Trabajo Práctico 6

Series de Fourier. Ecuaciones diferenciales parciales.

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera"de Zill y Wright, octava edición, Cengage Learning.

Producto interior $\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)dx$

Norma $\|f\| = \left(\int_I f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$

Desarrollo de f en serie de senos y cosenos en el intervalo $(-p,p)$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{i=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{p}) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{p})\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx, a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{p})dx, b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{p})dx$$

Desarrollo de una función par f en serie de Fourier en el intervalo $(-p,p)$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{i=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{p})$$

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx, a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos(\frac{n\pi x}{p})dx$$

Desarrollo de una función impar f en serie de Fourier en el intervalo $(-p,p)$

$$F(x) = \Sigma_{i=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{p})$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin(\frac{n\pi x}{p})dx$$

Desarrollo de f en serie de Fourier (senos y cosenos) en el intervalo $(0,L)$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{i=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{2n\pi x}{L}) + b_n \operatorname{sen}(\frac{2n\pi x}{L})\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx, a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{2n\pi x}{L})dx, b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(\frac{2n\pi x}{L})dx$$

Funciones Ortogonales

1. Demuestre que las siguientes funciones son ortogonales en el intervalo indicado.

   a) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $(-2, 2)$

   b) $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}$, $(0, 2)$

   c) $y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \operatorname{sen} x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$, $(-\infty, \infty)$, $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 1$

Ortogonalidad y Norma

2. En los siguientes problemas demuestre que los conjuntos son ortogonales en el intervalo indicado y calcule la norma de cada función.

   a) $\{\text{sen}(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [0, \pi]$
   b) $\{1, \cos(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [0, \pi]$
   c) $\{\text{sen}(\frac{n\pi}{p}x),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [0, p]$
   d) $\{\text{sen}(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   e) $\{1, \cos(\frac{n\pi}{p}x), \text{sen}(\frac{n\pi}{p}x),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [-p, p]$

3. Determine si los siguientes conjuntos ortogonales de funciones son completos:

   a) $\{\text{sen}(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [-\pi, \pi]$
   b) $\{1, \cos(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [-\pi, \pi]$

Series de Fourier

4. Encuentre la serie de Fourier de f en el intervalo dado:

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad -1 < x < 0 \\ x & si \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$
   b) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$
   c) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$
   d) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -2 < x < 0 \\ x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$
   e) $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi$
   f) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < x < 0 \\ \text{sen}\, x & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

5. Ulilizando la serie del ejercicio **??**, demuestre que:

   a) $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$
   b) $\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ...$

6. *a*) Utilice las formas exponenciales complejas del seno y del coseno,

$$\cos\frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2}, \qquad \text{sen}\,\frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2},$$

   para demostrar que la ecuación

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}\right)$$

   se puede expresar en la forma compleja

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p},$$

donde
$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots.$$

b) Demuestre que c_0, c_n y c_{-n} del inciso anterior se pueden escribir como
$$c_n = \int_{-p}^{p} f(x) e^{-in\pi x/p} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

7. Utilice los resultados del problema **??** para encontrar la forma compleja de la serie de Fourier de $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Series de Fourier de cosenos y de senos

8. Determine si la función dada es par, impar o ninguna:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ x + 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

c) $f(x) = x^2 + x$

d) $f(x) = e^{|x|}$

e) $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

9. Pruebe las siguientes propiedades de funciones pares o impares (suponga f definida en un intervalo simétrico $[-a, a]$).

a) El producto de dos funciones pares es par.

b) El producto de dos funciones impares es par.

c) El producto de una función impar y una función par es impar.

d) Si f es par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

e) Si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

10. Desarrolle cada una de las funciones dadas en una serie adecuada de cosenos o senos:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ x + 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \quad -1 < x < 0 \\ x - 1 & si \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -\pi & si \quad -2\pi < x < -\pi \\ x & si \quad -\pi \leq x < \pi \\ \pi & si \quad \pi \leq x < 2/\pi \end{cases}$

11. Desarrolle la funión dada en dos series: una de cosenos y otra de senos, en el semiintervalo dado:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & si \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 < x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$

12. Desarrolle la función dada en serie de Fourier:

    a) $f(x) = x^2$, $(0, 2\pi)$

    b) $f(x) = x + 1$, $(0, 1)$

13. Sea F la serie de senos de Fourier generada por $f(x) = x + 1$ con $0 < x < p$.

    a) Represente gráficamente la función F en $[-2p, 2p]$.

    b) Indique cuánto valen $F(-p)$ y $F(\frac{3}{2}p)$.

    c) Dé fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier correspondientes a la serie de senos de Fourier de f.

14. Dada la función f por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 1; \\ x^2, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

    a) Plantee fórmulas para los coeficientes correspondientes a una serie de Fourier generada por f.

    b) Si F es una serie de senos de Fourier generada por f, indique cuánto valen:

$$F(2), \qquad F(-1), \qquad F\left(\frac{5}{2}\right).$$

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

15. Utilice separación de variables para encontrar, de ser posible, soluciones producto para la ecuación diferencial parcial dada.

    a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

    b) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

    c) $k\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $k > 0$.

    d) $a^2\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u^2}{\partial t^2}$.

    e) $\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0$.

16. En los siguientes casos, clasifique la ecuación diferencial dada como hiperbólica, parabólica o elíptica.

    a) $\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

    b) $3\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

    c) $\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

    d) $\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$.

e) $a^2\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

f) $k\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $k > 0$.

17. Una varilla de longitud L coincide con el intervalo $[0, L]$ en el eje x. Establezca el problema con valores en la frontera con temperatura $u(x, t)$ en cada caso:

    a) El extremo izquierdo se mantiene a temperatura cero y el extremo derecho está aislado. La temperatura inicial es $f(x)$ en toda la varilla.

    b) El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura u_0 y el extremo derecho se mantiene a una temperatura u_1. La temperatura inicial es cero en toda la varilla.

18. Resuelva la ecuación de calor $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < L$, $t > 0$, sujeta a las condiciones dadas:

    a) $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $t > 0$; $u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2; \\ 0, & L/2 < x < L. \end{cases}$

    b) $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $t > 0$; $u(x, 0) = x(L - x)$, $0 < x < L$.

19. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ en una varilla de longitud L si la temperatura inicial es $f(x)$ en toda la varilla y si los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados.

20. Resuelva el problema anterior para el caso $L = 2$ y $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1; \\ 0, & 1 < x < 2. \end{cases}$

21. Resuelva la ecuación de onda $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $0 < x < L$, $t > 0$, sujeta a las condiciones dadas:

    a) $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $t > 0$; $u(x, 0) = \frac{1}{4}x(L - x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$, $0 < x < L$.

    b) $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $t > 0$; $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(L - x)$, $0 < x < L$.

22. Resuelva el problema de calor $k\, u_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$, sujeto a las condiciones (no homogéneas) dadas:

    a) $u(0, t) = 100$, $u(1, t) = 100$, $t > 0$; $u(x, 0) = 0$, $0 < x < 1$.

    b) $u(0, t) = u_0$, $u(1, t) = 0$, $t > 0$; $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < 1$.

Ejercicios tomados en exámenes

23. Considere la función f dada por $f(x) = x$, $0 < x < \pi$.

    a) Extienda f al intervalo $-\pi < x < \pi$ de modo que f sea impar en dicho intervalo. Grafique.

    b) Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.

    c) Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

24. Considere la función f dada por $f(x) = x^2$, $0 < x < \pi$.

    a) Extienda f al intervalo $-\pi < x < \pi$ de modo que f sea impar en dicho intervalo. Grafique.

b) Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.

c) Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

25. Considere la función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ \pi - x, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Represente gráficamente a esta función y halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función. Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

26. Considere la función dada por $f(x) = 10x - x^2$ en el intervalo $[0, 10]$.

a) Plantee el desarrollo en serie de senos de Fourier de f. Para ello especifique (sin necesidad de resolver) claramente las integrales necesarias, y luego exprese la serie pedida.

b) Indique, justificando su respuesta, si la serie obtenida es o no convergente al valor de la función f en $x \in [0, 10]$. En caso de no ser convergente en algunos valores x, debe indicar claramente a qué valor converge la serie obtenida, si es que lo hace.

c) Represente gráficamente en el intervalo $[\mathbf{-10}, \mathbf{10}]$ la función obtenida (serie de Fourier).

27. Considere el problema dado por

$$5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(0,t) = u(10,t) = 0,\ t > 0;\ u(x,0) = 10x - x^2,\ 0 \leq x \leq 10,$$

en el que u representa la temperatura en cada punto de un alambre de longitud 10 (unidades), en cada instante t. Haga un planteo para encontrar una solución a este problema, justificando su respuesta.

28. Si $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x$,

a) plantee fórmulas para los coeficientes de la serie de Fourier generada por f.

b) Si F es la función definida por la serie de Fourier generada por f, indique cuánto vale $F(L)$.

29. Halle la serie de Fourier generada por la función f definida en $[0, 2]$, dada por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(x) = 1$ si $1 \leq x \leq 2$.

30. Supongamos que f es una función continua en el intervalo $(0, L)$, $L > 0$. Consideremos la extensión impar de f y llamemos F a la serie trigonométrica de Fourier generada por dicha extensión.

a) Para cualquier función f continua definida en $(0, L)$, plantee fórmulas para hallar los coeficientes a_0, a_n y b_n que corresponden a la serie de Fourier F buscada.

b) Para el caso especial en que f está dada por

$$f(x) = x^2 - 1,\ 0 < x < L,$$

indique cuáles son los siguientes valores: $F(0)$, $F(-L)$ y $F(\frac{3}{2}L)$.

c) Enuncie el teorema de convergencia de series de Fourier.

31. Sea f la función definida en $(0,2k)$ por $f(x)=k$, si $0<x<k$ y $f(x)=2k-x$, si $k\leq x<2k$. Sabiendo que:

$$(1)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)dx=\frac{3k}{2};$$

$$(2)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2k}\right)dx=\frac{4k}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-(-1)^n\right);$$

$$(3)\frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2k}\right)dx=\frac{4k}{n^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}+\frac{2k}{n\pi};$$

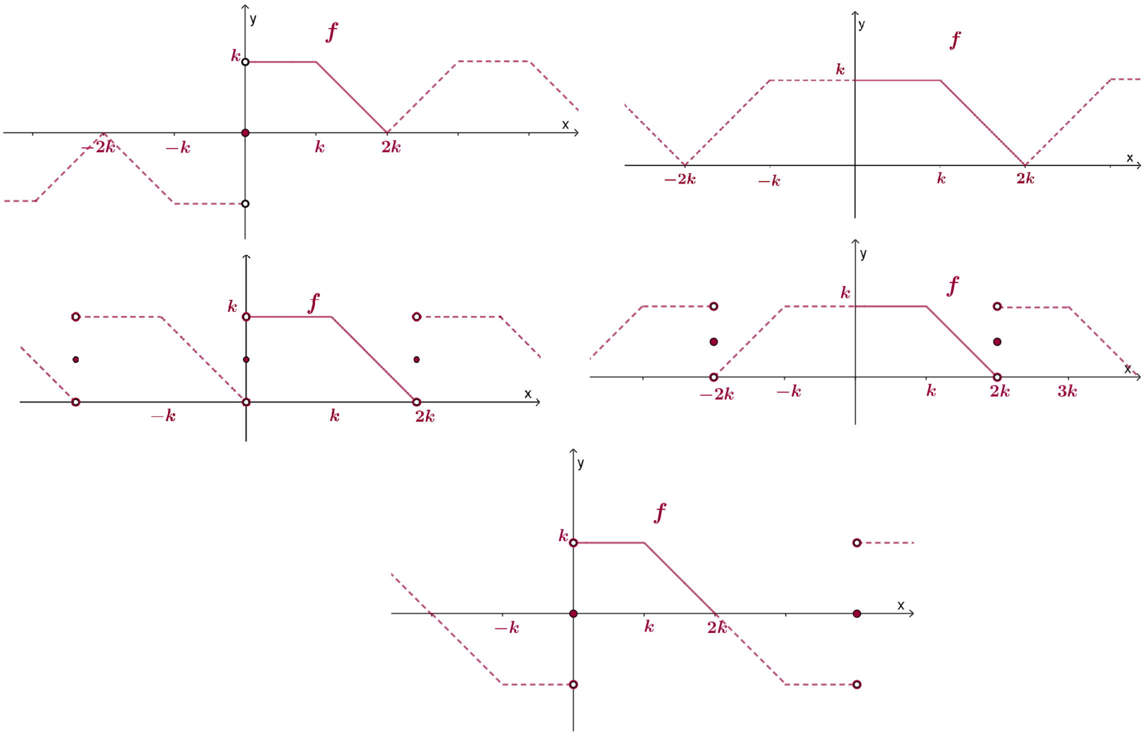
$$(4)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{k}\right)dx=\frac{k}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right);(5)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{k}\right)dx=\frac{k}{n\pi}$$

a) (10 puntos) Exprese la serie de cosenos de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.

b) (10 puntos) Exprese la serie de senos de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.

c) (10 puntos) Exprese la serie de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.

d) (15 puntos) Indique si alguno de los siguientes gráficos corresponde a la serie de cosenos de Fourier generada por f, si alguno corresponde a la serie de senos de Fourier generada por f y si alguno corresponde a la serie de Fourier generada por f. Justifique.



32. Sea $f(x)=x$, $0<x<L$, para cierto $L>0$. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa. **No es necesario que justifique** sus respuestas en este ejercicio.

a) $\boxed{}$ La serie de cosenos de Fourier generada por f coincide con la serie de Fourier generada por la función g definida en $(-L,L)$ por $g(x)=|x|$.

b) $\square$ El coeficiente a_0 correspondiente a la serie de Fourier generada por la extensión impar de f se calcula mediante la fórmula: $a_0 = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x)\, dx$.

c) $\square$ La serie de Fourier generada por f es una función periódica de periodo L, definida en $\mathbb{R}$.

d) $\square$ La serie de Fourier generada por f, digamos F, verifica: $F(0) = F(2L)$ y $F(\frac{L}{2}) = f(\frac{L}{2})$.

33. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

a) $\square$ Sea F la serie de cosenos de Fourier asociada a $f(x) = x + 1$ con $0 < x < p$, entonces $F(x) \neq |x + 1|$ en algún punto de $(-p,\, p)$.

b) $\square$ Sea F la serie trigonométrica de Fourier asociada a $f(x) = x^3$ en $(-p, p)$. Entonces $F(x) = f(x)$ para todo x en $(-p, p)$.

c) $\square$ Si f es una función definida en $[0, L]$, los coeficientes de la serie de senos de Fourier generada por f son a_0, a_n y b_n, $n = 1, 2, ...$, donde $a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)dx = 0$.

d) $\square$ Sea F la serie trigonométrica de Fourier asociada a $f(x) = x^3$ en $(-p, p)$. Entonces $F(3p) = p^3$.

e) $\square$ Dada la función f definida en $(0, L)$ por $f(x) = 0$ si $0 < x < \frac{L}{2}$ y $f(x) = 1$ si $\frac{L}{2} \leq x < L$, la serie de cosenos Fourier generada por f evaluada en L vale $\frac{1}{2}$.