Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

2019

Recorrido

Recorrido

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

FORMA ESTÁNDAR:

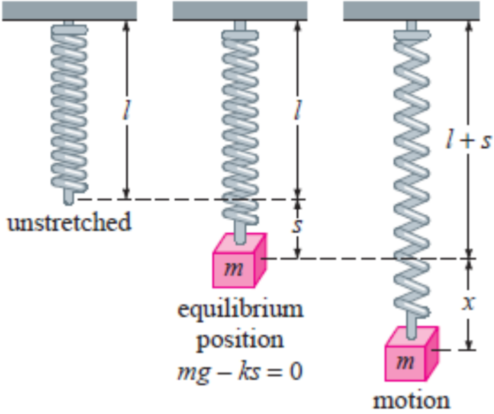
$$y' + P(x)y = f(x)$$

Método: multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$.

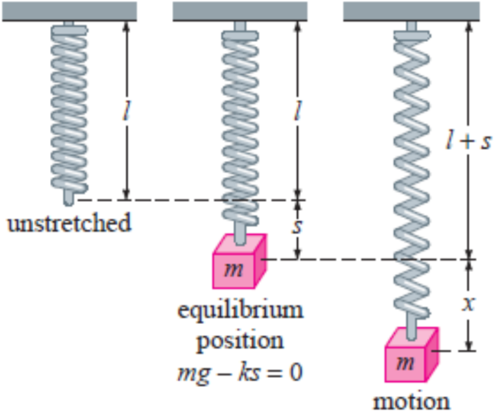
$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \int f(x) e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

Recorrido

Movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

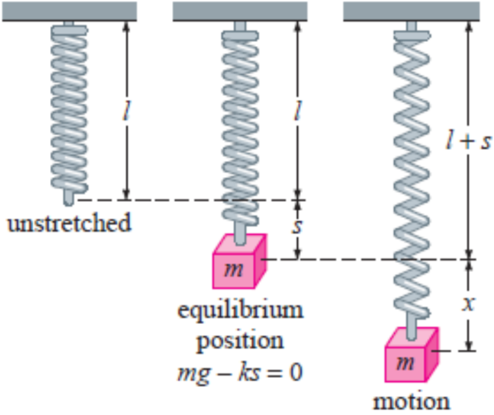
$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

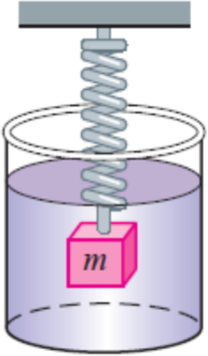
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s+x) + mg = -kx$$

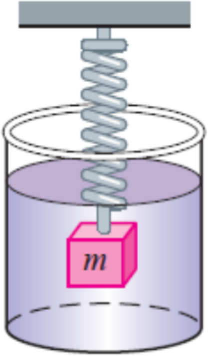
$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



Movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

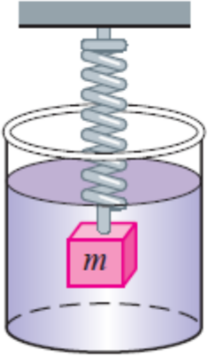
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



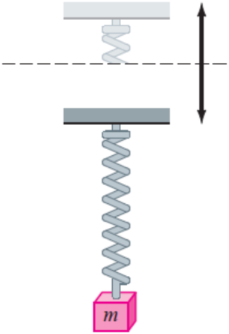
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

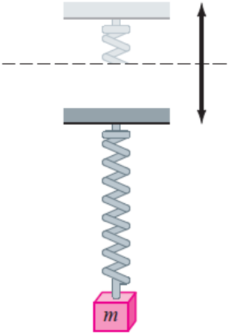
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Movimiento forzado en un sistema masa-resorte





$f(t)$: fuerza externa.

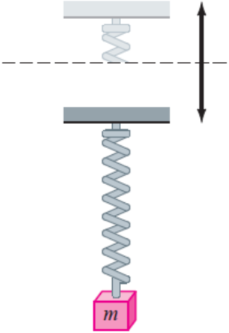
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



$f(t)$: fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.
La ecuación homogénea asociada a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

es

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Recorrido

1. Repaso: Ecuaciones lineales de primer orden
2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
3. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
4. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
5. Sistemas masa resorte
6. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes no constantes
   - Ecuaciones de Euler
   - Soluciones en series de potencias

Recorrido

Resuelva: $$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (1)$$

Sujeta a: $$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

TEOREMA 4.1.1 Existencia de una solución única

Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\ldots$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución $y(x)$ del problema con valores iniciales (1) existe en el intervalo y es única.

Sin demostrar.

Problema con valores en la frontera

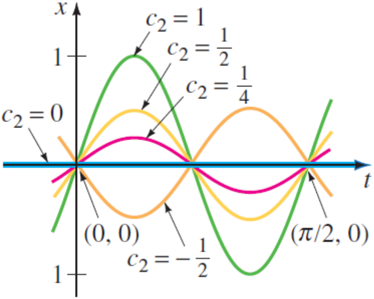
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

Problema con valores en la frontera

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.

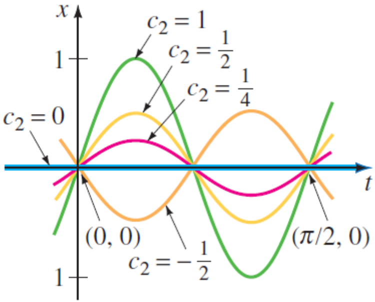
Problema con valores en la frontera

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



Problema con valores en la frontera

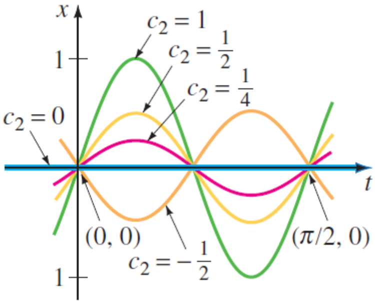
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Problema con valores en la frontera

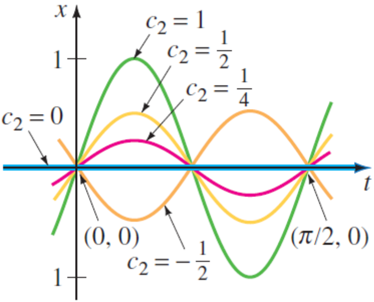
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \,\mathrm{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$. Tiene infinitas soluciones.

Problema con valores en la frontera

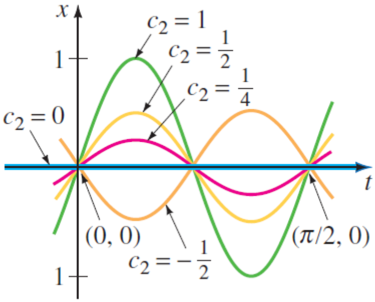
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$. Tiene infinitas soluciones.
b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$.

Problema con valores en la frontera

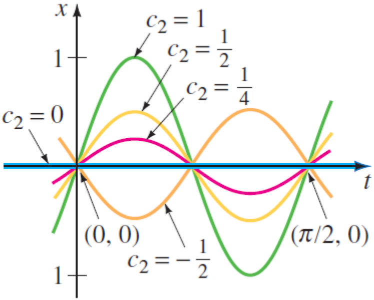
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$. Tiene infinitas soluciones.
b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$. Tiene solución única $x \equiv 0$.

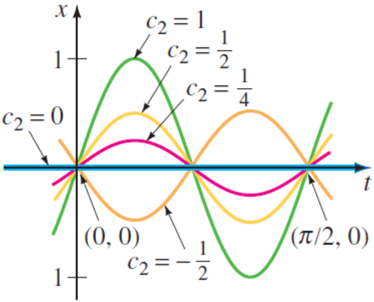
Problema con valores en la frontera

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$. Tiene infinitas soluciones.
b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$. Tiene solución única $x \equiv 0$.
c) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general
$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$. Tiene infinitas soluciones.
b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$. Tiene solución única $x \equiv 0$.
c) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 1$. No tiene solución.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrar.

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrar.
Observaciones:

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrar.
Observaciones:
1) La solución trivial $y \equiv 0$ siempre es una solución de cualquier e.d. lineal homogénea.
2) Combinaciones lineales.

Recorrido

Solución general de una e.d. lineal

Definición

Si toda solución de una ed de n-ésimo orden, $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, en un intervalo I se puede obtener a partir de una **familia n-paramétrica de soluciones,** $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$, eligiendo apropiadamente los parámetros $c_1, c_2, ..., c_n$, entonces diremos que la familia es la solución general de la ed.

Solución general de una e.d. lineal

Ejemplo 1: dada la e.d. $y' = x\sqrt{y}$, las funciones dadas por $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ son soluciones. ¿Es la solución general? La función $y \equiv 0$ es solución y no es miembro de la familia.

Solución general de una e.d. lineal

Ejemplo 1: dada la e.d. $y' = x\sqrt{y}$, las funciones dadas por $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ son soluciones. ¿Es la solución general? La función $y \equiv 0$ es solución y no es miembro de la familia.

Ejemplo 2: dada la e.d. $y''(x) - y(x) = 0$ y sabiendo que su (una) solución general es $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$,

a) verificar que $y(x) = sh(x)$ es solución de la e.d.

b) explicar cómo puede ser.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.
3. Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.
3. Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
4. Mismo ejemplo en $[-1, 1]$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.
3. Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
4. Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
5. $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.
3. Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
4. Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
5. $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$. No es LI (en ningún $I \subset \mathbb{R}$).

Wronskiano

Definición

El Wronskiano de una familia $\{f_1, ..., f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n-1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1,\dots,f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedades del Wronskiano

Si $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LD en I y las funciones son suficientemente derivables, entonces $W_{(f_1,...,f_n)}(x) = 0$ para toda $x \in I$.

Contrarrecíproco: si existe una $x \in I$ tal que $W_{(f_1,...,f_n)}(x) \neq 0$, entonces $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LI en I.

Teorema

Teorema

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *soluciones de la e.d.*
$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ *en* I*. Entonces*
$\{y_1, \cdots, y_n\}$ *es LI en* I *si y solo si* $W_{(y_1,\cdots,y_n)}(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$*.*

Sin demostrar.

Teorema

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ soluciones de la e.d.
$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ *en I. Entonces*
$\{y_1, \cdots, y_n\}$ *es LI en I si y solo si $W_{(y_1,\cdots,y_n)}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.*

Sin demostrar.

Conjunto fundamental de soluciones de una e.d. de orden n: una familia LI de n soluciones de la e.d. en un intervalo I.

Recorrido

Teoremas (e.d. lineal homogénea)

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$*, tal que cada una de las funciones coeficientes* a_k *es continua en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I*, existe un conjunto fundamental de soluciones en* I*,* $\{y_1, \cdots y_n\}$*.*
(Sin demostrar.)

Teorema (Teorema de solución general de e.d. lineal homogénea)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$*, tal que cada una de las funciones coeficientes* a_k *es continua en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I*, si* $\{y_1, \cdots y_n\}$ *es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en* I*, la solución general se puede expresar como*

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

(Se demuestra: Teorema 4.1.5)

Recorrido

E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\, e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\, e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2\, e^{rx} + br\, e^{rx} + c\, e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0$$

E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\, e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\, e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2\, e^{rx} + br\, e^{rx} + c\, e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Solución general:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Dem: Hay que probar que $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva: $y(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ar^2 + br + c = 0$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

Solución general:

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Dem: Hay que probar que $y_1 = e^{rx}$ y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \alpha + i\beta; \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \qquad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Solución general:

$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x))$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Dem: Hay que probar que $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ son soluciones de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$.

Ejemplos

Resolver:

1) $y'' - y' - 6y = 0$ Rta:

Ejemplos

Resolver:

1) $y'' - y' - 6y = 0$ Rta: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$ Rta:

Ejemplos

Resolver:

1) $y'' - y' - 6y = 0$ Rta: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$ Rta: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$ Rta:

Ejemplos

Resolver:

1) $y'' - y' - 6y = 0$ Rta: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$ Rta: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$ Rta: $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$.

Recorrido

Recorrido

Función complementaria

FUNCIÓN COMPLEMENTARIA

Dada una e.d. no homogénea, $ay'' + by' + cy = G(x)$, la solución de la e.d. homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se llama FUNCIÓN COMPLEMENTARIA.

Teorema de solución general de e.d. lineal no homogénea

Teorema

Dada una e.d. lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ donde las funciones coeficientes a_k, $0 \leq k \leq n$, y G son continuas en algún intervalo abierto I y $a_n(x) \neq 0$ en I, la solución general de la e.d. tiene la forma $y = y_c + y_p$ donde y_c es la función complementaria y y_p es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.

Demostrar.

Teorema (Principio de superposión para ED no homogéneas)

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n-ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$
$$\vdots$$
$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que $y_{p_1}, ..., y_{p_k}$ *son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I. Entonces,*

$$y_p = c_1 y_{p_1} + ... + c_k y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ...a_1 y' + a_0 y = c_1 g_1 + ... + c_k g_k.$$

Demostración dejada como ejercicio.

Recorrido

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta:

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\operatorname{sen}(3x)$.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\operatorname{sen}(3x)$.

Rta:

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\operatorname{sen}(3x)$.

Rta: $y = y_c + \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\operatorname{sen}(3x)$.

Resolver $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$.

Rta: $y = y_c + \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\,\mathrm{sen}(3x)$.

Resolver $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Rta:

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Rta: $y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

Resolver $y'' - y' + y = 2\operatorname{sen}(3x)$.

Rta: $y = y_c + \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\operatorname{sen}(3x)$.

Resolver $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Rta: $y = y_c - \frac{8}{3}xe^x$.

Tabla

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x).$$

Si G(x) tiene un término que es un múltiplo constante de . . .	Y si	Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para y_p.
e^{rx}	r no es una raíz de la ecuación característica	Ae^{rx}
	r es una raíz simple de la ecuación característica	Axe^{rx}
	r es una raíz doble de la ecuación característica	Ax^2e^{rx}
sen kx, cos kx	ki no es una raíz de la ecuación característica	$B\cos kx + C\,\text{sen}\,kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
y_p' &= u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\
y_p'' &= u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2 y_2''
\end{aligned}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
y_p' &= u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\
y_p'' &= u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2 y_2''
\end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1'' y_1 + u_1' y_1') + a(u_2'' y_2 + u_2' y_2') + (au_1' y_1' + bu_1' y_1 + au_2' y_2' + bu_2' y_2)$$

$$= a\tfrac{d}{dx}(u_1' y_1 + u_2' y_2) + b(u_1' y_1 + u_2' y_2) + a(u_1' y_1' + u_2' y_2') = G$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ y_p' &= u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\ y_p'' &= u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1'' y_1 + u_1' y_1') + a(u_2'' y_2 + u_2' y_2') + (au_1' y_1' + bu_1' y_1 + au_2' y_2' + bu_2' y_2)$$

$$= a\tfrac{d}{dx}(u_1' y_1 + u_2' y_2) + b(u_1' y_1 + u_2' y_2) + a(u_1' y_1' + u_2' y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=G(x)$, con $y_c(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned}
y_p &= u_1y_1+u_2y_2\\
y_p' &= u_1'y_1+u_1y_1'+u_2'y_2+u_2y_2'\\
y_p'' &= u_1''y_1+u_1'y_1'+u_1'y_1'+u_1y_1''+u_2''y_2+u_2'y_2'+u_2'y_2'+u_2y_2''
\end{aligned}$$

$$ay_p''+by_p'+cy_p=u_1(ay_1''+by_1'+cy_1)+u_2(ay_2''+by_2'+cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1+u_1'y_1')+a(u_2''y_2+u_2'y_2')+(au_1'y_1'+bu_1'y_1+au_2'y_2'+bu_2'y_2)$$

$$=a\tfrac{d}{dx}(u_1'y_1+u_2'y_2)+b(u_1'y_1+u_2'y_2)+a(u_1'y_1'+u_2'y_2')=G$$

$$\begin{cases} u_1'y_1+u_2'y_2=0\\ u_1'y_1'+u_2'y_2'=\frac{G}{a}=f.\end{cases}$$ Resolver por determinantes.

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12};$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12} x \cos(3x) + \frac{\ln|\operatorname{sen}(3x)|}{36} \operatorname{sen}(3x)$$

$I = \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ o subintervalos de éste.

Recorrido

Ecuación del moviemiento libre no amortiguado

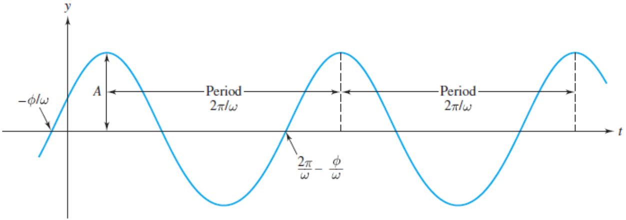
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

$$my'' + ky = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) \quad \rightarrow \quad y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \ \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}; \quad \text{Frecuencia natural: } \frac{\omega}{2\pi}$$



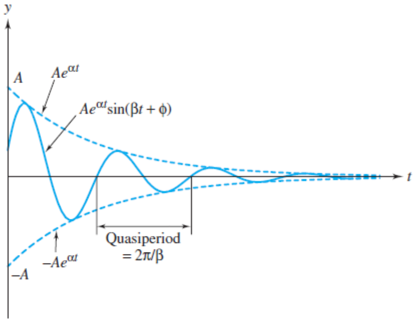
Ecuaciones del del moviemiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \; b > 0$$

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \; b > 0$$

Movimiento subamortiguado: $b^2 < 4mk$ $\qquad \alpha = -\frac{b}{2m} < 0$

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)) \quad \rightarrow \quad y = e^{\alpha t} A \operatorname{sen}(\beta t + \phi)$$



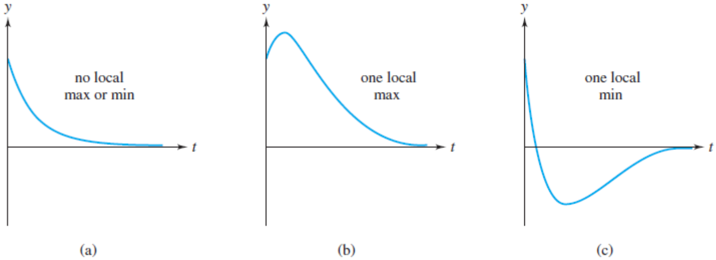
Ecuaciones del del moviemiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \; b > 0$$

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \; b > 0$$

Movimiento sobreamortiguado: $b^2 > 4mk$

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \qquad r_1 < 0; \; r_2 < 0.$$



Ecuaciones del del moviemiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \; b > 0$$

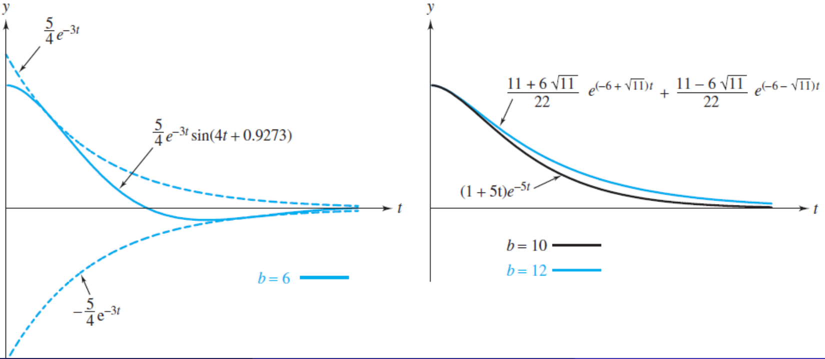
Ecuaciones del del moviemiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Movimiento críticamente amortiguado: $b^2 = 4mk$

$$y = c_1\, e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2\, t\, e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Ejemplo: $y'' + by' + 25y = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \quad b = 6, 10, 12.$



Ecuaciones del moviemiento forzado

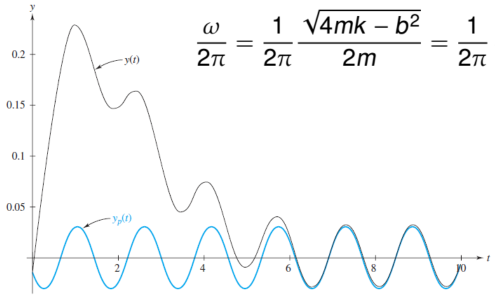
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk;$$

Ecuaciones del moviemiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk; \qquad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk; \qquad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

$$y = \underbrace{Ae^{-\frac{b}{2m}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m} t + \phi\right)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta)}_{\text{Estable}}$$



$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Figure 4.32 Convergence of $y(t)$ to the steady-state solution $y_p(t)$ when $m = 4$, $b = 6$, $k = 3$, $F_0 = 2$, $\gamma = 4$

Recorrido

Aclaración

Los próximos dos temas, ecuaciones de Euler y solución en series de potencias, son tomados de Thomas. Están desarrollados en el texto.

Recorrido

Modelo:

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0,$$

Modelo:

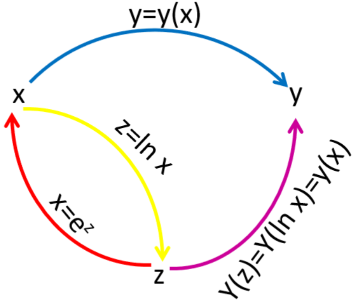
$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0, \qquad x > 0.$$

Sustitución:

$$z = \ln x$$

Función compuesta:

$$Y(z) = Y(\ln x) = y(x).$$



Ejemplo

$$x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$$

Rta: $Y(z) = c_1e^z + c_2e^{-4z}; \qquad y(x) = c_1x + c_2x^{-4}$

$$x^2y'' + 5xy' - 4y = 0$$

TAREA

Ejemplo

$$x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$$

Rta: $Y(z) = c_1e^z + c_2e^{-4z}$; $\qquad y(x) = c_1x + c_2x^{-4}$

$$x^2y'' + 5xy' - 4y = 0$$

TAREA

Otra tarea: buscar un ejemplo del último caso y PVI.

Recorrido

Repaso series de potencias

Una serie de potencias es una de la forma

$$\sum_{0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Recordar intervalo y radio de convergencia, convergencia absoluta.

Repaso series de potencias

Una serie de potencias es una de la forma

$$\sum_{0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Recordar intervalo y radio de convergencia, convergencia absoluta.

Propiedad: si $\sum_0^\infty c_n(x-a)^n = 0$, $a - R < x < a + R$, $R > 0$, entonces $c_n = 0$ para todo n.

Propiedad de series de potencias

Teorema

Derivabilidad de series de potencias Si $f(x) = \sum_0^\infty c_n(x-a)^n$, *para* $a - R < x < a + R$, *entonces* f *tiene derivadas de todos los órdenes dentro del intervalo y las derivadas se obtienen derivando la serie término a término:*

$$f'(x) = \sum_1^\infty n c_n (x-a)^{n-1},$$

Propiedad de series de potencias

Teorema

Derivabilidad de series de potencias Si $f(x) = \sum_0^\infty c_n(x-a)^n$*, para* $a - R < x < a + R$*, entonces* f *tiene derivadas de todos los órdenes dentro del intervalo y las derivadas se obtienen derivando la serie término a término:*

$$f'(x) = \sum_1^\infty nc_n(x-a)^{n-1}, \qquad f''(x) = \sum_2^\infty n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, ..., etc.$$

Cada una de estas series derivadas converge en todos los puntos $a - R < x < a + R$.

Serie de Taylor generada por una función f

Serie de Taylor generada por una función f (suficientemente derivable) alrededor de a:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor:

Teorema

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo I que contiene a a, entonces para cada número natural n y cada $x \in I$, es

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para cierto c entre a y x.

Convergencia de una serie de Taylor a f

Teorema

Si $R_n(x) \to 0$ para todo $x \in I$, entonces la serie de Taylor generada por f alrededor de a converge a f en I y escribimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ejemplos de funciones desarrolladas en series de Taylor

$$e^{\alpha x} \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ejemplos de funciones desarrolladas en series de Taylor

$$e^{\alpha x} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(\alpha x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha x)^{2n}}{(2n)!}$$

Ejemplo: $y'' + y = 0$. Propongo: $y = \sum_0^\infty c_n x^n$;

$$y' = \sum_1^\infty n c_n x^{n-1},\ y'' = \sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Sustituyo en la ed,

$$\sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_0^\infty c_n x^n = 0,$$

acomodo a mi gusto los subíndices,

$$\sum_0^\infty (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_0^\infty c_n x^n = 0,$$

reescribo:

$$\sum_0^\infty \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} + c_n\right] x^n = 0$$

$$\sum_{0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}+c_n\right]x^n=0$$

$$c_{n+2}=-\frac{c_n}{(n+2)(n+1)},\; n=0,1,2,\cdots$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2\cdot 1};\; c_3=-\frac{c_1}{3\cdot 2};\; c_4=-\frac{c_2}{4\cdot 3}=\frac{(-1)^2c_0}{4\cdot 3\cdot 2};\; c_5=\frac{(-1)^2c_1}{5!}$$

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k c_0}{(2k)!};\; c_{2k+1}=\frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}$$

$$\begin{aligned} y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n &= c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} && +c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\ &= c_0\cos x && +c_1 \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Soluciones de ecuaciones en series de potencias

Ejemplo: $y'' + xy' + y = 0$. Propongo: $y = \sum_0^\infty c_n x^n$;

$$y' = \sum_1^\infty n c_n x^{n-1},$$

Soluciones de ecuaciones en series de potencias

Ejemplo: $y'' + xy' + y = 0$. Propongo: $y = \sum_0^\infty c_n x^n$;

$$y' = \sum_1^\infty n c_n x^{n-1},\ y'' = \sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Sustituyo,

$$\sum_2^\infty n(n-1) c_n x^{n-2} + x \sum_1^\infty n c_n x^{n-1} + \sum_0^\infty c_n x^n = 0$$

distribuyo y arreglo subíndices

$$\sum_0^\infty (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_1^\infty n c_n x^n + \sum_0^\infty c_n x^n = 0$$

reescribo ordenadamente:

$$2 \cdot 1 c_2 + c_0 + \sum_1^\infty \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} + n c_n + c_n\right] x^n = 0$$

$$2 \cdot 1c_2 + c_0 + \sum_{1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n\right] x^n = 0$$

aplico propiedad de los coeficientes: igualo coeficientes a 0:

$$2c_2 + c_0 = 0;\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0,\ n = 1, 2, 3...$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2};$$

$$2 \cdot 1c_2 + c_0 + \sum_{1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n\right] x^n = 0$$

aplico propiedad de los coeficientes: igualo coeficientes a 0:

$$2c_2 + c_0 = 0; \;\; (n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0,\; n = 1, 2, 3...$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2}; \;\; c_{n+2} = -\frac{(n+1)c_n}{(n+2)(n+1)} = -\frac{c_n}{(n+2)}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3};$$

Soluciones de ecuaciones en series de potencias

$$2 \cdot 1 c_2 + c_0 + \sum_{1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} + n c_n + c_n \right] x^n = 0$$

aplico propiedad de los coeficientes: igualo coeficientes a 0:

$$2c_2 + c_0 = 0; \ (n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0, \ n = 1, 2, 3...$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2}; \ c_{n+2} = -\frac{(n+1)c_n}{(n+2)(n+1)} = -\frac{c_n}{(n+2)}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3}; \ c_4 = -\frac{c_2}{4}$$

Soluciones de ecuaciones en series de potencias

$$2 \cdot 1c_2 + c_0 + \sum_{1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n\right] x^n = 0$$

aplico propiedad de los coeficientes: igualo coeficientes a 0:

$$2c_2 + c_0 = 0; \; (n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0, \, n = 1, 2, 3...$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2}; \; c_{n+2} = -\frac{(n+1)c_n}{(n+2)(n+1)} = -\frac{c_n}{(n+2)}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3}; \; c_4 = -\frac{c_2}{4} = (-1)^2 \frac{c_0}{2 \cdot 4};$$

Soluciones de ecuaciones en series de potencias

$$2 \cdot 1c_2 + c_0 + \sum_{1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n \right] x^n = 0$$

aplico propiedad de los coeficientes: igualo coeficientes a 0:

$$2c_2 + c_0 = 0;\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0,\ n = 1, 2, 3...$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2};\ c_{n+2} = -\frac{(n+1)c_n}{(n+2)(n+1)} = -\frac{c_n}{(n+2)}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3};\ c_4 = -\frac{c_2}{4} = (-1)^2 \frac{c_0}{2 \cdot 4};\ c_5 = -\frac{c_3}{5}$$

$$2\cdot 1c_2 + c_0 + \sum_1^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n\right]x^n = 0$$

aplico propiedad de los coeficientes: igualo coeficientes a 0:

$$2c_2 + c_0 = 0;\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0,\ n = 1,2,3...$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2};\ c_{n+2} = -\frac{(n+1)c_n}{(n+2)(n+1)} = -\frac{c_n}{(n+2)}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3};\ c_4 = -\frac{c_2}{4} = (-1)^2\frac{c_0}{2\cdot 4};\ c_5 = -\frac{c_3}{5} = (-1)^2\frac{c_1}{3\cdot 5}$$

$$c_{2k} = (-1)^k\frac{c_0}{2\cdot 4\cdots 2k};$$

$$2 \cdot 1 c_2 + c_0 + \sum_1^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n \right] x^n = 0$$

aplico propiedad de los coeficientes: igualo coeficientes a 0:

$$2c_2 + c_0 = 0; \; (n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0, \; n = 1, 2, 3...$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2}; \; c_{n+2} = -\frac{(n+1)c_n}{(n+2)(n+1)} = -\frac{c_n}{(n+2)}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3}; \; c_4 = -\frac{c_2}{4} = (-1)^2 \frac{c_0}{2 \cdot 4}; \; c_5 = -\frac{c_3}{5} = (-1)^2 \frac{c_1}{3 \cdot 5}$$

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdots 2k}; \; c_{2k+1} = (-1)^k \frac{c_1}{3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

$$2\cdot 1c_2 + c_0 + \sum_{1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n\right]x^n = 0$$

aplico propiedad de los coeficientes: igualo coeficientes a 0:

$$2c_2 + c_0 = 0;\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0,\ n = 1,2,3...$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2};\ c_{n+2} = -\frac{(n+1)c_n}{(n+2)(n+1)} = -\frac{c_n}{(n+2)}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3};\ c_4 = -\frac{c_2}{4} = (-1)^2\frac{c_0}{2\cdot 4};\ c_5 = -\frac{c_3}{5} = (-1)^2\frac{c_1}{3\cdot 5}$$

$$c_{2k} = (-1)^k\frac{c_0}{2\cdot 4\cdots 2k};\ c_{2k+1} = (-1)^k\frac{c_1}{3\cdot 5\cdots(2k+1)}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2\cdot 4\cdots 2k} + c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{3\cdot 5\cdots(2k+1)}.$$