

# Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

## 2019

- 1 Rotacional y divergencia de campos vectoriales
- 2 Teorema de Green
  - Repaso del Teorema de Green
  - Otra forma del Teorema de Green
  - Aplicación
- 3 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - Integral de superficie de campos escalares
  - Superficies orientadas
  - Integral de superficie de campos vectoriales
- 4 Teoremas

## Definición

Dado un campo vectorial  $\mathbf{F} = (M, N, P)$ , se definen el rotacional y la divergencia de  $\mathbf{F}$ , respectivamente por

$$\text{rot } \mathbf{F} =$$

# Rotacional y divergencia de campos vectoriales

## Definición

Dado un campo vectorial  $\mathbf{F} = (M, N, P)$ , se definen el rotacional y la divergencia de  $\mathbf{F}$ , respectivamente por  
 $\text{rot } \mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$  y

# Rotacional y divergencia de campos vectoriales

## Definición

Dado un campo vectorial  $\mathbf{F} = (M, N, P)$ , se definen el rotacional y la divergencia de  $\mathbf{F}$ , respectivamente por

$\text{rot } \mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$  y  $\text{div } \mathbf{F} =$

# Rotacional y divergencia de campos vectoriales

## Definición

Dado un campo vectorial  $\mathbf{F} = (M, N, P)$ , se definen el rotacional y la divergencia de  $\mathbf{F}$ , respectivamente por

$$\text{rot } \mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y) \text{ y } \text{div } \mathbf{F} = M_x + N_y + P_z.$$

# Rotacional y divergencia de campos vectoriales

## Definición

Dado un campo vectorial  $\mathbf{F} = (M, N, P)$ , se definen el rotacional y la divergencia de  $\mathbf{F}$ , respectivamente por

$$\text{rot } \mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y) \text{ y } \text{div } \mathbf{F} = M_x + N_y + P_z.$$

**Observación:** una forma conveniente de recordar estas definiciones es por medio del operador  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . Así,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

y

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

# Recorrido

- 1 Rotacional y divergencia de campos vectoriales
- 2 Teorema de Green
  - Repaso del Teorema de Green
  - Otra forma del Teorema de Green
  - Aplicación
- 3 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - Integral de superficie de campos escalares
  - Superficies orientadas
  - Integral de superficie de campos vectoriales
- 4 Teoremas

## AN ESSAY

ON THE

*APPLICATION*

MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF  
ELECTRICITY AND MAGNETISM.

---

BY

G E O R G E   G R E E N.

---

Nottingham:

PRINTED FOR THE AUTHOR, BY T. WHEELHOUSE.

SOLD BY HAMILTON, ADAMS & CO. 35, PATERNOSTER ROW; LONGMAN & CO.; AND W. JOY, LONDON;  
J. DEIGHTON, CAMBRIDGE;

AND S. BENNETT, H. BARNETT, AND W. DARDEN, NOTTINGHAM.

# Teorema de Green (forma tangencial)

## Teorema

Sea  $C$  una curva suave por partes, cerrada, simple que encierra una región  $R$  en el plano. Sea  $\mathbf{F} = (M, N)$  un campo vectorial donde  $M$  y  $N$  tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a  $R$ . Entonces la circulación en sentido antihorario de  $\mathbf{F}$  alrededor de  $C$  es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

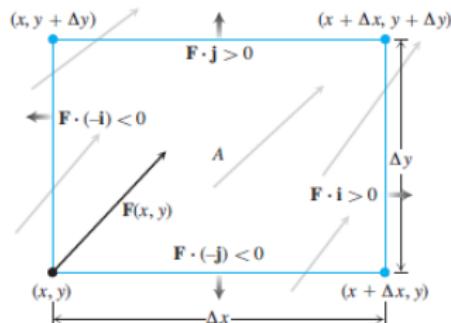
**Observación:** se puede expresar como

$$\oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

Demostración: de Thomas (probamos un caso particular).

- 1 Rotacional y divergencia de campos vectoriales
- 2 Teorema de Green
  - Repaso del Teorema de Green
  - Otra forma del Teorema de Green
  - Aplicación
- 3 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - Integral de superficie de campos escalares
  - Superficies orientadas
  - Integral de superficie de campos vectoriales
- 4 Teoremas

# Divergencia de un campo vectorial



- Arriba:  $\mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot \mathbf{j} \Delta x = N(x, y + \Delta y) \Delta x$   
Abajo:  $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta x = -N(x, y) \Delta x$   
Derecha:  $\mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta y = M(x + \Delta x, y) \Delta y$   
Izquierda:  $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{i}) \Delta y = -M(x, y) \Delta y.$

Arriba y abajo:  $(N(x, y + \Delta y) - N(x, y)) \Delta x \approx \left( \frac{\partial N}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$

Izquierda y derecha:  $(M(x + \Delta x, y) - M(x, y)) \Delta y \approx \left( \frac{\partial M}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y.$

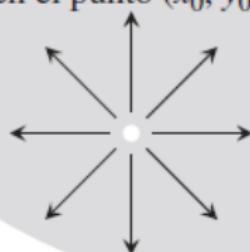
Flujo a través de la frontera del rectángulo  $\approx \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y.$

$$\frac{\text{Flujo a través del rectángulo frontera}}{\text{Área del rectángulo}} \approx \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right).$$

# Divergencia de un campo vectorial

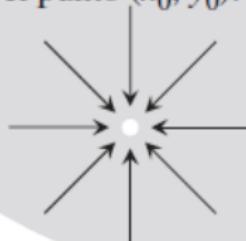
Fuente:  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0) > 0$

Un gas en expansión  
en el punto  $(x_0, y_0)$ .



Sumidero:  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0) < 0$

Un gas en compresión  
en el punto  $(x_0, y_0)$ .



Divergencia nula en todos los puntos: fluido **incompresible**, campo vectorial **solenoidal**.

# Teorema de Green (forma normal)

## Teorema

Sea  $C$  una curva suave por partes, cerrada, simple, positivamente orientada, que encierra una región  $R$  en el plano. Sea  $\mathbf{F} = (M, N)$  un campo vectorial donde  $M$  y  $N$  tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a  $R$ . Entonces el flujo de  $\mathbf{F}$  hacia fuera a través de  $C$  es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

**Observación:** se puede expresar como

$$\oint_C M \, dy - N \, dx = \iint_R \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

# Validez de la forma normal del Teorema de Green

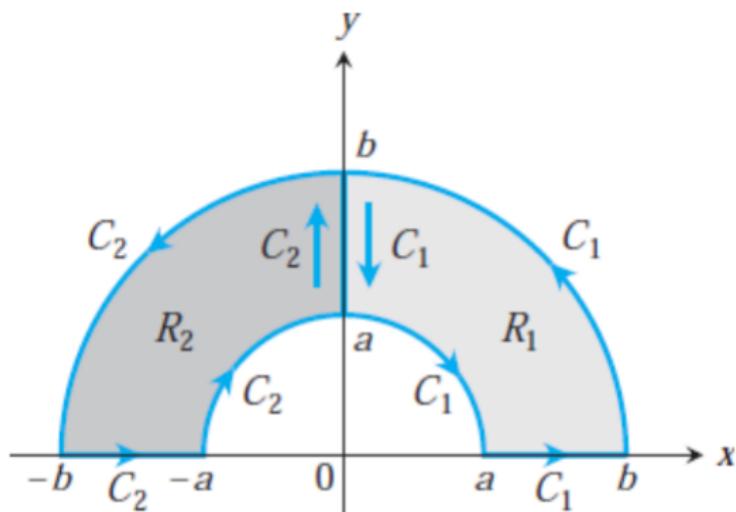
Sea  $C$  una curva suave por partes, cerrada, simple, positivamente orientada, que encierra una región  $R$  en el plano. Sea  $\mathbf{F} = (M, N)$  un campo vectorial donde  $M$  y  $N$  tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a  $R$ .

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \oint_C \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \, ds = \oint_C \mathbf{T} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{F} \, ds = \oint_C \mathbf{k} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \\&= \oint_C (-N, M) \cdot \mathbf{T} \, ds \\&= \iint_R (M_x - (-N)_y) \, dA \quad \text{Teorema de Green aplicado al campo } (-N, M) \\&= \iint_R (M_x + N_y) \, dA = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.\end{aligned}$$

# Recorrido

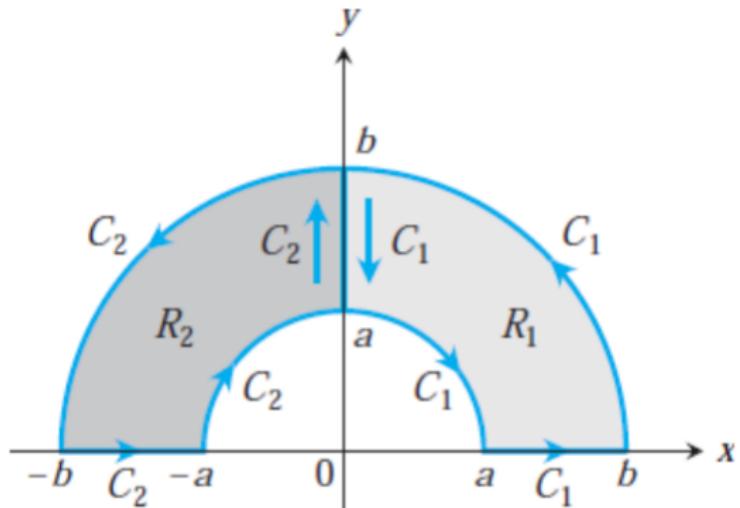
- 1 Rotacional y divergencia de campos vectoriales
- 2 Teorema de Green
  - Repaso del Teorema de Green
  - Otra forma del Teorema de Green
  - Aplicación
- 3 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - Integral de superficie de campos escalares
  - Superficies orientadas
  - Integral de superficie de campos vectoriales
- 4 Teoremas

## Otras regiones

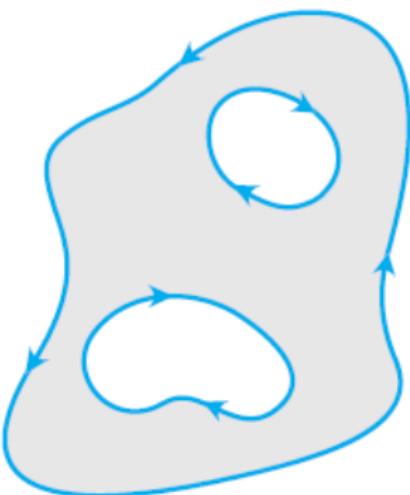


**FIGURA 16.33** Una región  $R$  que combina las regiones  $R_1$  y  $R_2$ .

## Otras regiones



**FIGURA 16.33** Una región  $R$  que combina las regiones  $R_1$  y  $R_2$ .



# Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

$$A = \iint_R 1 \, dA$$

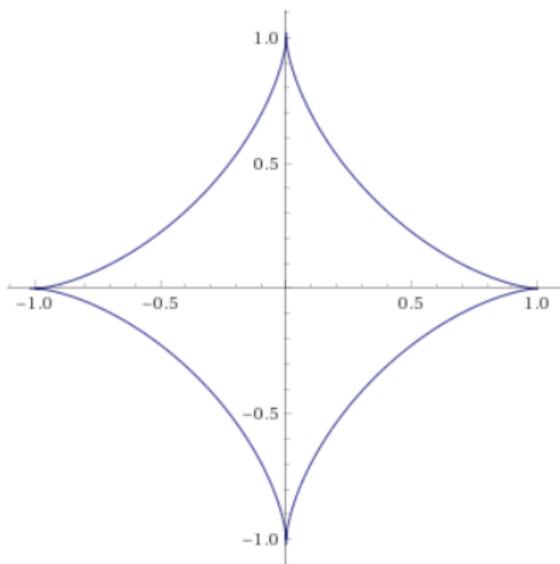
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

$$M := -\frac{y}{2}, \quad N := \frac{x}{2}, \quad \mathbf{F} = \left( -\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \right) \quad (\text{o } M := 0, \quad N := x, \quad \mathbf{F} = (0, x) \text{ o...})$$

$$A = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \oint_C -ydx + xdy$$

# Ejemplo

Hallar el área de la región comprendida dentro de la hipocicloide  
 $\mathbf{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), 0 \leq t \leq 2\pi.$



## Ejemplo

Recordemos que  $\mathbf{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Tomemos  $\mathbf{F} = (0, x)$ :

$$\begin{aligned} A &= \iint_R 1 \, dA = \iint_R (N_x - M_y) \, dA \\ &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (0, \cos^3(t)) \cdot (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t)) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^4(t) 3\sin^2(t) \, dt = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

- 1 Rotacional y divergencia de campos vectoriales
- 2 Teorema de Green
  - Repaso del Teorema de Green
  - Otra forma del Teorema de Green
  - Aplicación
- 3 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - Integral de superficie de campos escalares
  - Superficies orientadas
  - Integral de superficie de campos vectoriales
- 4 Teoremas

# Tres formas de expresar superficies

## Curvas:

Forma explícita:  $y = f(x)$ .

Forma implícita:  $F(x, y) = 0$ .

Forma vectorial paramétrica:  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), a \leq t \leq b$ .

# Tres formas de expresar superficies

## Curvas:

Forma explícita:  $y = f(x)$ .

Forma implícita:  $F(x, y) = 0$ .

Forma vectorial paramétrica:  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ .

## Superficies:

Forma explícita:  $z = f(x, y)$ .

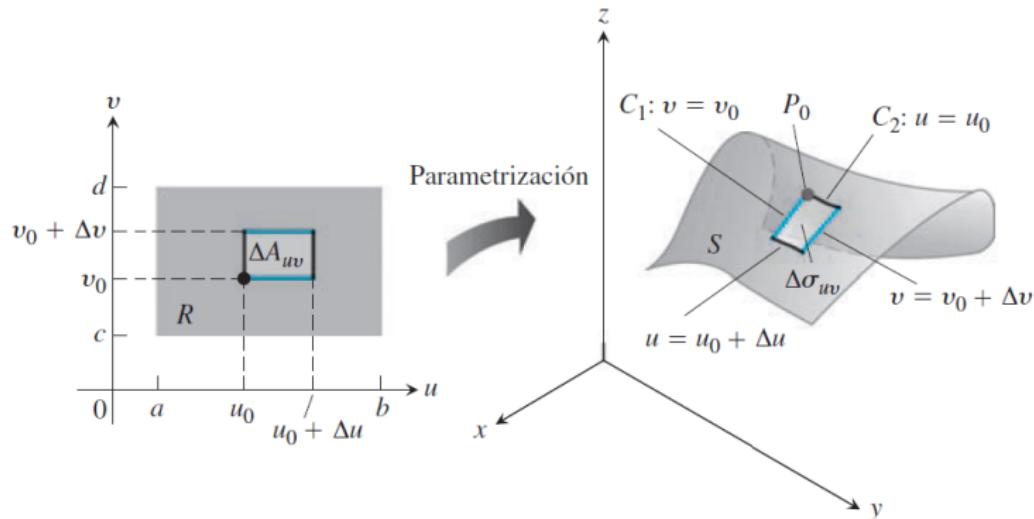
Forma implícita:  $F(x, y, z) = 0$ .

# Parametrizaciones de superficies

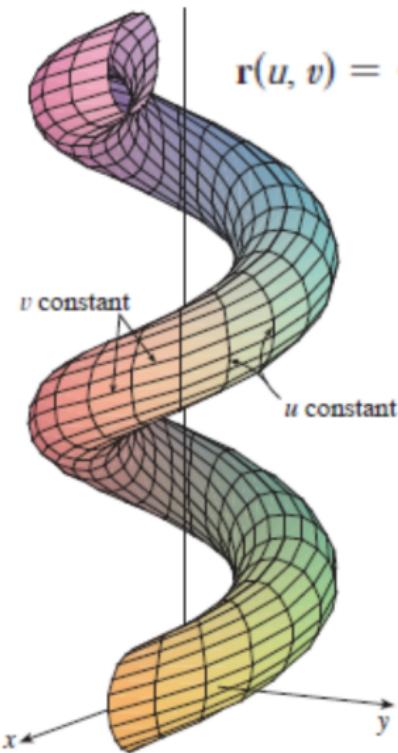
Sea

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R$$

una función vectorial continua definida en una región  $R$  del plano  $uv$ , inyectiva en el interior de  $R$ . El rango de  $\mathbf{r}$  es la superficie  $S$ , parametrizada por  $\mathbf{r}$ ;  $u$  y  $v$  son los parámetros y  $R$  es el dominio de los parámetros.



# Ejemplo superficie paramétrica



$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, u + \cos v \rangle$$

$$0 \leq u \leq 4\pi; 0 \leq v \leq 2\pi$$

# Ejemplos

- 1 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la esfera con centro en el origen y radio 3.

# Ejemplos

- 1 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la esfera con centro en el origen y radio 3.

Solución:  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos \theta \sen \phi, 3 \sen \theta \sen \phi, 3 \cos \phi)$ ,  
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ .

# Ejemplos

- 1 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la esfera con centro en el origen y radio 3.

Solución:  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos \theta \sen \phi, 3 \sen \theta \sen \phi, 3 \cos \phi)$ ,  
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ .

Observar que cuando  $\phi = 0$ ,  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

# Ejemplos

- 1 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la esfera con centro en el origen y radio 3.

Solución:  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos \theta \sen \phi, 3 \sen \theta \sen \phi, 3 \cos \phi)$ ,  
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ .

Observar que cuando  $\phi = 0$ ,  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

- 2 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ .

# Ejemplos

- 1 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la esfera con centro en el origen y radio 3.

Solución:  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos \theta \sin \phi, 3 \sin \theta \sin \phi, 3 \cos \phi)$ ,  
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ .

Observar que cuando  $\phi = 0$ ,  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

- 2 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ .

Solución:  $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1$ .

# Ejemplos

- 1 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la esfera con centro en el origen y radio 3.

Solución:  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos \theta \sen \phi, 3 \sen \theta \sen \phi, 3 \cos \phi)$ ,  
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ .

Observar que cuando  $\phi = 0$ ,  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

- 2 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ .

Solución:  $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sen \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1$ .

- 3 ¿Cómo parametrizamos una superficie  $S$  que es el gráfico de una función  $f$  de dos variables?

# Ejemplos

- 1 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la esfera con centro en el origen y radio 3.

Solución:  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos \theta \sen \phi, 3 \sen \theta \sen \phi, 3 \cos \phi)$ ,  
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ .

Observar que cuando  $\phi = 0$ ,  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

- 2 Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ .

Solución:  $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sen \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1$ .

- 3 ¿Cómo parametrizamos una superficie  $S$  que es el gráfico de una función  $f$  de dos variables?

Solución:  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ ,  $(x, y) \in D(f)$ .

## Definición

Una superficie  $S$  parametrizada por  $\mathbf{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ ,  $(u, v) \in R$ , es suave si

## Definición

Una superficie  $S$  parametrizada por  $\mathbf{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ ,  $(u, v) \in R$ , es suave si  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$  son continuas y

## Definición

Una superficie  $S$  parametrizada por  $\mathbf{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ ,  $(u, v) \in R$ , es suave si  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$  son continuas y  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$  en el interior de  $R$ .

# Área de una superficie suave dada paramétricamente

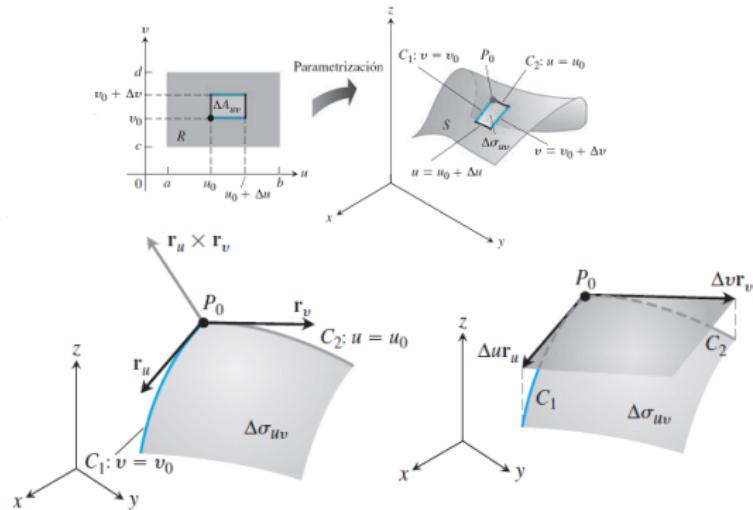
## Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

Dada la superficie suave  $S$  parametrizada por  $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se define el área de  $S$  por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

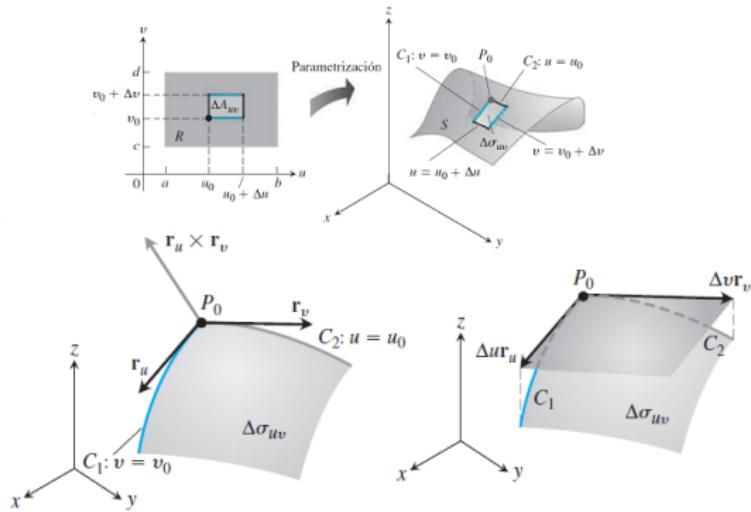
**Observación:** el área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

# Justificación



$$|\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

# Justificación



$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

## Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ , parametrizada por  $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

## Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ , parametrizada por  $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta), \quad |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y| = 2.$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2 dy d\theta = 4\pi.$$

# Recorrido

- 1 Rotacional y divergencia de campos vectoriales
- 2 Teorema de Green
  - Repaso del Teorema de Green
  - Otra forma del Teorema de Green
  - Aplicación
- 3 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - **Integral de superficie de campos escalares**
  - Superficies orientadas
  - Integral de superficie de campos vectoriales
- 4 Teoremas

## Definición

Dados la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  y el campo escalar  $f$  definido en  $S$ , se define la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  por

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du \, dv.$$

# Justificación

Si  $S$  está parametrizada por  $\mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in R$ , tomamos una partición en  $R$  y

$$\begin{aligned}\iint_S f \, d\sigma &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \Delta\sigma_{ij} \\&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) |\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)| \Delta u \Delta v \\ \iint_S f \, d\sigma &= \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du \, dv.\end{aligned}$$

## Ejemplo

Plantee una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  por los planos  $y = 0$  y  $y = 1$  (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z)$ .

## Ejemplo

Plantee una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  por los planos  $y = 0$  y  $y = 1$  (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z)$ .

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta(x, y, z) dA = \iint_R \delta(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta(2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta) 2 dy d\theta. \end{aligned}$$

# Recorrido

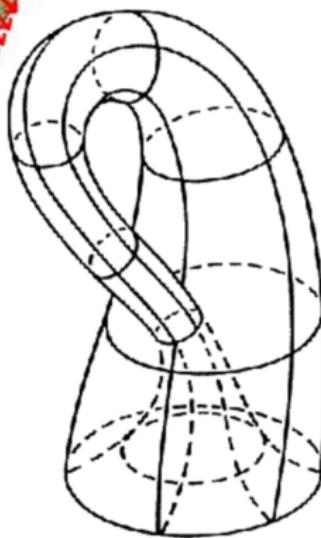
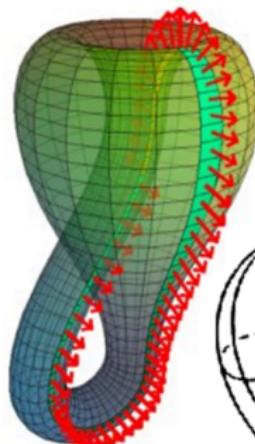
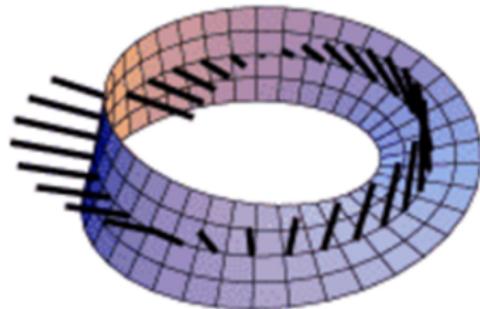
- 1 Rotacional y divergencia de campos vectoriales
- 2 Teorema de Green
  - Repaso del Teorema de Green
  - Otra forma del Teorema de Green
  - Aplicación
- 3 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - Integral de superficie de campos escalares
  - **Superficies orientadas**
  - Integral de superficie de campos vectoriales
- 4 Teoremas

# Superficies orientadas

Ejemplos: cinta de Möbius y botella de Klein.

# Superficies orientadas

Ejemplos: cinta de Möbius y botella de Klein.



## Definición

Una superficie suave  $S$  es **orientable** cuando es posible definir un campo vectorial  $\mathbf{n}$  que a cada punto de  $S$  le asigna un vector normal unitario, que es continuo.

## Definición

Una superficie suave  $S$  es **orientable** cuando es posible definir un campo vectorial  $\mathbf{n}$  que a cada punto de  $S$  le asigna un vector normal unitario, que es continuo.

Una superficie suave  $S$  está orientada cuando se ha definido un tal campo vectorial  $\mathbf{n}$  sobre  $S$ .

# Definición

## Definición

Una superficie suave  $S$  es **orientable** cuando es posible definir un campo vectorial  $\mathbf{n}$  que a cada punto de  $S$  le asigna un vector normal unitario, que es continuo.

Una superficie suave  $S$  está orientada cuando se ha definido un tal campo vectorial  $\mathbf{n}$  sobre  $S$ .

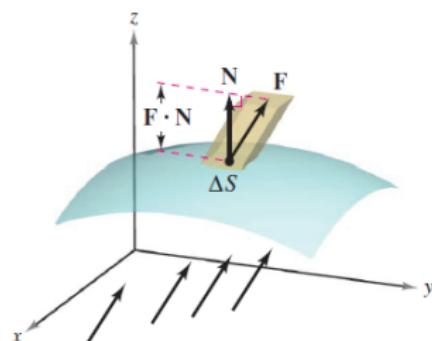
Una superficie suave por partes, **cerrada**, está **orientada positivamente** si el vector normal en cada punto de  $S$  apunta hacia fuera de  $S$ .

- 1 Rotacional y divergencia de campos vectoriales
- 2 Teorema de Green
  - Repaso del Teorema de Green
  - Otra forma del Teorema de Green
  - Aplicación
- 3 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - Integral de superficie de campos escalares
  - Superficies orientadas
  - **Integral de superficie de campos vectoriales**
- 4 Teoremas

# Integral de superficie de campos vectoriales

El **flujo** de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  definido en  $\mathbb{R}^3$  a través de una superficie orientada  $S$  en la dirección de  $\mathbf{n}$  es

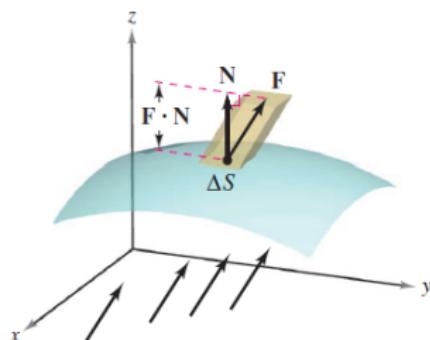
$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



# Integral de superficie de campos vectoriales

El **flujo** de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  definido en  $\mathbb{R}^3$  a través de una superficie orientada  $S$  en la dirección de  $\mathbf{n}$  es

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

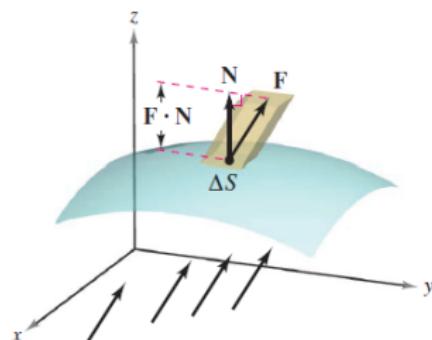


Fórmula de cálculo:

# Integral de superficie de campos vectoriales

El **flujo** de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  definido en  $\mathbb{R}^3$  a través de una superficie orientada  $S$  en la dirección de  $\mathbf{n}$  es

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

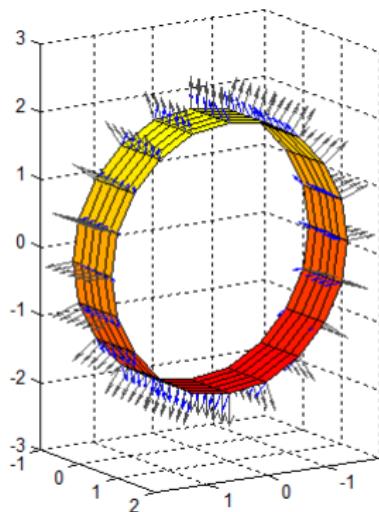


Fórmula de cálculo:

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv.$$

## Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .



## Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .

## Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

## Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

## Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

## Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta) \text{ *hacia dentro!*}$$

## Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta) \text{ *hacia dentro!*}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (y, 2 \cos \theta, 2 \sin \theta) \cdot (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta) dy d\theta$$

## Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

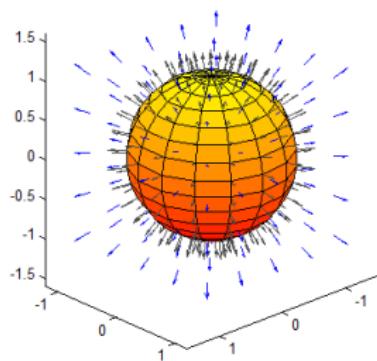
$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

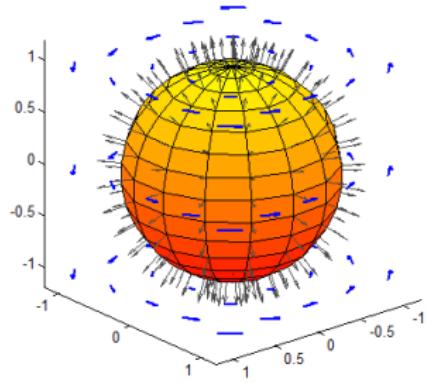
$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta) \text{ *hacia dentro!*}$$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (y, 2 \cos \theta, 2 \sin \theta) \cdot (2 \cos \theta, 0, 2 \sin \theta) dy d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2y \cos \theta + 4 \sin^2 \theta) dy d\theta = 4\pi.\end{aligned}$$

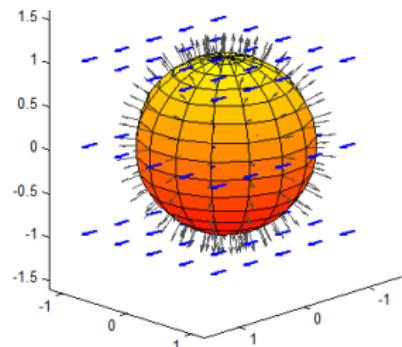
# Ejemplos gráficos



Expansión:  $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$



Rotación:  $\mathbf{F}(x,y,z)=(-y,x,0)$



Constante:  $\mathbf{F}(x,y,z)=(1,0,0)$

## Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  hacia fuera a través de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

## Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  hacia fuera a través de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Rta:

## Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  hacia fuera a través de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Rta:  $4a^3\pi$ .

## Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  hacia fuera a través de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Rta:  $4a^3\pi$ .

Observación: si el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  es  $k$ , ¿necesariamente el flujo a través de una superficie  $S_1$  que es una parte de  $S$  con exactamente la mitad de área que  $S$  es  $k/2$ ?

## Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  hacia fuera a través de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Rta:  $4a^3\pi$ .

Observación: si el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  es  $k$ , ¿necesariamente el flujo a través de una superficie  $S_1$  que es una parte de  $S$  con exactamente la mitad de área que  $S$  es  $k/2$ ?

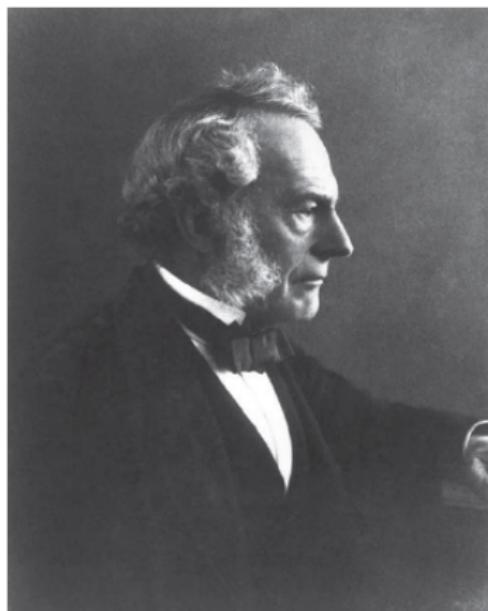


# Teoremas de Stokes y de Gauss

Enunciados por Thomas. Demostraciones por Stewart.

Teorema de Stokes: se ofrece un video con una prueba del mismo en  
<https://www.youtube.com/watch?v=aaJgkbqjCSg>

# Teorema de Stokes: 1850



**GEORGE GABRIEL STOKES  
(1819–1903)**

# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema

Sea  $S$  una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes,  $C$ . Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a  $S$ . Entonces la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie,  $\mathbf{n}$ , es:

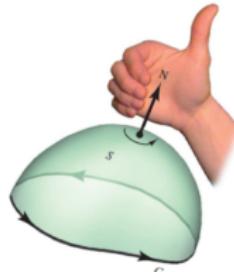
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema

Sea  $S$  una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes,  $C$ . Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a  $S$ . Entonces la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie,  $\mathbf{n}$ , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema

Sea  $S$  una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes,  $C$ . Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a  $S$ . Entonces la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie,  $\mathbf{n}$ , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

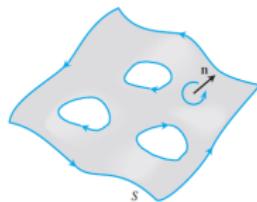
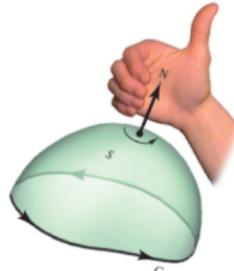


# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema

Sea  $S$  una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes,  $C$ . Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a  $S$ . Entonces la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie,  $\mathbf{n}$ , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



superficies con agujeros

## Ejemplo

Sea  $C$  la curva intersección de las superficies dadas por  $y + z = 2$  y  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ . Plantee una integral para calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

## Ejemplo

Sea  $C$  la curva intersección de las superficies dadas por  $y + z = 2$  y  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ . Plantee una integral para calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

Solución:

## Ejemplo

Sea  $C$  la curva intersección de las superficies dadas por  $y + z = 2$  y  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ . Plantee una integral para calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

Solución:

$$\text{flujo} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

## Ejemplo

Sea  $C$  la curva intersección de las superficies dadas por  $y + z = 2$  y  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ . Plantee una integral para calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

Solución:

$$\text{flujo} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

## Ejemplo

Sea  $C$  la curva intersección de las superficies dadas por  $y + z = 2$  y  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ . Plantee una integral para calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

Solución:

$$\text{flujo} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\text{flujo} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

## Ejemplo

Sea  $C$  la curva intersección de las superficies dadas por  $y + z = 2$  y  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ . Plantee una integral para calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

Solución:

$$\text{flujo} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\text{flujo} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$$\mathbf{r}(r, t) = (r \cos t, r \sin t, 2 - r \sin t), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

## Ejemplo

Sea  $C$  la curva intersección de las superficies dadas por  $y + z = 2$  y  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ . Plantee una integral para calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

Solución:

$$\text{flujo} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\text{flujo} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$$\mathbf{r}(r, t) = (r \cos t, r \sin t, 2 - r \sin t), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 1 + 2y)$$

## Ejemplo

Sea  $C$  la curva intersección de las superficies dadas por  $y + z = 2$  y  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ . Plantee una integral para calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

Solución:

$$\text{flujo} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\text{flujo} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$$\mathbf{r}(r, t) = (r \cos t, r \sin t, 2 - r \sin t), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 1 + 2y)$$

$$\text{flujo} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, 0, 1 + 2r \sin t) \cdot (0, -r, r) dr dt = \pi$$

# Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

## Teorema

Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial definido en un dominio conexo  $D$ , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

- ① Si  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ , entonces  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .
- ② Si  $D$  es simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$  en  $D$ , entonces  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ .

# Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

## Teorema

Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial definido en un dominio conexo  $D$ , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

- ① Si  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ , entonces  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .
  - ② Si  $D$  es simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$  en  $D$ , entonces  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ .
- 
- 1 Supongamos que  $\mathbf{F}$  es conservativo. Entonces es el gradiente de alguna función potencial  $f$ . Probemos que  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$  componente a componente. TAREA.

# Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

## Teorema

Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial definido en un dominio conexo  $D$ , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

- ① Si  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ , entonces  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .
- ② Si  $D$  es simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$  en  $D$ , entonces  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ .

# Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

## Teorema

Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial definido en un dominio conexo  $D$ , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

- 1 Si  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ , entonces  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .
  - 2 Si  $D$  es simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$  en  $D$ , entonces  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ .
- 2 Supongamos que  $D$  es conexo y simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$  en  $D$ .

# Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

## Teorema

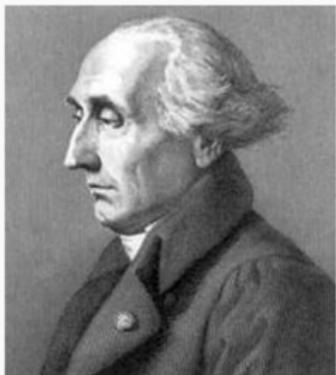
Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial definido en un dominio conexo  $D$ , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

- ① Si  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ , entonces  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .
  - ② Si  $D$  es simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$  en  $D$ , entonces  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ .
- 2 Supongamos que  $D$  es conexo y simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$  en  $D$ . Aplicando un teorema de Topología, dado que  $D$  es simplemente conexa, se puede asegurar que existe una superficie  $S$  en  $D$  que tiene como “frontera” a la curva  $C$ . Así:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. Q.E.D.$$

# Teorema de la divergencia de Gauss

Joseph-Louis Lagrange



Joseph-Louis (Giuseppe Luigi),  
comte de Lagrange

Born	Giuseppe Lodovico Lagrangia 25 January 1736 Turin, Piedmont-Sardinia
Died	10 April 1813 (aged 77) Paris, France

Lagrange 1762

Johann Carl Friedrich Gauss



Carl Friedrich Gauß (1777–1855), painted by  
Christian Albrecht Jensen

Born	Johann Carl Friedrich Gauss 30 April 1777 Brunswick, Duchy of Brunswick-Wolfenbüttel, Holy Roman Empire
Died	23 February 1855 (aged 77) Göttingen, Kingdom of Hanover

Gauss 1813

Mikhail Ostrogradsky



Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky

Born	September 24, 1801 Pashennaya
Died	January 1, 1862 (aged 60) Poltava

Ostrogradsky 1826

# Teorema de la divergencia de Gauss

## Teorema

Sea  $S$  una superficie ***cerrada*** positivamente orientada, suave por partes, sea  $D$  la región sólida encerrada por  $S$  y sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a  $S$ . Entonces el flujo de  $\mathbf{F}$  a través hacia fuera de  $S$  es:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

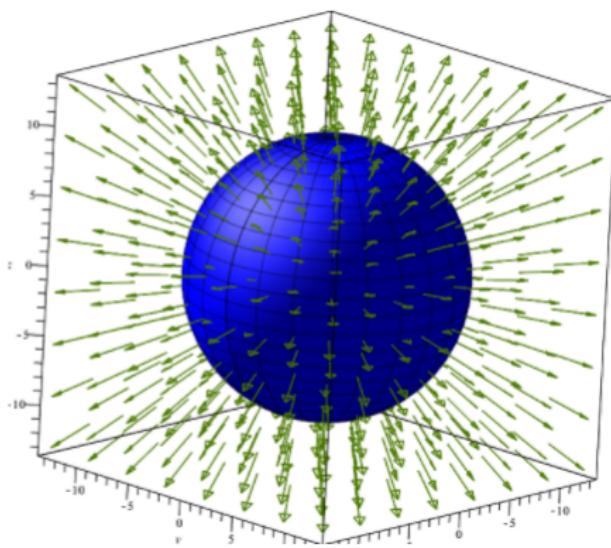
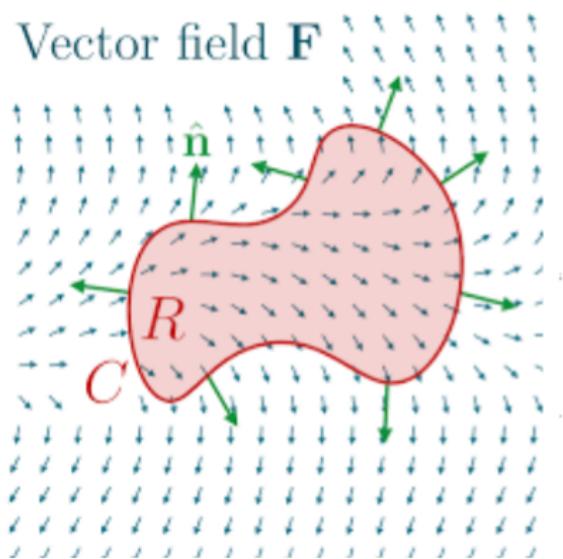
SIN DEMOSTRAR

## Comparar teoremas de Green, Gauss y Stokes

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy;$$

$$\oint\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

## Vector field $\mathbf{F}$



# Ley de Gauss y Ley de Faraday

Leyes de Gauss y de Faraday:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

# Ley de Gauss y Ley de Faraday

Leyes de Gauss y de Faraday:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Aplicando los Teoremas de Gauss y de Stokes (respectivamente):

# Ley de Gauss y Ley de Faraday

Leyes de Gauss y de Faraday:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Aplicando los Teoremas de Gauss y de Stokes (respectivamente):

$$\iint_S E \cdot \mathbf{n} d\sigma =$$

# Ley de Gauss y Ley de Faraday

Leyes de Gauss y de Faraday:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Aplicando los Teoremas de Gauss y de Stokes (respectivamente):

$$\iint_S E \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} E dV$$

# Ley de Gauss y Ley de Faraday

Leyes de Gauss y de Faraday:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Aplicando los Teoremas de Gauss y de Stokes (respectivamente):

$$\iint_S E \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} E dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho dV =$$

# Ley de Gauss y Ley de Faraday

Leyes de Gauss y de Faraday:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Aplicando los Teoremas de Gauss y de Stokes (respectivamente):

$$\iint_S E \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} E dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

# Ley de Gauss y Ley de Faraday

Leyes de Gauss y de Faraday:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Aplicando los Teoremas de Gauss y de Stokes (respectivamente):

$$\iint_S E \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} E dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_C E \cdot d\mathbf{r} =$$

# Ley de Gauss y Ley de Faraday

Leyes de Gauss y de Faraday:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Aplicando los Teoremas de Gauss y de Stokes (respectivamente):

$$\iint_S E \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} E dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_C E \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times E \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

# Ley de Gauss y Ley de Faraday

Leyes de Gauss y de Faraday:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Aplicando los Teoremas de Gauss y de Stokes (respectivamente):

$$\iint_S E \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} E dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_C E \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times E \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_S -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$