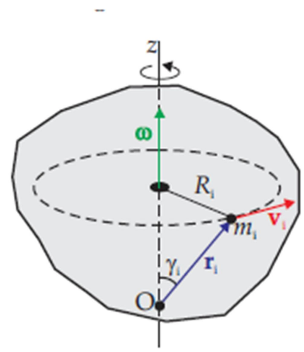
Movimiento de rototraslación
El caso más general de movimiento del que puede estar animado un cuerpo rígido es el de rototraslación, es decir, el movimiento compuesto por un movimiento de traslación y otro de rotación alrededor de un eje cualquiera.
Las características de este movimiento son:
1) Traslación: Como el cuerpo es rígido todos sus puntos al trasladarse lo hacen con la misma velocidad de traslación, $\boldsymbol{v}_{TRAS}$.

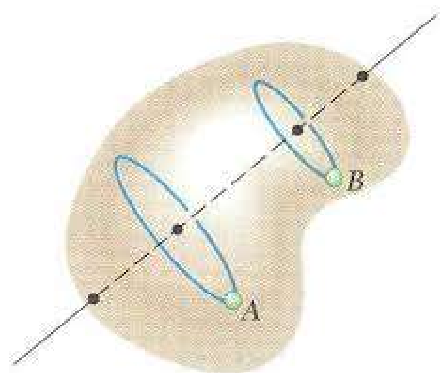
2) Rotación: Al rotar alrededor de un eje, todos los puntos constitutivos del cuerpo rígido lo hacen con la misma velocidad angular.
Entonces se cumple que:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

En particular, para un punto material P_i del cuerpo rígido se tiene:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_i$$





Donde: $\boldsymbol{v}_i$ es la velocidad tangente del punto P_i, genérico, tangente a la órbita circular que describe el punto alrededor del eje de giro del cuerpo.
$\boldsymbol{\omega}_i$ es la velocidad angular del punto P_i.
$\boldsymbol{r}_i$ vector posición del punto P_i respecto de un punto genérico del eje de rotación.

Sin embargo, por ser un cuerpo rígido, todos los puntos del mismo giran con la misma velocidad angular, de aquí que: $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}$.

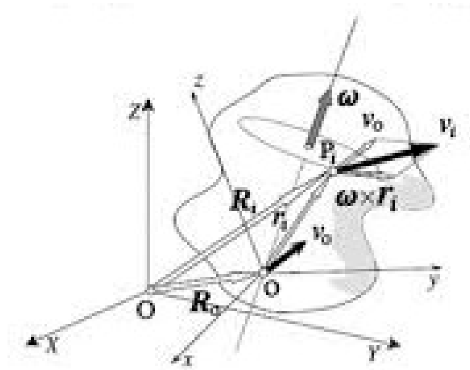
Y así, la ecuación para un solo punto material del cuerpo se pueda escribir:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$$

Superposición de movimientos
Demostremos que el movimiento resultante es la superposición de dos movimientos simples: uno de traslación pura y otro de rotación pura alrededor de un eje cualquiera.
De la gráfica se ve que:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_{oo'}$$

Donde: $\boldsymbol{r}_i$: vector posición del punto P_i respecto de un punto O ubicado fuera del cuerpo.
$\boldsymbol{r}'_i$: vector posición del punto P_i respecto de un punto O' ubicado sobre el eje de rotación del cuerpo.
$\boldsymbol{r}_{oo'}$: vector posición del punto O' respecto del punto O.



Entonces derivando la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_{oo'}}{dt}$$

y:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{oo'}$$

Dónde:

- $\boldsymbol{v}$: velocidad del punto P_i respecto del punto *O*.
- $\boldsymbol{v}'$: velocidad del punto P_i respecto del punto *O´*.
- $\boldsymbol{v}_{oo'}$: velocidad del punto *O´* respecto del punto *O*.

Los puntos tomados, O y O', pueden ser perfectamente consideradso como los orígenes de coordenadas de dos sistemas de referencias; uno fuera del cuerpo, *O (X,Y,Z)* y otro ubicado dentro del cuerpo y sobre el eje de rotación, *O´(X´,Y´,Z´)*.
Ahora bien, para el caso de un cuerpo rígido, y a la luz de esta nueva interpretación de los puntos *O* y *O´*, podemos decir que:

$\boldsymbol{v}'_i$: es la velocidad del punto P_i respecto del sistema de referencia *O´* y resulta ser un vector tangente a la órbita que describe el mencionado punto al girar alrededor del eje de rotación.
Entonces, por las características de esta velocidad, se puede escribir:

$$\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_i}$$

$\boldsymbol{v}_{oo'}$: velocidad de desplazamiento del sistema *O´* relativa al sistema *O*.

Así, podemos poner:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{v}_{oo'}$$

Observar que el estado más general de movimiento de un cuerpo rígido está definido por dos vectores característicos: $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{v}_{oo'}$, conocido los cuales, el movimiento queda íntegramente determinado. Por lo tanto, si conocemos $\boldsymbol{v}_{oo'}$ (velocidad de desplazamiento del sistema de referencia ubicado sobre el eje de giro) y $\boldsymbol{\omega}$ (velocidad angular del cuerpo alrededor del eje giro) en función del tiempo, tendremos determinado la velocidad de cada punto en función del tiempo según la ecuación anterior y, por lo tanto, conoceremos la posición del cuerpo rígido para cada instante. Observar, además, la notable limitación que produce un cuerpo rígido: si bien este es un sistema de infinitos puntos materiales, el movimiento de ese sistema está enteramente determinado por sólo seis funciones del tiempo, tres para $\boldsymbol{v}_{oo'}$ y tres para $\boldsymbol{\omega}$.
Por último haremos una última generalización considerando que, justamente por ser un cuerpo rígido la velocidad $\boldsymbol{v}_{oo'}$ es también la velocidad de traslación de cualquier punto material constituyente del cuerpo rígido. Entre todos los puntos del cuerpo rígido, el más importante es el centro de masa del mismo, por lo que se puede poner que:

$$\boldsymbol{v}_{oo'} = \boldsymbol{v}_{CM}$$

y que es también la velocidad de traslación del cuerpo. Entonces la fórmula anterior se puede escribir como:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{v}_{CM}$$

Independencia del eje de rotación
Demostremos ahora que el eje de giro o de rotación puede ser cualquiera, a condición que sean todos ejes paralelos.
Sea un cuerpo rígido animado de un movimiento de rototraslación y tomemos dos puntos cualesquiera de dicho cuerpo, P y Q.

Las velocidades de dichos puntos se pueden expresar, como ya se vio, por:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{v}_{CM}$$

$$\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_Q + \boldsymbol{v}_{CM}$$

Y como se ve en la gráfica:

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{r}_{PQ}$$

Donde:
$\boldsymbol{r}_Q$**:** vector posición del punto Q respecto del punto O´.
$\boldsymbol{r}_P$: vector posición del punto P respecto del punto O´.
$\boldsymbol{r}_{PQ}$**:** vector posición del punto P respecto del punto Q.

Derivando respecto del tiempo se tiene:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_Q}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_P}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_{PQ}}{dt}$$

$$\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{PQ}$$

$$\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{PQ}$$

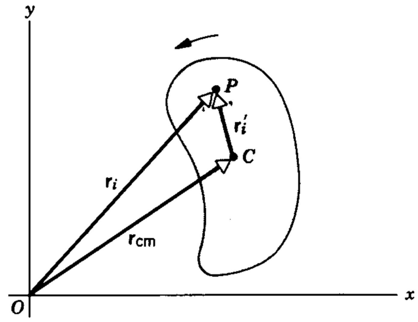
El último término representa un movimiento de rototraslación alrededor de un eje paralelo al anterior, que pasa por el punto P, con la misma velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y de una velocidad de traslación dada por la velocidad del punto P. En este caso se dice que el movimiento del cuerpo rígido "está referido" al punto P.
En resumen, hay una infinidad de posibilidades para describir un movimiento rototraslatorio dado: cualquier recta paralela a la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ puede ser considerado como eje instantánea de rotación, con tal de añadir una traslación, dada por la velocidad de los puntos de ese instantáneo.
Volviendo al análisis de la fórmula:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{v}_{CM}$$

Podemos, a la luz de esta nueva propiedad descubierta, que una buena elección del eje de giro sería considerar aquel que pase por el centro de masa del cuerpo ya que como se mencionó, el CM es un punto muy importante del cuerpo, y el eje de giro puede ser cualquier.
Entonces, adoptando estos criterios la fórmula se puede reescribir como:

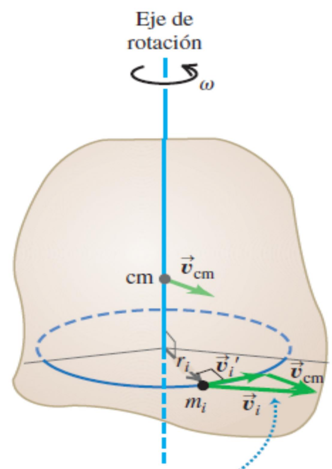
$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{CM} + \boldsymbol{v}_{CM}$$

Donde $\boldsymbol{r}_{CM}$ es el vector posición del punto material P_i respecto del eje de giro que pasa por el centro de masa del cuerpo.



Además el término $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{CM}$ es la velocidad tangencial a la órbita que describe el punto material P_i cuando gira alrededor del eje de giro, $\boldsymbol{v}'_i$.
Entonces se puede escribir:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{CM}$$



Velocidad $\vec{v}_i$ de una partícula de un cuerpo rígido en rotación y traslación = (velocidad $\vec{v}_{cm}$ del centro de masa) más (velocidad $\vec{v}_i'$ de la partícula relativa al centro de masa).

Energía en la rototraslación
La energía cinética K_i de una partícula de masa m_i respecto de un sistema de referencia inercial *O* es:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}^2{}_i$$

También se puede escribir como:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}_i . \boldsymbol{v}_i)$$

Como muestra la gráfica y ya se dedujo, se tiene que:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{CM}$$

Reemplazando se tiene:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{CM}).(\boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{CM})$$

Entonces:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \left(\boldsymbol{v}_{CM} . \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{2v}_{CM} \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}'_i . \boldsymbol{v}'_i \right)$$
$$K_i = \frac{1}{2} m_i \left(\boldsymbol{v^2}_{CM} + \boldsymbol{2v}_{CM} . \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}'^2_i \right)$$

La energía cinética total de todo el cuerpo rígido será la suma $\sum K_i$ extendida a todas las partículas que constituyen el cuerpo.
Así:

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\boldsymbol{v^2}_{CM} + \boldsymbol{2v}_{CM} . \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}'^2_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v^2}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} m_i \ \boldsymbol{v}_{CM} . \boldsymbol{v}'_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \ \boldsymbol{v}'^2_i$$

En el primer término podemos sacar fuera del signo de sumatoria $\boldsymbol{v^2}_{CM}$ por ser constante para todos los términos, entonces queda:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{v}_{CM}{}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2} \ M \ \boldsymbol{v}_{CM}{}^2$$

Ya que $\sum_{i=1}^{n} m_i$ es la masa total del cuerpo.

Este término da la energía cinética total del cuerpo debido a la traslación, K_{tras}.
El tercer término se puede reformular de la siguiente manera; reemplazamos $\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_i$.
Donde hay notar que los $\boldsymbol{r}_i$ son los vectores posición de cada uno de los puntos materiales constituyentes del cuerpo respecto del eje de rotación que pasa por el centro de masa del mismo.
Como $\boldsymbol{\omega}_i$ y $\boldsymbol{r}_i$ son vectores perpendiculares, por lo que: $\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_i = \omega_i \ r_i$.
De esta manera se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \ \boldsymbol{v}'^2_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \ (\omega_i \ r_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \ r_i{}^2 \ \omega_i{}^2$$

Pero resulta que $\omega_i = \omega$, ya que la velocidad angular de todos los puntos del cuerpo rígido son iguales.
Entonces:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \ r_i{}^2 \ \omega_i{}^2 = \frac{1}{2} \ \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \ r_i{}^2 = \frac{1}{2} \ I \ \omega^2$$

Donde I_{CM} es el momento de inercia del cuerpo respecto del centro de masa del cuerpo. Este término representa a la energía cinética debida a la rotación del cuerpo, K_{rot}.
El segundo término es igual a cero. A razón es la siguiente: Como se hizo con el término anterior, se puede sacar fuera del signo de sumatoria a $\boldsymbol{v}_{CM}$.
Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ \boldsymbol{v}_{CM} . \boldsymbol{v}'_i = \ \boldsymbol{v}_{CM} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \boldsymbol{v}'_i$$

La sumatoria $\sum_{i=1}^{n} m_i \, \boldsymbol{v}'_i$ es igual al producto de la masa total del cuerpo por la velocidad del centro de masa del cuerpo, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \boldsymbol{v}'_i = M \ \boldsymbol{v}_{CM}$$

Pero esta sumatoria contiene las velocidades $\boldsymbol{v}'_i$ que son velocidades medidas respecto de un sistema de coordenadas cuyo origen está en el centro de masa del cuerpo. Por lo tanto esta $\boldsymbol{v}_{CM}$ es la velocidad del centro de masa del cuerpo respecto del CM del cuerpo, y es cero.
Así, finalmente se tiene:

$$K = \frac{1}{2}\, M\, \boldsymbol{v}_{CM}{}^2 + \frac{1}{2}\, I\, \omega^2 = K_{tras} + K_{rot}$$