Funciones de varias variables

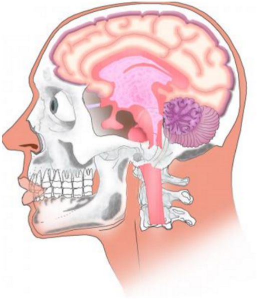
Ingeniería

2019

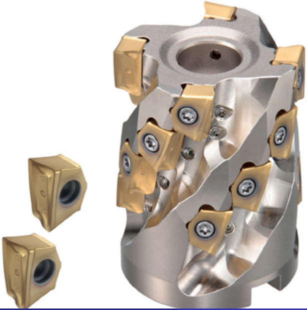
Recorrido

Recorrido

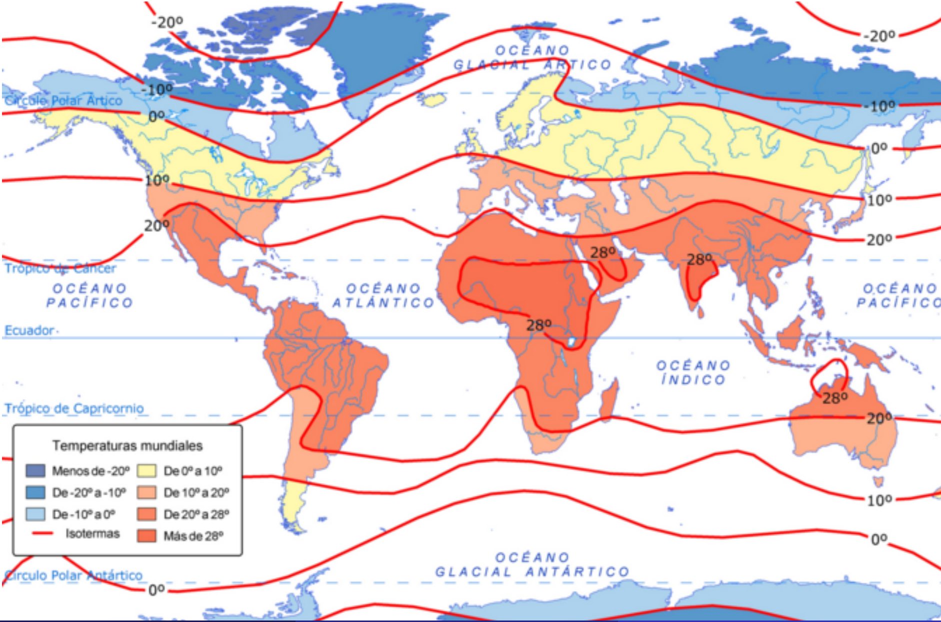
Ejemplos




Densidad
Escaso
Fuerte
Alcoholes
Agua
Zumo de frutas
Bebidas muy azucaradas



Ejemplos



-20º
-10º
0º
10º
20º
28º
OCÉANO GLACIAL ÁRTICO
Círculo Polar Ártico
Trópico de Cáncer
OCÉANO PACÍFICO
OCÉANO ATLÁNTICO
Ecuador
OCÉANO ÍNDICO
Trópico de Capricornio
Círculo Polar Antártico
OCÉANO GLACIAL ANTÁRTICO
Temperaturas mundiales
Menos de -20º
De -20º a -10º
De -10º a 0º
Isotermas
De 0º a 10º
De 10º a 20º
De 20º a 28º
Más de 28º

Recorrido

Algunas definiciones

Dominio; rango, recorrido o imagen; variable dependiente y variables independientes.

Algunos ejemplos:

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$$

Algunas definiciones

Dominio; rango, recorrido o imagen; variable dependiente y variables independientes.
Algunos ejemplos:

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$
$$I(f) = [0, +\infty)$$

f :

Algunas definiciones

Dominio; rango, recorrido o imagen; variable dependiente y variables independientes.
Algunos ejemplos:

$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

$$I(f) = [0, +\infty)$$

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

Algunas definiciones

Dominio; rango, recorrido o imagen; variable dependiente y variables independientes.
Algunos ejemplos:

$$f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$$

$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\};$$

$$I(f)=[0,+\infty)$$

$$f : D\to\mathbb{R} \text{ dada por } f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$$

$$g(x,y,z)=z\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$D(g)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, x\neq y\}$$

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea P_0 un punto de $\mathbb{R}^n$ ($P_0(x_0, y_0)$ o $P_0(x_0, y_0, z_0)$).

Conceptos topológicos

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea P_0 un punto de $\mathbb{R}^n$ ($P_0(x_0, y_0)$ o $P_0(x_0, y_0, z_0)$).

P_0 es un punto interior de D si existe un entorno abierto (bola) de P_0 incluido en D.

P_0 es un punto frontera de D si para todo entorno abierto (bola) de P_0 hay puntos de D que pertenecen al entorno y hay puntos de D que no pertenecen al entorno. CORREGIR LIBRO (el paréntesis).

Conceptos topológicos

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea P_0 un punto de $\mathbb{R}^n$ ($P_0(x_0, y_0)$ o $P_0(x_0, y_0, z_0)$).

P_0 es un punto interior de D si existe un entorno abierto (bola) de P_0 incluido en D.

P_0 es un punto frontera de D si para todo entorno abierto (bola) de P_0 hay puntos de D que pertenecen al entorno y hay puntos de D que no pertenecen al entorno. CORREGIR LIBRO (el paréntesis).

D es una región abierta si todo punto de D es un punto interior de D.

D es una región cerrada si todos los puntos frontera de D pertenecen a D.

D es una región acotada si existe una bola B tal que $D \subset B$.

D es una región no acotada si ninguna bola la incluye. CORREGIR LIBRO.

Ejemplos

Ejemplo: el dominio de

$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

es

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}.$$

¿Es abierto? ¿cerrado? ¿acotado?
¿Y el dominio de la función dada por $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$?

Recorrido

Definiciones de gráfica, curvas y superficies de nivel y curvas de contorno

Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama

- **Gráfico de** f al conjunto
  $G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.

Definiciones de gráfica, curvas y superficies de nivel y curvas de contorno

Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama

- **Gráfico de** f al conjunto
  $G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.
- **Curva o superficie de nivel** (k) de f al conjunto
  $\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Definiciones de gráfica, curvas y superficies de nivel y curvas de contorno

Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama

- **Gráfico de** f al conjunto
  $G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.

- **Curva o superficie de nivel** (k) de f al conjunto
  $\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

- **Curva de contorno** de f al conjunto
  $\{(x_1, x_2, k) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Representación de funciones de dos variables

$$f(x,y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

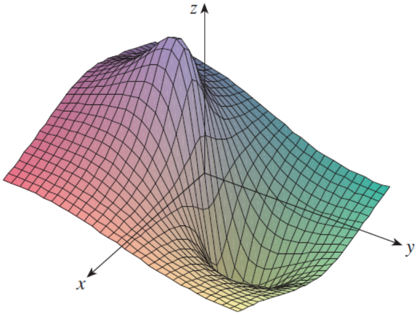
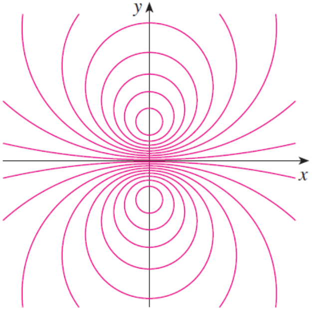


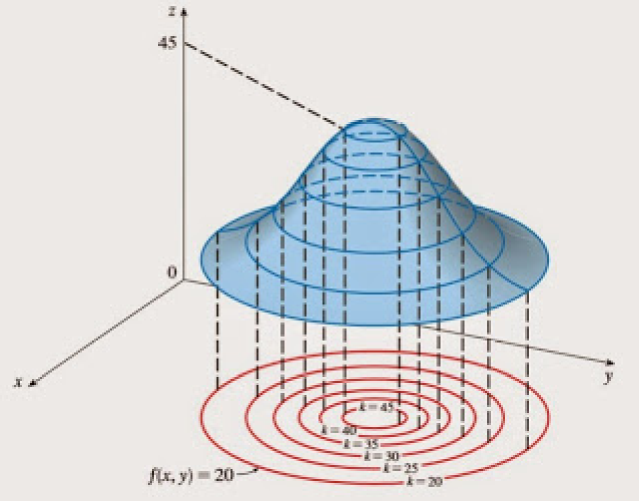
Gráfico de f



Curvas de nivel de f

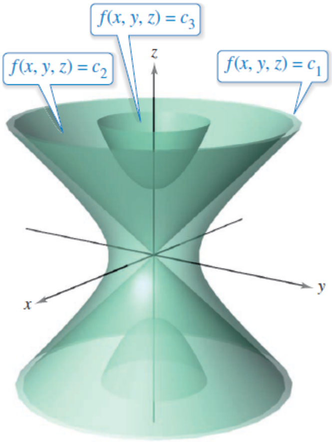
(Ejemplo de Stewart)

Curvas de contorno y curvas de nivel



Representación de funciones de tres variables: superficies de nivel

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$



Recorrido

Definición

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sean $P_0(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiende al límite L cuando P tiende a P_0, y escribimos

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todo $P \in D$, si $0 < |P - P_0| < \delta$, entonces $|f(P) - L| < \varepsilon$.

Definición

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sean $P_0(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiende al límite L cuando P tiende a P_0, y escribimos

$$\mathop{lim}_{P \to P_0} f(P) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todo $P \in D$, si $0 < |P - P_0| < \delta$, entonces $|f(P) - L| < \varepsilon$.

En $\mathbb{R}^2$: $P_0(x_0, y_0)$ y $P(x, y)$;

$$\mathop{lim}_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todo $(x, y) \in D$, si $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, entonces $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Propiedades de límites

TEOREMA 1: Propiedades de los límites de funciones de dos variables
Las siguientes reglas se cumplen si L, M y k son números reales y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = L + M$
2. *Regla de la resta:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - g(x,y)) = L - M$
3. *Regla de la multiplicación por una constante:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$ (para cualquier número k)
4. *Regla del producto:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = L \cdot M$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}, \qquad M \neq 0$
6. *Regla de la potencia:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n$, n es un entero positivo
7. *Regla de la raíz:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n es un entero positivo, y si n es par, suponemos que $L > 0$.

SIN DEMOSTRAR

Ejemplos. Criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$$

Ejemplos. Criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$$

Ejemplos. Criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$$

Ejemplos. Criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Ejemplos. Criterio de dos trayectorias.

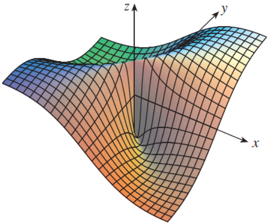
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

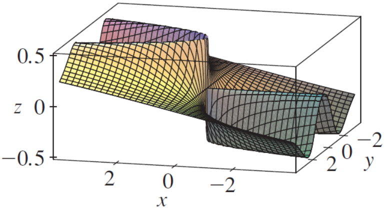
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ no existe}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \text{ no existe.}$$





Continuidad

Definición

Una función f es continua en un punto P_0 si:

- f está definida en P_0;
- existe $\lim_{P \to P_0} f(P)$ y
- $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Una función f es continua en un conjunto D si es continua en todos los puntos de D.

Analizar ejemplos.

Recorrido

Recorrido

Definición de derivada parcial

Definición

La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Definición de derivada parcial

Definición

La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Definición

La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y en el punto (x_0, y_0) es

$$f_y(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Definición de derivada parcial

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Definición de derivada parcial

Definición

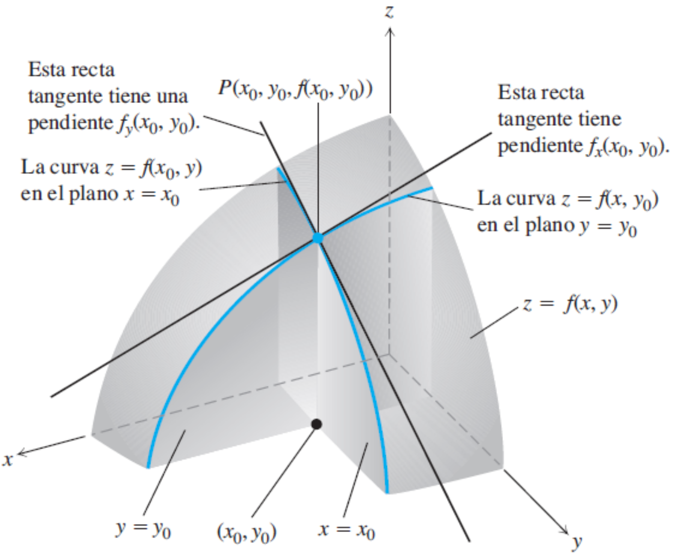
La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

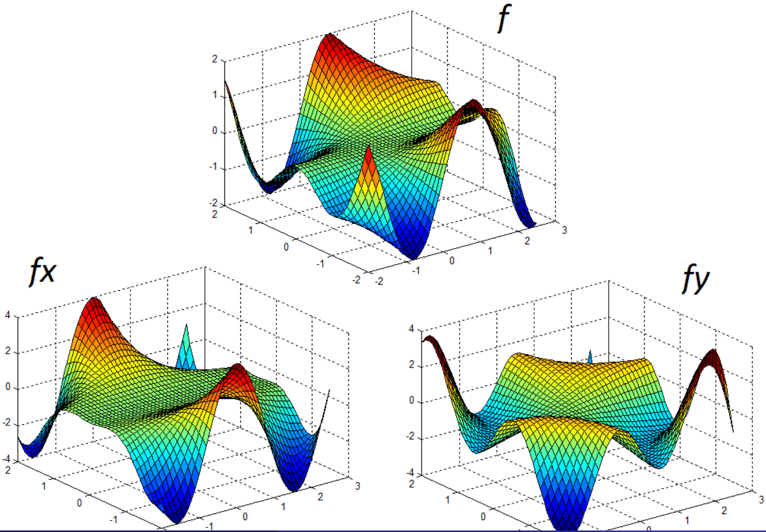
Similarmente se definen las derivadas parciales de una función de tres variables con respecto a y y a z.

Interpretación gráfica (dominio en $\mathbb{R}^2$)



Ejemplo

Sea $f(x,y) = y\,\mathrm{sen}(xy)$. Halle $f_x(0,1)$. Halle f_x y f_y como funciones. Interprete gráficos.



Otro ejemplo

$$f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

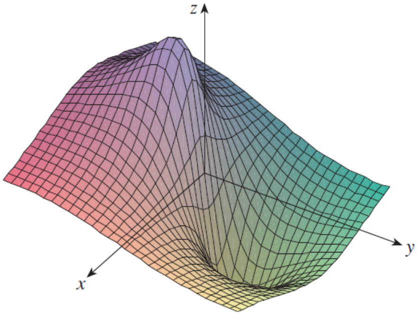
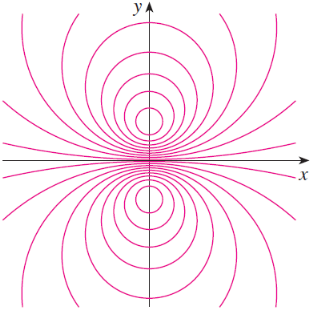


Gráfico de f



Curvas de nivel de f

(Ejemplo de Stewart)

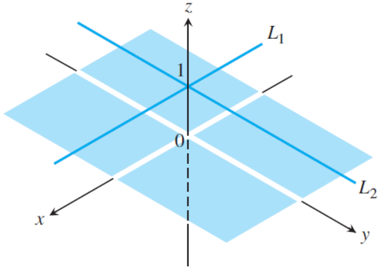
Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

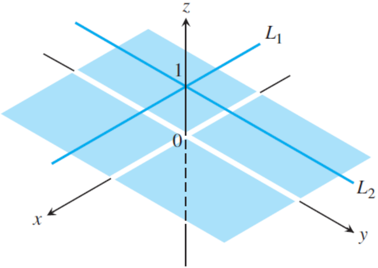
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



Analizar: existencia de límite, continuidad y derivadas parciales en $(0,0)$.

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



Analizar: existencia de límite, continuidad y derivadas parciales en $(0,0)$.
Observación: la existencia de derivadas parciales en un punto no implica la continuidad de la función en dicho punto...

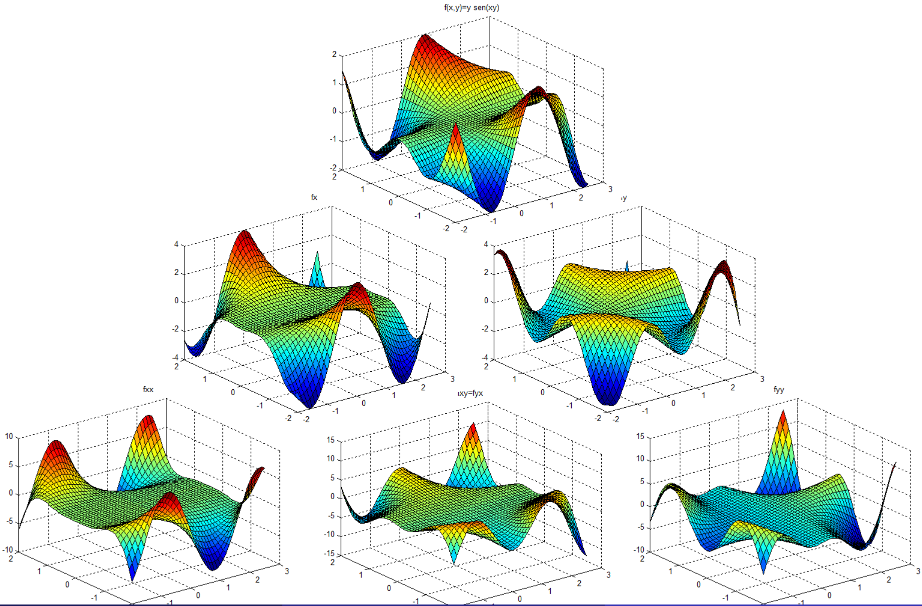
Recorrido

Notación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Ejemplo



Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Teorema de Clairaut o de la derivada mixta

Teorema

Si f y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene a un punto (a, b) y todas son continuas en (a, b), entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

SIN DEMOSTRACIÓN.

Recorrido

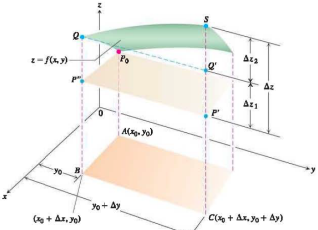
Diferenciabilidad

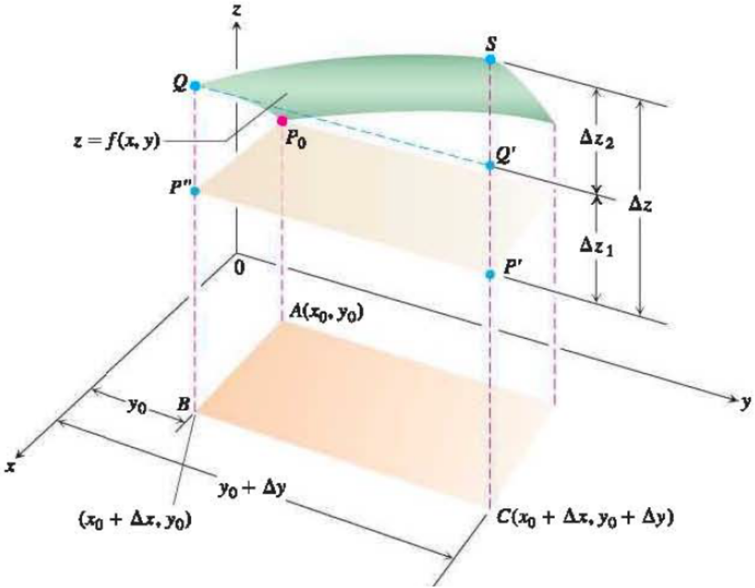
Definición

Una función f es diferenciable en un punto $P_0(x_0, y_0)$ (de su dominio) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple que el incremento $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ verifica:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

en la cual las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ cumplen $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$ y $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$.




z
S
Q
$z = f(x, y)$
P_0
Q'
P''
Δz_2
Δz
Δz_1
0
P'
$A(x_0, y_0)$
y
y_0
B
x
$y_0 + \Delta y$
$(x_0 + \Delta x, y_0)$
$C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

Diferenciabilidad implica continuidad

Teorema

Si una función f es diferenciable en un punto P_0 de su dominio, entonces es continua en P_0.

DEMOSTRAR

Teorema del incremento

Teorema (Teorema del incremento: DEMOSTRAR)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Teorema del incremento

Teorema (Teorema del incremento: DEMOSTRAR)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Teorema (El mismo Teorema del incremento: DEMOSTRAR)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces el incremento en el valor de f, $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, en R, satisface una ecuación de la forma

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

en la cual las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ cumplen $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$ y $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Teoremas

Teorema (Teorema del incremento: DEMOSTRAR)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Teorema (Teorema del incremento: DEMOSTRAR)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Corolario

Si las derivadas parciales f_x y f_y de una función son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en cada punto de R.

Ejemplos

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ejemplos

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   f_x y f_y existen y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$

Ejemplos

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   f_x y f_y existen y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
   f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$

Ejemplos

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   f_x y f_y existen y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
   f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$

2. $$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

Ejemplos

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   f_x y f_y existen y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
   f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$

2. $$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

   g es diferenciable en $(0,0)$ pero

Ejemplos

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   f_x y f_y existen y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
   f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
2. $$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

   g es diferenciable en $(0,0)$ pero g_x y g_y no son continuas en $(0,0)$.

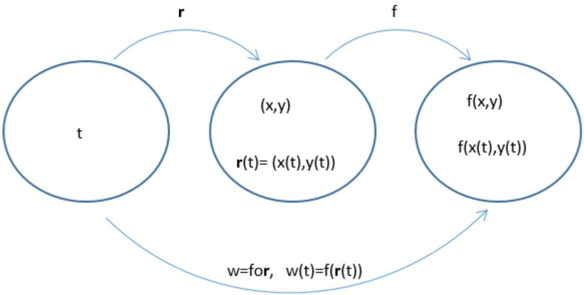
Ejemplos

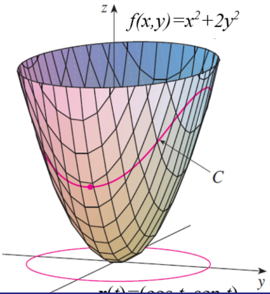
1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   f_x y f_y existen y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
   f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
2. $$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

   g es diferenciable en $(0,0)$ pero g_x y g_y no son continuas en $(0,0)$.
   ¿Conclusión?

Recorrido

Interpretación





Enunciado

Teorema (**Este es el enunciado, no el del libro**)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función de t tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables. Si $w = f \circ \mathbf{r}$, entonces w es una función derivable de t y

$$w'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

Enunciado

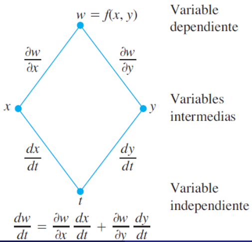
Teorema (**Este es el enunciado, no el del libro**)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función de t tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables. Si $w = f \circ \mathbf{r}$, entonces w es una función derivable de t y

$$w'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

DEMOSTRAR

Regla de la cadena



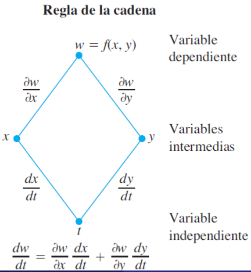
Enunciado

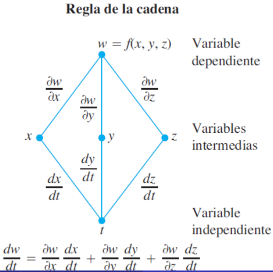
Teorema (Este es el enunciado, no el del libro)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función de t tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables. Si $w = f \circ \mathbf{r}$, entonces w es una función derivable de t y

$$w'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

DEMOSTRAR





Enunciados

Observar el enunciado (del libro) y explicar cuál es w y cuál es f:

TEOREMA 6: Regla de la cadena para funciones de tres variables Si $w = f(x, y, z)$ es derivable, y x, y y z son funciones derivables de t, entonces w es una función derivable de t y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

TEOREMA 7: Regla de la cadena para dos variables independientes y tres variables intermedias Suponga que $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ y $z = k(r, s)$. Si las cuatro funciones son derivables, entonces w tiene derivadas parciales con respecto a r y s, dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Enunciados

Si $w = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, y $y = h(r, s)$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Si $w = f(x)$ y $x = g(r, s)$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Ejemplo: PVT (justifica abuso de notación)

La presión P (en kilopascales), el volumen V (en litros) y la temperatura T (en kelvins) de un mol de un gas ideal están relacionados mediante la ecuación

$$PV = 8,31T.$$

Calcule la tasa de en la que la presión cambia cuando la temperatura es de $300K$ y se incrementa a una tasa de $0,1K/s$, y el volumen es de $100L$ y aumenta a una tasa de $0,2L/s$.

Ejemplo: PVT (justifica abuso de notación)

La presión P (en kilopascales), el volumen V (en litros) y la temperatura T (en kelvins) de un mol de un gas ideal están relacionados mediante la ecuación

$$PV = 8,31T.$$

Calcule la tasa de en la que la presión cambia cuando la temperatura es de $300K$ y se incrementa a una tasa de $0,1K/s$, y el volumen es de $100L$ y aumenta a una tasa de $0,2L/s$.

$$PV = 8,31T \Rightarrow P(t) = 8,31\frac{T(t)}{V(t)} \qquad \leftarrow \text{ESTA ES LA COMPUESTA}$$

$$P'(t) = P_T(T(t),V(t))T'(t) + P_V(T(t),V(t))V'(t) \qquad \leftarrow \text{R. cadena}$$

$$P_T(t) = \frac{8,31}{V(t)}T'(t) \qquad P_V(t) = -8,31T(t)\frac{V'(t)}{V(t)^2}$$

$$P_T(t) = 0,00831\frac{K}{ls} \qquad P_V(t) = -0,02493\frac{K^2}{l^2s}$$

$$P'(t) = 0,00831\frac{K}{ls}0,1\frac{K}{s} - 0{,}02493\frac{K^2}{l^2s}0,2\frac{l}{s} = -0,004155\frac{K^2}{ls^2}$$

Ejemplo: PVT (justifica abuso de notación)

La presión P (en kilopascales), el volumen V (en litros) y la temperatura T (en kelvins) de un mol de un gas ideal están relacionados mediante la ecuación

$$PV = 8,31T.$$

Calcule la tasa de en la que la presión cambia cuando la temperatura es de $300K$ y se incrementa a una tasa de $0,1K/s$, y el volumen es de $100L$ y aumenta a una tasa de $0,2L/s$.

$$PV = 8,31T \Rightarrow P(t) = 8,31\frac{T(t)}{V(t)} \qquad \leftarrow \text{ESTA ES LA COMPUESTA}$$

$$P'(t) = P_T(T(t),V(t))T'(t) + P_V(T(t),V(t))V'(t) \qquad \leftarrow \text{R. cadena}$$

$$P_T(t) = \frac{8,31}{V(t)}T'(t) \qquad P_V(t) = -8,31T(t)\frac{V'(t)}{V(t)^2}$$

$$P_T(t) = 0,00831\frac{K}{ls} \qquad P_V(t) = -0,02493\frac{K^2}{l^2s}$$

$$P'(t) = 0,00831\frac{K}{ls}0,1\frac{K}{s} - 0,02493\frac{K^2}{l^2s}0,2\frac{l}{s} = -0,004155\frac{K^2}{ls^2}$$

Ejemplo para derivación implícita

Dada y como función de x implícitamente por

$$\operatorname{sen} y = x^2 + y$$

podemos derivar implícitamente y obtener

$$y' = \frac{2x}{\cos y - 1}$$

Ejemplo para derivación implícita

Dada y como función de x implícitamente por

$$\operatorname{sen} y = x^2 + y$$

podemos derivar implícitamente y obtener

$$y' = \frac{2x}{\cos y - 1}$$

Si la función $y(x)$ se puede expresar implícitamente como $F(x, y) = 0$, podemos derivar parcialmente para obtener

$$0 = F_x(x, y) + F_y(x, y)y'(x)$$

de donde $y'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$ si $F_y \neq 0$.

Derivación implícita

TEOREMA 8: Una fórmula para la derivación implícita Suponga que $F(x, y)$ es derivable y que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función derivable de x. Entonces en cualquier punto donde $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{1}$$

Derivación implícita

TEOREMA 8: Una fórmula para la derivación implícita Suponga que $F(x, y)$ es derivable y que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función derivable de x. Entonces en cualquier punto donde $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{1}$$

¿Y si f es una función de dos variables?

TEOREMA 8: Una fórmula para la derivación implícita Suponga que $F(x, y)$ es derivable y que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función derivable de x. Entonces en cualquier punto donde $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{1}$$

¿Y si f es una función de dos variables?

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

TEOREMA 8: Una fórmula para la derivación implícita Suponga que $F(x, y)$ es derivable y que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función derivable de x. Entonces en cualquier punto donde $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{1}$$

¿Y si f es una función de dos variables?

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Un resultado importante de cálculo avanzado, llamado **teorema de la función implícita**, establece las condiciones para las cuales los resultados de la ecuación (2) son válidos. Si las derivadas parciales F_x, F_y y F_z son continuas en una región abierta R en el espacio que contiene el punto (x_0, y_0, z_0), y si para alguna constante c, $F(x_0, y_0, z_0) = c$ y $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y y cerca de (x_0, y_0, z_0), y las derivadas parciales de z están dadas por las ecuaciones (2).

Recorrido

Recorrido

Derivada direccional

Definición

La derivada direccional de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, en un punto $P(x_1, x_2) \in \operatorname{int} D$, viene dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(P) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2) - f(x_1, x_2)}{h},$$

si el límite existe.

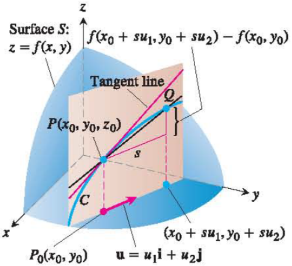
Derivada direccional

Definición

La derivada direccional de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, en un punto $P(x_1, x_2) \in \operatorname{int} D$, viene dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(P) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2) - f(x_1, x_2)}{h},$$

si el límite existe.



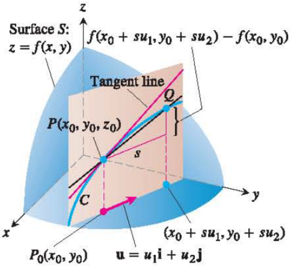
Derivada direccional

Definición

La derivada direccional de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, en un punto $P(x_1, x_2) \in \operatorname{int} D$, viene dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(P) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2) - f(x_1, x_2)}{h},$$

si el límite existe.



Interpretación como pendiente y como razón de cambio.

Derivada direccional

Definición

La derivada direccional de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^3$, en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, en un punto $P(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{int} D$, viene dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(P) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2, x_3 + hu_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h},$$

si el límite existe.

Interpretación como razón de cambio.

Recorrido

Vector gradiente

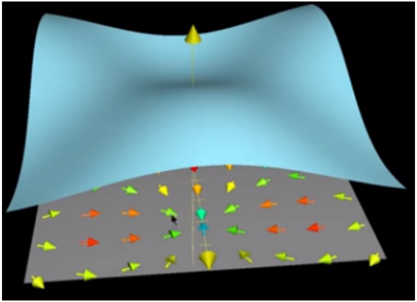
Definición

El gradiente de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0, si existen. Se denota por ∇f.

Vector gradiente

Definición

El gradiente de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0, si existen. Se denota por ∇f.



Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Sean f un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en un punto P, y $\mathbf{u}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Sean f un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en un punto P, y $\mathbf{u}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

Ejemplo: sean las funciones f dadas por

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, halle la derivada direccional de f en $(1, 2)$ en la dirección de un vector $\mathbf{u}$ unitario a elección;

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Sean f un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en un punto P, y $\mathbf{u}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

Ejemplo: sean las funciones f dadas por

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, halle la derivada direccional de f en $(1,2)$ en la dirección de un vector $\mathbf{u}$ unitario a elección;
2. $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

   halle la derivada direccional de f en $(0,0)$ (use cualquier versor $\mathbf{u}$). Indique si se puede aplicar la fórmula.

Propiedad: la derivada direccional de una función f en un punto P en que f es diferenciable, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.
DEMOSTRAR

Vector gradiente y derivada direccional

Propiedad: la derivada direccional de una función f en un punto P en que f es diferenciable, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.
DEMOSTRAR

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$$

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \|\nabla f(P)\| \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha) = \|\nabla f(P)\| \cos(\alpha),$$

máxima cuando $\alpha = 0$.

Propiedad: la derivada direccional de una función f en un punto P en que f es diferenciable, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.
DEMOSTRAR

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$$

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \|\nabla f(P)\| \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha) = \|\nabla f(P)\| \cos(\alpha),$$

máxima cuando $\alpha = 0$.

Conclusión: el vector gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función.

El vector gradiente es normal a la superficie o curva de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función diferenciable de dos variables, el gradiente de f en un punto $P \in D(f)$ es normal a la curva de nivel de f que pasa por P.

DEMOSTRAR:

El vector gradiente es normal a la superficie o curva de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función diferenciable de dos variables, el gradiente de f en un punto $P \in D(f)$ es normal a la curva de nivel de f que pasa por P.

DEMOSTRAR:
Digamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ parametriza una curva de nivel de f que pasa por un punto P_0 del dominio de f. Supongamos que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo t, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ (c es un valor constante). Derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t)$$

El vector gradiente es normal a la superficie o curva de nivel en cada punto

Teorema

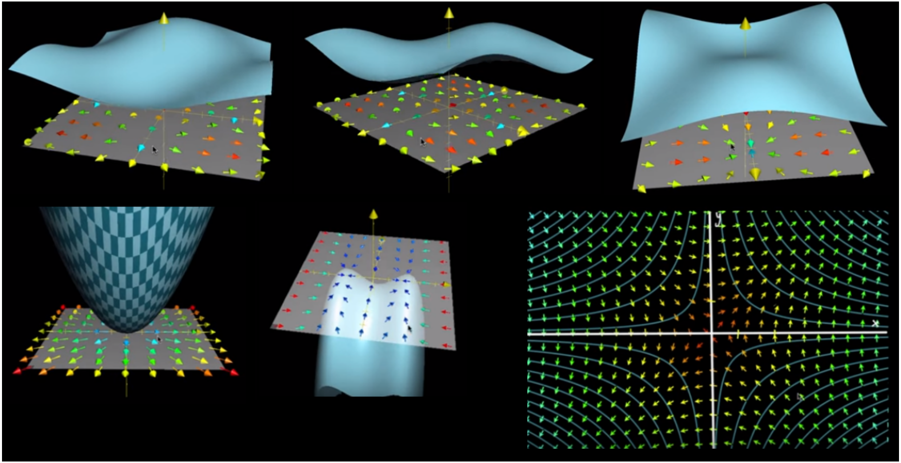
Si f es una función diferenciable de dos variables, el gradiente de f en un punto $P \in D(f)$ es normal a la curva de nivel de f que pasa por P.

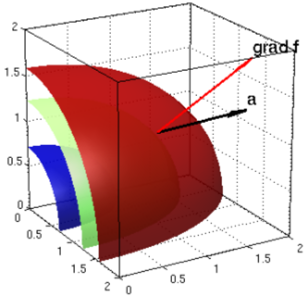
DEMOSTRAR:
Digamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ parametriza una curva de nivel de f que pasa por un punto P_0 del dominio de f. Supongamos que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo t, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ (c es un valor constante). Derivando,

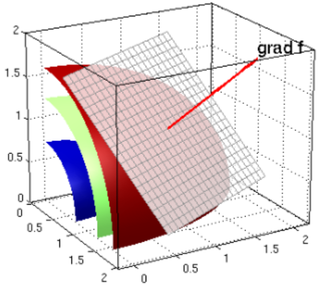
$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))y'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

En particular, $\nabla f(P_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$, que es tangente a la curva de nivel; luego, $\nabla f(P_0)$ es normal a la curva de nivel en P_0.

Vector gradiente, algunos gráficos de funciones de dos variables







Superficies de nivel.

Propiedades algebraicas del vector gradiente

Reglas algebraicas para gradientes

1. *Regla de la suma:* $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. *Regla de la resta:* $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\nabla(kf) = k\nabla f$ (cualquier número k)
4. *Regla del producto:* $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. *Regla del cociente:* $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

DEMOSTRAR: TAREA