TEORÍA DE DEMOSTRACIÓN

Prof. Sergio Salinas

Licenciatura en Ciencias de la Computación
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo

Lógica - 2025

Índice

Conceptos preliminares de la Teoría de la Demostración.

Demostración: conceptos claves

- En lógica, una demostración es un **argumento formal** y estructurado que muestra que una proposición (conclusión) es verdadera a partir de otras proposiciones (premisas) que se asumen verdaderas.
- Este proceso sigue **reglas de inferencia lógica**, que son principios que dictan cómo se pueden deducir conclusiones válidas a partir de premisas dadas.
- Una demostración comienza con premisas, que pueden ser **axiomas**, **teoremas** ya demostrados o **hipótesis** específicas del argumento en cuestión. A través de una secuencia de pasos lógicos, justificados por reglas de inferencia, se llega a la conclusión.
- Este método se usa en varios **sistemas formales**, como la lógica proposicional, la lógica de primer orden, y la matemática, entre otros. Por ejemplo, en matemáticas una demostración es una secuencia de afirmaciones lógicas que siguen una a otra para establecer la veracidad de un teorema.

Demostración: Argumento Formal

Argumento Formal

La forma general de un argumento que se desea demostrar que es válido es la siguiente: $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ donde n es un número positivo y las proposiciones $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ se denominan premisas del argumento y la proposición q es la conclusión del argumento.

Demostración: Reglas de inferencia lógica

Reglas de inferencia lógica

Las reglas de inferencia lógica son principios que permiten pasar de una o varias proposiciones, denominadas premisas, a una conclusión de manera válida dentro de un sistema lógico. Estas reglas son fundamentales para el razonamiento deductivo, ya que proporcionan el mecanismo formal a través del cual se puede establecer la verdad de nuevas proposiciones a partir de proposiciones ya conocidas o aceptadas. El cumplimiento de estas reglas garantiza que si las premisas son verdaderas, la conclusión obtenida también será verdadera, manteniendo así la validez lógica del argumento.

Demostración: Axioma

Axioma

Un axioma es una proposición que se acepta dentro de un marco teórico sin requerir demostración. Los axiomas sirven como punto de partida para la construcción de un sistema lógico o matemático. Se consideran verdaderos por definición y se utilizan para derivar otras verdades (teoremas) dentro del sistema. Los axiomas deben ser claros, consistentes entre sí y tan simples como sea posible para evitar complicaciones innecesarias. Un ejemplo clásico de axioma es el postulado de paralelas de Euclides, que afirma que por un punto exterior a una línea, se puede trazar una y solo una paralela a dicha línea.

Demostración: Teorema

Teorema

Un teorema es una proposición que ha sido demostrada como verdadera a partir de axiomas y aplicando reglas de inferencia lógica. Los teoremas se derivan mediante demostraciones rigurosas y proporcionan nuevos conocimientos que están lógicamente fundamentados en los axiomas del sistema. Cada teorema fortalece el sistema teórico del que forma parte, expandiendo el alcance de lo que se ha demostrado ser verdadero. Un ejemplo de teorema es el Teorema de Pitágoras, en la geometría euclidiana, que establece una relación específica entre los lados de un triángulo rectángulo.

Demostración: Lema

Lema

Es una proposición demostrada, utilizada para establecer un teorema menor o una premisa auxiliar que forma parte de un teorema más general. Los lemas funcionan como herramientas o peldaños intermedios que facilitan la construcción de demostraciones más elaboradas, ayudando a descomponer demostraciones complejas en partes más manejables.

Demostración: Corolario

Corolario

Un corolario es una proposición que sigue directa y fácilmente de un teorema o lema ya demostrado. Dado que un corolario se deriva de un resultado anterior sin necesidad de una demostración adicional complicada, se considera una consecuencia natural o una extensión de ese resultado. Los corolarios a menudo sirven para ilustrar aplicaciones específicas de un teorema más general o para establecer resultados que son interesantes por sí mismos, pero cuya prueba se basa fuertemente en la comprensión previa establecida por el teorema principal.

Demostración: Hipótesis

Hipótesis

Una hipótesis es una suposición o proposición que se plantea como posible o como punto de partida para una investigación o argumentación, pero que aún no ha sido probada como verdadera dentro del sistema. En el contexto de las demostraciones matemáticas, una hipótesis es una condición o conjunto de condiciones que se asume temporalmente para explorar sus consecuencias lógicas o matemáticas. Si estas exploraciones conducen a una demostración de que la hipótesis implica ciertas conclusiones, entonces se puede argumentar que, bajo las condiciones de la hipótesis, dichas conclusiones son verdaderas.

Demostración: Sistemas Formales

Sistema Formal

Un sistema formal es una estructura compuesta por un conjunto de símbolos, reglas para formar expresiones con esos símbolos, un conjunto de axiomas y reglas de inferencia que permiten derivar teoremas a partir de estos axiomas. Los sistemas formales son fundamentales para explorar, definir y probar conceptos de manera rigurosa y estructurada.

Demostración: características.

Las características de una demostración en lógica incluyen:

- Rigurosa: todo paso en la demostración debe seguirse con precisión según las reglas del sistema lógico. No hay lugar para la ambigüedad o la interpretación.
- Formales: la demostración se realiza dentro de un lenguaje formal, que tiene una sintaxis y una semántica bien definidas. Esto permite que la demostración sea verificada por otros o incluso por computadoras.
- Sistemáticas: las demostraciones siguen un orden lógico, avanzando de premisas básicas a conclusiones más complejas.
- Concluyentes: una vez completada, la demostración establece la verdad de la proposición dentro del sistema lógico. Esta verdad es independiente de opiniones o interpretaciones personales.

Historia de la Teoría de la Demostración

Inicios y Fundamentos

- **Antigüedad y Edad Media:** el estudio formal de las demostraciones comienza con los antiguos griegos. Euclides, en su obra "Elementos" (c. 300 a.C.), presentó un enfoque axiomático para la geometría donde los teoremas se derivan de axiomas mediante demostraciones. Sin embargo, la idea de estudiar las demostraciones como objetos en sí mismos no se materializaría hasta mucho después.

- **Siglo XIX:** el desarrollo de la teoría de conjuntos por Cantor y las paradojas resultantes, como la paradoja de Russell, expusieron la necesidad de un fundamento más sólido para las matemáticas. Esto llevó a los matemáticos a buscar sistemas formales donde las demostraciones pudieran ser representadas y verificadas de manera precisa.

Formalización de las Matemáticas

- **Principios del siglo XX:** David Hilbert propuso su programa para proporcionar un fundamento sólido a las matemáticas, buscando demostrar la consistencia de los sistemas matemáticos. La teoría de la demostración se convirtió en una herramienta esencial en este esfuerzo.
- **Años 1930:** Kurt Gödel publicó sus **teoremas de incompletitud**, demostrando que cualquier sistema formal suficientemente poderoso como para contener aritmética no puede ser al mismo tiempo completo y consistente. Este fue un punto de inflexión, demostrando los límites de lo que se puede demostrar dentro de ciertos sistemas formales.

Desarrollo y Madurez

- **Mediados del siglo XX:** Alonzo Church y Alan Turing trabajaron en la definición de la computabilidad, con el concepto de la máquina de Turing y el **cálculo lambda**, estableciendo las bases de la informática teórica y mostrando la conexión entre la computación y la lógica.

- **Décadas de 1950 y 1960:** Se desarrollaron los primeros sistemas de prueba automatizada de teoremas, como el Logic Theorist de Newell, Shaw y Simon. Estos sistemas podían realizar demostraciones automáticas de teoremas dentro de ciertos límites, abriendo el camino a la verificación formal de teoremas y programas.

Expansión y Aplicaciones

- **Finales del siglo XX y principios del XXI:** La teoría de la demostración ha encontrado aplicaciones en áreas como la verificación de software y hardware, donde se utilizan pruebas formales para asegurar que los sistemas cumplen con sus especificaciones. Las herramientas de prueba asistida por computadora, como Coq y Isabelle, han permitido la formalización y verificación de teoremas complejos, como el teorema de los cuatro colores y partes del Teorema de la clasificación de los grupos finitos simples.

- **Actualidad:** La teoría de la demostración continúa evolucionando, con investigaciones en lógicas no clásicas, pruebas constructivas, y la interacción entre lógica y teoría de categorías. Además, la creciente importancia de la seguridad informática y la fiabilidad del software impulsa el desarrollo de técnicas de demostración avanzadas.

Teoría de la demostración

Teoría de la Demostración

Teoría de la demostración

La teoría de la demostración es una rama de la lógica matemática y la informática teórica que se ocupa del estudio de las demostraciones como objetos matemáticos, permitiendo su análisis a través de herramientas matemáticas y computacionales. Esta teoría examina la estructura de las demostraciones, las técnicas para construir demostraciones y cómo se pueden manipular, comparar y transformar. Uno de sus objetivos principales es comprender la naturaleza de las demostraciones matemáticas desde un punto de vista formal y computacional.

Teoría de la Demostración

Los objetivos de la teoría de la demostración incluyen:

- **Formalización de las Matemáticas:** proporcionar un marco formal en el cual las demostraciones matemáticas pueden ser representadas, verificadas y estudiadas, contribuyendo a la precisión y rigor en las matemáticas.
- **Automatización de la Demostración:** desarrollar algoritmos y sistemas capaces de realizar demostraciones automáticas de teoremas, lo que ayuda en la verificación de afirmaciones matemáticas y en la exploración de nuevas áreas de investigación.
- **Comprensión de la Computabilidad y la Complejidad:** a través del estudio de las demostraciones, se investiga qué proposiciones son demostrables dentro de ciertos sistemas formales y cuán complejo es el proceso de demostración, aportando a la teoría de la computabilidad y la complejidad computacional.

Teoría de la Demostración

Los objetivos de la teoría de la demostración incluyen:

- **Desarrollo de Sistemas de Prueba Asistida por Computadora:** crear y mejorar herramientas que asistan a los matemáticos en la creación y verificación de demostraciones, asegurando la corrección de los argumentos y facilitando la exploración de problemas complejos.

- **Estudio de la Fundación de las Matemáticas:** investigar los fundamentos de las matemáticas a través del estudio de la consistencia, completitud, y otros propiedades de los sistemas formales, así como las relaciones entre diferentes sistemas lógicos.

- **Aplicaciones Interdisciplinarias:** aplicar los métodos y herramientas de la teoría de la demostración en otras áreas, como la verificación formal de software y hardware, para asegurar que cumplen con ciertas especificaciones y propiedades de seguridad y corrección.

Teoría de la Demostración

Abarca varios aspectos, incluyendo pero no limitado a:

- **Sintaxis y semántica de los sistemas formales:** estudio de las reglas que definen la estructura de las demostraciones y el significado de las expresiones dentro de un sistema.
- **Teoremas de completitud y de incompletitud:** investigación sobre si un sistema formal puede representar adecuadamente la matemática o ciertos aspectos de ella, incluyendo los teoremas de incompletitud de Gödel que demuestran las limitaciones inherentes a ciertos sistemas formales.
- **Teoremas de consistencia:** análisis de si es posible o no derivar contradicciones dentro de un sistema formal.
- **Algoritmos de decisión:** estudio sobre la existencia de métodos algorítmicos para determinar la veracidad de las proposiciones dentro de un sistema.

Teorema de Completitud de Gödel

El Teorema de Completitud de Gödel

El Teorema de Completitud de Gödel, presentado por Kurt Gödel en 1929 y publicado en 1930, es un resultado fundamental en la lógica de primer orden. Este teorema establece que si un sistema formal es consistente (es decir, no contiene contradicciones), entonces todas las verdades formulables en la lógica de primer orden pueden ser demostradas dentro de ese sistema. En otras palabras, el teorema garantiza que si una fórmula es lógicamente válida, entonces existe una demostración de esa fórmula a partir de los axiomas del sistema usando las reglas de inferencia del sistema.

Teorema de Completitud de Gödel

Aspectos claves a considerar:

- **Completitud Semántica:** la principal afirmación del teorema es sobre la completitud semántica de la lógica de primer orden. Esto significa que para cualquier afirmación que sea verdadera en todos los modelos de un conjunto de axiomas (es decir, verdadera "semánticamente"), existe una demostración sintáctica de esa afirmación a partir de esos axiomas.

- **Lógica de Primer Orden:** el teorema se aplica específicamente a la lógica de primer orden, también conocida como lógica de predicados. La lógica de primer orden es un sistema que permite hablar sobre objetos y sus relaciones, utilizando cuantificadores como "para todo" y "existe".

- **Implicaciones:** aunque la lógica de primer orden es muy poderosa y capaz de expresar una amplia gama de conceptos matemáticos, también tiene sus limitaciones. El teorema de completitud de Gödel muestra que, dentro de este límite, la lógica de primer orden es completamente adecuada para capturar todas las verdades que puede expresar.

Teoremas de Incompletitud de Gödel

Los Teoremas de Incompletitud de Gödel, formulados por Kurt Gödel en 1931, son dos de los resultados más importantes y profundos en la lógica matemática y la filosofía de las matemáticas. Estos teoremas establecen limitaciones fundamentales en la capacidad de los sistemas formales para demostrar todas las verdades numéricas o aritméticas.

Teoremas de Incompletitud de Gödel

Primer Teorema de Incompletitud de Gödel

El primer teorema de incompletitud establece que en cualquier sistema formal suficientemente rico para incluir la aritmética básica (es decir, que puede representar operaciones y relaciones aritméticas básicas y que es consistente), existen proposiciones sobre números naturales que no pueden ser ni demostradas ni refutadas dentro del sistema. Esto significa que hay afirmaciones verdaderas dentro de la teoría que el sistema no puede probar, lo que implica que el sistema es "incompleto". La condición de que el sistema sea "suficientemente rico" implica que debe ser capaz de expresar afirmaciones sobre la aritmética elemental y realizar deducciones básicas.

Segundo Teorema de Incompletitud

Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel

El segundo teorema de incompletitud refuerza la primera declaración al mostrar que ningún sistema formal suficientemente rico y consistente puede demostrar su propia consistencia. La consistencia de un sistema se refiere a la ausencia de contradicciones dentro del mismo; es decir, no es posible que tanto una afirmación como su negación sean demostrables dentro del sistema. El segundo teorema indica que, para tales sistemas, la demostración de su propia consistencia requiere salirse del sistema y utilizar principios no formulables dentro del mismo.

Cálculo Lambda

Cálculo Lambda

El cálculo lambda es un sistema formal diseñado para investigar la definición de función, la aplicación de función y la recursión. Fue introducido por Alonzo Church en la década de 1930 como parte de sus investigaciones en los fundamentos de las matemáticas. Aunque inicialmente se concibió como una herramienta para el estudio de la lógica y la computabilidad, el cálculo lambda ha encontrado aplicaciones en una amplia gama de áreas, incluida la programación de computadoras, donde se utiliza como base para los lenguajes de programación funcional.

Cálculo Lambda

Cálculo Lambda

En informática, el cálculo lambda ha influenciado profundamente el diseño de lenguajes de programación funcional como Haskell, Lisp y otros, que utilizan conceptos de abstracción y aplicación de funciones como sus elementos centrales. Además, conceptos derivados del cálculo lambda, como las expresiones lambda en Java y Python, permiten a los programadores escribir código más conciso y expresivo, facilitando la implementación de operaciones como el filtrado, mapeo y reducción de colecciones de datos.

Computabilidad

Computabilidad

La computabilidad es un concepto fundamental en la teoría de la computación que se refiere a la capacidad de resolver un problema mediante un procedimiento mecánico o algorítmico. En otras palabras, un problema se considera computable si existe un algoritmo que, dadas ciertas entradas, puede producir una solución en un número finito de pasos. Este concepto es esencial para entender los límites de lo que las máquinas (en particular, las computadoras) pueden y no pueden hacer.

Máquina de Turing

Máquina de Turing

La Máquina de Turing es un concepto teórico en la computación y la teoría de la computabilidad que fue introducido por Alan Turing en 1936. Es un modelo matemático de una máquina hipotética que opera sobre una cinta infinita dividida en celdas. Cada celda puede contener un símbolo de un conjunto finito de símbolos posibles. La máquina se caracteriza por tener un "cabezal" de lectura/escritura que puede moverse a lo largo de esta cinta, leer símbolos, escribir nuevos símbolos (reemplazando los existentes) y moverse hacia la izquierda o hacia la derecha según las reglas definidas por una "tabla de transiciones". Esta tabla de transiciones es, en esencia, el "programa" de la máquina y determina su comportamiento basándose en el estado actual de la máquina y el símbolo que el cabezal está leyendo en ese momento.

Prueba Automatizada de Teoremas

Prueba Automatizada de Teoremas

Los sistemas de prueba automatizada de teoremas son herramientas de software diseñadas para asistir en la verificación de teoremas matemáticos utilizando métodos computacionales. Estos sistemas implementan algoritmos que intentan generar pruebas formales de teoremas propuestos a partir de un conjunto dado de axiomas y reglas de inferencia. Su objetivo es automatizar el proceso de demostración tanto como sea posible, reduciendo el esfuerzo humano necesario para verificar la corrección de afirmaciones matemáticas o lógicas.

Razonamiento y Demostración

Razonamiento

Razonamiento

El razonamiento se define como el proceso cognitivo de derivar conclusiones a partir de premisas, evidencia, o situaciones específicas. Es una actividad mental que implica la manipulación de información para alcanzar conclusiones, resolver problemas, tomar decisiones o generar nuevas ideas.

Tipos de razonamientos

- **Razonamiento Deductivo:** el razonamiento deductivo parte de una o más premisas generales para llegar a una conclusión específica. Las premisas proporcionan soporte lógico completo para la conclusión. Si las premisas son verdaderas y el razonamiento es válido, entonces la conclusión también debe ser verdadera. Este tipo de razonamiento es común en la lógica formal y las matemáticas.

- **Razonamiento Inductivo:** el razonamiento inductivo generaliza a partir de casos específicos para formar conclusiones generales. A diferencia del razonamiento deductivo, el inductivo no garantiza la veracidad de la conclusión, pero puede aumentar su probabilidad. Este tipo de razonamiento es fundamental en la ciencia para formular teorías y hipótesis.

Tipos de razonamientos

- **Razonamiento Abductivo:** el razonamiento abductivo busca la explicación más probable para un conjunto de observaciones. Se usa frecuentemente en el diagnóstico médico y la investigación científica para formular hipótesis que luego deben ser probadas.

- **Razonamiento Analógico:** el razonamiento analógico hace inferencias basándose en la similitud entre dos situaciones. Se utiliza para resolver problemas nuevos con base en la comprensión de problemas similares previamente resueltos.

Demostración

Demostración

Una demostración es un razonamiento lógico que parte de premisas aceptadas como verdaderas (tales como axiomas, definiciones y teoremas previamente demostrados) para establecer la veracidad de una proposición o teorema. En el ámbito de la matemática y la lógica, una demostración es un argumento formal que muestra, paso a paso, cómo se llega a una conclusión a partir de las premisas dadas, siguiendo reglas de inferencia específicas del sistema lógico o matemático en el que se trabaja.

Métodos de Demostración

- **Demostración Directa:** en una demostración directa, se parte de las premisas o axiomas y, mediante una serie de pasos lógicos y aplicaciones de teoremas previamente demostrados, se llega directamente a la conclusión. Este método sigue el flujo natural del razonamiento lógico de las premisas a la conclusión.
  Ejemplo: Demostrar que la suma de dos números pares es par. Se parte de la definición de números pares y se muestra directamente que su suma cumple con la definición de par.

- **Demostración por Contradicción (Reductio ad Absurdum):** este método supone que la declaración que se desea probar es falsa y, a partir de esa suposición, se derivan consecuencias lógicas. Si se llega a una contradicción, esto indica que la suposición de falsedad es incorrecta, y por lo tanto, la declaración original debe ser verdadera.
  Ejemplo: La demostración de que 2 es irracional se realiza a menudo por contradicción, suponiendo que 2 es racional y mostrando que esto lleva a una contradicción.

- **Demostración por Inducción:** la demostración por inducción se utiliza principalmente para probar propiedades de los números enteros. Se basa en dos pasos: el caso base, donde se verifica la propiedad para el primer valor del conjunto (generalmente 0 o 1), y el paso inductivo, donde se asume que la propiedad es verdadera para un caso "n" y se demuestra que, bajo esa suposición, la propiedad también debe ser verdadera para el caso "n+1".
  Ejemplo: Probar que la suma de los primeros nn números naturales es $\frac{nn+1}{2}$ se hace típicamente por inducción.

- **Demostración por Contrapositiva:** la demostración por contrapositiva de una implicación "si P entonces Q" implica probar la contrapositiva "si no Q entonces no P". Este método es útil cuando la contrapositiva es más fácil de demostrar que la declaración original.
  Ejemplo: Demostrar que si n^2 es impar, entonces n es impar, se puede hacer más fácilmente demostrando su contrapositiva: si n es par, entonces n^2 es par.

- **Demostración por Casos:** este método divide la proposición a demostrar en varios casos, y la demostración se lleva a cabo de forma independiente para cada caso. Si se puede demostrar que la proposición es verdadera en todos los casos posibles, entonces la proposición se considera verdadera. **Ejemplo:** Demostrar una identidad trigonométrica para todos los ángulos dividiendo los casos en ángulos agudos, obtusos, y otros.

- **Demostración Constructiva:** en una demostración constructiva, se demuestra la existencia de un objeto matemático construyéndolo explícitamente o proporcionando un método para su construcción. Este tipo de demostración no solo establece que algo existe, sino que también muestra cómo encontrarlo o construirlo. **Ejemplo:** Demostrar que existen dos números irracionales a y b tales que a^b es racional, construyendo explícitamente tales números.

Deducción Natural

Deducción natural

- La deducción natural es un método para derivar la conclusión de argumentos válidos expresados en el simbolismo de la lógica proposicional.
- El método consiste en utilizar conjuntos de reglas de inferencia (formas de argumento válidas) para derivar una conclusión directamente o una serie de conclusiones intermedias que vinculan las premisas de un argumento con la conclusión declarada.
- La deducción natural recibe su nombre del hecho de que se asemeja al proceso ordinario de razonamiento paso a paso que usa una persona en la vida diaria.
- Se parece al método utilizado en geometría para derivar teoremas relacionados con líneas y figuras.
- Cada paso de una demostración geométrica depende de algún principio matemático, mientras que cada paso de una demostración lógica depende de una regla de inferencia.

Recordatorio definición de Argumento

Definition

La forma general de un argumento que se desea demostrar es válido es la siguiente: $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ donde n es un número positivo y las proposiciones $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ se denominan premisas del argumento y la proposición q es la conclusión del argumento.

El argumento es válido cada vez que las premisas $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ sean verdaderas entonces la conclusión q también lo es. Si alguna de las premisas $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ es falsa, entonces la hipótesis $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n$ es falsa y la implicación automáticamente es verdadera sin importar el valor de verdad de q. Una forma de establecer la validez de un argumento dado es demostrar que la proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ es una tautología.

Conceptos sobre Reglas de Inferencia

Conceptos sobre Reglas de Inferencia

Reglas de Inferencia

Las reglas de inferencia son principios que permiten derivar una conclusión a partir de una o más premisas. Son el mecanismo fundamental mediante el cual se construyen argumentos válidos en la lógica. Cada regla de inferencia define una forma válida de **razonamiento**, garantizando que si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión derivada de estas también lo será, bajo el marco de esa regla específica.

Teoría de Demostración y Reglas de Inferencia

Recordatorio sobre Teoría de Demostración

La teoría de demostración se ocupa del estudio de la estructura y las propiedades de las demostraciones matemáticas. Se enfoca en cómo se pueden construir demostraciones a partir de axiomas y teoremas previamente establecidos mediante la aplicación de reglas de inferencia. La teoría de demostración busca entender cómo se pueden demostrar proposiciones y cómo se pueden formalizar las demostraciones dentro de sistemas lógicos o matemáticos específicos.

Teoría de Demostración y Reglas de Inferencia

- **Construcción de Demostraciones:** las reglas de inferencia son las herramientas mediante las cuales se construyen las demostraciones en la teoría de demostración. Permiten pasar de premisas conocidas a conclusiones nuevas de manera lógicamente válida.

- **Fundamentos Lógicos:** las reglas de inferencia proporcionan el fundamento lógico para la validez de las demostraciones matemáticas. Sin reglas de inferencia bien definidas y aceptadas, no sería posible asegurar la corrección lógica de las demostraciones.

Teoría de Demostración y Reglas de Inferencia

- **Sistemas Formales:** en el contexto de sistemas formales, las reglas de inferencia son parte integral de la definición de tales sistemas. Un sistema formal incluye un conjunto de axiomas (premisas iniciales aceptadas sin prueba) y reglas de inferencia que permiten derivar teoremas. La teoría de demostración estudia cómo estas reglas pueden aplicarse para demostrar teoremas de manera sistemática y rigurosa.

- **Automatización de Demostraciones:** en la investigación de la automatización de la demostración de teoremas, las reglas de inferencia juegan un papel crucial permitiendo a los sistemas computacionales aplicar estas reglas de manera algorítmica para encontrar demostraciones de proposiciones matemáticas.

Reglas de Inferencias

1-Modus Ponens (Regla de separación)

1. Modus Ponens proviene del Latín y significa método de afirmación.
2. Esta regla se puede expresar en forma simbólica de la siguiente forma: $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
3. La tabla de verdad está determinada por:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

4. La forma tabular de la regla es:

$p \rightarrow q$	Si hoy es jueves, entonces Juan trabaja.
p	Hoy es jueves
$\therefore q$	Por lo tanto, Juan trabaja

2-Modus Tollens

1. Modus Tollens proviene del Latín y significa método de negación.

2. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente:
   $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

3. La forma tabular de la regla es:

$p \rightarrow q$	Si el agua hierve, entonces libera vapor.
$\neg q$	No libera vapor.
$\therefore \neg p$	Por lo tanto, no está hirviendo el agua.

2-Modus Tollens (1)

Ejemplo:

1. Si Martín va al cine, entonces Lara irá al cine con Martin.
2. Lara no fue al cine.
3. Por lo tanto, Martín no fue al cine.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

3-Silogísmo hipotético

1. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente:
   $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ donde p,q y r son proposiciones.

2. La forma tabular de la regla es:
$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

3. Ejemplo:
   1. Si el número entero 60 es divisible por 30, entonces 60 es divisible por 15.
   2. Si el número entero 60 es divisible por 15, entonces 60 es divisible por 5.
   3. Por lo tanto, si el entero 60 es divisible por 30, entonces 60 es divisible por 5.

3-Silogísmo hipotético (1)

Ejemplo:

1. Rita prepara una torta.
2. Si Rita prepara una torta, entonces ella no está practicando piano.
3. Si Rita no practica piano, entonces su padre no le comprará una laptop.
4. Por lo tanto, el padre de Rita no le comprará una laptop.

$$\begin{array}{l} p \\ p \to \neg q \\ \neg q \to \neg r \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

3-Silogísmo hipotético (2)

	Pasos	Justificación
1	$p \rightarrow \neg q$	Premisa
2	$\neg q \rightarrow \neg r$	Premisa
3	$p \rightarrow \neg r$	Ley de silogísmo en (1) y (2)
4	p	Premisa
5	$\therefore \neg r$	Ley de Modus Ponens (3) y (4)

	Pasos	Justificación
1	p	Premisa
2	$p \rightarrow \neg q$	Premisa
3	$\neg q$	Ley de Modus Ponens (1) y (2)
4	$\neg q \rightarrow \neg r$	Premisa
5	$\therefore \neg r$	Ley de Modus Ponens (3) y (4)

1. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente: $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$.

2. La forma tabular de la regla es: $$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

   Ejemplo:

   1. La billetera de Marcos está en el bolsillo de su pantalón o en su escritorio.
   2. La billetera de Marcos no está en el bolsillo de su pantalón.
   3. Por lo tanto, la billetera de Marcos está en su escritorio.

5-Regla de contradicción

1. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente: $(\neg p \rightarrow F_0) \rightarrow p$.

2. La forma tabular de la regla es: $\dfrac{\neg p \rightarrow F_0}{\therefore p}$

6-Regla de conjunción

1. Surge de la observación de que si p y q son proposiciones verdaderas, entonces $p \wedge q$ es una proposición verdadera.

2. La forma tabular de la regla es: $$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

3. Es posible utilizar esta regla cuando las proposiciones p y q aparecen en el desarrollo de un argumento. Estas proposiciones podrían ser premisas obtenidas en una parte anterior del argumento.

7-Simplificación conjuntiva

1. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente: $(p \wedge q) \rightarrow p$.

2. La forma tabular de la regla es: $\dfrac{(p \wedge q)}{\therefore p}$

8-Amplificación disyuntiva

1. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente: $p \to p \vee q$.

2. La forma tabular de la regla es: $\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$

9-Regla de demostración condicional

1. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente: $[(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))] \rightarrow r$.

2. La forma tabular de la regla es: $$\begin{array}{l} (p \wedge q) \\ p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \hline \therefore r \end{array}$$

10-Regla de demostración por casos

1. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente:
   $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$.

2. La forma tabular de la regla es:

$$\begin{array}{l} (p \to r) \\ (q \to r) \\ \hline \therefore (p \vee q) \to r \end{array}$$

11-Regla del dilema constructivo

1. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente: $[(p \to q) \land (r \to s) \land (p \lor r)] \to (q \lor s)$.

2. La forma tabular de la regla es: $$\begin{array}{c} (p \to q) \\ (r \to s) \\ (p \lor r) \\ \hline \therefore (q \lor s) \end{array}$$

12-Regla del dilema destructivo

1. La expresión simbólica de esta regla es la siguiente: $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \to (\neg p \vee \neg r)$.

2. La forma tabular de la regla es:
$$\begin{array}{l} (p \to q) \\ (r \to s) \\ (\neg q \vee \neg s) \\ \hline \therefore (\neg p \vee \neg r) \end{array}$$

Regla de especificación universal

Regla de especificación universal

Si una proposición abierta es verdadera para todos los reemplazos con los miembros de un universo dado, entonces esa proposición abierta es verdadera para cada miembro específico de ese universo. De forma simbólica, si px es una proposición abierta para un universo dado y si $\forall x px$ es verdadero, entonces pa es verdadera para cada a del universo.

Ejemplo 1

Sean $m(x) : x$ es profesor de matemática y $(x) : x$ ha estudiado cálculo. Consideremos el siguiente argumento:

- Todos los profesores de matemática han estudiado cálculo.
- Laura (l) es profesora de matemática.
- Por lo tanto, Laura ha estudiado cálculo.

En forma simbólica:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Premisa} & \forall x[m(x) \to c(x)] \\
\text{Premisa} & m(l) \\
\hline
\text{Conclusión} & \therefore c(l)
\end{array}
$$

Ejemplo 1

Demostración:

Pasos		Justificación
1	$\forall x[m(x) \to c(x)]$	Premisa
2	$m(l)$	Premisa
3	$m(l) \to c(l)$	Paso 1 y la regla de especificación universal
4	$\therefore c(l)$	Paso 2, 3 y Modus Ponens

Observaciones: la regla de especificación universal nos permite tomar una premisa cuantificada universalmente y deducir de ésta una proposición ordinaria no cuantificada. Esta proposición llamada $m(l) \to c(l)$ es un caso verdadero de la premisa verdadera cuantificada universalmente.

Ejemplo 2

Consideremos el siguiente caso:

- $p(t)$: t tiene dos lados de igual longitud.
- $q(t)$: t es un triángulo isósceles.
- $r(t)$: t tiene dos ángulos de igual medida.

Evaluamos el caso particular de un triángulo c que no tiene dos ángulos iguales es decir $\neg rc$.

El triángulo c no tiene dos ángulos iguales	$\neg r(c)$
Si un triángulo tiene dos lados iguales es isósceles	$\forall t[p(t) \to q(t)]$
Si un triángulo es isósceles tiene dos ángulos iguales	$\forall t[q(t) \to r(t)]$
Por lo tanto el triángulo c no tiene dos lados iguales	$\therefore \neg p(c)$

Ejemplo 2

Demostración:

Pasos		Justificación
1	$\forall t[p(t) \rightarrow q(t)]$	Premisa
2	$p(c) \rightarrow q(c)$	Paso 1 y regla de especificación universal
3	$\forall t[q(t) \rightarrow r(t)]$	Premisa
4	$q(c) \rightarrow r(c)$	Paso 3 y regla de especificación universal
5	$p(c) \rightarrow r(c)$	Pasos 2,4 y ley de silogísmo
6	$\neg r(c)$	Premisa
7	$\therefore \neg p(c)$	Pasos 5,6 y Modus Tollens

Ejemplo 3

Considere el universo de estudiantes de una escuela donde se definen las siguientes proposiciones:

1. $j(x)$:x está en el penúltimo año.
2. $s(x)$:x está en el último año.
3. $p(x)$: x está inscripta en una clase de educación física.

Evaluamos el caso particular María (m) no es estudiante de último año.

Ningún estudiante de penúltimo o último año está inscripto en clases de educación física	$\forall x[(j(x) \vee s(x)) \rightarrow \neg p(x)]$
María está inscripta en una clase de educación física.	$p(m)$
Por lo tanto, María no es estudiante de último año.	$\therefore \neg s(m)$

Ejemplo 3

Demostración:

Pasos		Justificación
1	$\forall x[(j(x) \vee s(x)) \rightarrow \neg p(x)]$	Premisa
2	$p(m)$	Premisa
3	$(j(m) \vee s(m)) \rightarrow \neg p(m)$	Paso 1 y regla de especificación universal
4	$p(m) \rightarrow \neg(j(m) \vee s(m))$	Paso 3 y la regla de doble negación $(q \rightarrow t) \Longleftrightarrow (\neg t \rightarrow \neg q)$.
5	$p(m) \rightarrow \neg j(m) \wedge \neg s(m))$	Paso 4 y ley de DeMorgan
6	$\neg j(m) \wedge \neg s(m)$	Pasos 2, 5 y Modus Ponens
7	$\therefore \neg s(m)$	Paso 6 y regla de simplicación conjuntiva

En los ejemplos 1, 2 y 3 se utilizó la regla de especificación universal junto a Modus Ponens o Modus Tollens. Es importante considerar posibles errores al utilizar estas reglas como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

Consideremos el universo de todos los polígonos que hay en un plano. Sea c un cuadrilátero $EFGH$ cuyo ángulo E mide 91 grados y las siguientes proposiciones abiertas:

1. $p(x)$ x es un cuadrado.
2. $q(x)$ x tiene cuatro lados.

Los siguientes argumentos son válidos considerando Modus Ponens?

Todos los cuadrados tienen cuatro lados	$\forall x[p(x) \to q(x)]$
El cuadrilátero *EFGH* tiene cuatro lados	$q(c)$
Por lo tanto el cuadrilátero *EFGH* es un cuadrado	$\therefore p(c)$

Aunque las premisas son verdaderas la conclusión es falsa. Cuando aplicamos la regla de especificación universal obtenemos un argumento no válido.

Ejemplo 4

Los siguientes argumentos son válidos considerando Modus Tollens?

Todos los cuadrados tienen cuatro lados	$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$
El cuadrilátero *EFGH* no es un cuadrado	$\neg p(c)$
Por lo tanto el cuadrilátero *EFGH* no tiene 4 lados	$\therefore \neg q(c)$

Regla de la generalización universal

En los ejemplos presentados hasta el momento los argumentos presentan proposiciones cuantificadas universalmente, sin embargo en ningún caso apareció como conclusión una proposición cuantificada universalmente. Muchos teoremas en matemáticas tienen la forma de una proposición cuantificada universalmente.

Regla de la generalización universal

Regla de generalización universal

Si se demuestra que una proposición abierta $p(x)$ es verdadera cuando x se reemplaza por cualquier elemento c elegido en forma arbitraria de nuestro universo, entonces la proposición cuantificada universalmente $\forall x p(x)$ es verdadera. Además, la regla se extiende al caso de más de una variable. Si demostramos que una proposición abierta $q(x, y)$ es verdadera al reemplazar x, y por los elementos elegidos en forma arbitaria del mismo universo o de los universos respectivos, entonces la proposicion cuantificada universalmente $\forall x \forall y q(x, y)$ es verdadera. También se cumplen resultados similares para casos de 3 o más variables.

Ejemplo 1

Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas en un universo dado entonces es posible demostrar que el siguiente argumento es válido.

$$\begin{array}{c} \forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x[q(x) \rightarrow r(x(] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

	Pasos	Justificación
1	$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$	Premisa
2	$p(c) \rightarrow q(c)$	Paso 1 y la regla de especificación universal
3	$\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$	Premisa
4	$q(c) \rightarrow r(c)$	Paso 3 y la regla de especificación universal
5	$p(c) \rightarrow r(c)$	Paso 2, 4 y ley de silogísmo
6	$\therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)]$	Paso 5 y la regla de generalización universal.

Resumen Reglas de Inferencia

1) Modus Ponens	2) Modus Tollens	3) Silogísmo hipotético	4) Silogismo disyuntivo
$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$
5) Regla de contradicción	6) Regla de conjunción	7) Simplificación conjuntiva	8) Amplificación disyuntiva
$\begin{array}{l} \neg p \to F_0 \\ \hline \therefore p \end{array}$	$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$
9) Demostración condicional	10) Demostración por casos	11) Dilema constructivo	12) Dilema destructivo
$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \to q \to r \\ \hline \therefore r \end{array}$	$\begin{array}{l} p \to r \\ q \to r \\ \hline \therefore p \vee q \to r \end{array}$	$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$	$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg r \end{array}$

Fin