución (singular).

Ejemplo 3: dada la ed $xy' + y = 0$, una solución es $y = \frac{1}{x}$. Estudiar el dominio.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas. Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

PVI

Ejemplo: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

PVI

Ejemplo: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1,2) \end{cases}$$

Ejemplo: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1,2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^{x}$$

PVI

Ejemplo: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1,2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

Ejemplo: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1,2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

$$y_2(x) = \frac{2}{e}\, e^x$$

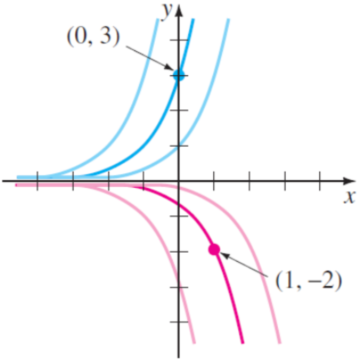
Ejemplo: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1,2) \end{cases}$$

$$y(x) = c\, e^x$$

$$y_1(x) = 3\, e^x,$$

$$y_2(x) = \frac{2}{e}\, e^x$$



Soluciones de los dos PVI.

Ejemplo: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

PVI

Ejemplo: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

PVI

Ejemplo: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$y(x) = -2\cos(4x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)$$

PVI con más de una solución: Ejemplo 2.

PVI

PVI con más de una solución: Ejemplo 2.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

PVI con más de una solución: Ejemplo 2.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.

PVI con más de una solución: Ejemplo 2.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
$y(x) = 0$ es solución singular de la ed.

PVI

PVI con más de una solución: Ejemplo 2.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
$y(x) = 0$ es solución singular de la ed.
Soluciones del PVI:

PVI con más de una solución: Ejemplo 2.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
$y(x) = 0$ es solución singular de la ed.
Soluciones del PVI:

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4$$

PVI con más de una solución: Ejemplo 2.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
$y(x) = 0$ es solución singular de la ed.
Soluciones del PVI:

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4 \qquad\qquad y(x) = 0$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden)

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, y sea (x_0, y_0) un punto interior a R. Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son cotinuas en R, entonces existe un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$ y existe una única función y definida en I que es solución del problema con valores iniciales (1).

Recorrido

Definición

Dada una e.d. $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Definición

Dada una e.d. $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

Dada una e.d. $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Ejemplo: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

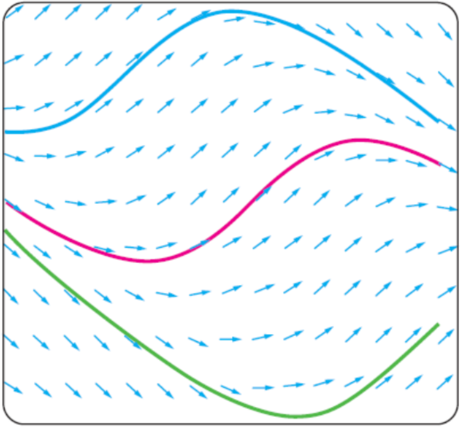
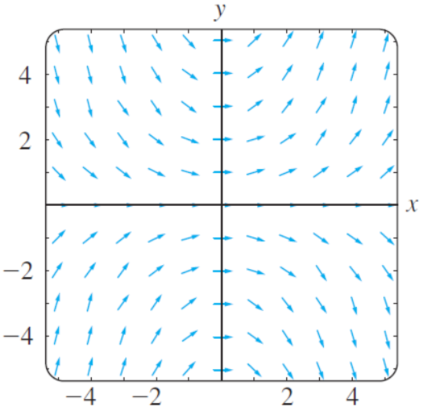


FIGURA 2.1.2 Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

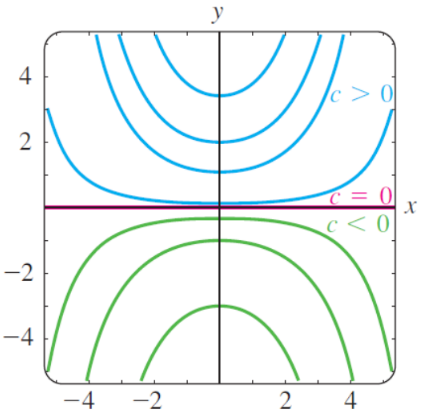
Ejemplo:

Campos direccionales

Ejemplo:



a) Campo direccional para $dy/dx = 0.2xy$.



b) Algunas curvas solución en la familia $y = ce^{0.1x^2}$.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales

2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)h(y).$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)h(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y}$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)h(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \qquad y' = y + \operatorname{sen} x$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)h(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \qquad y' = y + \operatorname{sen} x \qquad (1+x)dy - y\,dx = 0$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)h(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \qquad y' = y + \operatorname{sen} x \qquad (1+x)dy - y\,dx = 0$$

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x)$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)h(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \qquad y' = y + \operatorname{sen} x \qquad (1+x)dy - y\,dx = 0$$

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) \qquad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)h(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \qquad y' = y + \operatorname{sen} x \qquad (1+x)dy - y\,dx = 0$$

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) \qquad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

$$\ln|h(y)| = \int g(x)dx + c$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)h(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \qquad y' = y + \operatorname{sen} x \qquad (1+x)dy - y\,dx = 0$$

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) \qquad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

$$\ln|h(y)| = \int g(x)dx + c$$

$$|h(y)| = e^{\int g(x)dx} e^{c}$$

Ejemplo

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0$

Ejemplo

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0$
Hacer...

Ejemplo

Ejemplo: $(1 + x)dy - y\, dx = 0$
Hacer...

$$y =$$

Ejemplo

Ejemplo: $(1+x)dy - y\,dx = 0$
Hacer...

$$y = k(1+x)$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \;\; \text{si } k > 0,\; x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R};\ \text{ si } k > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k}$$

$$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2;$$

Pérdida de una solución

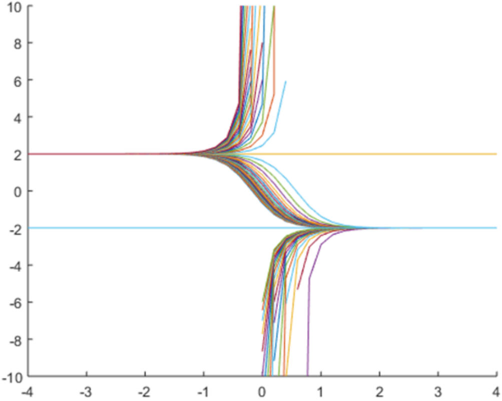
$$y' = y^2 - 4 \qquad y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R};\ \text{ si } k>0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k}$$

$$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2; \quad y \equiv -2 \text{ es solución singular.}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad y = 2\frac{ke^{4x}+1}{1-ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R};\ \text{ si } k > 0,\ x \neq \frac{1}{4}\ln\frac{1}{k}$$

$$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2; \quad y \equiv -2 \text{ es solución singular.}$$



Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales: generalidades
   - Clasificación
   - Definiciones
   - Campos direccionales

2. Métodos para resolver edo de primer orden
   - Separación de variables
   - Ecuaciones lineales de primer orden
   - Ecuaciones exactas
   - Ecuación de Bernoulli

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad\qquad y' + y = x$$

FORMA ESTÁNDAR :

$$y' + P(x)y = f(x)$$

(¿qué hemos supuesto?)

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x)$$

SEPARABLE!

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x)$$

SEPARABLE!

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x) \qquad \mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x) \qquad \mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x) \qquad \mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x) \qquad \mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C \qquad y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x) \qquad \mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \mu(x) = ke^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)\,dx + C \qquad y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

EJEMPLO 7 **Circuito en serie**

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente *i*, si la corriente inicial es cero.

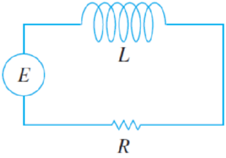


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie *LR*.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12;\ i(0) = 0.$$

EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

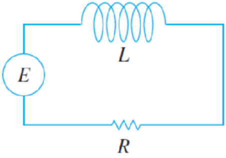


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12;\ i(0) = 0.$$

$$i'(t) + 20i(t) = 24$$

EJEMPLO 7 **Circuito en serie**

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

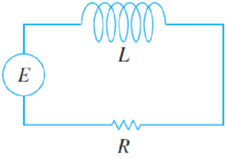


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; \; i(0) = 0.$$

$$i'(t) + 20i(t) = 24 \qquad \mu = e^{\int P(t)dt} = e^{20t}$$

Ejemplo

EJEMPLO 7 **Circuito en serie**

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

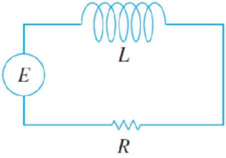


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; \; i(0) = 0.$$

$$i'(t) + 20i(t) = 24 \qquad \mu = e^{\int P(t)dt} = e^{20t} \qquad \frac{d}{dt}\left(e^{20t}i(t)\right) = 24e^{20t}$$

EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente *i*, si la corriente inicial es cero.

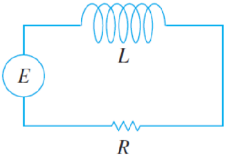


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie *LR*.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12;\ i(0) = 0.$$

$$i'(t) + 20i(t) = 24 \qquad \mu = e^{\int P(t)dt} = e^{20t} \qquad \frac{d}{dt}(e^{20t}i(t)) = 24e^{20t}$$

$$i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$$

Ejemplo

EJEMPLO 7 **Circuito en serie**

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

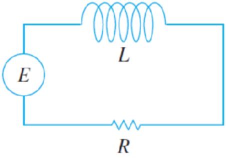


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie *LR*.

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12;\ i(0) = 0.$$

$$i'(t) + 20i(t) = 24 \qquad \mu = e^{\int P(t)dt} = e^{20t} \qquad \frac{d}{dt}(e^{20t}i(t)) = 24e^{20t}$$

$$i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t} \qquad i(0) = 0 \Rightarrow c = -\frac{6}{5} \Rightarrow i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$$

Recorrido

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ o $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Una condición suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una forma diferencial exacta es

$$N_x = M_y$$

en una región abierta, conexa y simplemente conexa.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x, y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

$S = C$ será una solución implícita de la ed si

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita $S(x,y) = C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

$S = C$ será una solución implícita de la ed si

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M,N)$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x,y)+N(x,y)y'=0$, propongo una solución implícita $S(x,y)=C$.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x)=0.$$

$S=C$ será una solución implícita de la ed si

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y)=M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)=N(x,y)$$

es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F}=(M,N)$.

LA SOLUCIÓN DE LA ED ES $S(x,y)=C$.

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$$

$$S(x,y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}$$

$$S(x, y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2} = C$$

Recorrido

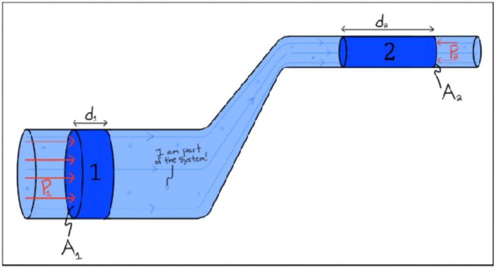
Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y^n(x)$$

Modelo:

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y^n(x)$$

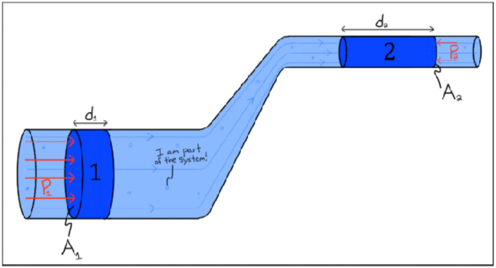


$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

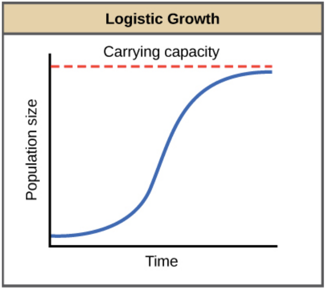
Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y^n(x)$$



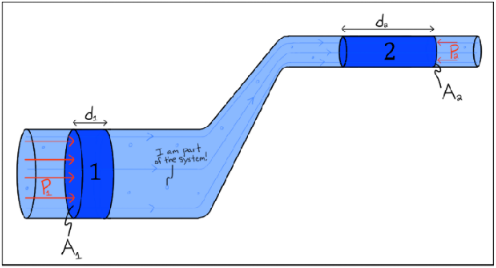
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$



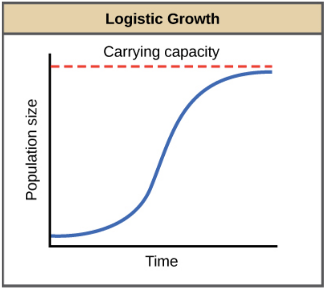
$$\frac{dN}{dT} = r_{max}\frac{(K-N)}{K}N$$

Modelo:

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y^n(x)$$



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$



$$\frac{dN}{dT} = r_{max}\frac{(K-N)}{K}N$$

Sustitución sugerida: $v = y^{1-n}$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \frac{1}{y(x)}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

$$-v' + \frac{v}{x} = x$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x \qquad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x \qquad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x \qquad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \qquad v = -x^2 + cx = \frac{1}{y}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \qquad y' + \frac{y}{x} = xy^2 \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \frac{1}{y(x)} \qquad v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

$$-v' + \frac{v}{x} = x \qquad v' - \frac{v}{x} = -x \qquad \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \qquad v = -x^2 + cx = \frac{1}{y} \qquad y = \frac{1}{-x^2 + cx}$$