Integrales de línea de campos escalares. Campos vectoriales. Integrales de línea de campos vectoriales.

Ingeniería

2019

Recorrido

Recorrido

Definición

Definición

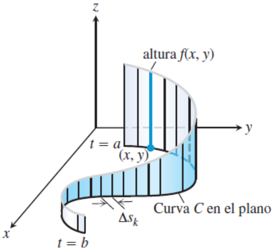
Dada una curva suave C y una representación paramétrica suave de la misma, $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, y dado un campo escalar f definido en una región abierta D, que contiene a C, se define la integral de línea de f a lo largo de C por

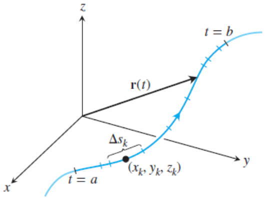
$$\int_C f\, ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Observación:

El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C.

Justificación

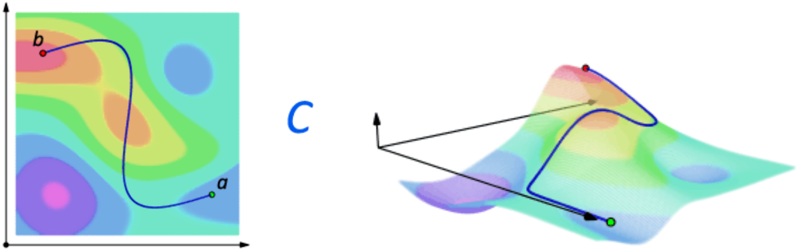




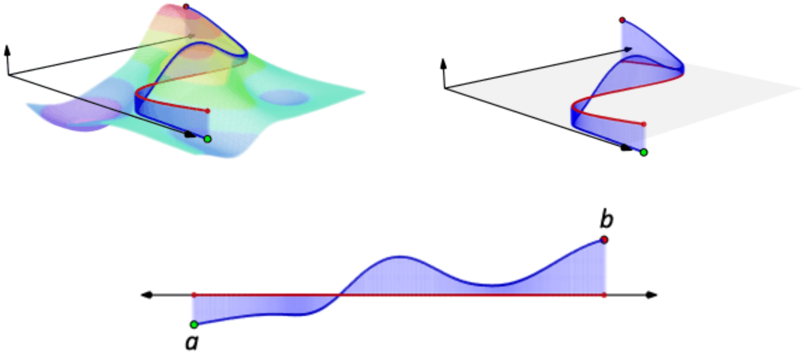
Una partición en $[a, b]$ induce una partición en C.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{r}(t_k))\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{r}(t_k))|\mathbf{r}'(t_k)|\Delta t_k.$$

Interpretación



Interpretación



$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt.$$

Imágenes tomadas del sitio web de Khan Academy.

Recorrido

1. Integrales de línea de campos escalares
   - Definición de integrales de línea de campos escalares
   - Propiedades
2. Campos vectoriales
3. Integrales de línea de campos vectoriales
   - Definición y cálculo de integrales de línea de campos vectoriales
   - Interpretación: trabajo y flujo
   - Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales
   - Teoremas
     - Teorema fundamental de integrales de línea
     - Teorema: los campos conservativos son campos gradientes
     - Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos
     - Teorema: criterio de componentes para campos conservativos
   - Teorema de Green en el plano

Propiedades

(Sin demostración)

1. Aditividad: si la curva C se forma uniendo dos curvas suaves, C_1 y C_2, de manera que el extremo final de C_1 es el extremo inicial de C_2, entonces $\int_C f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \int_{C_2} f\, ds$.
2. Independencia de la parametrización: $\int_{C_1} f\, ds = \int_{C_2} f\, ds$ si C_1 y C_2 están formadas por el mismo conjunto de puntos del plano.
3. Dependencia de la trayectoria: en general, $\int_{C_1} f\, ds \neq \int_{C_2} f\, ds$ si C_1 y C_2 son dos curvas suaves distintas, aún en el caso en que las curvas tengan los mismos punto inicial y punto final.

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ y sobre la curva $x^2 + y^2 = 4$.

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ y sobre la curva $x^2 + y^2 = 4$.
$\mathbf{r}_1(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq \pi$; $\mathbf{r}_1'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t)$; $|\mathbf{r}_1'(t)| = 2$

$$A = \int_{C_1} f\, ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}_1(t))|\mathbf{r}_1'(t)|dt = \int_0^{\pi} (12\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2\, t)\, 2\, dt = 16\pi$$

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

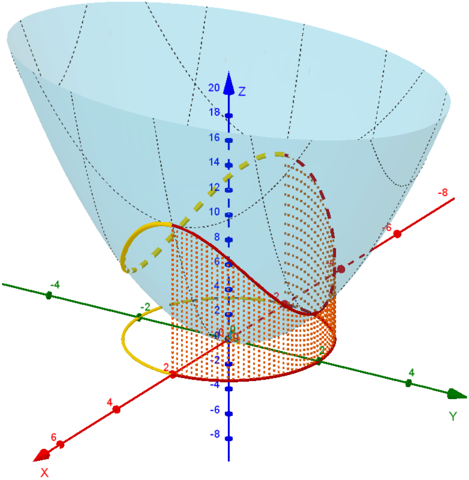
Calcule el área bajo el gráfico de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ y sobre la curva $x^2 + y^2 = 4$.
$\mathbf{r}_1(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq \pi$; $\mathbf{r}_1'(t) = (-2\,\text{sen}\, t, 2\cos t)$; $|\mathbf{r}_1'(t)| = 2$

$$A = \int_{C_1} f\, ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}_1(t))|\mathbf{r}_1'(t)|dt = \int_0^{\pi} (12\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2\, t)\, 2\, dt = 16\pi$$

$\mathbf{r}_2(t) = (2\cos(2t), 2\,\text{sen}(2t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
$\mathbf{r}_2'(t) = (-4\,\text{sen}(2t), 4\cos(2t))$; $|\mathbf{r}_2'(t)| = 4$

$$A = \int_{C_2} f\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\mathbf{r}_2(t))|\mathbf{r}_2'(t)|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (12\cos^2(2t) + 4\,\text{sen}^2(2t))\, 4\, dt$$

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria



Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre el segmento desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$.

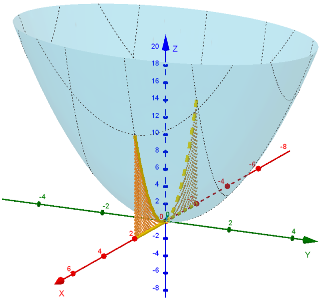
Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ y sobre el segmento desde $(2, 0)$ hasta $(-2, 0)$.
$\mathbf{r}_3(t) = (2 - t, 0)$, $0 \leq t \leq 4$; $\mathbf{r}_3'(t) = (-1, 0)$; $|\mathbf{r}_3'(t)| = 1$

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre el segmento desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$.
$\mathbf{r}_3(t) = (2-t, 0)$, $0 \leq t \leq 4$; $\mathbf{r}_3'(t) = (-1, 0)$; $|\mathbf{r}_3'(t)| = 1$

$$A = \int_{C_3} f\, ds = \int_0^4 f(\mathbf{r}_3(t))|\mathbf{r}_3'(t)|dt = \int_0^4 3(2-t)^2\, dt = 16$$



Campo vectorial

Definición

Un campo vectorial es una función $\mathbf{F}$ que asigna un vector a cada punto de su dominio,

$$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Así, a cada vector $(x_1, ..., x_n) \in A$, $\mathbf{F}$ le asigna un vector de $\mathbb{R}^m$ dado por

$$\mathbf{F}(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n));$$

las funciones $f_1, ..., f_m$ se llaman funciones componentes de $\mathbf{F}$.

Campo vectorial

Definición

Un campo vectorial es una función **F** que asigna un vector a cada punto de su dominio,

$$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Así, a cada vector $(x_1, ..., x_n) \in A$, **F** le asigna un vector de $\mathbb{R}^m$ dado por

$$\mathbf{F}(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n));$$

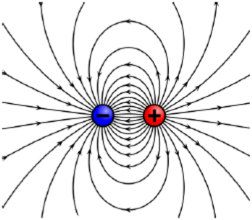
las funciones $f_1, ..., f_m$ se llaman funciones componentes de **F**.

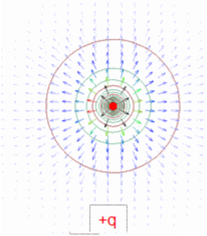
Un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ es de la forma

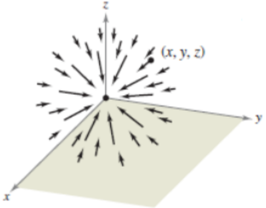
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)),$$

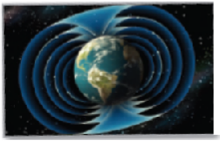
y se presenta, por ejemplo, en los campos de velocidades en un fluido; en los campos gradientes; en los campos de fuerzas en el espacio; en los campos eléctricos, magnéticos o gravitatorios en el espacio, etc.

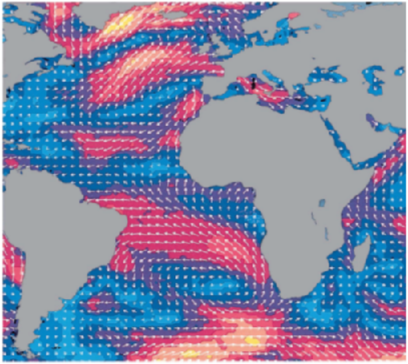
Campos vectoriales



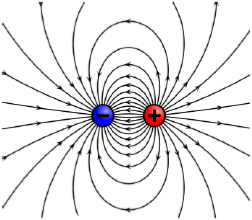


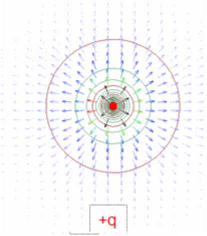


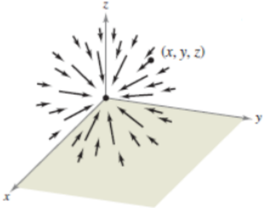


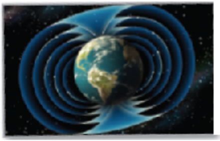


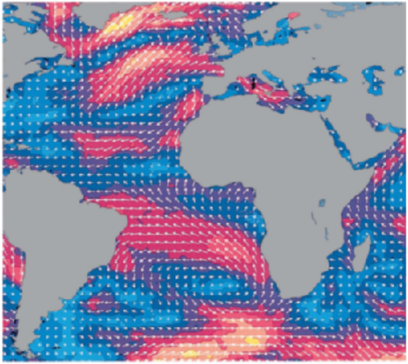
Campos vectoriales











El gradiente de un campo escalar f, es un campo vectorial.

Recorrido

Definición de integrales de línea de campos vectoriales

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial acotado y con componentes continuas definidas sobre una curva suave C. Se define la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ y se denota por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds.$$

Definición de integrales de línea de campos vectoriales

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial acotado y con componentes continuas definidas sobre una curva suave C. Se define la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ y se denota por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Fórmula de cálculo: si C está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Observaciones

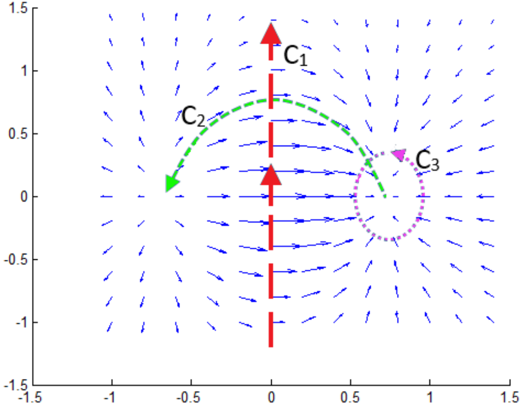
Observación 1:
El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C.

Observación 2:
Se tiene que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ si $-C$ es la curva formada por los mismos puntos pero recorrida en sentido contrario.

Observación 3:
Se puede calcular integrales de línea en curvas suaves por partes, sumando las integrales de las porciones suaves que la forman.

Ejemplo tomado en examen

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



Indique los signos de $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ y de $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$.

Recorrido

Si **F** representa un campo de fuerzas (una fuerza variable), el **trabajo** que realiza **F** sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de una curva C es $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Aplicaciones a la física

Si $\mathbf{F}$ representa un campo de fuerzas (una fuerza variable), el **trabajo** que realiza $\mathbf{F}$ sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de una curva C es $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial (por ejemplo de velocidades), la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ se llama flujo de $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

Aplicaciones a la física

Si $\mathbf{F}$ representa un campo de fuerzas (una fuerza variable), el **trabajo** que realiza $\mathbf{F}$ sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de una curva C es $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial (por ejemplo de velocidades), la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ se llama flujo de $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

Si C es cerrada, el flujo de $\mathbf{F}$ a lo largo de C se llama circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

Aplicaciones a la física

Si **F** representa un campo de fuerzas (una fuerza variable), el **trabajo** que realiza **F** sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de una curva C es $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Si **F** es un campo vectorial (por ejemplo de velocidades), la integral de línea de la componente tangencial de **F** se llama flujo de **F** a lo largo de C.

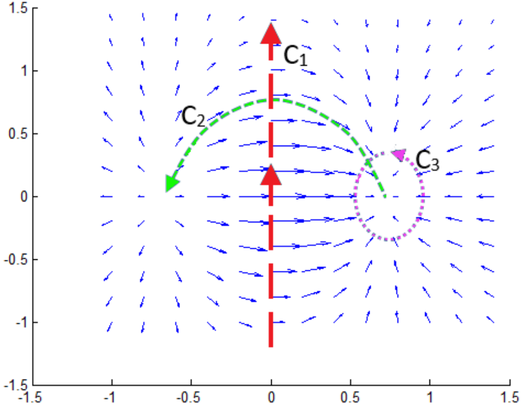
Si C es cerrada, el flujo de **F** a lo largo de C se llama circulación de **F** a lo largo de C.

Si C es una curva plana simple y cerrada , el flujo de **F** a través de C es la integral de línea de la componente normal hacia fuera de **F** a lo largo de C:

$$\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

Ejemplo tomado en examen

Sean el campo vectorial **F** y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



Indique el signo de $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$.

Ejemplo

Ejemplo:
Dado $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x)$ determinar
a) la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \leq t \leq 2\pi)$.
b) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C.

Ejemplo

Ejemplo:
Dado $\mathbf{F}(x,y) = (x-y,x)$ determinar
a) la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \leq t \leq 2\pi)$.
b) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C.

---

a) Circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen} t\cos t)dt = 2\pi$$

Ejemplo

Ejemplo: Dado $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x)$ determinar
a) la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \leq t \leq 2\pi)$.
b) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C.

Ejemplo

Ejemplo: Dado $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x)$ determinar
a) la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \leq t \leq 2\pi)$.
b) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C.

---

b) Flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C: $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$

$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$ (en curvas con orientación positiva) (o $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{T}$ en otro caso).
En nuestro caso, $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{n}\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t) dt = \pi$$

Integral de línea con respecto a los ejes coordenados

Observación: sean $\mathbf{F} = (M, N)$ y C, dada por $\mathbf{r}(t)$ $(a \leq t \leq b)$:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [M(x(t), y(t))\, x'(t) + N(x(t), y(t))\, y'(t)] dt \\
&= \int_a^b M(x(t), y(t)) x'(t)\, dt + \int_a^b N(x(t), y(t)) y'(t) dt \\
&= \int_C M\, dx + \int_C N\, dy = \int_C M\, dx + N\, dy
\end{aligned}$$

Integral de línea con respecto a los ejes coordenados

Observación: sean $\mathbf{F} = (M, N)$ y C, dada por $\mathbf{r}(t)$ $(a \leq t \leq b)$:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b [M(x(t), y(t))\, x'(t) + N(x(t), y(t))\, y'(t)] dt \\
&= \int_a^b M(x(t), y(t)) x'(t)\, dt + \int_a^b N(x(t), y(t)) y'(t) dt \\
&= \int_C M\, dx + \int_C N\, dy = \int_C M\, dx + N\, dy
\end{aligned}$$

Si f es un campo escalar,

$$\int_C f\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t)\, dt \quad \text{y} \quad \int_C f\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t)\, dt.$$

Otra expresión para $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$

Observación: sean $\mathbf{F} = (M, N)$ y C, dada por $\mathbf{r}(t)$ $(a \leq t \leq b)$:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_C \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}\, ds \\
&= \int_C \mathbf{T} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{F}\, ds \\
&= \int_C \mathbf{k} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad \text{por propiedad del producto mixto}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{F} = (-N, M)$$

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_C (-N, M) \cdot \mathbf{T}\, ds \\
&= \int_a^b [-N\, x'(t) + M\, y'(t)]\, dt = \int_C M\, dy - N\, dx
\end{aligned}$$

Recorrido

1. Integrales de línea de campos escalares
   - Definición de integrales de línea de campos escalares
   - Propiedades
2. Campos vectoriales
3. Integrales de línea de campos vectoriales
   - Definición y cálculo de integrales de línea de campos vectoriales
   - Interpretación: trabajo y flujo
   - Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales
   - Teoremas
     - Teorema fundamental de integrales de línea
     - Teorema: los campos conservativos son campos gradientes
     - Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos
     - Teorema: criterio de componentes para campos conservativos
   - Teorema de Green en el plano

Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido en una región abierta D tal que para cualesquiera dos puntos A y B de D, la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una curva C desde A hasta B en D es la misma sobre todas las trayectorias desde A hasta B. Entonces la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D y el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo en D.

Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido en una región abierta D tal que para cualesquiera dos puntos A y B de D, la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una curva C desde A hasta B en D es la misma sobre todas las trayectorias desde A hasta B. Entonces la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D y el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo en D.

Definición

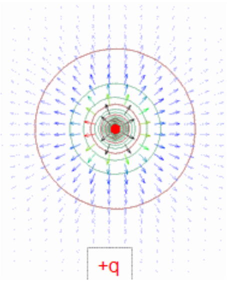
Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en una región abierta D y $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función escalar f en D, entonces f se llama función potencial de $\mathbf{F}$.

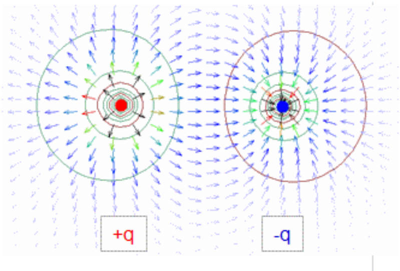
Líneas de flujo de campos vectoriales

Las líneas de flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ son aquellas curvas en el dominio de $\mathbf{F}$, tales que el vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ es tangente a la curva en cada punto (x, y, z) del dominio de $\mathbf{F}$.

Líneas de flujo de campos vectoriales

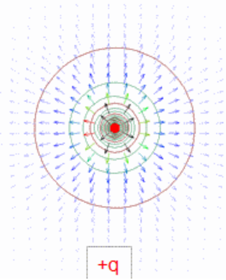
Las líneas de flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ son aquellas curvas en el dominio de $\mathbf{F}$, tales que el vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ es tangente a la curva en cada punto (x, y, z) del dominio de $\mathbf{F}$. ¿Cuáles son las líneas de flujo en campos eléctricos generados por una carga puntual o por un dipolo?

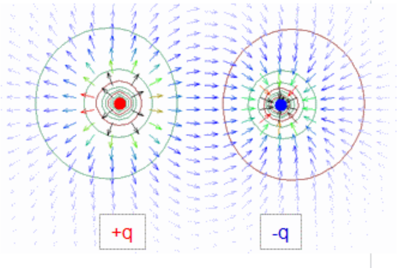




Líneas de flujo de campos vectoriales

Las líneas de flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ son aquellas curvas en el dominio de $\mathbf{F}$, tales que el vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ es tangente a la curva en cada punto (x, y, z) del dominio de $\mathbf{F}$. ¿Cuáles son las líneas de flujo en campos eléctricos generados por una carga puntual o por un dipolo?





Si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función potencial f, las líneas de flujo de $\mathbf{F}$ son ortogonales a las curvas de nivel de f (curvas equipotenciales) en cada punto.

Recorrido

Supuestos sobre curvas, campos vectoriales y dominios

SUPUESTOS:

Supuestos sobre curvas, campos vectoriales y dominios

SUPUESTOS:
1) Todas las curvas son suaves por partes (nro. finito curvas suaves unidas).

Supuestos sobre curvas, campos vectoriales y dominios

SUPUESTOS:
1) Todas las curvas son suaves por partes (nro. finito curvas suaves unidas).
2) Los campos vectoriales tienen componentes con primeras derivadas parciales continuas.

Supuestos sobre curvas, campos vectoriales y dominios

SUPUESTOS:

1) Todas las curvas son suaves por partes (nro. finito curvas suaves unidas).

2) Los campos vectoriales tienen componentes con primeras derivadas parciales continuas.

3) Los dominios D son regiones abiertas, **conexas y simplemente conexas**.

Supuestos sobre curvas, campos vectoriales y dominios

SUPUESTOS:
1) Todas las curvas son suaves por partes (nro. finito curvas suaves unidas).
2) Los campos vectoriales tienen componentes con primeras derivadas parciales continuas.
3) Los dominios D son regiones abiertas, **conexas y simplemente conexas**.
Ejemplos:
3.1) Mapa de Mendoza (conexo, simplemente conexo);
3.2) Mapa de Argentina (no conexo, simplemente conexo);
3.3) $\mathbb{R}^2$ sin el origen (conexo, no simplemente conexo);
3.4) $\mathbb{R}^3$ sin el origen (conexo, simplemente conexo);
3.5) $\mathbb{R}^3$ sin un eje coordenado (conexo, no simplemente conexo);
3.6) Un toroide (rosquita) (conexo, no simplemente conexo).

Teorema fundamental de integrales de línea

Teorema (Teorema Fundamental de integrales de línea)

Sea C una curva suave que une el punto A con el punto B en el plano o en el espacio, parametrizada por $\mathbf{r}$. Sea f una función diferenciable con un vector gradiente continuo en una región D que contiene a C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Demostrar.

Teorema: los campos conservativos son campos gradientes

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta* D *en el espacio. Entonces* $\mathbf{F}$ *es un campo conservativo si y sólo si* $\mathbf{F}$ *es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable* f.

Demostrar:

Teorema: los campos conservativos son campos gradientes

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta D en el espacio. Entonces $\mathbf{F}$ es un campo conservativo si y sólo si $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable f.

Demostrar:

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función diferenciable f. Según el T.F. de integrales de línea, $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$: solo depende de los puntos A y B, no de la trayectoria, cualesquiera sean A y B en D. Luego $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D. En consecuencia, $\mathbf{F}$ es conservativo en D.

Teorema: los campos conservativos son campos gradientes

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta* D *en el espacio. Entonces* $\mathbf{F}$ *es un campo conservativo si y sólo si* $\mathbf{F}$ *es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable* f.

Demostrar:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo en D, es decir que la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D.

PASOS:

1) Definimos f en D;

2) Probamos que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Teorema: los campos conservativos son campos gradientes

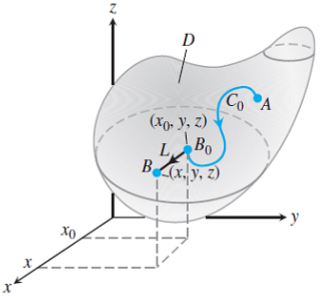
1) Elegimos $A \in D$, arbitrario fijo, y definimos f así:

$$f(A) = 0 \qquad f(B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ para cualquier otro punto } B \in D.$$

Note la importancia de la hipótesis de ser conexo D.

2) Basta probar que
$f_x(x, y, z) = M(x, y, z);\ f_y(x, y, z) = N(x, y, z);\ f_z(x, y, z) = P(x, y, z).$

2) Probemos que $f_x(x, y, z) = M(x, y, z)$;



$$\mathbf{r}(t) = (t, y, z),\ x_0 \leq t \leq x$$

Análogamente se prueba que $f_y(x, y, z) = N(x, y, z)$ y que $f_z(x, y, z) = P(x, y, z)$.

Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Demostrar: TAREA.

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo* D*, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:*

1. *Si* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D*, entonces* $\mathbf{rot F} = \mathbf{0}$.
2. *Si* D *es simplemente conexo y* $\mathbf{rot F} = \mathbf{0}$ *en* D*, entonces* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D.

Demostración:

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo* D, *cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:*

1. *Si* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D, *entonces* $\mathbf{rotF} = \mathbf{0}$.
2. *Si* D *es simplemente conexo y* $\mathbf{rotF} = \mathbf{0}$ *en* D, *entonces* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D.

Demostración:

Definamos rot $\mathbf{F}$.

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo* D*, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:*

1. *Si* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D*, entonces* $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.
2. *Si* D *es simplemente conexo y* $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ *en* D*, entonces* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D.

Demostración:

Definamos $\operatorname{rot}\mathbf{F}$.

1. Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo y probemos que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. TAREA.

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo* D*, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:*

1. *Si* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D*, entonces* $\mathbf{rotF} = \mathbf{0}$.
2. *Si* D *es simplemente conexo y* $\mathbf{rotF} = \mathbf{0}$ *en* D*, entonces* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D.

Demostración:
Definamos $\text{rot}\,\mathbf{F}$.

1. Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo y probemos que $\text{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. TAREA.
2. Se probará después de haber probado el Teorema de Stokes.

Hallar la función potencial de un campo conservativo

Sea $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x, 0)$.
a) Determine si $\mathbf{F}$ es o no conservativo (¿dónde?)
b) En caso afirmativo, halle una función potencial de $\mathbf{F}$, f. Si no, explique por qué.

Hallar la función potencial de un campo conservativo

Sea $\mathbf{F}(x,y) = (x+y, x, 0)$.
a) Determine si $\mathbf{F}$ es o no conservativo (¿dónde?)
b) En caso afirmativo, halle una función potencial de $\mathbf{F}$, f. Si no, explique por qué.

---

a) $\mathbf{rotF} = (0,0,0)$ y $D(\mathbf{F}) = \mathbb{R}^3$, luego $\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$.

Hallar la función potencial de un campo conservativo

$\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x, 0)$; halle una función potencial de $\mathbf{F}$, f.

Hallar la función potencial de un campo conservativo

$\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x, 0)$; halle una función potencial de $\mathbf{F}$, f.

Se busca f tal que $(x + y, x, 0) = (f_x, f_y, f_z)$.

$f(x, y, z) = \int (x + y)\, dx = \frac{x^2}{2} + xy + g(y, z)$, donde *g(y,z)* es la constante

$$f_y(x, y, z) = x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy + g(y, z)\right) = x \Rightarrow y + g_y(y, z) = x$$

$$\Rightarrow g_y(y, z) = x - y \Rightarrow g(y, z) = \int (x - y)\, dy = xy - \frac{y^2}{2} + h(z)$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xy + xy - \frac{y^2}{2} + h(z) == \frac{x^2}{2} + 2xy - \frac{y^2}{2} + h(z)$$

$$f_z(x, y, z) = 0 \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = cte.$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 2xy - \frac{y^2}{2} + C.$$

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z)\, dx + N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M\, dx + N\, dy + P\, dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

para alguna función escalar f a través de D.

Formas diferenciales exactas

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z)\, dx + N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

para alguna función escalar f a través de D.

$$\begin{aligned}
\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz &= \int_C \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\
&= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} && \nabla f \text{ es conservativo.} \\
&= f(B) - f(A). && \text{Teorema 1}
\end{aligned}$$

Formas diferenciales exactas

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z)\, dx + N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M\, dx + N\, dy + P\, dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

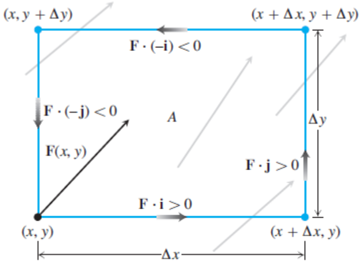
para alguna función escalar f a través de D.

Criterio de los componentes para determinar si $M\, dx + N\, dy + P\, dz$ es exacta
La forma diferencial $M\, dx + N\, dy + P\, dz$ es exacta en un dominio conexo y simplemente conexo si y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Esto equivale a decir que el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo.

Recorrido



Arriba: $\mathbf{F}(x, y+\Delta y)\cdot(-\mathbf{i})\,\Delta x = -M(x, y+\Delta y)\Delta x$

Abajo: $\mathbf{F}(x, y)\cdot\mathbf{i}\,\Delta x = M(x, y)\Delta x$

Derecha: $\mathbf{F}(x+\Delta x, y)\cdot\mathbf{j}\,\Delta y = N(x+\Delta x, y)\Delta y$

Izquierda: $\mathbf{F}(x, y)\cdot(-\mathbf{j})\,\Delta y = -N(x, y)\Delta y.$

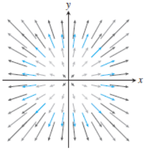
Arriba y abajo: $-(M(x, y+\Delta y) - M(x, y))\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$

Derecha e izquierda: $(N(x+\Delta x, y) - N(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.$

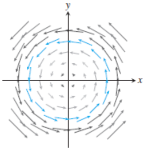
La densidad de circulación de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ en el punto (x, y) es el componente k del rot $\mathbf{F}$: $(\text{rot}\,\mathbf{F})\cdot k$:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Componente k del rotacional



(a)



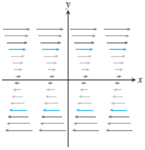
(b)

(a) *Expansión o compresión uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = cx\,\mathbf{i} + cy\,\mathbf{j}$

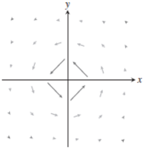
(a) *Expansión uniforme:* $(\text{rot }\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \dfrac{\partial}{\partial x}(cy) - \dfrac{\partial}{\partial y}(cx) = 0.$

(b) *Rotación uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = -cy\,\mathbf{i} + cx\,\mathbf{j}$

(b) *Rotación:* $(\text{rot }\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \dfrac{\partial}{\partial x}(cx) - \dfrac{\partial}{\partial y}(-cy) = 2c.$



(c)



(d)

(c) *Flujo cortante:* $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i}$

(c) *Corte:* $(\text{rot }\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = -\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = -1.$

(d) *Efecto remolino:* $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}$

(d) *Remolino:*

$$(\text{rot }\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Teorema de Green

Teorema

Sea C una curva suave por partes, cerrada simple que encierra una región R en el plano. Sea $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo vectorial donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R. Entonces la circulación en sentido antihorario de $\mathbf{F}$ alrededor de C es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Teorema de Green

Teorema

Sea C una curva suave por partes, cerrada simple que encierra una región R en el plano. Sea $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo vectorial donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R. Entonces la circulación en sentido antihorario de $\mathbf{F}$ alrededor de C es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Demostración: de Thomas (probamos un caso particular).