RESUMEN DE DEFINICIONES Y TEOREMAS CON DEMOSTRACIONES

AM II-2020

POR:

CRISAFULLI, Francisco

CARLONI, Franco

CARELLI, Bautista

INDICE

1. UNIDAD 1: FUNCIONES CON VALORES VECTORIALES Y MOVIMIENTO EN EL ESPACIO

1.1. Funciones con valores vectoriales(definición)

Una función con valores vectoriales es una función del tipo

$$\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad / \quad t \to \boldsymbol{r}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\right).$$

Las f_i, i=1, 2, ..., n son las componentes del vector posición **r**(t) ∈ $\mathbb{R}^n$ en el tiempo t y cada una es una función escalar

1.2. Límite de función vectorial(definición)

Supongamos que $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a,b]$ y **L**=$(L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$, si para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $t \in [a,b]$, *si* $0 < |\, t - t_0 \,| < \delta$, entonces $\| \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{L} \| < \varepsilon$

1.3. Límite de una función vectorial(teorema)

Supongamos que $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $\boldsymbol{r} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $t_0 \in [a,b]$ y **L**=$(L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.Entonces $\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$ si y solo si $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = L_i$, i=1, ..., n.

1.4. Continuidad de una función vectorial(definición)

Supongamos que $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a,b]$.
Entonces **r** es continua en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$.

1.5. Continuidad de una función vectorial(teorema)

Supongamos que $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $\boldsymbol{r} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *y* $t_0 \in [a,b]$. **r** es continua en t_0 si y solo si f_i es continua en t_0, i=1, ..., n.

DEMOSTRACION

⇒ Suponemos que $\boldsymbol{r} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ es continua en t_0, tenemos que se cumple

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$$

Por otro lado, se tiene que

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = \lim_{t \to t_0} \left(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\right) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t), \dots\dots, \lim_{t \to t_0} f_n(t)\right) \quad (1)$$

y como $r(t_0) = \left(f_1(t_0), f_2(t_0), \dots\dots, f_n(t_0)\right)$ (2)

Igualando (1) y (2) obtenemos

$$\left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t), \dots\dots, \lim_{t \to t_0} f_n(t)\right) = \left(f_1(t_0), f_2(t_0), \dots\dots, f_n(t_0)\right)$$

Entonces el $\lim_{t \to t_0} f_1(t) = f_1(t_0)$ y asi sucesivamente para las n componentes de la función vectorial, por lo tanto $f_1(t_0), f_2(t_0), \dots\dots, f_n(t_0)$ son continuas en t_0.

⇐Suponemos que las n componentes $f_1(t_0), f_2(t_0), \dots\dots, f_n(t_0)$ son continuas en t_0, tenemos que se cumple que

$$\left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t), \dots\dots, \lim_{t \to t_0} f_n(t)\right) = \left(f_1(t_0), f_2(t_0), \dots\dots, f_n(t_0)\right) \qquad (3)$$

Por otro lado, se tiene que $r(t_0) = \left(f_1(t_0), f_2(t_0), \dots\dots, f_n(t_0)\right)$ (4)

Igualando (3) y (4)

$$r(t_0) = \left(\lim_{t\to t_0} f_1(t), \lim_{t\to t_0} f_2(t), \ldots.., \lim_{t\to t_0} f_n(t)\right) \qquad (5)$$

Recordando que

$$\left(\lim_{t\to t_0} f_1(t), \lim_{t\to t_0} f_2(t), \ldots.., \lim_{t\to t_0} f_n(t)\right) = \lim_{t\to t_0}\left(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\right) = \lim_{t\to t_0} r(t) \quad (6)$$

Igualando (5) y (6),

$$\lim_{t\to t_0} r(t) = r(t_0)$$

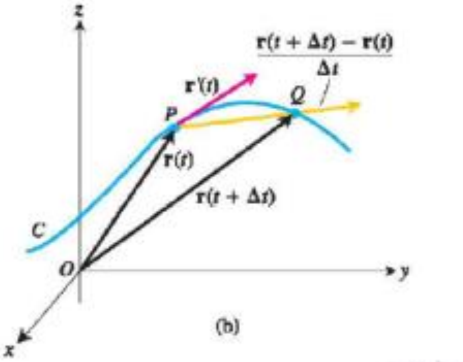
Por lo tanto r(t) es continua en t_0.

1.6. Derivación de funciones vectoriales(definición)

Supongamos que $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a,b)$. Se define la derivada de **r** con respecto a t en t_0 por

$$r'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{r(t_0+\Delta t) - r(t_0)}{\Delta t},$$

si el limite existe.



1.7. Derivación de funciones vectoriales(teorema)

Supongamos que $\boldsymbol{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $\boldsymbol{r} = (f_1, \ldots.., f_n)\ y\ t_0 \ \in (a,b)$. Entonces $\boldsymbol{r}'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots.., f_n'(t_0))$.

DEMOSTRACION

⇒La derivada de r en t_0 se define como

$r'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}$

$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\left(f_1(t_0+\Delta t), f_2(t_0+\Delta t), \ldots.., f_n(t_0+\Delta t)\right) - \left(f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots.., f_n(t_0)\right)\right]$

$= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t}, \frac{f_2(t_0+\Delta t)-f_2(t_0)}{\Delta t}, \ldots, \frac{f_n(t_0+\Delta t)-f_n(t_0)}{\Delta t}\right)$

$= \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_2(t_0+\Delta t)-f_2(t_0)}{\Delta t}, \ldots.., \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_n(t_0+\Delta t)-f_n(t_0)}{\Delta t}\right)$ por definición de límite de fv

$= (f_1'(t_0), \ldots.., f_n'(t_0))$.

1.8. Curva suave(definición)

Una función vectorial **r** definida en [a, b] es una curva suave si **r**´ es continua en **r**´(t) ≠ 0 para todo $t \in [a,b]$.

Por otra parte, se dice que **r** define una curva suave por parte si es la unión de un numero finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

1.9. Reglas de derivación de funciones vectoriales(teorema)Revisar la demostración del vectorial

Sean **u** y **v** funciones vectoriales derivables de t, **C** un vector constante, c un escalar y f una función escalar de una variable real derivable

1.9.1.Función constante $\frac{dC}{dt} = 0$

DEMOSTRACION

⇒ $Sea\ C = (a_1, a_2, a_3)$ donde a_1, a_2, a_3 son constantes, por lo tanto

$$\frac{dC}{dt} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt}\right) = (0,0,0) = 0$$

1.9.2.Múltiplos escalares

- $\frac{d}{dt}[c\boldsymbol{u}(t)] = c\boldsymbol{u}'(t)$.

DEMOSTRACION

⇒Sea $u(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)) \to cu(t) = (cg_1(t), cg_2(t), cg_3(t))$

Si derivamos ambos miembros obtenemos

$$\frac{d}{dt}[cu(t)] = \frac{d}{dt}[(cg_1(t), cg_2(t), cg_3(t))] \to c\frac{du}{dt} = \left(c\frac{dg_1}{dt}, c\frac{dg_2}{dt}, c\frac{dg_3}{dt}\right) = c\left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt}, \frac{dg_3}{dt}\right) = cu'(t)$$

- $\frac{d}{dt}[f(t)\boldsymbol{u}(t)] = f'(t)\boldsymbol{u}(t) + f(t)\boldsymbol{u}'(t)$

DEMOSTRACION

⇒Sea $u(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)) \to fu(t) = (fg_1(t), fg_2(t), fg_3(t))$

Si derivamos ambos miembros obtenemos

$$\frac{d}{dt}[fu(t)] = \frac{d}{dt}[(fg_1(t), fg_2(t), fg_3(t))]$$
$$= \left[\left(\frac{df}{dt}g_1(t) + f\frac{dg_1}{dt}, \frac{df}{dt}g_2(t) + f\frac{dg_2}{dt}, \frac{df}{dt}g_3(t) + f\frac{dg_3}{dt}\right)\right]$$
$$= \frac{df}{dt}(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) + f\left[\left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt}, \frac{dg_3}{dt}\right)\right] = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$$

1.9.3.Suma y resta $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \pm \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) \pm \boldsymbol{v}'(t)$

DEMOSTRACION

⇒Sea $u(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ y $v(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$.

Entonces $[u(t) \pm v(t)] = (g_1(t) \pm f_1(t), g_2(t) \pm f_2(t), g_3(t) \pm f_3(t)) \to$

$\frac{d}{dt}[u(t) \pm v(t)] = (g'_1(t) \pm f'_1(t), g'_2(t) \pm f'_2(t), g'_3(t) \pm f'_3(t)) =$

$[(g'_1(t), g'_2(t), g'_3(t))] \pm [(f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t))] = u'(t) \pm v'(t)$

1.9.4.Producto punto $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}'(t)$

DEMOSTRACION

⇒Sea $u(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ y $v(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. De esta forma,

$$u(t) \cdot v(t) = g_1(t) \cdot f_1(t) + g_2(t) \cdot f_2(t) + g_3(t) \cdot f_3(t) \to \frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)]$$
$$= \frac{d}{dt}[g_1(t) \cdot f_1(t) + g_2(t) \cdot f_2(t) + g_3(t) \cdot f_3(t)]$$
$$= [g'_1(t) \cdot f_1(t) + g'_2(t) \cdot f_2(t) + g'_3(t) \cdot f_3(t)]$$
$$+ [g_1(t) \cdot f'_1(t) + g_2(t) \cdot f'_2(t) + g_3(t) \cdot f'_3(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$$

1.9.5.Producto vectorial $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}'(t)$

DEMOSTRACION

⇒Sea $u(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ y $v(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. Calculamos el producto cruz

$$u(t) \times v(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \end{vmatrix} = (g_2f_3 - g_3f_2, g_3f_1 - g_1f_3, g_1f_2 - g_2f_1)$$

Para demostrar esta propiedad vamos a obtener por separado ambos miembros y verificar que sean iguales, empezamos con el izquierdo

$$\frac{d}{dt}[u(t)\times v(t)] = \frac{d}{dt}(g_2f_3 - g_3f_2, g_3f_1 - g_1f_3, g_1f_2 - g_2f_1)$$
$$= (\frac{d}{dt}(g_2f_3 - g_3f_2), \frac{d}{dt}(g_3f_1 - g_1f_3), \frac{d}{dt}(g_1f_2 - g_2f_1))$$
$$= (g'_2f_3 + g_2f'_3 - g'_3f_2 - g_3f'_2, g'_3f_1 + g_3f'_1 - g'_1f_3 - g_1f'_3, g'_1f_2 + g_1f'_2 - g'_2f_1 - g_2f'_1)$$

Continuamos con el miembro derecho, calculamos los productos vectoriales

$$u'(t)\times v(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ g'_1(t) & g'_2(t) & g'_3(t) \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \end{vmatrix} = (g'_2f_3 - g'_3f_2, g'_3f_1 - g'_1f_3, g'_1f_2 - g'_2f_1)$$

$$u(t)\times v'(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_3(t) \end{vmatrix} = (g_2f'_3 - g_3f'_2, g_3f'_1 - g_1f'_3, g_1f'_2 - g_2f'_1)$$

Reemplazamos los vectores y obtenemos:

$$u'(t)\times v(t) + u(t)\times v'(t)$$
$$= (g'_2f_3 - g'_3f_2, g'_3f_1 - g'_1f_3, g'_1f_2 - g'_2f_1)$$
$$+ (g_2f'_3 - g_3f'_2, g_3f'_1 - g_1f'_3, g_1f'_2 - g_2f'_1)$$
$$= (g'_2f_3 + g_2f'_3 - g'_3f_2 - g_3f'_2, g'_3f_1 + g_3f'_1 - g'_1f_3 - g_1f'_3, g'_1f_2 + g_1f'_2 - g'_2f_1 - g_2f'_1)$$

Comprobamos que ambos lados son iguales

1.9.6. Regla de la cadena $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(f(t))] = f'(t)\boldsymbol{u}'\big(f(t)\big)$

DEMOSTRACION

⇒Sea $u(t) = \big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big)$, $s = f(t)\ y\ \big[u\big(f(t)\big)\big] = [u(s)] = \big(g_1(s), g_2(s), g_3(s)\big)$

$$\big[u\big(f(t)\big)\big] = \big(g_1(s), g_2(s), g_3(s)\big) \to \frac{d}{dt}[u(f(t))] = \frac{d}{dt}\big(g_1(s), g_2(s), g_3(s)\big)$$
$$= \left(\frac{dg_1}{ds}\frac{ds}{dt}, \frac{dg_2}{ds}\frac{ds}{dt}, \frac{dg_3}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{ds}{dt}\left(\frac{dg_1}{ds}, \frac{dg_2}{ds}, \frac{dg_3}{ds}\right) = \frac{ds}{dt}\frac{du}{ds} = s'u'(s)$$
$$= f'(t)u'\big(f(t)\big)$$

1.10. Derivación de funciones vectoriales(teorema)

Funciones vectoriales de magnitud constante:

Si $\mathbf{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función de magnitud constante (es decir $|\mathbf{r}(t)|$=cte. en $[a, b]$), entonces $\mathbf{r}(t)$es ortogonal a $\mathbf{r}'(t)$en todo $t \in [a, b]$.

DEMOSTRACION

⇒Si $|r(t)| = c$ tenemos que

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) = c^2$$
$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)] = 0, Se\ deriva\ a\ ambos\ miembros$$
$$\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t) = 0, Regla\ del\ producto\ punto$$
$$2r'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) = 0$$
$$\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) = 0$$

Los vectores $r'(t)\ y\ r(t)$ son ortogonales debido a que su producto punto es 0.

Nota: Si r es una función vectorial constante derivable, entonces $r\cdot\frac{dr}{dt} = 0$.

1.11. Integración de funciones vectoriales(definición)

Una función vectorial derivable R es una anti derivada de una función derivable r en un intervalo I si **R'**(t)=**r**(t) para todo $t \in I$.
La integral indefinida de r con respecto a t en el I es el conjunto de todas las anti derivadas de **r** en I y se denota por $\int \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C}$,
Donde **C** es un vector constante arbitrario. Si las funciones componentes de **r**(t) =(f(t), g(t), h(t)) son integrables en [a, b], entonces **r** es integrable en el [a, b] y la integral definida de **r** en [a, b] es:

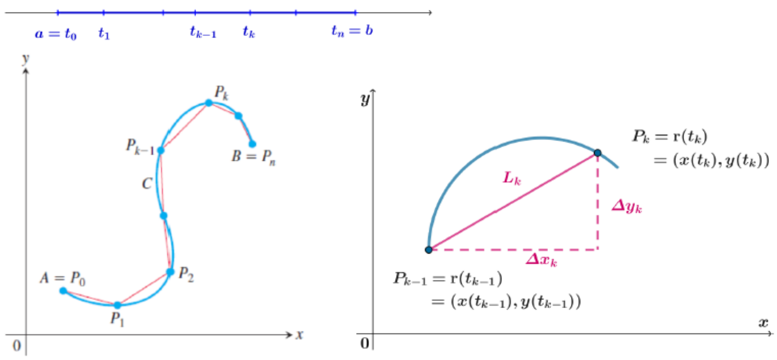
$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\,, \int_a^b g(t)dt\,, \int_a^b h(t)dt\right)$$

1.12. Longitud de arco(definición)

La longitud de arco de una curva suave dada por $\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), a \leq t \leq b$,que se recorre una vez cuando t crece de a a b, es

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|dt.$$

Justificación:
Cada P_i corresponde a $\boldsymbol{r}(t_i)$, para $i = 0,1, \dots, n$.
Asumiendo que el camino desde A hasta B se recorre una sola vez cuando t varía desde $t = a$ hasta $t = b$, sin volverse sobre si mismo o retroceder, una aproximación a la longitud del arco AB es la suma de las longitudes L_k.



1.13. Parámetro de longitud de arco

1.14. Vector tangente unitario(definición) (chequear si es definición o forma de calcular)

Dada **r** definida en [a, b], se define

$\boldsymbol{T}(t) := \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|r'(t)|}$, si $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$

1.15. Curvatura(definición)

Se define la curvatura en un punto de una curva suave como $\kappa := \left|\frac{dT}{ds}\right|$

Observación:

- La curvatura es una función escalar
- Representa el cambio del módulo del vector unitario a medida que avanza, significa que si κ es grande el vector unitario gira rápidamente y viceversa

Forma de calculo $\kappa = \left|\frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \frac{|T\prime(t)|}{|r'(t)|}$

1.16. <u>Vector normal unitario principal(definición)</u>

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $N := \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa}$

Forma de calculo $N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa} = \frac{\frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|\left|\frac{dt}{ds}\right|} = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$

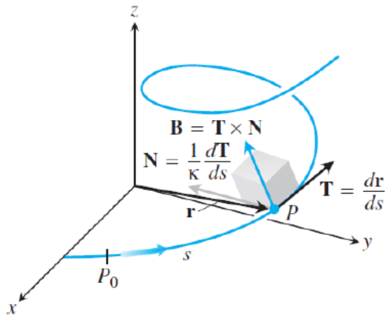
Nota:

- El vector normal unitario es normal al vector tangente unitario
- El plano determinado por los vectores **T** y **N** se llama plano osculador; contiene al vector aceleración

1.17. <u>Vector binormal(definición)</u>

El vector binormal en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $B = T \times N$

1.17.1. Marco TNB



Recordar que B es ortogonal a T y N. Juntos T, N y B forman un marco de referencia vectorial, que desempeña un papel central para el cálculo de trayectorias de las partículas que se mueven en el espacio

<u>Observación:</u>

- ¿Qué significa |B|?

1.18. <u>Componente tangencial y normal de la aceleración(definición)</u>

Si el vector aceleración se escribe como

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N},$$

Entonces

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|v| \qquad y \qquad a_N = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa|v|^2$$

son las componentes escalares tangencial y normal de la aceleración.

Forma de calculo $a_N = \sqrt{|a|^2 - a_T^2}$

<u>Deducción:</u>

Reescribimos a v de la siguiente manera

$$v = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{T}\frac{ds}{dt} \qquad (1)$$

Luego derivamos aplicando la regla de la cadena los dos extremos de (1)

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{T}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}$$
$$= \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \frac{ds}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \frac{ds}{dt}\left(\kappa\boldsymbol{N}\frac{ds}{dt}\right) \qquad \frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \kappa\boldsymbol{N}$$
$$= \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\boldsymbol{N}.$$

2. UNIDAD 2: FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

2.1. Función de varias variables(definición)

Una función de varias variables tiene su dominio D contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f: D \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \to w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

El conjunto de valores reales de w asignados por f es el rango de la función. Cada x_i, i=1,2,..., n es una variable independiente, mientras que w es variable dependiente.

2.2. Conceptos topológicos

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea P_o un punto de $\mathbb{R}^n\big(P_0(x_0, y_0)\ o\ P_0(x_0, y_0, z_0)\big)$.

2.2.1. Llamamos bola(abierta) de centro $P(x_1, x_2)$ y radio $r > 0$ al conjuto $\left\{Q(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < r\right\}$.

2.2.2. Llamamos bola(abierta) de centro $P(x_1, x_2, x_3)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\left\{Q(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{\sum_1^3 (x_i - y_i)^2} < r\right\}$

2.2.3. Un entorno abierto de P_0 es una bola abierta de $\mathbb{R}^n$ que contiene a P_0

2.2.4. P_0 es un punto interior de D si existe un entorno abierto (bola) de P_0 incluido en D

2.2.5. P_0 es un punto frontera de D si para todo entorno abierto (bola) de P_0 hay puntos del entorno que pertenecen a D y hay puntos del entorno que no pertenecen a D.

2.2.6. D es una región abierta si todo punto de D es un punto interior de D

2.2.7. D es una región cerrada si todos los puntos fronteras de D pertenecen a D

2.2.8. D es una región acotada si existe una bola B tal que $D \subset B$

2.2.9. D es una región no acotada si ninguna bola la incluye

2.3. Gráfica, curvas y superficies de nivel y curvas de contorno(definición)

Dada una función $f: D \to \mathbb{R}, (D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama

2.3.1. Grafica de f al conjunto:

$$G_f = \left\{\big(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\big) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in D\right\}$$

2.3.2. Curva de superficie de nivel(k) de f al conjunto:

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in D : f(x_1, \dots, x_n) = k\}, para\ k \in Im(f)$$

2.3.3. Curva de contorno de f al conjunto:

$$\{(x_1, x_2, k) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2) = k\}, para\ k \in Im(f)$$

2.4. Límite de funciones de varias variables(definición)

Sea $f: D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sean $P_0(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y L $\in \mathbb{R}$.Decimo que f tiende al límite L cuando P tiende a P_0, y escribimos

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ *existe un numero* $\delta > 0$ *tal que para todo* $P \in D$, *si* $0 < |\,P - P_0\,| < \delta$, entonces $|f(P) - L| < \varepsilon$.

En $\mathbb{R}^2$: $P_0(x_0, y_0)\ y\ P(x, y)$;

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ *existe un numero* $\delta > 0$ *tal que para todo* $(x, y) \in D$,

si $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, entonces $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

2.5. Propiedades de límites de funciones de dos variables

Si L y M son números reales y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M,$$

Entonces:

2.5.1. Suma y resta $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f \pm g)(x,y) = L \pm M$

2.5.2. Producto $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (fg)(x,y) = LM$

2.5.3. Cociente $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{L}{M}, si\ M \neq 0$

2.5.4. Potencia $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y))^n = L^n, si\ n \in \mathbb{N}$

2.5.5. Raíz $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}, si\ n \in \mathbb{N}, si\ n\ es\ par, L > 0.$

2.6. Criterio de dos trayectorias para demostrar la inexistencia de un limite

Si una función $f(x,y)$ tiene límites diferentes a lo largo de dos trayectorias distintas en el dominio de f cuando (x,y) tiende a (x_0,y_0), entonces el límite de $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe.

Observación:

- El hecho de que las aproximaciones por líneas rectas a (x_0,y_0) tengan el mismo limite no implica que exista un límite en (x_0,y_0).

2.7. Continuidad de funciones de carias variables(definición)

Una función f es continua en un punto P_0 si:

- f está definida en P_0
- existe $\lim_{P\to P_0} f(P)$
- $\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Una función f es continua en un conjunto D si es continua en todos los puntos de D.

Observación:

- Los polinomios y las funciones racionales son continuas en los puntos de sus respectivos dominios.

2.8. Derivadas parciales(D(f)$\subset \mathbb{R}^2$)(definición)

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0,y_0) es

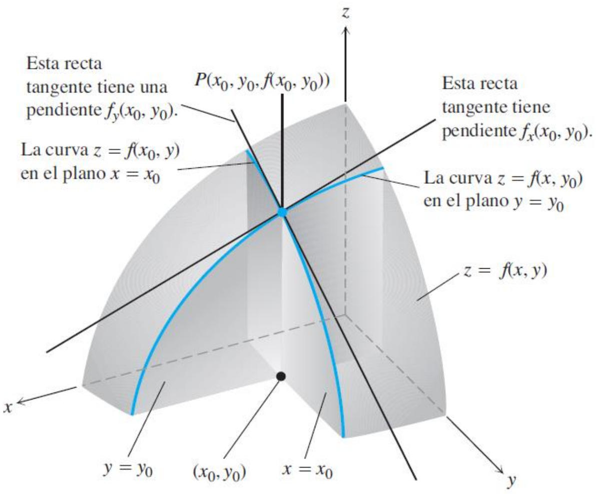
$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h},$$

si tal limite existe.

La derivada parcial de f con respecto a y en el punto (x_0,y_0) es

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h},$$

si tal limite existe.



<u>Interpretación geométrica:</u>

Recuerde que la ecuación $z = f(x, y)$ representa una superficie S(la gráfica de f). La pendiente de la curva $z = f(x, y_0)$ en el punto P en el plano $y = y_0$ es la derivada parcial de f con respecto a x en (x_0, y_0).La recta tangente a la curva en P es la recta en el plano $y = y_0$ que pasa por P con esa pendiente. La derivada parcial proporciona la tasa de cambio de f con respecto a x en (x_0, y_0) cuando y se mantiene fija en el valor y_0.

<u>Notaciones:</u>

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad o \quad f_x(x_0, y_0)$
- $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$

La derivada parcial con respecto a y se representa del mismo modo

<u>Observación:</u>

- El plano que determinan las dos rectas tangentes es un plano tangente a la superficie

2.9. <u>Derivadas parciales(D(f)$\subset \mathbb{R}^3$)(definición)</u>

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal limite existe.

Similarmente se definen las derivadas parciales de una función de tres variables con respecto a y y a z.

2.10. <u>Derivadas parciales y continuidad</u>

<u>Observación:</u>

- La existencia de derivadas parciales en un punto no implica la continuidad de la función en dicho punto

2.11. <u>Derivadas parciales de orden superior(Notación)</u>

- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx};$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy};$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy};$
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$

2.12. <u>Teorema de Clairaut o de la derivada mixta(teorema)</u>

Si f y sus derivadas parciales $f_x, f_y, f_{xy}\ y\ f_{yx}$ están definidas en una región abierta que contiene a un punto (a, b) y todas son continuas en (a, b), entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

2.13. Laplaciano (definición provisoria) (definición 4.46)

El laplaciano de un campo escalar f es el campo escalar definido por

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \quad o \quad \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

La ecuación de Laplace $\Delta f = 0$; sus soluciones son las llamadas funciones armónicas. El Laplaciano aparecen en ecuaciones diferenciales que describen fenómenos físicos. (Ec. de calor)

2.14. Diferenciabilidad(definición)

Una función f es diferenciable en un punto $P_0(x_0, y_0)$(de su dominio) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple que el incremento $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x\ , y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ verifica:
$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\, \Delta x + f_y(x_0, y_0)\, \Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$
en las cuales las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ *y* $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ *cumplen*
$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0 \quad y \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0\,.$

2.15. Diferenciabilidad implica continuidad(teorema)

Si una función f es diferenciable en un punto P_0 de su dominio, entonces es continua en P_0.
DEMOSTRACION
⇒Supongamos que f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$. Entonces, llamando $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$, el limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y) - f(x_0, y_0)\big) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f(x_0, y_0)$$
$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_x(x_0, y_0)\, \Delta x + f_y(x_0, y_0)\, \Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Luego f es continua en (x_0, y_0)

2.16. Teorema del incremento (teorema) (Es el mismo que el 2.17)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).
COROLARIO: Si las derivadas parciales f_x y f_y de una función son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en cada punto de R.
DEMOSTRACION
⇒ Consideremos Δx y Δy^{*1} lo suficientemente pequeños como para que toda la región rectangular con vértices $(x_0, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y)$ y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ este incluida en R.Entonces el incremento en el valor de la función f, cuando se pasa del punto (x_0, y_0) al punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ es:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0)$$
$$- f(x_0, y_0) \quad (restamos\ y\ sumamos\ f(x_0 + \Delta x, y_0)\ )(1)$$

Consideramos la función $f(x_0 + \Delta x,\ \cdot)$ que es solo función de y, es decir, es una función de una variable. Observemos que esta función satisface las hipótesis del teorema del valor medio para funciones de una variable: según la hipótesis, existen las derivadas parciales de f_x y f_y en toda la región R; así, existe la derivada de la función de una variable $f(x_0 + \Delta x,\ \cdot)$ para todos los valores de y tales que los puntos $(x_0 + \Delta x,\ y)$ pertenezca a R. En particular, $f(x_0 + \Delta x,\ \cdot)$ es derivable para todos los y del intervalo$[y_0, y_0 + \Delta y]$. Luego, también es continua en dicho intervalo. Así vemos que podemos aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x_0 + \Delta x, \ \cdot)$ en el intervalo $[y_0, y_0 + \Delta y]$ y concluimos que existe un valor de d en $(y_0, y_0 + \Delta y)$ tal que

$$f_y(x_0 + \Delta x, d) = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y}$$

es decir

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y \qquad (2)$$

Notemos que (2) nos da una expresión equivalente a los dos primeros términos de (1). De manera análoga *2, considerando ahora la función de una variable real $f(\cdot, y_0)$, concluimos que existe $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ tal que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = f_x(c, y_0)\Delta x \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \\ &= f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y + f_x(c, y_0)\Delta x \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y \qquad (4)\end{aligned}$$

Los valores de $f_x(c, y_0)$ y $f_x(x_0, y_0)$ no tienen por qué coincidir. Lo mismo ocurre con $f_y(x_0 + \Delta x, d)\ y\ f_y(x_0, y_0)$.En general tendremos:

$$f_x(c, y_0) = f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1 \qquad y \qquad f_y(x_0 + \Delta x, d) = f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2,$$

donde $\varepsilon_1\ y\ \varepsilon_2$ son funciones que dan cuenta del error. Como $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, c depende de Δx y $\varepsilon_1 = f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0)$, también. Por otra parte, como $d \in (y_0, y_0 + \Delta y)$, d depende de Δy y $\varepsilon_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0)$ depende tanto de Δx como de Δy. Por ello, consideramos que ambos errores son funciones de Δx y de Δy:

$$\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0) \quad y \quad \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0).$$

Sustituyendo en (4), obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y \\ &= \big(f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\big)\Delta x + \Big(f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Big)\Delta y \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.\end{aligned}$$

Si bien esta última expresión es la que encontramos en la definición de funciones diferenciable, falta aún probar que los errores $\varepsilon_1\ y\ \varepsilon_2$ tiende a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Para probar esto, ahora aplicamos la continuidad de las derivadas parciales $f_x y\ f_y$ en (x_0, y_0) que tenemos por hipótesis: por ser f_x continua en (x_0, y_0), podemos asegurar que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} [f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0)] = 0;$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \big[f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0)\big] = 0;$$

Recién ahora hemos terminado de probar que f es diferenciable en (x_0, y_0).

<u>Observaciones:</u>

- *1 En rigor los valores de $\Delta x\ y\ \Delta y$ podrían ser positivos o negativos ya que finalmente los haremos tender a cero; pero para acotar nuestro texto los trataremos como positivos
- *2Completar los detalles

2.17. <u>Teorema del incremento(teorema) (Es el mismo que el 2.16)</u>

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces el incremento en valor de f, $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$,en R, satisface una ecuación de la forma:

$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$

en las cuales las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ *y* $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ *cumplen*

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0 \quad y \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$

2.18. <u>Regla de la cadena(teorema)</u>

Sea f una función definida y diferenciable en D ⊂ $\mathbb{R}^2$ y sea $r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ una función de t tal que la imagen de **r** está incluida en D y tal que las funciones componentes x(t) e y(t)son derivables en t. Si w=f o **r**, entonces w es una función derivable en t y

$$w'(t) = f_x\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)y'(t).$$

DEMOSTRACION

⇒ La demostración consiste en mostrar que si x y y son derivable en $t = t_0$, entonces w es derivable en t_0

Un cambio de Δt en t produce cambios de Δx en x y Δy en y. Estos, a su vez, producen un cambio Δw en w, y de acuerdo con la definición 2.14 tenemos

$$\Delta w = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.(Si las funciones ε_1 y ε_2 no están definidas en (0, 0), podemos definir que son o allí).Al dividir ambos miembros de esta ecuación por Δt, tenemos:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si ahora hacemos $\Delta t \to 0$, $\Delta x = [x(t+\Delta t) - x(t)] \to 0$ porque x es derivable y, por lo tanto continua. De igual manera $\Delta y \to 0$. A su vez, esto significa que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \Big(\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon_1\Big)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \Big(\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon_2\Big)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0\frac{dx}{dt} + 0\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)y'(t)
\end{aligned}$$

<u>Observación:</u>

- Podes escribirlo de la siguiente manera $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$, donde la variable dependiente w es diferente en cada lado de la ecuación.
  En el lado izquierdo se refiere a la composición w = f o **r** = f(x(t), y(t))como una función de una sola variable t. En el lado derecho se refiere a la función $w = f(x, y)$ como una función de dos variables x e y.

2.19. Regla de la cadena- Otros casos(teoremas)

2.19.1. Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^3$ y sea $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una función de t tal que la imagen de **r** está incluida en D y tal que las funciones componentes x(t), y(t) y z(t) son derivables en t. Si w=f o **r**, entonces w es una función derivable en t y

$$w'(t) = f_x(x(t), y(t), \mathrm{z(t)})x'(t) + f_y(x(t), y(t), \mathrm{z(t)})y'(t) + f_z(x(t), y(t), \mathrm{z(t)})z'(t).$$

2.19.2. Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^3$ y sea $r(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ una función de s y t tal que la imagen de **r** está incluida en D y tal que las funciones componentes x (s, t), (s, t) y z (s, t) son diferenciables en (s, t). Si w=f o **r**, entonces w es una función derivable con respecto a t y con respecto a s en (s, t) y

$$w_s(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t), z(s,t))x_s(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t), z(s,t))y_s(s,t) + f_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t))z_s(s,t).$$

$$w_t(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t), z(s,t))x_t(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t), z(s,t))y_t(s,t) + f_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t))z_t(s,t).$$

2.19.3. Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $r(s,t) = \big(x(s,t), y(s,t)\big)$ una función de s y t tal que la imagen de **r** está incluida en D y tal que las funciones componentes x (s, t) y (s, t) son diferenciables en (s, t). Si w=f o **r**, entonces w es una función derivable con respecto a t y con respecto a s en (s, t) y

$$w_s(s,t) = f_x\big(x(s,t), y(s,t)\big)x_s(s,t) + f_y\big(x(s,t), y(s,t)\big)y_s(s,t);$$

$$w_t(s,t) = f_x\big(x(s,t), y(s,t)\big)x_t(s,t) + f_y\big(x(s,t), y(s,t)\big)y_t(s,t);$$

2.19.4. Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}$ y sea $r(s,t) = x(s,t)$ una función de s y t tal que la imagen de **r** está incluida en D y tal que las funciones componentes x (s, t) es diferenciables en (s, t). Si w=f o **r**, entonces w es una función derivable con respecto a t y con respecto a s en (s, t) y

$$w_s(s,t) = f'\big(x(s,t)\big)x_s(s,t) \quad y \quad w_t(s,t) = f'\big(x(s,t)\big)x_t(s,t)$$

2.20. Derivación implícita(Nota).

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias

2.21. Derivación implícita(teorema) (Solo probamos la formula, bajo supuestos.)

Supongamos que F es una función de x y de y, y que las derivadas parciales de F_x y F_y son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0), que $F(x_0, y_0) = c$,para alguna constante c y que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces la ecuación F(x, y)=c define a y implícitamente como una función derivable de x en un entorno de x_0 y la derivada de esta función y está dada por $y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

DEMOSTRACION

⇒ Suponemos que $F(x,y)$ es derivable y que F(x, y)=c define a y implícitamente como una función derivable de x, digamos, y=f(x), donde $F\big(x, f(x)\big) = c$. Puesto que tanto x como y son funciones que dependen de x, derivando respecto de x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{F(x,y)}] = \frac{d}{dx}c \to \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \quad (1)$$

Recordando que $\frac{dx}{dx}=1$ y reordenando la ecuación (1)

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\ \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_x}{F_y}$$

2.22. <u>Derivación implícita(teorema) (Solo probamos la formula, bajo supuestos)</u>

Si F es una función de tres variables y las derivadas parciales $F_x, F_y\ y\ F_z$ son continuas en una región abierta $R\subset\ \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0,y_0,z_0), que $F(x_0,y_0,z_0)=c$, para alguna constante c y que $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Entonces la ecuación F(x, y, z)=c define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de (x_0,y_0) y las derivadas parciales de esta función z están dadas por $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$; y $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$.

DEMOSTRACION

⇒Suponemos que $F(x,y,z)$ es derivable y que F(x, y, z)=c define a z implícitamente como una función derivable de x e y, digamos, z=f(x, y), donde $F\big(x,y,f(x,y)\big)=c$. Derivamos respecto de x la función usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[F(x,y,z)]=\frac{d}{dx}c\rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad (1)$$

Recordando que $\frac{\partial x}{\partial x}=1\ y\ \frac{\partial y}{\partial x}=0$ y reordenando la ecuación (1)

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0\ \rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_x}{F_z}$$

Con un cálculo similar, pero derivando respecto de y obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_y}{F_z}$$

2.23. <u>Derivada direccional($D\subset\ \mathbb{R}^2$)(definición)</u>

La derivada direccional de un campo escalar f con dominio $D\subset\ \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vetor unitario $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, en un punto $P_0(x_0,y_0)\ \in intD$, viene dada por

$$D_u f(P):=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s},$$

si el límite existe.

<u>Interpretación:</u>

El plano vertical que pasa por P y P_0 paralelo a **u** interseca a S en la curva C. La tasa de cambio de f en la direccion de **u** es la pendiente de la tangente de C en P.

La derivada direccional generaliza las dos derivadas parciales. Podemos preguntar la tasa de cambio de f en cualquier direccion **u.**

Podemos suponer que la funcion $T=f(x,y)$ es la temperatura en cada punto (x,y) de una region en el plano. Entonces $f(x_0,y_0)$ es la temperatura en el punto P_0 y la derivada

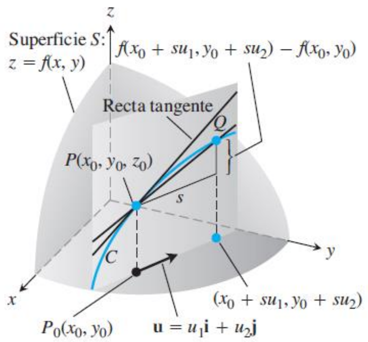


FIGURA 14.27 La pendiente de la curva C en P_0 es $\lim_{Q\to P}$ pendiente (PQ); ésta es la derivada direccional

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}=(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}.$$

direccional es la tasa de cambio instantanea de la temperatura en P_0 al avanzar en la direccion de **u** .

2.24. Derivada direccional($D \subset \mathbb{R}^3$)(definición)

La derivada direccional de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^3$, en la dirección de un vector unitario **u** $=(u_1, u_2, u_3)$, en un punto $P(x_1, x_2, x_3) \in int\ D$, viene dada por

$$D_u f(P) \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2, x_3 + hu_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h},$$

si el límite existe.

2.25. Estimación del cambio en una dirección especifica

Sea f diferenciable en (a, b). Entonces:

$$D_u f(a,b) \coloneqq \lim_{s \to 0} \frac{f(a + su_1, b + su_2) - f(a,b)}{s} = \nabla f(a,b) \cdot \boldsymbol{u}$$

$Si\ s \neq 0$:

$$\frac{f(a + su_1, b + su_2) - f(a,b)}{s} \approx \nabla f(a,b) \cdot \boldsymbol{u}$$

Multiplicamos por h ambos miembros y obtenemos

$$f(a + su_1, b + su_2) - f(a,b) \approx (\nabla f(a,b) \cdot \boldsymbol{u})s$$
$$\Delta f(a,b) \approx (\nabla f(a,b) \cdot \boldsymbol{u})s$$

2.26. Vector gradiente(definición)

El gradiente de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0, si existe. Se denota por ∇f.

2.27. La derivada direccional como producto escalar(teorema)

Sea f un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^2$,diferenciable en un punto P, y **u** un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\mathrm{D_u f(P)} = \nabla \mathrm{f(P)}\ .\ \mathbf{u}$

DEMOSTRACION

$\Rightarrow \mathrm{D_u f(P)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\boldsymbol{u}) - f(P)}{h}$ $\qquad \boldsymbol{r}(t) = P + t\boldsymbol{u}, 0 \leq t \leq h; \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{u}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{r}(h)) - f(r(0))}{h}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \boldsymbol{r})\Big|_{t=0}$$
$$= \nabla f\big(\boldsymbol{r}(0)\big) \cdot \boldsymbol{r}'(0) = \nabla f(P) \cdot \boldsymbol{u}$$

2.28. Propiedad del vector gradiente y derivada direccional

La derivada direccional de una función f en un punto P en que f es diferenciable, es máxima cuando **u** es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.

DEMOSTRACION

$$\mathrm{D_u f(P)} = \nabla \mathrm{f(P)}\ .\ \mathbf{u}$$
$$\mathrm{D_u f(P)} = \|\nabla f(P)\| \|\boldsymbol{u}\| \cos(\alpha) = \|\nabla f(P)\| \cos(\alpha),$$

máxima cuando $\alpha = 0$.

Conclusión: El vector gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función.

2.29. Vector gradiente normal a la superficie o curva de nivel en cada punto(teorema)

Si f es una función diferenciable de dos variables ,el gradiente de f en un punto P ∈ D(f) es normal a la curva de nivel de f que pasa por P.

DEMOSTRACION

⇒Digamos que $r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ parametriza una curva de nivel f que para por un punto P_0 del dominio de f. Supongamos que $r(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo t, $f\big(r(t)\big) = c$ (c es un valor constante). Derivando,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \boldsymbol{r})(t) = \frac{d}{dt}c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(r(t)\big)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(r(t)\big)\frac{dy}{dt}(t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\big(r(t)\big),\ \frac{\partial f}{\partial y}\big(r(t)\big)\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}(t),\ \frac{dy}{dt}(t)\right) = 0$$

$$\nabla f\big(r(t)\big)\cdot r'(t) = 0$$

En particular,$\nabla f(P_0) = \nabla f\big(r(t_0)\big)$ es ortogonal a $r'(t_0)$, que es tangente a la curva de nivel; luego ,$\nabla f(P_0)$ es normal a la curva de nivel P_0.

2.30. Propiedades algebraicas del vector gradiente.

Dadas dos funciones f y g cuyos vectores gradientes están definidos en un punto P ∈ D(f) ∩ D(g), y una constante k entonces en P se tiene:

2.30.1. Producto por una constante $\nabla(\mathrm{kf}) = \mathrm{k}\nabla\mathrm{f}$

DEMOSTRACION

$$\nabla(\mathrm{kf}) = \left(\frac{\partial(kf)}{\partial x},\frac{\partial(kf)}{\partial y},\frac{\partial(kf)}{\partial z}\right) = \left(k\frac{\partial f}{\partial x},k\frac{\partial f}{\partial y},k\frac{\partial f}{\partial z}\right) = k\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \mathrm{k}\nabla\mathrm{f}$$

2.30.2. Suma y resta $\nabla(\mathrm{f} \pm \mathrm{g}) = \nabla\mathrm{f} \pm \nabla\mathrm{g}$

DEMOSTRACION

$$\nabla(\mathrm{f}\pm\mathrm{g}) = \left(\frac{\partial(f\pm g)}{\partial x},\frac{\partial(f\pm g)}{\partial y},\frac{\partial(f\pm g)}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\pm\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\pm\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\pm\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right) \pm \left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right) = \nabla\mathrm{f}\pm\nabla\mathrm{g}$$

2.30.3. Producto $\nabla(\mathrm{fg}) = \mathrm{g}\nabla\mathrm{f} + \mathrm{f}\nabla\mathrm{g}$

DEMOSTRACION

$$\nabla(\mathrm{fg}) = \left(\frac{\partial(fg)}{\partial x},\frac{\partial(fg)}{\partial y},\frac{\partial(fg)}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{g}+\frac{\partial g}{\partial x}f,\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{g}+\frac{\partial g}{\partial y}f,\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{g}+\frac{\partial g}{\partial z}f\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}g,\frac{\partial f}{\partial y}g,\frac{\partial f}{\partial z}g\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}f,\frac{\partial g}{\partial y}f,\frac{\partial g}{\partial z}f\right) = g\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \mathrm{f}\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

$$= \mathrm{g}\nabla\mathrm{f} + \mathrm{f}\nabla\mathrm{g}$$

2.30.4. Cociente $\nabla\left(\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}\right) = \frac{\mathrm{g}\nabla\mathrm{f}-\mathrm{f}\nabla\mathrm{g}}{\mathrm{g}^2}$, si g(P) ≠ 0.

DEMOSTRACION

$$\nabla\left(\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}\right) = \left(\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x},\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial y},\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial z}\right) = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{g}-\frac{\partial g}{\partial x}f}{g^2},\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{g}-\frac{\partial g}{\partial y}f}{g^2},\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{g}-\frac{\partial g}{\partial z}f}{g^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x} g}{g^2}, \frac{\frac{\partial f}{\partial y} g}{g^2}, \frac{\frac{\partial f}{\partial z} g}{g^2} \right) - \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x} f}{g^2}, \frac{\frac{\partial g}{\partial y} f}{g^2}, \frac{\frac{\partial g}{\partial z} f}{g^2} \right) = \frac{g\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{g^2} - \frac{f\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)}{g^2}$$

$$= \frac{g\nabla f}{g^2} - \frac{f\nabla g}{g^2} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

2.31. Plano tangente y recta normal a una superficie de nivel(definición)

SI f es una función diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$, el plano tangente y la recta normal a la superficie de nivel de f que contiene al punto (x_0, y_0, z_0), en dicho punto, son el plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es normal al vector $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector director $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$,respectivamente.

2.31.1. Plano tangente a la superficie de nivel f(x, y, z)=c en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

2.31.2. Recta normal a la superficie de nivel f(x, y, z)=c en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

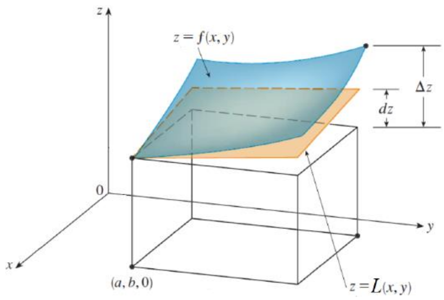
Observación:

- El vector gradiente en P_0 es ortogonal a la superficie es el que nos sirve como vector normal para definir el plano
- El plano tangente también lo podemos definir como $\begin{pmatrix} f_x(P_0) \\ f_y(P_0) \\ f_z(P_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$
- Para el caso especial de una función de dos variables:
  Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:
  $$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$
  Recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:
  $$\begin{cases} x = x_0 + 2x_0 t \\ y = y_0 + 2y_0 t \\ z = z_0 + 2z_0 t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

2.32. Linealización de una función de dos variables en un punto(definición)

Si f es una función de dos variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f, se define la linealizacion de f en P_0 por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



Interpretación:

La linealización está definida para un punto (x_0, y_0) dado en cualquier punto (x, y) del dominio.

Cuanto varia la linealización desde el punto (x_0, y_0) a uno $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$?

Evaluamos la variación de la linealización

$$\Delta L(x_0, y_0) = L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0)$$
$$= \left[f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\big((x_0 + \Delta x) - x_0\big) + f_y(x_0, y_0)\big((y_0 + \Delta y) - y_0\big)\right] - [f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x_0 - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y_0 - y_0)]$$

$= [f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y] - [f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)0 + f_y(x_0, y_0)0]$
$= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$

Evaluamos la variación de la función por la definición 2.14(diferenciabilidad)

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

Podemos ver qué Δf tiene los mismo términos que ΔL, pero además Δf tienen dos términos más que representan los errores. Esto lo podemos ver reflejado en la grafico donde Δz representa la variación de la función de dos variables y dz representa la variación de la función linealización

Observación:

- La parte celeste el grafico de la función f de dos variables y en naranja el grafico de la función linealización
- Si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0, es decir ε_1 y ε_2 tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

2.33. Linealización de una función de tres variables en un punto(definición)

Si f es una función de tres variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f, se define a la linealización en P_0 por

$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$

Interpretación:

No contamos con una representación gráfica conveniente, pero tiene la misma interpretación que en $\mathbb{R}^2$.Siendo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P = (x, y, z)$, definimos $L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)$

$$\Delta L(P_0) = [L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)] - [L(P_0)]$$
$$= [f(P_0) + \mathrm{f_x}(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z] + [-f(P_0) - 0 - 0 - 0]$$
$$= \mathrm{f_x}(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z$$
$$\Delta f(P_0) = \mathrm{f_x}(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$$

Observación:

- Si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0, el entorno es en $\mathbb{R}^3$ y será una especie de bola

2.34. Diferencial de una función de dos variables(definición)

Si f es diferenciable un punto P_0 interior en su dominio, la diferencial o diferencial total de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df_{(x_0,y_0)}(dx, dy) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy,$$

si f es de dos variables.

A partir de las ultimas definiciones podemos decir:

Si f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$:

- $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$(funcion
- $L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$(funcion linealizacion)
- $df_{x_0,y_0}(dx, dy) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$ (diferencial de la función)

Observación:

- El diferencial de f es una transformación lineal que equivale a la linealización solo que se traslada al origen, es decir el diferencial es una traslación de la linealización.

2.35. Diferencial de una función de tres variables(definición)

Si f es diferenciable un punto P_0 interior en su dominio, la diferencial o diferencial total de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz,$$

si f es de tres variables.
A partir de las ultimas definiciones podemos decir
Si f es diferenciable se cumple lo mismo que en $\mathbb{R}^2$ pero con la variable z

2.36. Aplicación de la linealización y diferencial

Ejemplo:
El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h están sujetas a error, el valor calculado del volumen también lo estar.
Por ser la función $V = f(r, h)$ diferenciable(tiene derivas continuas y por el teorema del incremento sabemos que es diferenciable), el error en el valor del volumen será dado por la diferencial:

$$dV = V_r dr + V_h dh + \varepsilon_r dr + \varepsilon_h dh \approx V_r dr + V_h dh = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh$$

Si los valores nominales r_0 y h_0 están fijos, pequeños error Δr y Δh influyen de distintas maneras en el valor de dV, según sean los valores de r_0 y h_0.Como

$$|error| = \left|\frac{Aprox - Real}{Real}\right| = \left|\frac{\Delta Magnitud}{magnitud\ real}\right|,$$

si se mide r con un error no mayor ε_r y h con un error que no supera ε_h, el máximo error posible en el cálculo de V es

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| = \left|\frac{2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h}{\pi r^2 h}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| \leq 2\varepsilon_r + \varepsilon_h$$

Revisar video U2 parte 4

2.37. Formula de Taylor para dos variables

Sea f una función de dos variables tal que sus derivadas parciales hasta el orden n+1 son continuas en una región D. Dados

$$(a, b) \in int\ D \qquad y \qquad h, k\ tales\ (a + h, b + k) \in D,$$

Nota: El segundo punto no es necesariamente en el interior a D
Dados esos dos puntos que pertenecen a D definimos una función vectorial

$$r(t) = \left(a + \frac{t}{\beta}h, b + \frac{t}{\beta}k\right) \qquad 0 \leq t \leq \beta.$$

Así: $\quad r(0) = (a, b) \quad y \quad r(\beta) = (a + h, b + k).$
Nota: Queremos ver cómo se comporta la función f en los puntos de la parametrización de r(t)
Definimos la función compuesta w (tiene dominio en el intervalo $[0,\beta]$) por

$$w(t) := f\big(r(t)\big); \qquad asi: \quad f(a + h, b + k) = w(\beta); \qquad f(a, b) = w(0)$$

Por ser una función real podemos definir la función de Taylor para w alrededor de 0:

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^n(0)}{n!}t^n \frac{w^{n+1}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \quad c\ entre\ 0\ y\ t$$

Nota: El ultimo termino es el residuo de orden n y para cada t que elijamos el ultimo termino se evalúa en un c que esta entre 0 y t

$$w(\beta) = w(0) + w'(0)\beta + \cdots + \frac{w^n(0)}{n!}\beta^n \frac{w^{n+1}(c)}{(n+1)!}\beta^{n+1}, \quad c\ entre\ 0\ y\ \beta \quad (1)$$

Queremos escribir (1) en términos de la función f de dos variables, para ello vamos a buscar las derivadas de w utilizando la regla de la cadena, recordando que

$$w(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = f\left(a + \frac{t}{\beta}h, b + \frac{t}{\beta}k\right),$$

Comenzamos buscando su derivada primera

$$w'(t) = f_x(x,y)x'(t) + f_y(x,y)y'(t) = f_x(x,y)\frac{h}{\beta} + f_y(x,y)\frac{k}{\beta} = \frac{1}{\beta}\left[f_x(x,y)h + f_y(x,y)k\right] \quad (2)$$

Si a (2) la evaluamos en 0 obtenemos

$$w'(0) = \frac{1}{\beta}\left[f_x(a,b)h + f_y(a,b)k\right]$$

Nota: $x(t) = a + \frac{t}{\beta}h \quad y \quad y(t) = b + \frac{t}{\beta}k \qquad / \qquad x'(t) = \frac{h}{\beta} \quad y \quad y'(t) = \frac{k}{\beta}$

Volvemos a derivar a (2) para obtener la derivada segunda. Recordar que $f_x(x,y)$ es otra función de dos variable, lo mismo sucede con $f_y(x,y)$:

$$\begin{aligned} w''(t) &= \frac{h}{\beta}\left[f_{xx}(x,y)\frac{h}{\beta} + f_{xy}(x,y)\frac{k}{\beta}\right] + \frac{k}{\beta}\left[f_{yx}(x,y)\frac{h}{\beta} + f_{yy}(x,y)\frac{k}{\beta}\right] \\ &= \frac{h^2}{\beta^2}f_{xx}(x,y) + \frac{hk}{\beta^2}f_{xy}(x,y) + \frac{kh}{\beta^2}f_{yx}(x,y) + \frac{k^2}{\beta^2}f_{yy}(x,y) \end{aligned}$$

Por hipótesis las derivadas de orden n+1 son continuas, por el teorema 2.12(Clairaut) las derivas mixtas son iguales y así obtenemos la derivada segunda

$$w''(t) = \frac{h^2}{\beta^2}f_{xx}(x,y) + 2\frac{hk}{\beta^2}f_{xy}(x,y) + \frac{k^2}{\beta^2}f_{yy}(x,y) \qquad (3)$$

Si a la ecuación (3) la evaluamos en 0

$$\begin{aligned} w''(0) &= \frac{h^2}{\beta^2}f_{xx}(a,b) + 2\frac{hk}{\beta^2}f_{xy}(a,b) + \frac{k^2}{\beta^2}f_{yy}(a,b) \\ &= \frac{1}{\beta^2}\left(hf_x + kf_y\right)^2\Big|_{(a,b)} \qquad (4) \end{aligned}$$

Nota: En el termino $\left(hf_x + kf_y\right)^2\Big|_{(a,b)}$ de la ecuación (4) no se comporta como un cuadrado de binomio para todos los coeficientes. Para los coeficientes reales si se comporta como tal, pero para las derivadas parciales en lugar del cuadrado de f_x es f_{xx}, en el doble producto tenemos la derivada mixta y para f_y obtenemos f_{yy}. Es una forma abreviada para evitar una notación difícil.

Si f y sus derivadas parciales hasta orden n+1 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a, b), entonces en R:

Nota: Ahora la región R tiene más restricciones de la región D y hace que ambos puntos estén en el interior de la región.

Finalmente podemos reescribir la ecuación (1) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &f(a+h, b+k) = \\ &\quad = f(a,b) + \left(hf_x + kf_y\right)\big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(hf_x + kf_y\right)^2\Big|_{(a,b)} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(hf_x + kf_y\right)^n\Big|_{(a,b)} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(hf_x + kf_y\right)^{n+1}\Big|_{\left(a+\frac{c}{\beta}h, b+\frac{c}{\beta}k\right)}, \qquad c\ entre\ 0\ y\ \beta \end{aligned}$$

Si f y sus derivadas parciales hasta orden 2 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a, b), entonces en R:

$$f(a+h,b+k)$$
$$= f(a,b) + \left(hf_x + kf_y\right)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(hf_x + kf_y\right)^2 f\Big|_{\left(a+\frac{c}{\beta}h,b+\frac{c}{\beta}k\right)}$$
$$= f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Bigg|_{\left(a+\frac{c}{\beta}h,b+\frac{c}{\beta}k\right)}$$

$c\ entre\ 0\ y\ \beta$

Nota: Nosotros vamos a aplicarlo en una demostración en la que solo desarrollamos la formula hasta el primer orden y le vamos a sumar el error. La expresión que vamos a utilizar es la anterior

Observación:

- La linealización de f en (a,b) coincide con la fórmula de Taylor de primer orden sin el término del error

2.38. Máximo local(definición)

Si f está definida en una región que contiene al punto (a, b) y $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todos los $(x,y)\ \in D(f)$ de algún entorno del (a, b), entonces f(a, b) es un (valor) máximo local de f. Además, se dice que f alcanza un máximo local en (a, b).

2.39. Mínimo local(definición)

Si f está definida en una región que contiene al punto (a, b) y $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todos los $(x,y)\ \in D(f)$ de algún entorno del (a, b), entonces f(a, b) es un (valor) mínimo local de f. Además, se dice que f alcanza un mínimo local en (a, b).

2.40. Punto crítico y punto de silla(definición)

Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P) = 0$ es un punto crítico de f.
Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P)$ no existe, es un punto (singular o) critico de f.
Si f es diferenciable en P, tiene un punto de silla en P si P es un punto crítico de f y f no presenta en P un máximo ni mínimo local.

Observación:

- ¿Si hay una función cuyo gradiente se anula en un punto (a,b) del dominio y f(a, b) no es máximo ni mínimo relativo, es si o si un punto de silla? No, necesariamente porque debemos probar que f es diferenciable
- Una función continua puede tener dos mínimos (o máximos) locales en una región y eso no implica que deba haber un máximo (o mínimo) local en esa región.
- Las definiciones 2.38, 2.39 y 2.40 se extienden a funciones de más variables

2.41. Valores extremos de funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados(teorema)

Si f es una función continua en un conjunto D que es cerrado y acotado, entonces existen en D puntos en los cuales f alcanza sus valores máximos y mínimos absolutos.
Nota: Debemos buscar en los puntos críticos y en la frontera de D, video Unidad 2 parte 7.4

2.42. Criterio de la derivada primera para valores extremos locales(teorema)

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto P_0, interior al dominio de f y, si las derivadas parciales de primer orden f están definidas en P_0, entonces $\nabla f(P_0) = 0$.

DEMOSTRACION

⇒Supongamos que $f(x_0, y_0)$ es un valor extremo local de f. Entoces la funcion de una sola variable, manteniendo el valor fijo de y_0 y que varie el de x $f(\cdot, y_0)$, la consideramos como funcion de una variable independiente, tambien tiene un extremo en $x = x_0$. Por el criterio de la derivada primea para funciones de una variable, si a derivada de x $f(\cdot, y_0)$ existe en x_0 debe ser cero.Luego $f_x(x_0, y_0) = 0$

Similarmente se prueba que $f_y(x_0, y_0) = 0$

Por lo tanto el gradiente es cero

Observacion:

- Tambien se extiende a funciones con dominio en espacio de mas dimesiones
- Para hallar los puntos criticos planteamos $\nabla f(x, y) = 0$ y resolvemos el SEL. Luego aplicamos el teorema 2.43 para ver si son maximos o minimos.

2.43. Criterio de la deriva segunda para valores extremos locales(teorema)

Suponga que f y sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a, b) y que $\nabla f(a, b) = (0,0)$(Significa (a, b) es un punto crítico).Entonces:

2.43.1. f tiene un maximo local en (a, b) si $H_f(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$;

2.43.2. f tiene un minimo local en (a, b) si $H_f(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$;

2.43.3. f tiene un punto de silla en (a, b) si $H_f(a, b) < 0$;

2.43.4. El criterio no es concluyente si $H_f(a, b) = 0$;

Recordar: La matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left(f_{xy}(a,b)\right)^2.$$

Nota: Las derivadas mixtas son iguales por el teorema 2.12 (Clairaut)

DEMOSTRACION(TERMINAR)

⇒Recordamos la Formula de Taylor para una función de dos variables:

Si f y sus derivadas parciales hasta orden 2 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a, b), entonces en R:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(hf_x + kf_y\right)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

para cierto c entre 0 *y* β

Nota: β puede ser tan pequeño como queramos

En nuestro caso se cumplen las hipótesis y, además el $\nabla f(a, b) = (0,0)$.

Luego:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

para cierto c entre 0 *y* β

$$\Delta f(a,b) = \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a+ch,b+ck)} \qquad \text{para cierto } c \text{ entre } 0 \text{ y } \beta \qquad (1)$$

Nota: Nos interesa ver el signo de $\Delta f(a, b)$, para poder saber si estaremos en presencia de un mínimo o un máximo

Si para todos los $(a + h, b + k)$ en un entorno de (a, b) en el dominio de la función, $f(a + h, b + k) > f(a, b)$, entonces $\Delta f(a, b) > 0$, y f presenta un mínimo local en (a, b).

Similarmente para un máximo pero ahora $f(a+h,b+k) < \mathrm{f}(a,b)$, entonces $\Delta f(a,b) < 0$, y f presenta un máximo local en (a,b).
Si a (1) la reescribimos evaluando en $(a+\mathrm{c}h, b+\mathrm{c}k)$

$$\Delta f(a,b) = \frac{1}{2!}\left[h^2 f_{xx}(a+\mathrm{c}h, b+\mathrm{c}k) + 2hkf_{xy}(a+\mathrm{c}h, b+\mathrm{c}k) + k^2 f_{yy}(a+\mathrm{c}h, b+\mathrm{c}k)\right] \quad (2)$$

Si todas las derivadas de segundo orden son continuas, si en lugar de evaluarlas en $(a+\mathrm{c}h, b+\mathrm{c}k)$, las evaluamos en (a,b) , el valor va a ser aproximadamente igual al de (2)

$$\Delta f(a,b) \approx \frac{1}{2!}\left[h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)\right]$$

En particular si todas las derivadas son distintas de cero el signo va a ser el mismo, que es lo que nos interesa(hemos quitado $\frac{1}{2!}$ Ya que no afecta el signo)

$$sg\big(\Delta f(a,b)\big) = \mathrm{sg}\left[h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)\right] \quad (3)$$

Multiplicamos y dividimos por f_{xx} el lado izquierdo de (3), asumiendo que $\mathrm{f_{xx}}(a,b) \neq 0$

$$sg\big(\Delta f(a,b)\big) = \mathrm{sg}\left\{\frac{1}{\mathrm{f_{xx}}(a,b)}\left[h^2 f_{xx}^2(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b)\mathrm{f_{xx}}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)\mathrm{f_{xx}}(a,b)\right]\right\} \quad (4)$$

Sumamos y restamos el termino $k^2 f_{xy}^2(a,b)$ a (4)para poder completar un trinomio cuadrado perfecto

$$sg\big(\Delta f(a,b)\big) = \mathrm{sg}\left\{\frac{1}{\mathrm{f_{xx}}(a,b)}\left[h^2 f_{xx}^2(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b)\mathrm{f_{xx}}(a,b) + k^2 f_{xy}^2(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)\mathrm{f_{xx}}(a,b) - k^2 f_{xy}^2(a,b)\right]\right\}$$

Reordenamos y queda:

$$sg[\Delta f(a,b)\mathrm{f_{xx}}(a,b)] = \mathrm{sg}\left\{\left[hf_{xx}(a,b) + kf_{xy}(a,b)\right]^2 + k^2 H_f(a,b)\right\}$$

Si $H_f(a,b) > 0$, todo el término izquierdo es positivo y así también el derecho. Entonces $sg[\Delta f(a,b)] = sg[\mathrm{f_{xx}}(a,b)]$; así:
$\mathrm{f_{xx}}(a,b) > 0$ *entonces* $sg[\Delta f(a,b)] > 0$ y f presentara un minimo local;
$\mathrm{f_{xx}}(a,b) < 0$ *entonces* $sg[\Delta f(a,b)] < 0$ y f presentara un máximo local;
Nota: En este desarrollo hemos supuesto que todas las derivadas de segundo orden son distintas de 0, para que los signos den estrictamente positivos o negativos
Si $H_f(a,b) < 0$, veremos que existen puntos $(a+h, b+k)$ próximos a (a,b) tales que $sg[\Delta f(a,b)]$ es positivo en un caso y negativo en el otro. A partir de esto demostramos que f presenta un punto de ensilladura
Si $k = 0$, es decir $(a+h, b+k) = (a+h, b)$. En este caso:

$$sg[\Delta f(a,b)\mathrm{f_{xx}}(a,b)] = sg\left[hf_{xx}(a,b) + kf_{xy}(a,b)\right]^2 > 0.$$

Nota: En este caso se anula el término del hessiano, y el signo del producto del lado izquierdo es positivo y ambos factores tienen el mismo signo.
Sea $(a+h, b+k)$ tal que $\frac{k}{h} = -\frac{f_{xx}(a,b)}{f\_xy(a,b)}$. En este caso

$$sg[\Delta f(a,b)\mathrm{f_{xx}}(a,b)] = sg\left[k^2 H_f(a,b)\right] < 0.$$

Nota: En este caso se anula el término del binomio cuadrado y el signo del producto del lado es negativo por lo tanto los factores tienen distinto signo.
Hemos probado que desde (a, b) en dos direcciones distintas hacia dos puntos tan cerca como queramos de (a,b) el signo de $\Delta f(a,b)$ nos da distinto.
Luego $f(a,b)$ tiene un punto de ensilladura.

Si $H_f(a,b) = 0$, vamos a suponer tres funciones las cuales todas tienen el punto critico $(0,0)$ y su $H_f(0,0) = 0$

$f(x,y) = x^4 + y^4, si\ (x,y) \neq 0, f(x,y) > 0$, por lo que $f(0,0) = 0$ y es un mínimo local

$f(x,y) = -x^4 - y^4, si\ (x,y) \neq 0, f(x,y) < 0$, por lo que $f(0,0) = 0$ y es un maximo local

$f(x,y) = x^4 - y^4$,

Nota: se toman valores de $x\ e\ y$ en un entorno cercano

Si $(x,0) \neq (0,0), f(x,0) > 0$; f presenta un mínimo local

Si $(0,\ y) \neq (0,0), f(0,y) < 0$; f presenta un máximo local; como la función es diferenciable f presenta un punto de silla en (0, 0, 0)

Hemos probado que Si $H_f(a,b) = 0$ las funciones pueden tener un máximo, un mínimo o un punto de ensilladura

2.44. Gradiente ortogonal (teorema)

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región .Si P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a sus valores sobre C, entonces ∇f es ortogonal a C en P_0. COROLARIO: En $\mathbb{R}^2$ también vale.

Observación:

- Solo nos interesan los puntos de la curva, es decir si f tiene otro extremo local relativo en la región no nos interesa.
- Este teorema asegura que el gradiente de f en P_0 es ortogonal al vector tangente $r'(t_0)$ en P_0.(En caso de contar con la parametrización de una curva)

DEMOSTRACION

⇒Sea C parametrizada por $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, y sea $P_0 = r(t_0)$, para cierto $t_0 \in [a,b]$. Si $w(t) = (f\ \circ \boldsymbol{r})(t)$ alcanza un valor extremo en t_0, por la diferenciabilidad de f(podemos derivar w, la cual es una función de una variable real con valores real)

$$w'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot r'(t_0)$$

y debido a que $w(t_0)$ es extremo, se tiene:

$$w'(t_0) = 0,$$

Luego igualamos y obtenemos $\nabla f(P_0) \cdot r'(t_0) = 0$, probando que $\nabla f(P_0)\ y\ r'(t_0)$ son ortogonales

2.45. Método de multiplicadores de Lagrange(teorema)

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0\ \in S$). Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq 0$.

Entonces, si f es restringida a S tiene un extremo local en P_0, entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

Observación:

- El punto P_0 es un punto crítico de f restringida a S(puede haber más de uno)

Forma de cálculo:

Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 0$(si este conjunto S no es vacío), se obtienen los puntos críticos(de f sujeta a la restricción), que serán los valores de x, y, z tales que para algún $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z, \lambda)$ satisfacen en forma simultanea las ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Para funciones de dos variables es similar solo que en $\mathbb{R}^2$.

Nota:

- $\nabla f = \lambda \nabla g$ hay que igualar componente a componente. Videos Unidad 2 parte 8.3 y 8.4 hay ejemplos
- El valor de λ no nos interesa solo saber que es un numero $\mathbb{R}$.

2.46. <u>Multiplicadores de Lagrange con 2 restricciones</u>

La curva C es la intersección de las superficies S_1(superficie de nivel de $g_1 = 0$) y S_2(superficie de nivel de g_2). Según el teorema 2.44 (gradiente ortogonal), si f presenta un extremos relativo a C en $P_0 \in C$. Como C es una curva del espacio, en P_0 habrá un plano normal a C. Por esta C incluid en S_1, $\nabla g_1(P_0)$es ortogonal a S_1 y asi, es ortogonal a C. Similarmente , $\nabla g_2(P_0)$ es ortogonal a C. Así si $\nabla g_1(P_0)\ y\ \nabla g_2(P_0)$ son linealmente independientes, se podrá expresar $\nabla f(P_0)$ como combinación lineal de $\nabla g_1(P_0)\ y\ \nabla g_2(P_0)$.

<u>Forma de cálculo:</u>

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

<u>Observación:</u>

Es un sistema de 5 ecuaciones no lineal con 5 incógnitas. No es trivial resolver este tipo de sistemas

3. UNIDAD 3: INTEGRACION DE FUNCIONES DE VARIA VARIABLES

3.1. Integral doble sobre rectángulos(definición)

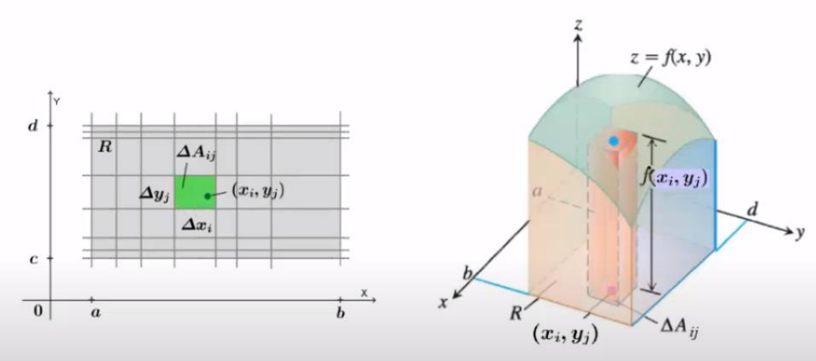
Sea f una función definida y acotada en un rectángulo R. Definimos una partición de R, formada por $n \times n$ subrectangulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A_{ij}$.

Si el $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S_n$ existe cualquier elección de (x_i, y_j), se dice que si f es integrable sobre R y que la integral doble de f sobre R es el límite de la sumas de S_n. La integral se denota por

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dx\,dy.$$

Deducción:

Comenzamos con un rectángulo, el cual se puede escribir como $R = [a,b] \times [c,d]$.Luego procedemos a particionar la región de integración con rectas paralelas al eje x y al eje y(debemos tener la misma cantidad de subintervalos en el $[a,b]$ como en el $[c,d]$).Cada subrectangulo tiene lados $\Delta x_i\ y\ \Delta y_j$ que resulta en un área ΔA_{ij}, además consideramos un punto cualquiera con coordenadas (x_i, y_j) que debe están en el interior de cada subrectangulo. Para hacer la aproximación de la integral doble, usamos la imagen del punto (x_i, y_j) como la imagen de todos los puntos de ese subrectangulo. Se hacen las sumas de Riemann y se tiende la norma de la partición (máximo entre todos los $\Delta x_i\ y\ \Delta y_j$)) a cero.



Interpretación:

Si $f(x,y) \geq 0$ la integral es un volumen que es más preciso a medida que tengo más subrectangulos

3.2. Integral doble sobre otras regiones(definición)

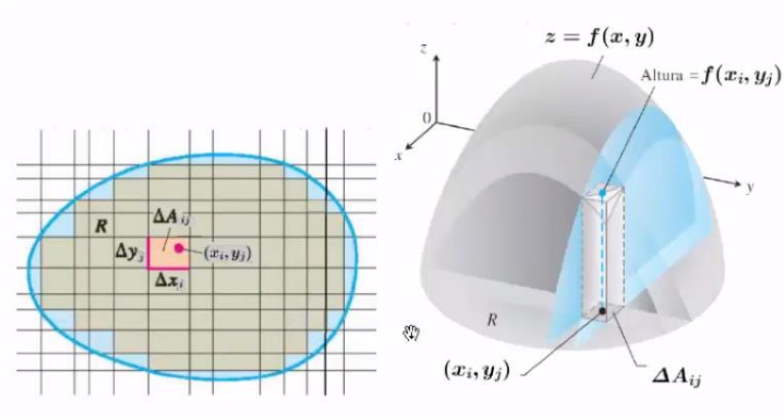
Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos; consideramos solo los rectángulos incluidos en R y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A_{ij}$.

Si el $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S_n$ existe cualquier elección de (x_i, y_j), se dice que si f es integrable sobre R y que la integral doble de f sobre R es el límite de la sumas de S_n. La integral se denota por

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dx\,dy.$$

Deducción:

Se procede de manera similar que, en la región rectangular, en este caso solo tomamos los rectángulos que están completamente adentro de la región



3.3. Propiedades de las integrales dobles

3.3.1. Si f es continua en una región cerrada y acotada R, entonces f es integrable en R.
Nota: Si el campo f es continuo en la región R (cerrada y acotada) garantiza la existencia del límite de las sumas de Riemann que define la integral doble sobre R

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R, entonces:

3.3.2. $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA.$

3.3.3. $\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA.$

3.3.4. Si $f(x,y) \leq g(x,y)\ para\ todo\ (x,y) \in R,$

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA.$$

3.3.5. Si $R_1\ y\ R_2$ son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$(significa que no comparten puntos, es decir que la intersección es vacía) y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA.$$

3.4. Teorema de Fubini para integrales dobles(teorema)

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular $(\mathrm{R} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times [\mathrm{c}, \mathrm{d}])$,entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy.$$

- R está definida por $a \leq x \leq b\ y\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con $g_1 y\ g_2$ continuas en [a, b], entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx\,dy.$$

- R está definida por $c \leq y \leq d\ y\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con $h_1 y\ h_2$ continuas en [c, d], entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\,dy.$$

3.5. Áreas por doble integración(definición)

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

Nota: Para definir el área hacemos que la función $f(x, y) = 1$

3.6. <u>Valor medio de una función integrable en una región acotada R(definición)</u>

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

$$Valor\ promedio\ de\ f\ sobre\ R = \frac{1}{area\ de\ R} \iint_R f dA.$$

<u>Interpretación:</u>
El valor promedio es un número que interpretado como una cota es z= valor promedio, nos permite graficar un plano horizontal cuya altura es el valor promedio.

3.7. <u>Integral triple sobre rectángulos(definición)</u>

Sea f una función definida y acotada en un rectángulo o caja R. Definimos una partición de R, formada por n^3 subrectangulos y formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta V_{ijk}.$$

Si el $\lim_{\|P\| \to 0} S_n$ existe cualquier elección de $(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_j}, z_k)$, se dice que si f es integrable sobre R y que la integral triple de f sobre R es el límite de la sumas de S_n. La integral se denota por

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R f(x, y, z) dx\, dy\, dz.$$

<u>Observación:</u>

- Se deduce de manera análoga a la integral doble, en este caso se tiene un eje más. Esto lleva a tener un volumen en vez de un área.
- La integral triple se utiliza para averiguar la masa de un objeto, donde f es la densidad.

3.8. <u>Integral triple sobre otras regiones(definición)</u>

Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos y consideramos solo los rectángulos incluidos en R y formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta V_{ijk}.$$

Si el $\lim_{\|P\| \to 0} S_n$ existe cualquier elección de $(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_j}, z_k)$, se dice que si f es integrable sobre R y que la integral triple de f sobre R es el límite de la sumas de S_n. La integral se denota por

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R f(x, y, z) dx\, dy\, dz.$$

3.9. <u>Propiedades de las integrales triples</u>

3.9.1. Si f es continua en una región cerrada y acotada R, entonces f es integrable en R.

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R, entonces:

3.9.2. $\iint_R [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iint_R f(x, y, z) dV + \iint_R g(x, y, z) dV.$

3.9.3. $\iint_R cf(x, y, z) dV = c \iint_R f(x, y, z) dV.$

3.9.4. Si $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)\ para\ todo\ (x,y,z) \in R$,

$$\iint_R f(x,y,z)dV \leq \iint_R g(x,y,z)dV.$$

3.9.1. Si $R_1\ y\ R_2$ son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x,y,z)dV = \iint_{R_1} f(x,y,z)dV + \iint_{R_2} f(x,y,z)dV.$$

3.10. Teorema de Fubini para integrales triples(teorema)

Si f es continua en la región R y

- R es rectangular ($\mathrm{R} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times [\mathrm{c}, \mathrm{d}] \times [e, m]$),entonces

$$\iint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x,y,z)dz\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x,y,z)dz\,dx\,dy\ldots$$

Nota: se puede reordenar de seis maneras distintas

- R está definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\ y\ h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)$, con $g_1 y\ g_2$ continuas en [a, b], y $h_1\ y\ h_2$ continuas en $\{(x,y): a \leq x \leq b\ , g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ entonces

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx.$$

- Hay otros casos….

3.11. Volumen de un sólido(definición)

Si un sólido D ocupa una región en $\mathbb{R}^3$ que es cerrada y acotada, su volumen es

$$V = \iiint_D dV$$

3.12. Valor medio de una función de tres variables(definición)

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

$$Valor\ promedio\ de\ f\ sobre\ R = \frac{1}{volumen\ de\ R} \iiint_R f dV.$$

3.13. Aplicaciones de la integral triples (Masa y centro de masa)

3.13.1. Si tal solido D tiene densidad en cada punto por una función integrable $\delta(x,y,z)$, su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

y las coordenadas de su centro de masa vienen dadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z\delta dV}{\iiint_D \delta dV}$$

Observación:

- Cuando δ es constante, el centro de masa se llama centroide.

3.14. Formula de cambio de variables (teorema)

Supóngase que T es una transformación biyectiva de S en R, tal que sus derivadas componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden en S y cuyo Jacobiano es no nulo en S. Supóngase que f es continua en R. Entonces:

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = \iint_S f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \quad (Las\ barras\ son\ de\ valor\ absoluto)$$

Observación:

- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ denota el determinante Jacobiano de la transformación
- El teorema también vale si T no es inyectiva en puntos de la frontera de S

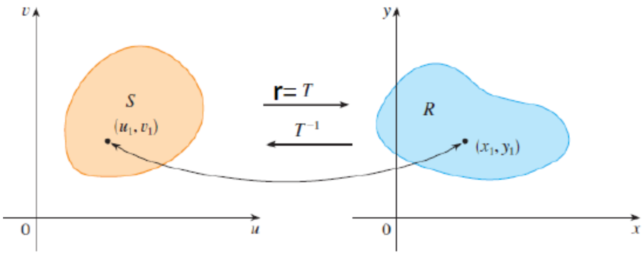
Justificación:

Para calcular $\iint_R f(x,y)dx\,dy$ se puede definir una transformación $T: S \to R\ biyectiva$

$$T(u,v) = (x,y) = \big(x(u,v),y(u,v)\big)$$

Nota: La región R es nuestra región de integración

A partir de la transformación T biyectiva(significa que nos lleva de la región S biyectivamente a R. Ej., el punto u_1 se transforma en el punto $\big(x(u_1,v_1),y(u_1,v_1)\big)\big)$



Nota: T o r, es lo mismo es la transformación

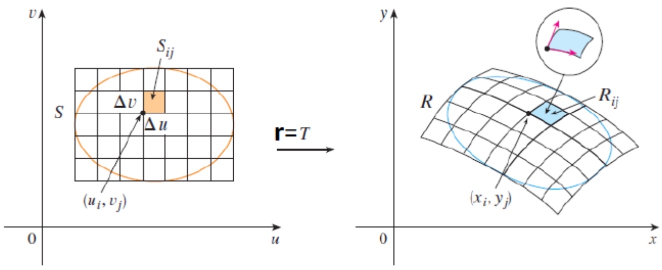
Por ser f continua en R, es integrable; eso implica que las sumas de Riemann asociadas a una partición P de R. Sabemos que la partición va a tender 0 y converge a un valor, cumple

$$\sum_n \sum_n f(x_i,y_j)\Delta A_{ij} \underset{\|P\|\to 0}{\to} \iint_R f(x,y)dA$$

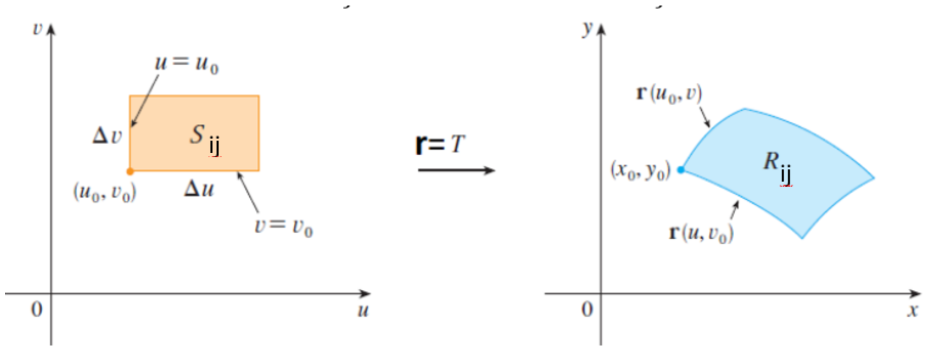
Como nosotros queremos integrar en la región R, realizamos una partición en S y a través de la transformación inducimos una partición en R. Un punto muestra de cada S_{ij} nos generara un punto muestra en cada porción R_{ij}(hablaremos de puntos (u_i,v_j) en S y (x_i,y_j) los inducidos en R). Llamaremos $\Delta u\ y\ \Delta v$ al rectángulo genérico S_{ij} y en R tendremo una figura(no necesariamente rectangular). La integral será:

$$\iint_R f(x,y)dA \cong \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\Delta A_{ij} \quad (1)$$

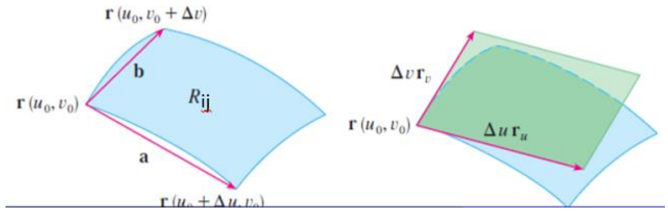
Nota : La expresión anterior es la suma de Riemann tomada en R donde ΔA_{ij} es el área de R_{ij}



Si al vértice (u_0,v_0) le aplicamos la transformación, (x_0,y_0) seria $T(u_0,v_0)$. Si dejamos $v = v_0$ constante y permitimos que u varie, generamos Δu en S_{ij} que es $T(u,v_o)$ en R_{ij}. Análogamente obtenemos que Δv en S_{ij} es $T(u_0,v)$ en R_{ij}.



Nos interesa aproximar el área de R_{ij} porque es lo que aparece en la suma de Riemann (1),



El área de R_{ij} será parecida al área del paralelogramo formado por los módulos del vector a y b.

Para saber cuánto mide el vector a, recordamos que es la derivada parcial de $T_u(u_0, v_o)$.

Como T o r es un transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que tiene dos funciones componentes y cada una de ellas una función de dos variables. Entonces la derivada parcial de la función T respecto de u, significa considerar que v_0 queda fijo y que u varia. Esta derivada es:

$$T_u(u_0, v_o) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_o, v_0)}{\Delta u}, si\ el\ limite\ existe$$

Si el limite existe $T_u(u_0, v_o)$ es un número fijo, pero si en vez de tomar el limite evaluamos el cociente incremental para nuestro valor concreto de Δu que obtuvimos de la partición, el cociente incremental no será exactamente igual a $T_u(u_0, v_o)$ ya que es un límite. El cociente será aproximadamente igual a $T_u(u_0, v_o)$ pero en ese cociente el numerador $(r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_o, v_0))$va a ser nuestro vector a.

$$T_u(u_0, v_o) \approx \frac{r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_o, v_0)}{\Delta u}$$

El vector a va a ser aproximadamente igual a $T_u(u_0, v_o)\Delta u$.

Trabajando de manera similar podemos ver que el vector b va a ser aproximadamente $T_v(u_0, v_o)\Delta v$.

Con estos dos vectores podemos aproximar el área del primer paralelogramo al área de nuestro segundo paralelogramo(verde). El área la podemos aproximar como

$$Area \approx |(\Delta u T_u) \times (\Delta v T_v)| = |T_u \times T_v| \Delta u \Delta v$$

Nota: $\Delta u\ y\ \Delta v$ son valores no negativos ya que son tomados de una partición, y lo podemos extraer por la propiedad de valor absoluto

Calculamos $T_u \times T_v$ para luego obtener su modulo

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \qquad (2)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \qquad (3)$$

Como los vectores son de $\mathbb{R}^2$ los extendemos de manera natural a $\mathbb{R}^3$. Nos queda el versor k por un determinante. El termino (2) es el determinante de la matriz transpuesta de la matriz jacobiana (por propiedad de determinante, podemos aplicar la traspuesta y no varía el determinante). El determinante (3) es de la matriz Jacobiana.
Recordando nuestra integral

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A_{ij}$$

Y sabiendo que el área

$$\Delta A_{ij} \approx \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| (u_i, v_j)\Delta u_i \Delta v_j$$

Obtenemos que

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(x(u_i,v_j), y(u_i,v_j)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u_i \Delta v_j \qquad (4)$$

$$= \iint_S f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Nota: Nos queda que la integral en particular como es el límite para cualquier suma de Riemann, si consideramos nuestras sumas provenientes de particiones inducidas de particiones tomadas en la región S a través de la transformación también el límite tiene que ser el mismo (cuando el límite existe es único). En ese caso la suma de Riemann (4) queda la función f evaluada en transformado del punto (u_i, v_j) por el valor absoluto del determinante Jacobiano por $\Delta u_i \Delta v_j$.Cuando tomamos el límite nos da la integral doble sobre la región s de la función f evaluada en el transformado de (u, v) por el valor absoluto del determinante Jacobiano por $dudv$.

3.15. <u>Jacobiano(definición)</u>

El Jacobiano de la transformación $T(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v)\right)$ es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

3.16. <u>Métodos de sustitución de AM I y transformación en el plano</u>
3.17. <u>Formula de cambio de variables: coordenadas polares</u>
3.18. <u>Formula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas</u>

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(r,\theta,z) = x = rcos\theta; \qquad h(r,\theta,z) = y = rsen\theta; \qquad k(r,\theta,z) = z$$

Jacobiano:

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsen\theta & 0 \\ sen\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = rcos^2\theta + rsen^2\theta = r.$$

Nota: θ es el ángulo medido en plano xy desde el semieje positivo de las x hasta las proyección del cualquier punto sobre el plano xy
r es la distancia desde el origen de coordenadas hasta la proyección del punto en plano xy
z es la cota.

3.19. Formula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación T a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho,\theta,\phi) = x = \rho sen\phi cos\theta; \qquad h(\rho,\theta,\phi) = y = \rho sen\phi sen\theta; \qquad k(\rho,\theta,\phi) = \rho cos\phi$$

Jacobiano:

$$J(\rho,\theta,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sen\phi cos\theta & -\rho sen\phi sen\theta & \rho cos\phi cos\theta \\ sen\phi sen\theta & \rho sen\phi cos\theta & \rho cos\phi sen\theta \\ cos\phi & 0 & -\rho sen\phi \end{vmatrix} = \rho^2 sen\phi.$$

Nota: θ es igual que en las coordenadas cilíndricas, ρ mide la distancia desde el origen hasta el punto en cuestión, ϕ es un ángulo que se mide desde el semieje positivo de z hasta el segmento que una nuestro punto con el origen de coordenadas y solo tomas valores entre 0 y π.

4. UNIDAD 4: CAMPOS VECTORIALES

4.1. Integral de línea(definición)

Dada una curva suave C y una representación paramétrica suave de la misma, $r(t), a \leq t \leq b$, y dado un campo escalar f definido en una región abierta D, que contiene a C, se define la integral de línea de f a lo largo de C por

$$\int_C f ds := \int_a^b f(r(t))|r'(t)|\, dt.$$

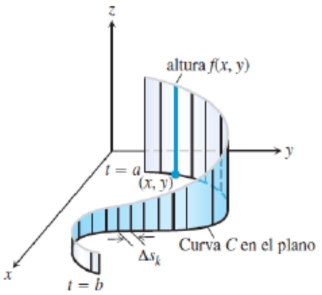
Observación:

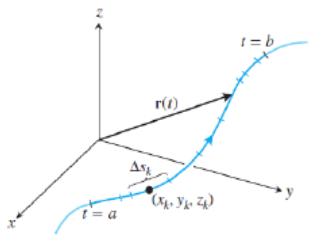
- El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C.

Interpretación de la integral de línea de un campo escalar:

Si f está definida en $D \subset \mathbb{R}^2$ y toma valores no negativos a lo largo de la curva C, que está incluida en D, la integral de línea $\int_C f ds$ se puede interpretar como el área de la superficie S bajo el grafico de f y por encima de la curva C. Es decir, el área de la "cortina" o "pared" sobre la curva C y bajo el grafico de f.

Si f está definida en $D \subset \mathbb{R}^3$ y toma valores no negativos a lo largo de la curva C incluida en D, la integral de línea $\int_C f ds$ se puede interpretar como la masa del alambre ubicada sobre la curva C cuando la densidad en cada punto viene dado por f.





Origen de la definición:

Si lo vemos para una curva en el plano y función de dos variables, esta integral de línea nos da el área bajo la curva de la función. Tomamos una partición en [a, b] induce una partición en C, si en esta última partición tomamos puntos muestras dentro de cada subintervalo t_k, cuando evaluamos $r(t_k)$ vamos obtener un punto en la curva y luego $f(r(t_k))$ será la altura. Considerando a Δs_k como la longitud de cada subintervalo en el plano, si multiplicamos la altura y la longitud obtendremos una aproximación el área de cada subintervalo. Si hacemos la suma de Riemann y que la norma de la partición tienda a cero la ecuación (1) va a ser la integral presentada en la definición.

$$\sum_{k=1}^{n} f(r(t_k))\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f(r(t_k))|r'(t)|\Delta t_k. \qquad (1)$$

Nota: Δs_k que es la longitud de arco se puede aproximar como $|r'(t)|\Delta t_k$.
y que la norma de la partición tienda a cero en la ecuación (1) tenemos:

$$\int_a^b f(r(t))|r'(t)|\, dt.$$

Ver animación de Khan Academy

4.2. Propiedades de la integral de línea

Suponemos que C_1 y C_2 son curvas incluidas en el dominio de f.

4.2.1. Aditividad: si la curva C se forma uniendo dos curvas suaves, C_1 y C_2, de manera que el extremo final de C_1 es el extremo inicial de C_2, entonces $\int_C fds = \int_{C_1} fds + \int_{C_2} fds$.

4.2.2. Independencia de la parametrización: las $\int_{C_1} fds = \int_{C_2} fds$ si C_1 y C_2 están formadas por el mismo conjunto de puntos del plano.

4.2.3. Dependencia de la trayectoria: en general $\int_{C_1} fds \neq \int_{C_2} fds$ si C_1 y C_2 son dos curvas suaves distintas, aun en el caso en que las curvas tengan los mismos punto inicial y final.

4.3. Campo vectorial(definición)

Un campo vectorial es una función F que asigna un vector a cada punto de su dominio,

$$F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Así, a cada vector $(x_1, \ldots, x_n) \in A$, F le asigna un vector de $\mathbb{R}^m$ dado por

$$F\ (x_1, \ldots, x_n) = \left(\mathrm{f}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m\ (x_1, \ldots, x_n)\right);$$

Las funciones $f_1, \ldots, f_m$ se llaman funciones componentes de F.

Un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ es de la forma

$$F(x, y, z) = f_1(x, y, z). f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)),$$

Y se presenta, por ejemplo, en los campos de velocidades en un fluido; en los campos gradientes; en os campos e fuerzas en los espacios; en los campos eléctricos, magnéticos o gravitatorios en el espacio; etc.

Observación:

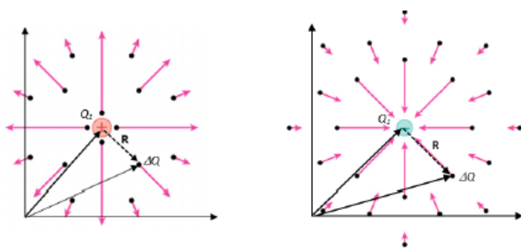
- Cada función componente es un campo escalar
- El gradiente de un campo escalar f, es un gradiente vectorial
- La suma de los campos vectoriales es posible, básicamente es una suma vectorial

4.3.1. Campo eléctrico generado por una carga puntual

Dada una carga puntual Q_1 esta modifica el espacio de manera tal que si se posiciona otra carga puntual Q en cualquier punto dado del espacio, esta última se verá afectada por una fuerza que representamos por un vector $\boldsymbol{F}$. De acuerdo con la Ley de Coulomb, esta fuerza vendrá dada por $\boldsymbol{F} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\epsilon R^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R}$, donde $\varepsilon > 0$ es una constante cuyo valor depende del medio, $\boldsymbol{R}$ es el vector $Q - Q_1$ si Q_1 y Q tienen el mismo signo y $Q_1 - Q$ si los signo son opuesto y R es el módulo de **R**.

Definimos el valor del campo eléctrico **E** en un punto como la fuerza, por unidad de carga, sobre una carga prueba positiva en el punto, con tal que la carga de prueba ΔQ sea suficientemente pequeña para que no perturbe el campo que se está midiendo:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{\Delta Q} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R}.$$



Si identificamos con r la posición de la carga de prueba ΔQ y con r' la posición de la carga que genera el campo eléctrico, Q_1, podemos determinar el valor del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en la posición r(y similarmente, en cualquier punto del espacio):

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_1(\boldsymbol{r}')}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

donde la notación $Q_1(\boldsymbol{r}')$ indica que la carga Q_1 en la posición $\boldsymbol{r}'$. Este es un ejemplo muy importante de campo vectorial.

4.3.2. <u>Campo eléctrico generado por dos cargas puntuales, dipolos.</u>

Si se considera dos cargas puntuales en el espacio, estas generan un campo eléctrico que se puede determinar efectuando la suma vectorial de los dos campos eléctricos individuales.

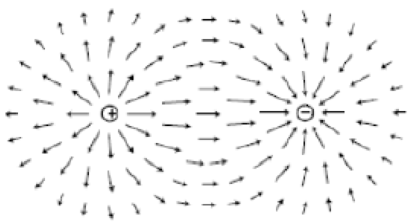
Digamos que las cargas puntuales que generan el campo eléctrico son $Q_1 > 0\ y\ Q_2 < 0$ y sus vectores posición son, respectivamente, $\boldsymbol{r_1}\ y\ \boldsymbol{r_2}$. Entonces los campos eléctricos generados por cada una de ellas según la definición de campo eléctrico,

$$\boldsymbol{E_1}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_1(\boldsymbol{r}_1')}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \quad y \quad \boldsymbol{E_2}(\boldsymbol{r}) = -\frac{Q_2(\boldsymbol{r}_2')}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2'|}$$

Así el campo vectorial **E** generado por las presencias simultaneas de ambas cargas, viene dado por la suma vectorial;

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E_1}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E_2}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_1(\boldsymbol{r}_1')}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{Q_2(\boldsymbol{r}_2')}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2'|}$$

Se obtiene un campo vectorial de este tipo:



4.4. <u>Integral de línea de campos vectoriales(definición)</u>

Sea F un campo vectorial acotado y con componentes continúas definidas sobre una curva suave C. Se define la integral de línea de F a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de F a lo largo de C y se denota por:

$$\int_C F \cdot dr := \int_C F \cdot T\, ds.$$

donde T es el vector tangente unitario

<u>Observaciones:</u>

- En el lado izquierdo F y r son vectores (hay un producto escalar)
- En el lado derecho F es un vector (campo vectorial) y T es el vector tangente unitario. Es la integral de línea de un campo escalar a lo largo de C.

<u>Forma de cálculo</u>

Si C esta parametrizada por $r(t), a \le t \le b$,

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{|r'(t)|}|r'(t)|dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)dt$$

Observaciones:

- El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica de la curva C, en tanto se mantenga el sentido de recorrido de la curva
- Se tiene que $\int_C \ F \cdot dr = -\int_{-C} F \cdot dr$ si –C es la curva formada por los mismos puntos pero recorrida en sentido contrario
- Se puede calcular integrales de línea en curvas por partes, sumando las integrales de las porciones suaves que la forman

Deducción:

Cuando deseamos calcular el trabajo de una fuerza no necesariamente constante a lo largo de una trayectoria no necesariamente recta, no podemos aplicar la fórmula $W \ = \ F \ \cdot \Delta r$ que multiplica escalarmente fuerza y desplazamiento. Nos vemos forzados a hacer otra cosa.
Entonces se propone descomponer la trayectoria en pequeñas porciones y, considerando que la fuerza es prácticamente constante a lo largo de cada pequeña porción casi recta de la trayectoria, hacer el cálculo usual y aproximar el trabajo total mediante una suma.
Si la fuerza variable F (continua) aplica sobre un cuerpo a lo largo de una curva C parametrizada por una función vectorial paramétrica $r(t), a \leq t \leq b$, al pasar de una posición $\boldsymbol{r}(t_0)$ a otra, $\boldsymbol{r}(t_0 \ + \ \Delta t)$,la fuerza realiza un trabajo

$$\Delta W \approx \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t_0)\big) \cdot \big(\boldsymbol{r}(t_0 \ + \ \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)\big)$$

$$\Delta W \approx \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t_0)\big) \cdot \Delta \boldsymbol{r}$$

Llamando $\mathbf{T}$ al vector tangente unitario a la curva $\boldsymbol{r}(t_0)$ y recordando que

$$\Delta \boldsymbol{r} \approx \mathbf{T} \cdot \Delta \mathrm{s},$$

donde Δs es la longitud del subarco comprendido entre $\boldsymbol{r}(t_0)$ y $\boldsymbol{r}(t_0 \ + \ \Delta t)$,la cantidad ΔW se puede expresar como

$$\Delta W \approx \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t_0)\big) \cdot \mathbf{T}\Delta \mathrm{s}.$$

Si tomaremos una partición en el intervalo $[a, b]$, digamos $\{t_o, t_1, \ldots, t_n\}$, donde $a = t_o < t_1 < \cdots < t_n = b$,lo suficientemente fina como para poder suponer que a lo largo de cada arco entre $\boldsymbol{r}(t_k - 1)\ y\ \boldsymbol{r}(t_k)$ la fuerza es casi constante(estamos usando la continuidad de la función $\mathbf{F}$), podemos aproximar el trabajo total que realiza $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C por

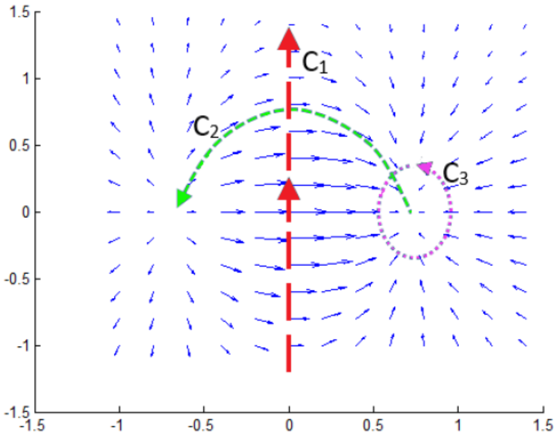
$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t_k)\big) \cdot \mathbf{T}_\mathrm{k}\Delta \mathrm{s}_\mathrm{k},$$

donde $\mathbf{T}_\mathrm{k}$ es el vector tangente unitario a la curva en el punto $\boldsymbol{r}(t_k)$ y $\Delta \mathrm{s}_\mathrm{k}$ es la longitud del subarco de la curva C comprendido entre $\boldsymbol{r}(t_k - 1)\ y\ \boldsymbol{r}(t_k)$. Esta aproximación será mejor cuanto más pequeños sean los subintervalos de la partición.
Esto nos lleva

$$\int_C \ F \cdot dr := \int_C \ F \cdot T \ ds.$$

Interpretación:

Sean el campo vectorial F, y las curvas $C_1, C_2\ y\ C_3$ dados en el siguiente grafico:



EL valor $\int_{C_1} F \cdot T\, ds$ es 0, la de $\int_{C_2} F \cdot T\, ds$ es negativo y la de $\int_{C_3} F \cdot T\, ds$ e cercano a 0.

4.5. Integral de línea a través de una curva cerrada

Si C es una curva plana simple, cerrada y positivamente orientada, la integral de línea de F a través de C es la integral de línea de la componente normal hacia afuera de F a lo largo de C:
Integral de línea de F a través de C es $\int_C F \cdot n\, ds = \int_a^b F(r(t)) \cdot n\, |r'(t)| dt$

Observaciones:

- Solo lo usamos con curvas en el plano y con campos vectoriales definidos en el plano, porque en el espacio tenemos infinitos normales.
- Positivamente orientada en este cao que estamos en el plano es en el sentido antihorario.

El vector n lo calculamos de la siguiente manera
Supongamos F= (M, N) y es una curva suave y positivamente orientada dada por $r(t), a \leq t \leq b$.Entonces

$$\int_C F \cdot n\, ds = \int_C n \cdot F\, ds = \int_C T \times k \cdot F\, ds$$

$$= \int_C k \times F \cdot T\, ds \quad por\ propiedad\ del\ producto\ mixto$$

$$= \int_C (-N, M) \cdot T\, ds\,, \quad ya\ que\ k \times F = (-N, M)$$

$$= \int_a^b \Big(-N\big(r(t)\big), M\big(r(t)\big)\Big) \cdot r'(t) dt$$

Nota: Para hacer el producto vectorial $k \times F$, al vector F lo completamo $(0,0,1) \times (M, N, 0) = (-N, M, 0)$

Observación:

- El campo vectorial $(-N, M)$ no es el mismo campo F, pero tiene las mismas propiedades en la misma región.

4.6. Aplicaciones a la física

4.6.1. Si F representa un campo de fuerzas(una fuerza variable), el trabajo que realiza F sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de una curva suave C es $\int_C F \cdot dr$

4.6.2. Si F es un campo vectorial (por ejemplo, de velocidades), la integral de línea de la componente tangencial de F se llama flujo de F a lo largo de C.

4.6.3. Si C es cerrada, el flujo de F a lo largo de C se llama circulación de F a lo largo de C

4.6.4. Si C es una curva plana simple, cerrada y positivamente orientada, el flujo de F a través de C es la integral de línea de la componente normal hacia fuera de F a lo largo de C

$$Flujo\ de\ F\ a\ traves\ de\ C = \int_C F \cdot n\, ds.$$

4.7. Notación de integrales de línea

La integral de línea $\int_C F \cdot dr$ de un campo vectorial F a lo largo de una curva C en el dominio de F parametrizada por $r(t), a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras, según el caso:

4.7.1. Curva cerrada

Si la curva C es cerrada, se puede anotar

$$\oint_C F \cdot dr\,, \quad \ointctrclockwise_c F \cdot dr \quad o \quad \ointclockwise_c F \cdot dr,$$

donde las flechas indican el sentido anti horario u horario, respectivamente.

4.7.2. Si la curva C una los puntos A=r(a) y B= r(b), se puede escribir

$$\oint_A^B F \cdot dr$$

Entendiendo que en general importa cuál es la trayectoria C que une A y B.

4.8. Otra notación para $\int_C F \cdot T\, ds$.

Sean F=(M, N) y C, dada por $r(t), a \leq t \leq b$:

$$\int_C F \cdot T\, ds = \int_a^b F\big(r(t)\big) \cdot r'(t)dt = \int_a^b [M\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + N\big(x(t), y(t)\big)y'(t)]dt$$

$$= \int_a^b [M\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt + \int_a^b N\big(x(t), y(t)\big)y'(t)]dt = \int_C Mdx + \int_C Ndy$$

$$= \int_C Mdx + Ndy$$

4.9. Otra notación para $\int_C F \cdot n\, ds$ (Comparar con el 4.5)

Sean F= (M, N) y C dada por $r(t), a \leq t \leq b$.Entonces

$$\int_C F \cdot n\, ds = \int_C n \cdot F\, ds = \int_C T \times k \cdot F\, ds$$

$$= \int_C k \times F \cdot T\, ds \quad por\ propiedad\ del\ producto\ mixto$$

$$= \int_C (-N, M) \cdot T\, ds\,, \quad ya\ que\ k \times F = (-N, M)$$

$$= \int_a^b [-N\, x'(t) + M\, y'(t)]dt = \int_C M\, dy - N\, dx$$

4.10. Integral de línea con respecto a los ejes coordenados

Dado un campo escalar f y una curva suave C dada por $r(t), a \leq t \leq b$, incluida en el dominio de f. A partir de las notaciones 4.8, se llama integral de linea del campo escalar f con respecto a x e y, respectivamente, como.

$$\int_C f\,dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt \qquad y \qquad \int_C f\,dy = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)y'(t)dt$$

4.11. Independencia de la trayectoria y campo conservativo(definición)

Sea F un campo vectorial definido en una región abierta D tal que para cualesquiera dos puntos A y B de D, la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ a lo largo de una curva suave por partes C desde A hasta b en D es la misma sobre todas las trayectorias suaves por partes desde A hasta B. Entonces la integral $\int_C F \cdot dr$ es independiente de la trayectoria en D y el campo vectorial se llama campo conservativo en D.

4.12. Funciones potenciales(definición)

Si F es un campo vectorial definido en una región abierta D y $F = \nabla f$ para alguna función escalar f en D, entonces f se llama función potencial de F. Si F está definido en $\mathbb{R}^3$, las superficies de nivel de f se llaman superficies equipotenciales de F; si está definido en $\mathbb{R}^2$, hablamos de curvas equipotenciales.

4.13. Líneas de flujo de campos vectoriales(definición)

Las líneas de flujo de un campo vectorial F son aquellas curvas en el dominio de F, tales que el vector F (x, y, z) es tangente a la curva en cada punto (x, y, z) del dominio de F.
Observación:

- En un campo de velocidades de un fluido que no varía con el tiempo(estacionario), en general las líneas de flujo coinciden con la trayectoria de una partícula. Pero en un campo de fuerzas, aun estacionario, las líneas de fuerza en general coinciden con las trayectorias (pensar en un cuerpo que cae con velocidad inicial no vertical)
- Si el campo vectorial F es el gradiente de alguna función potencial f, las líneas de flujo de F son ortogonales a los conjuntos de nivel f (superficies o curvas equipotenciales) en cada punto.

4.14. Conjuntos abiertos conexos(definición)

Un conjunto D abierto es conexo si para todo par de puntos de D se pueden unir por una curva suave por partes incluidas en D.

4.15. Conjuntos simplemente conexos(definición)

Un conjunto abierto conexo D es simplemente conexo si toda vez que dos puntos de la región se unen por curvas suaves por partes incluidas en D, existen una deformación continua de una curva a la otra también incluida en D.
Equivalentemente:
Un conjunto abierto conexo D es simplemente conexo si todo lazo incluido en D puede contraerse continuamente, siempre dentro de D, a un punto incluido en D.
Nota: Ver ejemplos en AA, U4.7

4.16. Teorema fundamental de integrales de línea(teorema)

Sea C una curva suave que una el punto A con el punto B en el plano o en el espacio. Sea f una función diferenciable con un vector gradiente continuo en una región abierta conexa D que contiene a C. Entonces

$$\int_C \nabla f\,.\,dr = f(B) - f(A).$$

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$ Sea C parametrizada por $r(t) = \big(x(t), y(t)\big), a \le t \le b$, con $r(a) = A$ y $r(b) = B$.

Por la definición de integral de línea de un campo vectorial aplicada al campo vectorial ∇f,

$$\int_C \nabla f\,.\,dr = \int_a^b \nabla f\big(r(t)\big)\cdot r'(t)dt \qquad (1)$$

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar la función compuesta $f \circ r$, ya que en todos los puntos de C, f es diferenciable y r es derivable por hipótesis. Así:

$$\frac{d}{dt}(f \circ r)(t) = f_x\big(r(t)\big)x'(t) + f_y\big(r(t)\big)y'(t) = \nabla f\big(r(t)\big)\cdot r'(t) \qquad (2)$$

y sustituyendo (2) en (1) queda

$$\int_C \nabla f\,.\,dr = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ r)(t)dt = (f \circ r)(t)\ \Big|_a^b$$

Si aplicamos el T.F del cálculo (lo podemos aplicar porque se satisface la hipótesis de continuidad del integrando) la integral definida de una función se puede calcular como

$$\int_C \nabla f\,.\,dr = f\big(r(b)\big) - f\big(r(a)\big) = f(B) - f(A).$$

Nota: Le agregamos una componente a r(t) si estamos en el espacio

4.17. Los campos conservativos son campos gradientes(teorema)

Sea F= (M, N, P) un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta D en el espacio. Entonces F es un campo conservativo si y solo si F es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable f.

Nota: El teorema dice que $F = \nabla f$ si y solo si para dos puntos A y B en la región D, el valor de la integral de línea $\int_C$ F$.\,dr$ es independiente de la trayectoria C que una A y B en D.

DEMOSTRACION

$\Leftarrow$ Supongamos que $F = \nabla f$ para alguna función diferenciable f, o sea, f es una función con vector gradiente continuo en una región D. Aplicando el T.F. de integrales de línea $\int_A^B \nabla f\,.\,dr = \int_A^B F\cdot dr = f(B) - f(A)$: solo depende de los puntos A y B, no de la trayectoria, cualesquiera sean A y B en D. Luego $\int_C$ F$.\,dr$ es independiente de la trayectoria en D. En consecuencia, F es conservativo en D.

$\Rightarrow$ Supongamos que F es conservativo en la región conexa abierta D, es decir que la integral de $\int_C$ F$.\,dr$ es independiente de la trayectoria en D.

Para probar esto realizaremos dos cosas

1) Definimos f en D (la inventamos)
2) Probamos que $\nabla f = F$.

Comenzamos:

1) Elegimos $A \in D$, arbitrario fijo, y definimos f asi:

$$f(A) = 0 \qquad y \qquad f(B) = \int_A^B F \cdot dr \;\; para\ cualquier\ otro\ punto\ B \in D.$$

Nota:

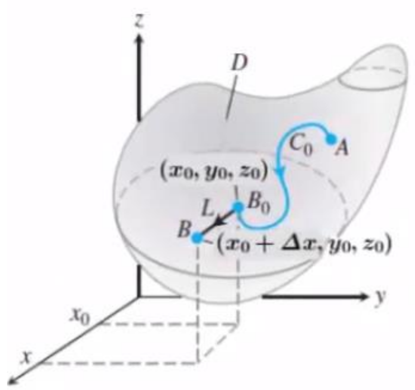
- Para definir correctamente una función tiene que cumplir con existencia y unicidad
- Para cumplir con la condición de existencia todos los puntos deben tener una imagen, podemos asegurar que la integral que define a $f(B)$ siempre se puede calcular por que el conjunto D es abierto conexo(cualquier par de punto de D existe una trayectoria que está contenida en D).
- La condición de unicidad se cumple porque para $f(A)$ definimos la imagen (0) y es única y como el valor de $f(B)$ no depende de la selección de C, puesto que F es conservativo la imagen siempre es la misma.

2) Basta probar que

$$f_x(x,y,z) = M(x,y,z); \qquad f_y(x,y,z) = N(x,y,z); \qquad f_z(x,y,z) = P(x,y,z).$$

Probamos que $f_x(x,y,z) = M(x,y,z)$;

Partimos de la definición de la derivada parcial de f respecto de x evaluada en (x_0, y_0, z_0). Por definición la podemos escribir de la siguiente manera:



$$f_x(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_A^{(x_0+\Delta x, y_0, z_0)} F \cdot dr - \int_A^{(x_0,y_0,z_0)} F \cdot dr$$

podemos escribir esas funciones como integrales

Por propiedades de integral, podemos transformarlo en una suma cambiando los límites de integración en la segunda integral

$$f_x(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_A^{(x_0+\Delta x, y_0, z_0)} F \cdot dr + \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{A} F \cdot dr$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_0+\Delta x, y_0, z_0)} F \cdot dr$$

Nota: Recordar que estamos haciendo la integral desde A hasta el punto B y le estamos restando la integral desde A hasta B_0, por eso nos queda la integral desde B_0 $hasta\ B$.

Como el campo es conservativo la integral de línea no importa la trayectoria, nos da lo mismo, por eso elegimos una trayectoria sencilla

$$r(t) = (t, y_0, z_0) \quad x_0 \le t \le x_0 + \Delta x \qquad y \qquad r'(t) = (1,0,0)$$

Con la trayectoria seleccionada la integral nos queda

$$f_x(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) dt$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \Big(M\big(r(t)\big), N\big(r(t)\big), P\big(r(t)\big)\Big) \cdot (1,0,0) dt$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} M\big(r(t)\big) dt \qquad (1)$$

Por hipótesis M es continua en D, la parametrización r es continua en $[x_0, x_0 + \Delta x]$, la funcion composición $M\ o\ r$ es continua en $[x_0, x_0 + \Delta x]$.Por lo tanto le podemos aplicar el

T. del valor medio (este garantiza que cuando una función es continua en un intervalo cerrado entonces existe algún c tal que la integral de la función sobre la longitud del intervalo coincide con la función evaluada en c) a (1):

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} M\big(r(c)\big) \ , para\ algun\ c\ \in\ [x_0, x_0 + \Delta x]$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el valor c va a tender a x_0(el limite existe porque es una función continua), así:

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = M(r(x_0))$$

Por la parametrización lo podemos reescribir como

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = M(x_0, y_0, z_0)$$

Así probamos que la deriva parcial de f respecto de x coincide con el valor de M, ambas en el mismo punto.

Se prueba análogamente que $f_y(x, y, z) = N(x, y, z)$ y $f_z(x, y, z) = P(x, y, z)$

Luego, al haber probado las dos implicaciones, queda demostrada la equivalencia (bajo la condición de que el campo vectorial F tenga componentes continuas en una región conexa abierta D).

Observación:

Hemos definido una función f a partir de un punto $A \in D$,¿En que cambia f si seleccionamos un punto A_1?

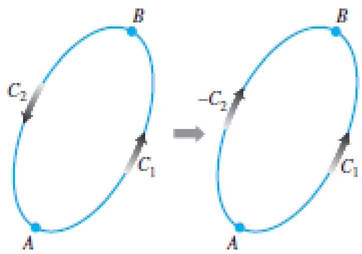
Obtenemos una función f_1. Pero ¿Cuál es la diferencia entre estas dos funciones? Sabemos que para cualquier punto $B \in D, f(B) = \int_{A_1}^{B} F \cdot dr = \int_{A_1}^{A} F \cdot dr + \int_{A}^{B} F \cdot dr = \int_{A_1}^{B} F \cdot dr +$ $f(B)$,lo cual nos permite comprobar que la única diferencia es tan solo una constante: la constante dada por $f_1(A) = \int_{A_1}^{A} F \cdot dr$

4.18. Propiedad de lazos en campos conservativos(teorema)

El campo vectorial F es conservativo en D si y solo si para todo lazo C en D, se tiene

$$\int_C F\,.\,dr = 0$$

DEMOSTRACION



⇒Supongamos que F es conservativo en D y que la curva C es un lazo (curva cerrada punto inicial y final coinciden) en D. Sean A y B dos puntos distintos pertenecientes a la curva C. Llamemos C_1 a la porción de la curva que va desde A hasta B recorriendo el mismo sentido que lo hacía C y llamemos C_2 a la otra porción.

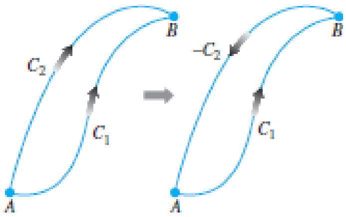
Entones las curvas $C_1\ y - C_2$ van desde A hasta B. Por hipótesis $\int_{C_1} F\,.\,dr = \int_{-C_2} F\,.\,dr$(por ser F conservativo), entonces la integral a lo largo de C es la suma de las integrales de $C_1 y\ C_2$.

$$\int_C F\,.\,dr = \int_{C_1} F\,.\,dr + \int_{C_2} F\,.\,dr$$

Recordamos que la integral sobre C_2 es igual a la negativa de la integral sobre $-C_2$, obtenemos

$$\int_C F\,.\,dr = \int_{C_1} F\,.\,dr - \int_{-C_2} F\,.\,dr = 0.$$

⇐ Supongamos que $\int_C \; F\,.\,dr = 0$ para todo lazo C en D. Sean A y B dos puntos cualesquiera de D y sea $C_1 \; y \; C_2$ dos curvas desde A hasta B(incluidas en D).



Llamemos C_3 al lazo que se obtiene al tomar C_1 seguida de $-C_2$.
Por hipotesis la integral de linea en cualquier lazo es cero:

$$0 = \int_{C_3} F\,.\,dr$$

Como el lazo C_3 es la suma del lazo $C_1 \; y - C_2$, tenemos:

$$0 = \int_{C_3} F\,.\,dr = \int_{C_1} F\,.\,dr + \int_{-C_2} F\,.\,dr$$

Sabemos que $\int_{-C_2} F\,.\,dr = -\int_{C_2} F\,.\,dr$, si lo reemplazamos en la ecuación anterior

$$0 = \int_{C_3} F\,.\,dr = \int_{C_1} F\,.\,dr - \int_{-C_2} F\,.\,dr$$

Si la resta da cero, significa que las integrales son iguales y así hemos probado que la integral de línea es independiente de la trayectoria en D, ósea que F es conservativo
Nota: Se demuestra para cualquier lazo C en la región D

4.19. Criterio de componentes para campos conservativos(teorema)

Sea F= (M, N, P) un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo D, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

4.19.1. Si F es conservativo en D, entonces el $rotF = 0$
4.19.2. Si D es simplemente conexo y el $rotF = 0$ en D, entonces F es conservativo en D

DEMOSTRACION

Parte 1

⇒ Suponemos que F es conservativo en D. Entonces, por teorema 4.17, sabemos que ,por ser conservativo, F es el gradiente de alguna función diferenciable f; es decir existe una función f definida en D tal que $F = \nabla f$. Luego

$$(M, N, P) = \left(f_x, f_y, f_z\right) \;\; \rightarrow \;\; M = f_x; \quad N = f_y; \quad P = f_z \;\; (1)$$

Así, por la definición del rotacional se puede escribir

$$rotF = (P_y - N_z, M_Z - P_x, N_x - M_y) \qquad (2)$$

De la ecuación (1) y (2) podemos obtener

$$rotF = \nabla \times F = \left(P_y - N_z, M_Z - P_x, N_x - M_y\right) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{xy} - f_{yx})$$

Recordando que $M = f_x$ tiene derivadas parciales continuas de primer orden y lo mismo pasa con N y P, sustituyendo y aplicando el teorema de la derivada mixta se obtiene

$$rotF = (0, 0, 0) = 0$$

Recordar: El teorema de la deriva mixta nos dice que las derivadas son iguales si estas eran continuas.

Parte 2

⇐ Supongamos que D es abierto, conexo y simplemente conexo y $rotF = \bar{0}$ en D. Buscamos probar que F es conservativo en D; lo haremos mostrando que la integral de línea de F a lo largo de cualquier lazo en D es nula, aplicando luego el teorema 4.18.

Para ello supongamos que C es una curva simple cerrada, suave por partes incluidas en D. Aplicando un teorema de Topología, dadas las propiedades de D, se puede asegurar que existe una superficie S en D que tiene como frontera a la curva C, orientada positivamente con respecto a la orientación de C. Así:

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \nabla \times F \cdot n d\sigma = 0$$

Dado que para cualquier curva C simple, cerrada y suave por partes, incluida en D se puede hacer lo mismo, por el teorema 4.18 se tiene que F es conservativo en D, lo cual concluye la prueba.

Observación:

- Tener cuidado con el enunciado 2 porque se le agrega que la superficie tiene que ser simplemente conexa

4.20. Principio del trabajo y la energía

Si F representa un campo de fuerzas y una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva suave C incluida en el dominio de F, ocupando la posición r(t), durante un intervalo de tiempo $a \leq t \leq b$, entonces el trabajo realizado por F en ese intervalo es

$$W = \int_{r(a)}^{r(b)} F \cdot dr = \int_a^b F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) dt \qquad (3)$$

Según la segunda Ely de Newton, $F\big(r(t)\big) = mr''(t)$ con lo cual

$$F\big(r(t)\big) \cdot r'(t) = mr''(t) \cdot r'(t) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\big(r'(t) \cdot r'(t)\big) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\Big(\left\|r'(t)\right\|^2\Big). \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3),

$$W = \int_a^b \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\Big(\left\|r'(t)\right\|^2\Big) dt = \frac{m}{2}\left\|r'(t)\right\|^2\Big|_a^b = \frac{m}{2}\Big(\left\|r'(b)\right\|^2 - \left\|r'(a)\right\|^2\Big).$$

Recordando que la energía cinética(magnitud escalar) de la partícula está definida por $\frac{1}{2}mv^2(t)$, hemos probado que el trabajo realizado por F durante un intervalo de tiempo es la variación de la energía cinética en ese intervalo.

4.21. Principio de conservación de la energía mecánica

Sea F un campo de fuerzas continuo con un potencial f en un conjunto conexo abierto D. El T.F. de integrales de línea dice que el trabajo realizado para mover una partícula desde A hasta (x, y, z) a lo largo de una curva suave por partes en D es f (x, y, z) – f(A); antes probamos que el trabajo es la variación de la energía cinética de la partícula, k (x, y, z) – k(A). Luego

$$k(x,y,z) - k(A) = f(x,y,z) - f(A),$$

$$k(x,y,z) - f(x,y,z) = k(A) - f(A) \qquad (5)$$

Llamamos energía potencial de la partícula a $-f(x,y,z)$.

Si A se mantiene fijo y (x, y, z) varia en D, (5) dice que $k(x,y,z) + \big(-f(x,y,z)\big) = cte$

Observación:

- Si un campo de fuerzas es un gradiente, la suma de las energías cinéticas y potencial de una partícula que se desplaza en dicho campo es constante.

4.22. Formas diferenciales exactas(definición)

Cualquier expresión $M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$ es una forma diferencial. Una forma diferencial es exacta en un dominio D en el espacio si

$$Mdx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

Para alguna función escalar f en D.

4.23. Criterio de las componentes para determinar si $Mdx + N\,dy + P\,dz$ es exacta(teorema)

La forma diferencial $Mdx + N\,dy + P\,dz$ es exacta en un dominio abierto, conexo y simplemente conexo si y solo si,

$$P_y = N_z; \quad M_z = P_x; \quad N_x = M_y.$$

Esto equivale a decir que el campo $F = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ es conservativo.

DEMOSTRACION

⇒Si $M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$ es una forma diferencial exacta, entonces existe un campo escalar f definido en D tal que

$$M = f_x; \quad N = f_y, \quad P = f_z;$$

es decir que el campo vectorial dado por $\boldsymbol{F} = (M,N,P)$ es conservativo en D. Entonces, según el criterio de componentes para campos conservativos 4,19, el rotacional de $\boldsymbol{F}$ es nulo, $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$, es decir,

$$P_y = N_z; \quad M_z = P_x; \quad N_x = M_y.$$

⇐ Por otra parte si $P_y = N_z, M_z = P_x$ y $N_x = M_y$, es decir $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$, y la región D es abierta, conexa y simplemene conexa, entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo en D, según la parte 2 del criterio de componentes para campo conservativos 4.19 y existe una función potencial f definida para $\boldsymbol{F}$, definida en D, según el teorema de campos conservativos son campos gradiente 4.17 por ser una función potencial para $\boldsymbol{F}$, f cumple $\nabla f = \boldsymbol{F}$, es decir

$$f_x = M; \quad f_y = N, \quad f_z = P;$$

y la forma diferencial es exacta

4.24. Divergencia de campo vectorial (definición)

Dado un campo vectorial $F = (M,N)$ se define la divergencia de F por $divF(x,y) = M_x + N_y$, para $\mathbb{R}^2$ y como $divF(x,y,z) = M_x + N_y + P_z$, para $\mathbb{R}^3$.

Observación:

- No importa la dimensión, se puede definir hasta $\mathbb{R}^n$.
- Es un campo escalar

4.25. Rotacional de campo vectorial(definición)

Dado $F = (M,N,P)$, se define el rotacional o rotor de F, como
$rotF = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$

Observación:

- Se puede definir en $\mathbb{R}^3$ nada más.
- Es un campo vectorial

4.26. Componente k del rotacional

La densidad de circulación de un campo vectorial F=(M, N) en el punto (x, y) es el componente k del $rotF$: $(rotF) \cdot k$:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Observación:

- Como no se puede definir el rotacional imaginamos que le agregamos una tercera componente 0, para completarlo.

4.27. Propiedades de la divergencia y el rotacional

Si f es un campo escalar y F, G son campos vectoriales, entonces

4.27.1. $div(fF) = f div(F) + F \cdot \nabla f$

DEMOSTRACION

$$div(fF) = \nabla \cdot (fM, fN, fP) = \frac{\partial (fM)}{\partial x} + \frac{\partial (fN)}{\partial y} + \frac{\partial (fP)}{\partial z}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x} M + f\frac{\partial M}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial y} N + f\frac{\partial N}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial z} P + f\frac{\partial P}{\partial z}\right]$$

$$= \left[f\frac{\partial M}{\partial x} + f\frac{\partial N}{\partial y} + f\frac{\partial P}{\partial z}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x} M + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} P\right]$$

$$= f\left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right] + (M, N, P) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = f div(F) + F \cdot \nabla f$$

4.27.2. $div(F \times G) = G \cdot rot\ F - F \times rotF$

DEMOSTRACION

$$div(F \times G) = \nabla \cdot (F \times G) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[G_3F_2 - G_2F_3] + \frac{\partial}{\partial y}[G_1F_3 - G_3F_1] + \frac{\partial}{\partial z}[G_2F_1 - G_1F_2]$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}G_3F_2 - \frac{\partial}{\partial x}G_2F_3\right] + \left[\frac{\partial}{\partial y}G_1F_3 - \frac{\partial}{\partial y}G_3F_1\right] + \left[\frac{\partial}{\partial z}G_2F_1 - \frac{\partial}{\partial z}G_1F_2\right]$$

$$= \left[\frac{\partial G_3}{\partial x}F_2 + G_3\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial G_2}{\partial x}F_3 - G_2\frac{\partial F_3}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial G_1}{\partial y}F_3 + G_1\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial G_3}{\partial y}F_1 - G_3\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]$$
$$+ \left[\frac{\partial G_2}{\partial z}F_1 + G_2\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial G_1}{\partial z}F_2 - G_1\frac{\partial F_2}{\partial z}\right]$$

$$= \left[G_1\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - G_2\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + G_3\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right]$$
$$- \left[F_1\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) - F_2\left(\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z}\right) + F_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)\right]$$

$$= [G \cdot rot\ F] - [F \times rotF]$$

4.27.3. Si F es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas de segundo orden continuas, entonces la divergencia del rotacional de F es cero:

$div\ rot\ F = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$

DEMOSTRACION

$$div\ rot\ F = \nabla \cdot (\nabla \times F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

Se aplica el teorema de Clairaut

4.27.4. $rot(fF) = frotF + \nabla f \times F$

DEMOSTRACION

$$rot(fF) = rot(fF_1, fF_2, fF_3) = \left(\frac{\partial(fF_3)}{\partial y} - \frac{\partial(fF_2)}{\partial z}, -\frac{\partial(fF_3)}{\partial x} + \frac{\partial(fF_1)}{\partial z}, \frac{\partial(fF_2)}{\partial x} - \frac{\partial(fF_1)}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}F_3 + f\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}F_2 - f\frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial f}{\partial x}F_3 - f\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}F_1 + f\frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}F_2 + f\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}F_1 - f\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}F_3 - \frac{\partial f}{\partial z}F_2, -\frac{\partial f}{\partial x}F_3 + \frac{\partial f}{\partial z}F_1, \frac{\partial f}{\partial x}F_2 - \frac{\partial f}{\partial y}F_1\right) + f\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \nabla f \times F + frotF$$

4.27.5. Si f es un campo escalar con derivadas de segundo orden continuas entonces el rotacional del gradiente de f es el vector nulo: $rot\nabla f = \nabla \times \nabla f = 0$

DEMOSTRACION

$$rot\nabla f = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = (0,0,0) = 0$$

Se aplica el teorema de Clairaut

Nota: también están estas propiedades que no las piden, pero para tener en cuenta:

- $div(F + G) = divF + divG$
- $rot(F + G) = rotF + rotG$
- $div(\nabla f \times \nabla g) = 0$
- $rot(rotF) = grad(divF) - \nabla^2 F$

4.28. Operador nabla para divergencia y rotacional

Una forma más conveniente para recordar la divergencia y el rotacional es por medio del operador nabla(vector): $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.Asi,

$$rotF = \nabla \times F \qquad y \qquad divF = \nabla \cdot F.$$

Siendo F un campo vectorial. De $\mathbb{R}^3$ para el rotor y $\mathbb{R}^n$ para la divergencia

Nota: Un operador es una función de función, es decir a una función le asigna otra función.

4.29. Teorema de Green en una región simple (Forma tangencial) (teorema)

Sea C una curva suave por partes, cerrada, simple y positivamente orientada que encierra una región D en el plano. Sea F= (M, N) un campo vectorial donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D. Entonces la circulación en sentido anti horario de F alrededor de C es:

$$\oint_C F \cdot T\, ds = \int_C Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy$$

DEMOSTRACION

⇒Se probará el caso especial en que la región D encerrada por la curva C es simple, es decir que se puede ver como una región de tipo 1 y de tipo 2.

Anexo, ver lo que es una curva simple

Recordando que $\oint_C F \cdot T\, ds = \int_C Mdx + Ndy$, teorema de Green quedara demostrado si se prueba que:

$$\int_C M(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dA \quad (1) \qquad\qquad \int_C N(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)dA \quad (2)$$

Para demostrar la ecuación (1) se usará el hecho de que la región D es una región de tipo 1: es decir, que D es una región comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas en x, de la siguiente manera:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

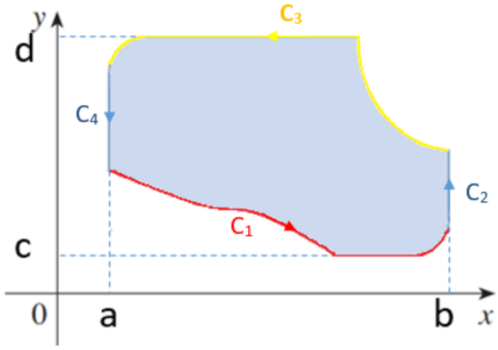
donde g_1 y g_2 son funciones continuas.

De esta forma el lado derecho de la ecuación (1) puede escribirse como:

$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx\, dy$$

$$= \int_a^b \left[M\big(x, g_2(x)\big) - M\big(x, g_1(x)\big)\right] \; T.Fundamental\ del\ calculo \qquad (3)$$

Para escribir el lado izquierdo de la ecuación (1), sabiendo que D es de tipo 1, se supone el caso más general posible para la curva C que encierra a la región D y se descompone la curva C en cuatro curvas C_1, C_2, C_3 y C_4, tal como se muestra(puede ocurrir que alguna de estas cuatro curvas solo fuera un punto):



Así:

$$\int_C M(x,y)dx = \int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx + \int_{C_3} M(x,y)dx + \int_{C_4} M(x,y)dx \qquad (4)$$

Parametrizamos las curvas intervinientes; dado que es más fácil parametrizar $-C_3$ y $-C_4$ trabajamos con estas últimas en lugar de las curvas $C_3 y$ C_4, de esta manera:

$$C_1 : r_1(t) = \big(t, g_1(t)\big), (a \leq t \leq b)$$
$$C_2 : r_2(t) = (b, t), (c_1 \leq t \leq d_1)$$
$$C_3 : r_3(t) = \big(t, g_2(t)\big), (a \leq t \leq b)$$
$$C_4 : r_4(t) = (a, t), (c_2 \leq t \leq d_2)$$

Entonces, aplicando la definición de integral de línea con respecto a x en (4), tenemos

$$\int_C M(x,y)dx = \int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx - \int_{-C_3} M(x,y)dx - \int_{-C_4} M(x,y)dx$$

$$= \int_a^b M(t, g_1(t))1dt + \int_{c_1}^{d_1} M(b,t)0dt - \int_a^b M\big(t, g_2(t)\big)1dt - \int_{c_2}^{d_2} M(a,t)0dt$$

$$= \int_a^b M\big(t, g_1(t)\big)dt - \int_a^b M\big(t, g_2(t)\big)dt$$

$$= \int_a^b M(x, g_1(x))x - \int_a^b M\big(x, g_2(x)\big)dx$$

$$= \int_a^b \left[M\left(x, g_1(x)\right) - M\left(x, g_2(x)\right)\right] \qquad (5)$$

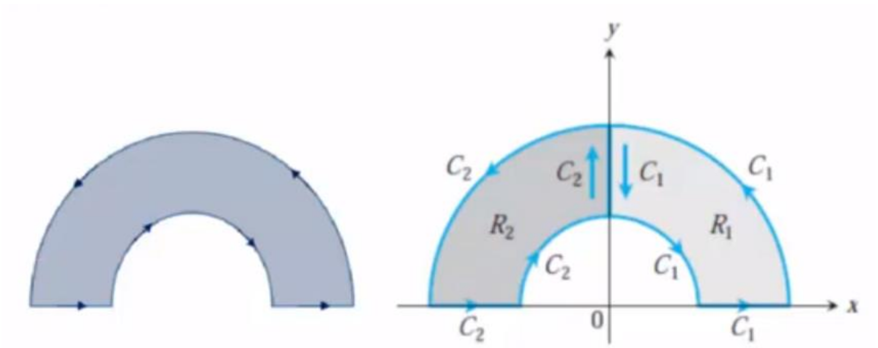
Los resultados de las ecuaciones (3) y (5) prueban la igualdad dada por la ecuación (1)
La ecuación (2) se puede probar análogamente, expresando a D como una región de tipo 2:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\},$$

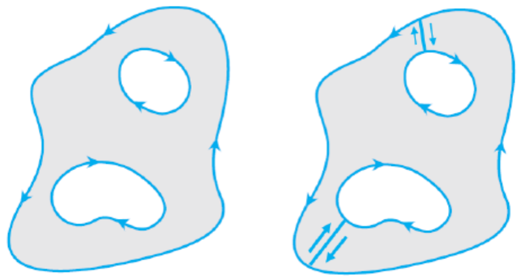
Donde $h_1 y$ h_2 son funciones continuas.
(Probamos un caso particular del Thomas)

4.30. Teorema de Green en otras regiones

4.30.1. Dada una región que se puede descomponer en la unión disjunta de regiones simples, se puede aplicar el Teorema de Green a cada una de las regiones simples y luego sumar. Sin embargo, en las “uniones” estaremos sumando dos integrales de línea en direcciones contrarias y la suma será nula.



4.30.2. Para regiones más generales como la siguiente, la idea es la misma, siempre y cuando la podamos cortar en una unión finita de regiones simples.
Debemos prestar atención, de que la región no es simplemente conexa. Esto implica que tiene una curva frontera “dentro”. Se les da a las curvas una orientación positiva, es decir, una orientación tal que la región R esta siempre del lado izquierdo cunado las curvas son recorridas en las direcciones que se indican. (En este caso las curvas fronteras están positivamente orientadas).
Nota: La idea que se aplica a este tipo de figuras es entrar y salir por segmentos paralelos que se cancelan. Para ello debemos la curva exterior tiene una orientación y las curvas interiores tienen la contraria para cumplirlo.



4.30.3. El teorema también se aplica para cualquier región plana R contenida en algún plano en el espacio, limitada por una curva C

4.31. Teorema de Green de forma normal(teorema)-No lo usamos-Preguntar

Sea C una curva suave por partes, cerrada, simple y positivamente orientada que encierra una región D en el plano. Sea F= (M, N) un campo vectorial donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D. Entonces, el flujo de F a través hacia afuera de C es igual a la doble integral de la divergencia de F sobre a región D encerrada por C:

$$\oint_C F \cdot n \, ds \;=\; \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy$$

DEMOSTRACION

Video de teorema de Green y aplicaciones

4.32. Aplicaciones del Teorema de Green al cálculo de área

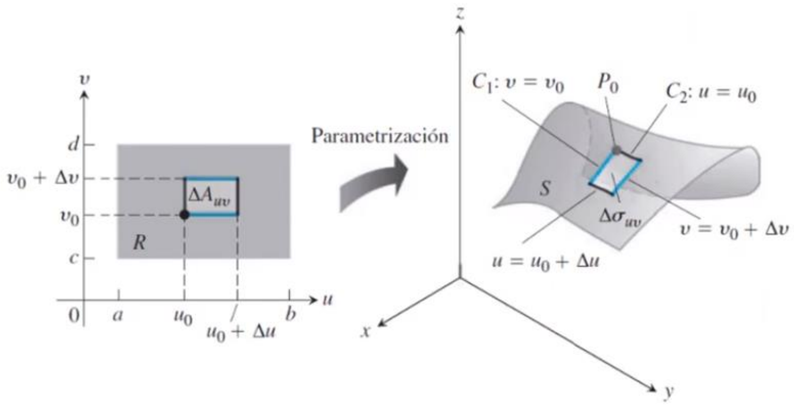
El área de una región plana (acotada) se puede calcular mediante la formula $A = \iint_R \; 1dA$. Si una curva C cerrada simple positivamente orientada en el plano, C, y la región R que está encerrada por C satisfacen las hipótesis del teorema de Green, el área va a ser $\iint_R \; 1dA$, en virtud del teorema de Green, se puede igualar a la integral de línea de un campo vectorial $F = (M, N)$(cuyas componentes deben tener derivadas primeras continuas en una region abierta que contenga a R), siempre que $N_x - M_y = 1$.

4.33. Parametrizaciones de superficies(definición)

Sea $r: R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad r(u, v) = f(u, v)i + g(u, v)j + h(u, v)k, \;\; (u, v) \in R \quad (1)$
una función vectorial continua definida en una región R del plano uv, inyectiva en el interior de R. El rango de r es la superficie S, parametrizada por r; u y v son parámetros y R es el dominio de los parámetros.

Justificacion:

Partimos de una dominio R de nuestra función vectorial paramétrica en el plano uv y a cada uno de los punto de la región R bidimensional nos permite de crear una superficie tridimensional. A cada par ordenado de R, la función paramétrica vectorial les asigna un punto en el espacio $\mathbb{R}^3$. También podemos observar que si dejamos fijo u_0 y permitimos que v tome valores entre $v_0 \; y \; v_0 + \Delta v$, eso nos genera una curva en el espacio $\mathbb{R}^3$, en el grafico son las curvas negras. Estas curvas se llaman curvas reticulares, nos permiten entender y graficar las superficies.



4.34. Derivadas parciales de una parametrización(definición)

Dada la función $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = f(u, v)i + g(u, v)j + h(u, v)k, \;\; (u, v) \in R$, las derivadas parciales de r son:

$$r_u(u, v) := \lim_{\Delta u \to 0} \frac{r(u + \Delta u, v) - r(u, v)}{\Delta u} \qquad y \qquad r_v(u, v) := \lim_{\Delta v \to 0} \frac{r(u, v + \Delta v) - r(u, v)}{\Delta v}$$

siempre que los limites existan

Observación:

- La derivada parcial de r con respecto a u en $(u_0, v_0), r_u(u_0, v_0)$, es un vector tangente a la curva reticular que se obtiene fijando $v = v_0$ en el punto $r(u_0, v_0)$; similarmente con la otra derivada.

4.35. Derivadas parciales de una parametrización(teorema)

Para una función r $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, r(u,v) = f(u,v)i + g(u,v)j + h(u,v)k, \quad (u,v) \in R$, se tiene que r es derivable parcialmente con respecto a u si y solo si las funciones componentes x, y y z lo son y, en este caso,

$$r_u(u,v) = \big(x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)\big);$$

Similarmente, r es derivable parcialmente con respecto a v si y solo si las funciones componentes x, y y z lo son y, en este caso,

$$r_v(u,v) = \big(x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v)\big)$$

4.36. Superficies suaves(definición)

Una superficie S parametrizada por $r(u,v) = \big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\big), \quad (u,v) \in R$, es suave si $r_u \; y \; r_v$ son continuas y $r_u \times r_v \neq \bar{0}$ en el interior de R.

Observación:

- Una superficie suave por partes es una unión por los bordes de superficies suaves

4.37. Área de una superficie suave parametrizada

Dada la superficie suave S parametrizada por $r: R \to \mathbb{R}^3$, se define el área de S por

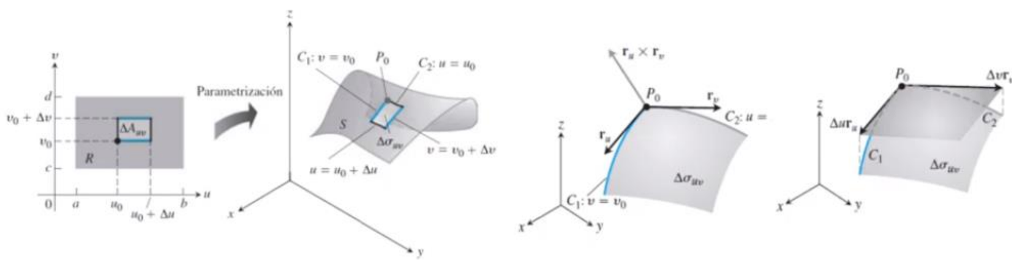
$$A = \iint_R \|r_u \times r_v\| \, du \, dv.$$

Observación:

- El área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma

Justificación:

Supongamos que S es nuestra superficie en $\mathbb{R}^3$ y que el dominio de la función vectorial paramétrica es la región R en el plano uv.Tomamos una partición en R la cual inducirá una en la superficie(siempre que haya alguna parametrización, la partición la tomamos en el dominio de los parámetros). Analizamos el área de esa partición que se puede aproximar como lo demostramos en el teorema 3.14



El área que buscábamos es la suma de las áreas de las pequeñas porciones:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| r_u(u_i, v_j) \times f_v(u_i, v_j) \right| \Delta u_i \Delta v_j$$

$$A = \iint_R \|r_u \times r_v\| \, du \, dv.$$

Nota: Texto Página 41

4.38. Integral de superficie de campos escalares(definición)

Dados la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $r: R \rightarrow \mathbb{R}^3$ y el campo escalar f definido en S, se define la integral de superficie de f sobre S por

$$\iint_S f d\sigma = \iint_R f(r(u,v))\|r_u \times r_v\| \, du \, dv,$$

Siempre que exista la integral del segundo miembro
Nota: R es alguna región en $\mathbb{R}^2$
Justificación:
Supongamos que S esta parametrizada por $r(u,v), (u,v) \in R$, tomamos una partición en R(induce en S) y la integral va a ser aproximadamente igual a la suma de lo valga la función f en algún punto muestra por el área de esa porción de superficie S(la aproximamos como en la justificación de 4.35)

$$\iint_S f d\sigma \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(r(u_i,v_j)\right)\Delta\sigma_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(r(u_i,v_j)\right)\left|r_u(u_i,v_j) \times f_v(u_i,v_j)\right|\Delta u \Delta v$$

Si tomamos que el límite de la norma de la partición tienda a 0:

$$\iint_S f d\sigma = \iint_R f(r(u,v))\|r_u \times r_v\| \, du \, dv$$

Observación:
- El valor de la integral de superficie es independiente de la representación paramétrica suave de la superficie S

4.39. Superficie orientable(definición)

Una superficie suave S e orientable cuando es posible definir un campo vectorial n que a cada punto de S le asigna un vector normal unitario, que es continuo en S.
Una superficie suave S está orientada cuando se ha definido un tal campo vectorial n sobre S.
Observación:
- Se requiere que en la asignación de un vector normal unitario en cada punto no haya cambios abruptos

4.40. Superficie cerrada(definición)

Una superficie suave por partes se llama cerrada cuando es la frontera de un sólido y separa el espacio en dos regiones: la “interior”, que es acotada, y la “exterior”, que es no acotada.
Una superficie suave por partes, cerrada, está orientada positivamente si el vector normal en cada punto de S apunta hacia fuera de S.

4.41. Integral de superficie de campos vectoriales

El flujo de un campo vectorial F definido en $\mathbb{R}^3$ a través de una superficie orientada S en la dirección de n es $\iint_S F \cdot n \, d\sigma$

$$Flujo = \iint_S F \cdot n\, d\sigma = \iint_R F(r(u,v)) \cdot \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} \|r_u \times r_v\| du\, dv$$
$$= \iint_R F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v) dudv$$

Observación:

- El resultado es independiente de la parametrización
- Si la superficie S es cerrada, se suele anotar $\oiint_S F \cdot n\, d\sigma$.

4.42. Teorema de Stokes(teorema)

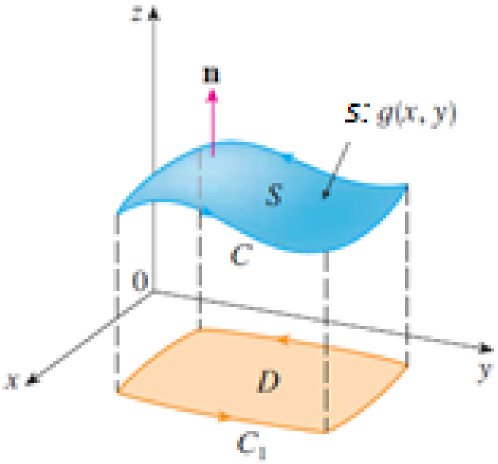
Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes, C. Sea F= (M, N, P) un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S. Entonces la circulación de F a lo largo de C en la dirección anti horaria con respecto al vector unitario normal a la superficie, n, es:

$$\oint_C F \,.\, dr = \iint_S \nabla \times F \,.\, nd\sigma$$

DEMOSTRACION (revisar bien la parte de la derivada en la nota)

⇒Para demostrar el teorema vamos a trabajar con una superficie S que es el grafico de una función g. A S la consideraremos suave por partes y orientada hacia arriba de manera que en cada punto el vector normal tenga tercera componente positiva.

La curva frontera C de la superficie debe estar orientada positivamente con respecto a la orientación de S y suponemos que es suave por partes. (La curva C no necesariamente es plana, es una curva en el espacio)



Por tratarse del grafico de una función si proyectamos S sobre el plano xy tenemos una región D en el plano y la proyección de C nos da la frontera de esta región que es la curva C_1, también orientada positivamente. A partir de la figura vamos a desarrollar tres parametrizaciones:

Superficie S: $r(x,y) = (x, y, g(x,y)); \;\; (x,y) \in D \qquad (1)$

Curva C_1: $w(t) = \big(x(t), y(t)\big); \quad a \le t \le b$

Curva C : $s(t) = \Big(x(t), y(t), g\big(x(t), y(t)\big)\Big); \quad a \le t \le b \quad (2)$

Nota:

- g es la función cuyo grafico es la superficie S
- Para parametrizar C_1consideramos cualquier parametrización que respete la orientación marcada
- A partir de la parametrización de C_1 conseguimos la parametrización de C

Para demostrar

$$\oint_C F \,.\, dr = \iint_S \nabla \times F \,.\, nd\sigma$$

Vamos a trabajar con ambos miembros

Primero comenzamos con el lado izquierdo, la cual la podemos reescribir gracias a la parametrización (2):

$$\oint_C F\,.dr \;=\int_a^b F\big(s(t)\big)s'(t)dt$$

Reemplazamos la derivada de s(t) aplicando la regla de la cadena cuando derivo g:

$$=\int_a^b F\big(s(t)\big)\Big(x'(t),y'(t),g_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+g_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt$$

Recordando que el campo vectorial F tiene funciones componentes M, N y P podemos reescribirlo

$$=\int_a^b \Big[M\big(s(t)\big)x'(t)+N\big(s(t)\big)y'(t)+P\big(s(t)\big)\Big(g_x x'(t)+g_y y'(t)\Big)\Big]\,dt$$

Agrupamos los términos que tienen $x'(t)\ y\ y'(t)$:

$$=\int_a^b \big[(M+Pg_x)x'(t)+\big(N+Pg_y\big)y'(t)\big]\,dt$$

Esta expresión contiene el campo escalar M evaluado en $x(t), y(t), g\big(x(t),y(t)\big)$, lo mismo pasa con N y P.A su vez la $g_x\ y\ g_y$ están evaluadas en $x(t)\ e\ \ y(t)$.
Además, solo estamos trabajando con funciones que depende de dos variables x(t) e y(t)

$$=\int_{C_1} (M+Pg_x)dx+\big(N+Pg_y\big)dy$$

Como aparece un campo vectorial (no es F) con $(M+Pg_x)$ como 1° componente y $\big(N+Pg_y\big)$ como 2° componente, como reúne todas las condiciones para aplicar el teorema de Green en el plano. Obtenemos:

$$=\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\big(N+Pg_y\big)-\frac{\partial}{\partial y}(M+Pg_x)\right]dA$$

Derivamos aplicando la regla de la cadena

$$=\iint_D \big\{\big[N_x+N_zg_x+(P_x+P_zg_x)g_y+Pg_{yx}\big]-\big[M_y+M_zg_y+\big(P_y+P_zg_y\big)g_x+Pg_{xy}\big]\big\}\,dA$$

Nota: $N(x,y,g(x,y))\to\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}=N_x+N_zg_x$

Aplicando distributiva y reordenando los términos obtenemos:

$$=\iint_D \big(N_x+N_zg_x+P_xg_y+P_zg_xg_y+Pg_{yx}-M_y-M_zg_y-P_yg_x-P_zg_yg_x-Pg_{xy}\big)dA$$

Si las derivadas segundas mixtas son iguales, podemos cancelar unos términos:

$$=\iint_D \big[\big(N_z-P_y\big)g_x+(P_x-M_z)g_y+\big(N_x-M_y\big)\big]dA \qquad (3)$$

Ahora trabajamos con el lado derecho, recordando la parametrizacion S (1) buscamos sus derivadas primeras y realizamos el producto vectorial

$$r_x=(1,0,g_x) \quad y \quad r_y=\big(0,1,g_y\big)$$

$$r_x\times r_y=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & 0 & g_x\\ 0 & 1 & g_y\end{vmatrix}=(-g_x,-g_y,1)$$

El producto vectorial nos proporciona la orientación correcta del vector normal, siempre positiva. Reescribimos

$$\iint_S \nabla \times F \,.nd\sigma = \iint_S \nabla \times F\big(r(x,y)\big)\cdot(r_x\times r_y)dA \quad (4)$$

Calculamos el rotacion de F

$$rotF = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$$

Lo reemplazamos en (4), calculamos el producto punto y ordenamos:

$$\iint_S \big(P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y\big)\cdot(r_x\times r_y)dA$$

$$= \iint_S \big(P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y\big)\cdot(-g_x, -g_y, 1)dA$$

$$= \iint_D \big[(N_z - P_y)g_x + (P_x - M_z)g_y + \big(N_x - M_y\big)\big]dA \quad (5)$$

Vemos que la ecuación (3) es igual a la (5), queda demostrado el teorema de Stokes.

Observación:

- Este teorema también se puede aplicar en superficies con agujeros, debemos aplicar el mismo concepto que en el teorema de Green, hay que entrar y salir.

4.43. Teorema de la divergencia de Gauss(teorema)

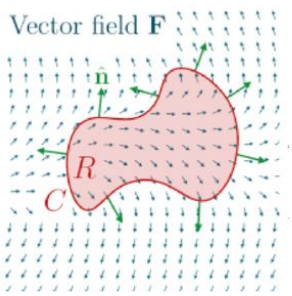
Sea S una superficie cerrada positivamente orientada, suave por partes, sea D la región solida encerrada por S y sea F= (M, N, P) un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S. Entonces el flujo de F a través hacia afuera de S es:

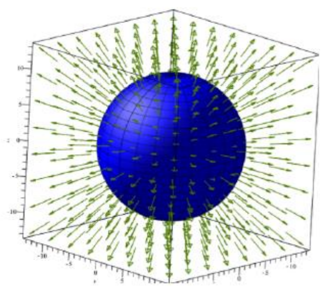
$$\oiint_S F\cdot nd\sigma = \iiint_D \nabla\cdot FdV.$$

4.44. Comparación del teorema de Green, de Gauss y de Stokes

$$\oint_c F\cdot n\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dx\,dy; \qquad \oiint_S F\cdot nd\sigma = \iiint_D \nabla\cdot FdV.$$

En este caso el teorema Green es en el plano y el de Gauss en el espacio. El teorema de Gauss generaliza el de Green





En este caso la versión tangencial de Green es un caso particular pero ahora de Stokes

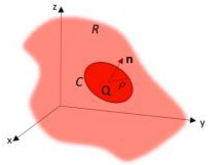
$$\oint_C F\cdot \mathrm{T}ds = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy\,; \qquad \oint_C F\cdot n\,ds = \iint_S \nabla\times F\,.nd\sigma$$

Observación:

- La componente k del rotacional (T de Green) es el vector normal del T de Stokes.

En la página 55 del texto hay unas aplicaciones de Ley de Gauss y Ley de Faraday

4.45. Interpretación del rotacional de un campo vectorial de $\mathbb{R}^3$



Supongamos que tenemos un campo vectorial definido en una región abierta conexa del espacio y que tiene componentes con derivadas de primer orden continuas. Llamemos Q al punto de la región y n a un vector unitario.
Consideremos un disco incluido en la región con centro en Q y de radio ρ, este disco este ubicado en un plano perpendicular a n. La superficie del disco es S y la consideramos orientada por n. Definiremos como C a la circunferencia frontera con orientación positiva con respecto a la orientación de S

El teorema de Stokes establece que $\oint_C \; F \,. dr = \iint_S \; \nabla \; \times F \; \cdot \; nd\sigma$, cuando C esta orientada positivamente con respecto a la orientación dada por n a S.
El teorema del valor medio aplicado a $\nabla \times F$(se puede aplicar por ser un campo vectorial continuo) en S asegura que existe un punto $Q_1 \in S$ tal que

$$\iint_S \; (\nabla \times F)(x, y, z) \cdot nd\sigma = \pi\rho^2[(\nabla \times F)(Q_1) \cdot n(Q_1)].$$

Si despejamos $\pi\rho^2$ y aplicamos el limite $\rho \to 0$, el punto Q_1 va a terminar tendiendo al punto Q

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_S \; (\nabla \times F)(x, y, z) \cdot nd\sigma = (\nabla \times F)(x_0, y_0, z_0) \cdot n. \quad (1)$$

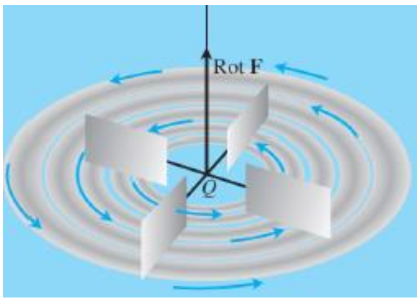
Aplicando el teorema de Stokes en el primer miembro de (1), obtenemos

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C F \; \cdot dr = (\nabla \times F)(x_0, y_0, z_0) \cdot n$$

Si no tomamos el limite tendremos una aproximación:

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C F \; \cdot dr \approx (\nabla \times F)(x_0, y_0, z_0) \cdot n$$

Esta nos dice que la densidad de circulación $\frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C F \; \cdot dr$ es aproximadamente igual al rotacional de F multiplicado por n (para un ρ pequeño)

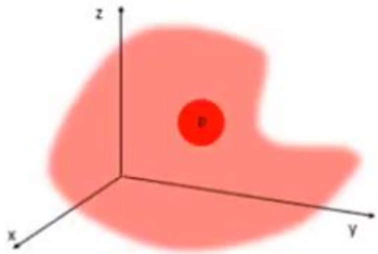


Si interpretamos a F como un campo de velocidades en un fluido y si en Q ponemos una rueda con paletas que se ve afectada por F, el producto escalar es máximo cuando el rot es un múltiplo positivo del versor n. En ese caso se maximiza la densidad de circulación, todo esto nos permite entender que el rotacional nos dice aproximadamente cual es el eje alrededor del cual tiende a remolinarse el fluido en un punto.
Más ejemplos en el video U4b7.

4.46. Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

$$\iint_S F \cdot n d\sigma = \iiint_W \operatorname{div} F dV.$$

Supongamos que tenemos una región abierta conexa en el espacio en la cual está definida un campo vectorial F con derivadas parciales de primer orden continuas. Suponemos que P es un punto interior a la región y W es una bola con centro en P y de radio r, incluida en la región. Llamamos S a la superficie de la bola



Según el teorema de la divergencia $\iint_S F \cdot n d\sigma = \iiint_W divF\, dV$

Aplicando el teorema del valor medio para integrales en el segundo miembro,

$$\iint_S F \cdot n d\sigma = divF(Q)\frac{4}{3}\pi r^3, \quad para\ cierto\ Q \in W.$$

Tomando limites obtenemos:

$$\lim_{r\to 0}\frac{3}{4\pi r^3}\iint_S F \cdot n d\sigma = \lim_{r\to 0} divF(Q) = div(P)$$

y, si tomamos un valor fijo de r $>$ 0 pequeño,

$$divF(P) \approx \frac{1}{V}\iint_S F \cdot n d\sigma.$$

La divergencia en el punto P es la tasa de flujo neto hacia fuera en P por unidad de volumen. Así, si $divF(P) > 0$, el punto P se llama fuente ya que el flujo neto alrededor de P es positivo; si $divF(P) < 0$, P se llama sumidero para F.

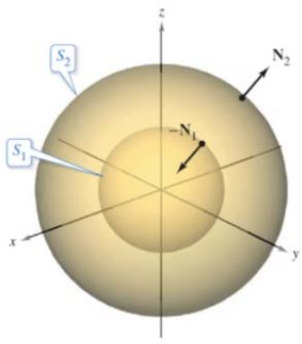
Si $divF(P) = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$, entonces F se llama solenoidal y, si es un campo de velocidades de un fluido , decimos que el fluido es incompresible.

Observación:

- También sirve en $\mathbb{R}^2$

4.47. Teorema de la divergencia en otras regiones

El Teorema de la divergencia de Gauss puede aplicarse a regiones más generales, en particular, a regiones con agujeros. Supongamos que D es la región del espacio entre las superficies esféricas $S_2\ y\ S_1$, como se ve en la imagen siguiente:



Para poder aplicar el teorema de la divergencia debemos partir a D, por ej.: por medio del plano xy. Esto nos va a dar dos regiones las cuales no tienen agujero, entonces aplicamos el teorema a cada región y luego l sumaremos. En la parte de la unión los vectores normales tienen direcciones opuestas y el flujo se cancela por lo tanto no varía el resultado, por eso es que orientamos a las superficies $S_2\ y\ S_1$ de manera conveniente.

4.48. Laplaciano(definición)

El Laplaciano de un campo escalar f se anota $\Delta f \ o\ \nabla^2 f$ y se define como la divergencia del gradiente de f:

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

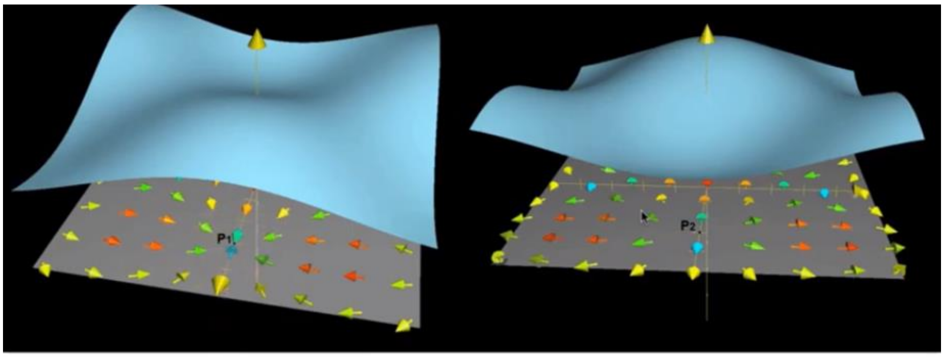
El Laplaciano de un campo vectorial $F = (M, N, P)$ se anota $\Delta F \ o\ \nabla^2 F$ y es el vector de los Laplacianos de las funciones componentes de F:

$$\Delta F = \nabla^2 F = (\nabla^2 M, \nabla^2 N, \nabla^2 P).$$

Interpretación del Laplaciano:

Supongamos que un punto del dominio de una función, los vectores son el gradiente de esa función. Si en el punto P_1 la función presenta un máximo relativo entonces en los alrededor del punto el gradiente apunta hacia P_1.El laplaciano lo definimos como la divergencia del gradiente. Entonces si hacemos un disco en plano alrededor de P_1 generamos un curva y el flujo a través hacia fiera de esa curva en general va a ser negativo.

Supongamos que en P_2 presenta un mínimo relativo y con un razonamiento similar obtenemos que el flujo a través hacia fuera nos da positivo



Si $f(P_1)$ es máximo, $\Delta f(P_1) < 0$; si $f(P_2)$ es mínimo, $\Delta f(P_2) > 0$.

Nota: El gradiente siempre apunta en la dirección de mayor crecimiento y en $P_1 \ y \ P_2$ es cero

4.49. Propiedades del Laplaciano

4.49.1. El Laplaciano de un campo escalar f$(x_1, x_2, \ldots.., x_n)$ cumple:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{x_2^2} + \cdots .. + \frac{\partial^2 f}{x_n^2}$$

4.49.1. El Laplaciano de un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$ cumple:

$$\Delta F = \nabla(\nabla \,.\, \mathrm{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathrm{F})$$

DEMOSTRACION (NO ESTA)

5. UNIDAD 5: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

5.1. Ecuación diferencial(definición)

Se llama ecuación diferencial a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

5.2. Clasificación de las ED

5.2.1. Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales
5.2.2. Por orden: orden de la mayor derivada presente
5.2.3. Por grado: el grado es la potencia a la que esta elevada la derivada de mayor orden
5.2.4. Por linealidad: lineales o no lineales

5.3. Clasificación de las soluciones de una ED

5.3.1. Solución explicita:
Se llama solución explicita de una ED en un intervalo I a una función y(suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para toda $x \in I$.

5.3.2. Solución implícita:
Una relación G (x, y) =0 es una solución implícita de una ED en un intervalo I si esta define una o más soluciones explicitas de la ecuación en I.

5.4. Tipos de soluciones

5.4.1. Familia paramétrica de soluciones:
Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

5.4.2. Solución particular:
Una solución singular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

5.4.3. Solución singular:
Una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

5.4.4. Solución general:
Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Observación: Saber distinguir dominio de definición de la función f en cuanto solución y como función

5.5. Problemas con valores iniciales PVI (definición)

Las condiciones iniciales son condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.
Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}),$$

Las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots \dots .., y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$
Deben ser n condiciones iniciales.

5.6. Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden(teorema)

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, y sea (x_0, y_0) un punto interior de R. Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$, contenido en [a, b] y existe una única función y definida en I que es solución del problema con valores iniciales (1).

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

5.7. Campo direccional o campo de pendientes(definición)

Dada una ED $y' = f\ (x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtienen al evaluar sistemáticamente a f en una cuadricula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

5.8. ED separable(definición)

Una ED ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Método para resolver un ED separable:

A partir de la definición

$$y' = g(x)p(y) \rightarrow h\big(y(x)\big)y'(x) = g(x) \quad donde\ h\big(y(x)\big) = \frac{1}{p\big(y(x)\big)}$$

Sea H una primitiva de h: $H' = h$.

$$H'\big(y(x)\big) \cdot y'(x) = h\big(y(x)\big) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H\big(y(x)\big) = \int g(x)dx\ + C$$

En la práctica: $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$, o sea $h(y)dy = g(x)dx$, e integrar ambos miembros:

$$H(y) = \int h(y)dy\ = \int g(x)dx\ + C$$

Ver el ejemplo de U5 parte 3(5' 40'')

5.9. ED lineal(definición)

Una ED ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y, si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

donde $a_0, a_1\ y\ g$ son funciones continuas en un intervalo I y $a_1 \neq 0$ en I.

Nota: Forma estándar $y' + P(x)y = f(x)$

Método para resolver un ED lineal:

Llamamos $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\quad y \quad f(x) = \frac{g(x)}{a_{1(x)}}$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un factor integrante: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro es la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que resulta ser separable: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\big(y(x)\mu(x)\big) = f(x)\mu(x)$$
$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x)dx + C \rightarrow y(x)e^{\int P(x)dx} = \int f(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$
$$y(x)e^{\int P(x)dx} = e^{-\int P(x)dx}\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx + Ce^{-\int P(x)dx}$$

Nota: En la ecuación (1) que surgió de una integral no le agregamos una constante por que la incluiremos luego.

5.10. ED exacta(definición)

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \;\; o \;\; M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una forma diferencial exacta.
Una condición suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una forma diferencial exacta, en una región abierta, conexa y simplemente conexa es

$$N_x = M_y \quad o \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Método para resolver un ED exacta:
Dada una EDO exacta $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, propongo una solución implícita S(x, y)=C.
Para hallar S, derivo con respecto a x:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = N(x,y),$$

$S(x,y) = C$ será una solución implícita de la ED, es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $F = (M,N)$, La solución de la ED es $S(x,y) = C$

5.11. Teorema de ED exactas(teorema)

Sean las derivadas parciales $\frac{\partial N}{\partial x}$ y $\frac{\partial M}{\partial y}$ continuas en una región rectangular D. Entonces la ED $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ es exacta en D si y solo si:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

para todo punto $(x,y) \in D$.
DEMOSTRACION

5.12. ED de Bernoulli(definición)

Una ED de primer orden se dice que es de Bernoulli, si es de la forma

$$y' + P(x)y = R(x)y^n$$

Método para resolver una ED de Bernoulli
Cuando $n = 0 \;\; o \;\; n = 1$, la ecuación es lineal y ya se vio como resolverla. Pero si $n > 1$ estas ecuaciones requieren otro modo de resolución que consiste en hacer la siguiente transformación:$v = y^{1-n}$
Esto reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal en v.

5.13. ED ordinarias lineales de segundo orden(definición)

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R son continuas en un intervalo I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$
La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.
La ecuación homogénea asociada de

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

es

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$

5.14. Existencia de una solución única(teorema)

Sea $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots \dots, a_1(x), a_0(x) y\ g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución y(x) del problema con valores iniciales existe en el intervalo y es única.
Observación:

- El teorema es para PVI un PVF puede tener infinitas soluciones, única solución o no tener solución.

5.15. Principio de superposición: ecuaciones homogéneas(teorema)

Si $y_1, y_2, \dots, y_k$ soluciones de la ED lineal homogénea de n-esimo orden:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x) + \cdots \dots . + a_1(x)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + a_0(x)y = 0$$

en un intervalo Entonces la combinación lineal

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots . + \mathrm{c_k}y_k$$

donde $c_1, c_2, \dots c_k$ son constantes arbitrarias es una solución de la ED en el intervalo I cualesquiera que sean los números reales $c_1, c_2, \dots . c_k$.
COROLARIO: Todas las soluciones de una ED lineal homogénea dada forman un espacio vectorial de funciones (subespacio del espacio vectorial de funciones derivables hasta el orden n)
Observaciones:

5.15.1. La solución trivial $y \equiv 0$ siempre es una solución de cualquier ED lineal homogénea
5.15.2. Todas las combinaciones lineales de las soluciones son nuevas soluciones de la ED.
5.15.3. k y n no guardan ninguna relación

DEMOSTRACION

Se demuestra el caso k=3 y n=2 para la cual la ED es

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

con soluciones $y_1, y_2\ e\ y_3$. Quiere probarse que la combinación

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \quad (2)$$

también es solución de (1). La ecuación (2) se deriva dos veces

$$y' = c_1y'_1 + c_2y'_2 + c_3y'_3 \qquad y \qquad y'' = c_1y''_1 + c_2y''_2 + c_3y''_3 \quad (3)$$

Al sustituir esta solución (2) y sus derivadas (3) en (1)

$$\begin{aligned} a_2y'' + a_1y' + a_0y &= a_2(c_1y''_1 + c_2y''_2 + c_3y''_3) + a_1(c_1y'_1 + c_2y'_2 + c_3y'_3) + a_0(c_1y'_1 + c_2y'_2 + c_3y'_3) \\ &= c_1[a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1] + c_2[a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2] + c_3[a_2y_3'' + a_1y_3' + a_0y_3] \\ &= c_10 + c_20 + c_30 \qquad (ya\ que\ y_1, y_2\ e\ y_3\ son\ soluciones\ de\ la\ ED) \\ &= 0 \end{aligned}$$

5.16. Familia de funciones LI y familias de soluciones LI

5.16.1. La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es linealmente dependiente en I si existen $c_1, \dots, c_n$ no todos nulos tales que

$$c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0$$
$$c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0, t \in I.$$

5.16.2. La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es linealmente independiente en I en otro caso

5.17. Wronskiano(definición)

El Wronskiano de una familia $\{f_1, \dots, f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n-1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$w_{\{f_1,\dots,f_n\}}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \cdots & f_n^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

5.18. Propiedades del Wronskiano

5.18.1. Si $\{f_1, \dots, f_n\}$ es una familia LD en I y las funciones son suficientemente derivables, entonces $w_{\{f_1,\dots,f_n\}}(x) = 0$ para toda $x \in I$.

5.18.2. Contra reciproco: si existe una $x \in I$ tal que $w_{\{f_1,\dots,f_n\}}(x) \neq 0$, entonces $\{f_1, \dots, f_n\}$ es una familia LI en I.

5.19. Criterio para soluciones linealmente independientes(Teorema)

Sean $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluciones de la ED $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots .. + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ en I. Entonces $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es LI en I si y solo si $W_{\{f_1,\dots,f_n\}}(x) \neq 0$ para toda $x \in I$.

5.20. Conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n

Una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

5.21. Existencia de un conjunto fundamental(teorema)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \dots .. + a_1 y' + a_0 y = 0$, tal que cada una de las funciones coeficientes a_k es continua en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I, existe un conjunto fundamental de soluciones en I, $\{y_1, \dots, y_n\}$.

5.22. Teorema de solución general de ED lineal homogénea(teorema)

Dada la ED lineal homogénea de n-esimo orden

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x) + \cdots \dots + a_1(x)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + a_0(x)y = 0$$

0, tal que cada una de las funciones coeficientes $a_k, k = 1, 2, \dots, n$. es continua en un intervalo I y $a_k(x) \neq 0$ en I, si $\{y_1, \dots \dots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en Entonces la solución general en el intervalo se puede expresar como

$$y = c_1 y_1 + \cdots .. + c_n y_n$$

donde $c_1, .., c_n$ son constantes arbitrarias.

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$ Se demuestra el caso n=2. Sea

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

Y sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de en I (1). Se debe probar que dada cualquier solución $\emptyset$ de (1), esta se puede expresar como combinación lineal de las funciones del conjunto fundamental dado.
Supongamos que $\emptyset$ es una solución en I de (1).
Dado que $\{y_1, y_2\}$ es una familia linealmente independiente de soluciones en I, en virtud del teorema 5.18, se tiene que $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Consideramos un valor particular $x_0 \in I$, entonces el que $W_{y_1,y_2}(x_0) \neq 0$.Formamos un SEL
Llamemos $k_1 = \emptyset(x_0)\ y\ k_2 = \emptyset'(x_0)$ y formemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} y_1(x_0)c_1 + y_2(x_0)c_2 = k_1 \\ y'_1(x_0)c_1 + y'_2(x_0)c_2 = k_2 \end{cases} \qquad (2)$$

en el que las incógnitas son $c_1\ y\ c_2$.Dado que el determinante de la matriz del sistema es $W_{y_1,y_2}(x_0) \neq 0$, este sistema tiene solución única, digamos $(\overline{c_1}, \overline{c_2})$.
Nota: podemos asegurar que las derivadas existen porque están definidas en la ED. Las de $\emptyset$ también existen por ser una solución de ED en I. $(\overline{c_1}, \overline{c_2})$ son dos valores específicos no cualquier $c_1\ o\ c_2$.
Por el teorema de la superposición observemos que la función $G(x) = \overline{c_1}y_1(x) + \overline{c_2}y_2(x)$ es solución de (1)
Si consideremos el siguiente PVI

$$\begin{cases} a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0; \\ y(x_0) = k_1; \\ y'(x_0) = k_2; \end{cases} \qquad (3)$$

La función $G(x)$ va a ser solución de PVI porque

$$\begin{cases} G(x_0) = \overline{c_1}y_1(x_0) + \overline{c_2}y_2(x_0) = k_1 \\ G'(x_0) = \overline{c_1}y'_1(x_0) + \overline{c_2}y'_2(x_0) = k_2 \end{cases}$$

y la función $\emptyset$ también resuelve el PVI (3) por las suposiciones que hicimos al principio. Según el teorema 5.6, solo podemos tener una solo función solución entonces
$\emptyset(x) = G(x) = \overline{c_1}y_1(x) + \overline{c_2}y_2(x)$, con lo cual se ha probado que $\emptyset$ es una combinación lineal de las funciones $y_1\ e\ y_2$.
Observaciones:

- Este teorema asegura que un conjunto fundamental de soluciones de una EDO lineal homogénea de orden n es una familia generadora del espacio vectorial de funciones solución de esa EDO.
- El principio de solución no nos asegura que la solución que obtenemos no es la solución general de la ED, en el caso de que las soluciones que yo combino sean tantas como el orden de la ED y sean LI ahí si tengo la solución general (que me permite encontrar cualquier solución particular)

5.23. Casos para resolver ED lineales homogéneas con coeficientes constantes (verificar las soluciones) (Solos)

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Proponemos una solución y buscamos sus derivadas

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = re^{rx} \qquad y''(x) = r^2e^{rx}$$

Las reemplazamos en la ED:

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$
$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Como e^{rx} no puede ser cero debemos resolver la cuadrática, también llamada ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0$$

Las raíces son

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dependiendo de cómo sean las raíces presentamos tres casos

5.23.1. Si $b^2 - 4ac > 0$

La ED es $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

$$ar^2 + br + c = 0 \;\; y \; las \; raices \; son \;\; r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Probamos que $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED (solos) y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

Probamos que las soluciones son LI entre si

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0$$

Como la exponencial nunca es cero y en este caso $r_2 y\, r_1$ son distintas nunca va a ser cero, por lo tanto el Wronskiano siempre es distinto de cero y las soluciones son LI.

Solución general:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

es solución general de

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

5.23.2. Si $b^2 - 4ac = 0$

La ED es $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$;

La ecuación auxiliar es $ar^2 + br + c = 0$; y las raíces son $r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$

$y_1 = e^{rx}(solos)\; y\; y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y son LI en $I = \mathbb{R}$:

Verificamos que y_2 es una solución:

Primero calculamos sus derivadas

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y'_2 = (1 + rx)e^{rx}; \quad y'_2 = (2r + r^2 x)e^{rx};$$

luego las reemplazamos en la ED y ordenamos de manera conveniente

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= (a(2r + r^2 x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \big((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\big)e^{rx} \end{aligned}$$

Sabemos que e^{rx} no es cero por lo tanto el otro factor debe ser cero. Recordando que $r = \frac{-b}{2a}$ y que $(ar^2 + br + c) = 0$ por ser la ecuacion auxiliar, comprobamos que y_2 es solución:

$$\left(\left(2a\frac{-b}{2a} + b\right) + (ar^2 + br + c)x\right) = 0.$$

Verificamos que y_1 y $y_2$son LI entre sí:

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0$$

Como la exponencial nunca es cero, el Wronskiano es distinto de cero siempre y las soluciones son LI.

Solución general:

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 xe^{rx}$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

5.23.3. Si $b^2 - 4ac < 0$

La ED es $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$;

La ecuación auxiliar es $ar^2 + br + c = 0$ $y\ sus\ raices\ son\ \ r_1 = \alpha + i\beta\ \ y\ \ r_2 = \alpha - i\beta$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Definimos las soluciones a partir de $r_1\ y\ r_2$, pero resulta sabiendo que $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$ y que $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + isen(\beta x)$(de acuerdo con la fórmula de Euler), similarmente para r_2 nos queda

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + isen(\beta x)\big); \quad z_2 = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) - isen(\beta x)\big)$$

Como estas soluciones son complejas, aplicamos el principio de superposición y realizamos dos combinaciones lineales convenientes de $z_1 y\ z_2$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,; \qquad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Probemos que $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\ \ y\ y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ son soluciones de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$.

Para probar que son soluciones empezamos calculando sus derivadas, primero

$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

$y_1' = \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$

$y''_1 = (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$

Sustituimos en las ED y reordenamos:

$$\begin{aligned} &ay_1'' + by_1' + cy_1 = \\ &= a[(\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\ ] + b[\alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)] \\ &\qquad + c[e^{\alpha x}\cos(\beta x)] \\ &= [a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c]\cos(\beta x) + [a(-2\alpha\beta) + b(-\beta)]\operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

Recordamos lo que era $\alpha\ y\ \beta$, comenzamos analizando

$$[a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c] = \left[a\left(\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c\right]$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{4ac - b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -c + c = 0$$

Continuamos con

$$[a(-2\alpha\beta) + b(-\beta)] = (2a\alpha + b)(-\beta) = \left(2a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b\right)(-\beta) = (-b + b)(-\beta) = 0$$

Hemos probado que y_1 es solución, de una manera similar probamos lo mismo para y_2

Ahora probaremos que son LI

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x}\{\cos(\beta x)\,[\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)]\} - \{\operatorname{sen}(\beta x)\,[\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)]\}$$

$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

La exponencial no es cero y $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ no es cero por que $4ac - b^2 \neq 0$, si fuera cero estariamos en el caso 2

Solución general:

$$y = e^{\alpha x}[c_1\cos(\beta x) + c_2\operatorname{sen}(\beta x)]$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

5.24. <u>Función complementaria(definición)</u>

Dada una ED no homogénea, $ay'' + by' + cy = G(x)$, la solución de la ED homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se llama función o solución complementaria

5.25. <u>Teorema de solución general de ED lineal no homogénea(teorema)</u>

Dada una ED lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots .. + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ donde las funciones coeficientes $a_k, 0 \le k \le n$, y G son continuas en algún intervalo abierto I y $a_n(x) \neq 0$ en I, la solución general de la ED tiene la forma $y = y_c + y_p$ donde y_c es la función complementaria e y_p es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.

DEMOSTRACION

⇒Se prueba el caso $n = 2$, donde

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g. \qquad (1)$$

donde las funciones coeficientes $a_k, 0 \le k \le n$, y G son continuas en algún intervalo abierto I y $a_n(x) \neq 0$ en I.

Sea $\emptyset(x)$ una solución de (1) en I e y_p es una solución particular de (1) en I. Se debe probar que existen coeficientes $\bar{c_1}, \bar{c_2}$ tales que $\emptyset(x) = \bar{c_1}y_1(x) + \bar{c_2}y_2(x) + y_p$,

Se tiene que y_p y $\emptyset$ son soluciones de (1); probaremos que la diferencia $\emptyset - y_p$ es solución de la EDO lineal homogénea asociada a (1). En efecto,

$$a_2(\emptyset - y_p)'' + a_1(\emptyset - y_p)' + a_0(\emptyset - y_p) = (a_2\emptyset'' + a_1\emptyset' + a_0\emptyset) - (a_2y_p'' - a_1y_p' - a_0y_p)$$
$$= g - g = 0.$$

Esto justifica porque dijimos que la función $\emptyset - y_p$ es solución de la ED homogénea asociada de (1)

Luego, si $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental para la ED homogénea asociada, cualquier solución de la ED homogénea asociada se puede escribir como una combinación lineal de la ED, entonces podemos asegurar que existen constantes $\bar{c_1}$ y $\bar{c_2}$ tales que $\emptyset - y_p = \bar{c_1}y_1(x) + \bar{c_2}y_2(x)$.De esta manera se tiene que $\emptyset = \bar{c_1}y_1 + \bar{c_2}y_2 + y_p$

5.26. <u>Principio de superposición de ED no homogéneas(teorema)</u>

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n-ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots .... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x)$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots .... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x)$$

donde solo cambian los termino independientes. Supongamos que $y_{p_1}, \dots, y_{p_k}$ son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I. Entonces,

$$y_p = y_{p_1} + \cdots .. + y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots .... + a_1y' + a_0y = g_1 + \cdots + g_k$$

DEMOSTRACION

⇒ Demostramos el caso $n = 2$ y $k = 3$.Debemos verifiar que si y_{p1} es solución de $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g_1$, y si y_{p2} es solución de $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g_2$ e y_{p3} es solución de $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g_3$, entonces $y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$ es solución de

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g_1 + g_2 + g_3 \qquad (1)$$

Se comprueba derivando:

$$a_2(y''_{p1}+y''_{p2}+y''_{p3})+a_1(y'_{p1}+y'_{p2}+y'_{p3})+a_0(y_{p1}+y_{p2}+y_{p3})=$$
$$=(a_2y''_{p1}+a_1y'_{p1}+a_oy_{p1})+(a_2y''_{p2}+a_1y'_{p2}+a_oy_{p2})+(a_2y''_{p3}+a_1y'_{p3}+a_oy_{p3})$$
$$=g_1+g_2+g_3$$

Esta última igualdad proviene de haber elegido las y_{p_i}, con $i=1,2,3$, entre las soluciones de cada ED no homogénea

5.27. Método para resolver EDO lineales de orden superior con coeficientes constantes

5.27.1. Método de los coeficientes indeterminados(idea)

Para resolver una EDO lineal no homogénea con coeficientes constantes,

$$a_2y''(x)+a_1y'(x)+a_0y(x)=f(x), \qquad (1)$$

se busca la función complementaria y_c y una solución particular y_p. Esta será una solución de (1) si $a_2y_p''(x)+a_1y_p'(x)+a_0y_p(x)=f(x)$, es decir, si f es una combinación lineal de y_p y sus derivadas hasta cierto orden(2 en este caso).

Este método se aplica cuando la función f es constante, polinómica, exponencial (e^x), seno, coseno, o combinación lineal de estas funciones; tales funciones f tienen la propiedad de ser combinación de sus derivadas.

Lo que se haces es proponer una y_p que tenga cierta relación con f.

$g(x)$	y_p: función de prueba
a	A
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$	$A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_0$
$\operatorname{sen}(ax)$	$A\operatorname{sen}(ax)+B\cos(ax)$
$\cos(ax)$	$A\operatorname{sen}(ax)+B\cos(ax)$
e^{ax}	Ae^{ax}
$(a_nx^n+\cdots+a_0)\,e^{ax}$	$(A_nx^n+\cdots+A_0)\,e^{ax}$
$e^{bx}\operatorname{sen}(ax)$	$e^{bx}(A\operatorname{sen}(ax)+B\cos(ax))$
$(a_nx^n+\cdots+a_0)\,e^{bx}\operatorname{sen}(ax)$	$e^{bx}((A_nx^n+\cdots+A_0)\operatorname{sen}(ax)+(B_nx^n+\cdots+B_0)\cos(ax))$

5.27.2. Método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros se puede usar sin restricciones (a diferencia del método de coeficientes indeterminados) para hallar soluciones particulares de las ecuaciones lineales, de diversos órdenes.

Explicamos el método para ecuaciones de segundo orden, pero es aplicable a ED's de otros órdenes. Al resolver, lo aplicaremos al caso especial de ecuaciones con coeficientes constantes (para poder hallar la función complementaria).

Dada $a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=G(x)$,con $y_c(x)=c_1\,y_1(x)+c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x).$$

A partir de la y_p propuesta, buscamos sus derivadas

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2$$
$$y'_p=u'_1y_1+u_1y'_1+u'_2y_2+u_2y'_2$$
$$y''_p=u''_1y_1+u'_1y'_1+u'_1y'_1+u_1y''_1+u''_2y_2+u'_2y'_2+u'_2y'_2+u_2y''_2$$

Luego las reemplazamos en la ED

$$ay_p''+by_p'+cy_p$$
$$=u_1(ay_1''+by_1'+cy_1)+u_2(ay_2''+by_2'+cy_2)+a(u''_1y_1+u'_1y'_1)$$
$$+a(u''_2y_2+u'_2y'_2)+(au'_1y'_1+bu'_1y_1+au'_2y'_2+bu'_2y_2)$$

Los primeros dos términos son cero porque son soluciones de la ED homogénea asociada, los siguientes términos se los puede expresar como una derivada y los últimos dos lo reordenamos en función de $a\ y\ b$

$$= a\frac{d}{dx}(u'_1y_1 + u'_2y_2) + b(u'_1y_1 + u'_2y_2) + a\left(u'_1y'_1 + u'_2y'_2\right) = G$$

Para resolverlos suponemos que $(u'_1y_1 + u'_2y_2) = 0$ entonces $\left(u'_1y'_1 + u'_2y'_2\right) = \frac{G}{a}$

$$\begin{cases} u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0 \\ u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = \dfrac{G}{a} = f \end{cases}$$

Resolver por determinantes, encontraremos $u'_1\ y\ u'_2$ las cuales las anti derivaremos y obtendremos $u_1\ y\ u_2$ encontrando así las solución particular a la ED no homogénea

5.28. Ecuaciones del movimiento forzado

Ver video de U5 parte 8 o pág. 80 del texto

6. UNIDAD 6: SERIES DE FOURIER

6.1. Producto escalar de funciones en un intervalo dado. (definición)

Dadas dos funciones f y g definidas en [a, b], el producto escalar usual entre ellas es

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Las funciones f y g son ortogonales en [a, b] si $f \cdot g = 0$ en [a, b].

6.2. Familias ortogonales de funciones(definición)

Una familia de funciones es ortogonal en [a, b] si cada miembro de la familia es ortogonal a cada una de las restantes funciones de la familia en [a, b].

Observación:

- Las familias $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \dots\}$ y $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, sen\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \dots\}$ son ortogonales en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$.La ortogonalidad se mantiene en cualquier intervalo de longitud 2p para estas familias

DEMOSTRACION DE LA OBSERVACION

Para probar que la familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, sen\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \dots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$, debemos mostrar que 1 es ortogonal a todas las funciones cos y sen para todo los n, que todas las funciones cos son ortogonales entre si y lo mismo para las todas las funciones sen y además que todas las funciones cos son ortogonales con todas las funciones sen.

Comenzamos:

a) Función constante 1 y las funciones cos:

$$\int_0^{2p} 1\ cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{p}{n\pi} sen\frac{n\pi x}{p}\bigg|_0^{2p} = \frac{p}{n\pi}[sen(2n\pi) - sen(0)] = 0$$

b) Función constante 1 y las funciones sen:

$$\int_0^{2p} 1\ sen\frac{n\pi x}{p}dx = -\frac{p}{n\pi} cos\frac{n\pi x}{p}\bigg|_0^{2p} = -\frac{p}{n\pi}[cos(2n\pi) - cos(0)] = 0$$

c) Funciones cos y funciones sen:

$$\int_0^{2p} cos\frac{n\pi x}{p} sen\frac{m\pi x}{p}dx$$

- Si $m = n$

$$\int_0^{2p} cos\frac{n\pi x}{p} sen\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{p}{2n\pi}\left(sen\frac{n\pi x}{p}\right)^2\bigg|_0^{2p} = \frac{p}{2n\pi}[sen^2(2n\pi) - sen^2(0)] = 0$$

- Si $m \neq n$, prestar atención que $(m - n) \neq 0$

$$\int_0^{2p} cos\frac{n\pi x}{p} sen\frac{m\pi x}{p}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(sen\frac{(m+n)\pi x}{p} + sen\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)dx$$

$$= -\frac{p}{(m+n)\pi}cos\frac{(m+n)\pi x}{p} - \frac{p}{(m-n)\pi}cos\frac{(m-n)\pi x}{p}\bigg|_0^{2p} = 0$$

Nota: usamos $sen\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\big(sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)\big)$

d) Funciones cos con cos, siempre $m \neq n$ para probar este caso:

$$\int_0^{2p} cos\frac{n\pi x}{p} cos\frac{m\pi x}{p}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(cos\frac{(m+n)\pi x}{p} + cos\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)dx$$

$$= \frac{p}{(m+n)\pi} sen\frac{(m+n)\pi x}{p} + \frac{p}{(m-n)\pi} sen\frac{(m-n)\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0$$

Nota: usamos $cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)\right)$

e) Funciones sen con sen, siempre $m \neq n$ para probar este caso:

$$\int_0^{2p} sen\frac{n\pi x}{p} sen\frac{m\pi x}{p} dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(-cos\frac{(m+n)\pi x}{p} + cos\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)dx$$

$$= -\frac{p}{(m+n)\pi} sen\frac{(m+n)\pi x}{p} + \frac{p}{(m-n)\pi} sen\frac{(m-n)\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0$$

Nota: usamos $sen\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left(-cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)\right)$

Hemos probado que esta familia es ortogonal en el intervalo $[0, 2p]$, de manera similar se puede probar que también es ortogonal en $[-p, p]$.

6.3. <u>Sistema trigonométrico</u>

La familia $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, sen\frac{n\pi x}{p}, n = 1,2, \ldots\right\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ y en $[0,2p]$. Cada una de las funciones $\cos\frac{n\pi x}{p}$ es periódica, con periodo fundamental $\frac{2p}{n}$; lo mismo ocurre con $sen\frac{n\pi x}{p}$, n=1,2,… .

Nota: el periodo fundamental es el menor de los periodos.

6.4. <u>Familias ortogonales completas(definición)</u>

Una familia ortogonal de funciones en [a, b] es completa si la única función definida en [a, b] que es ortogonal a todos los miembros de la familia es la función constante 0. La familia $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, sen\frac{n\pi x}{p}, n = 1,2, \ldots\right\}$ es completa.

6.5. <u>Series trigonométricas de Fourier(definición)</u>

Dada la familia ortogonal de funciones $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, sen\frac{n\pi x}{p}, n = 1,2, \ldots\right\}$ en $[-p, p]$ (o en $[0, 2p]$) y una función f definida en el mismo intervalo. Queremos expresar a la función f en términos de la familia. Para ello buscamos coeficiente $c_0, a_n\ y\ b_n, n = 1, 2, \ldots$. tales que

$$f(x) = c_0\,1 + a_1\cos\frac{1\pi x}{p} + b_1 sen\frac{1\pi x}{p} + a_2\cos\frac{2\pi x}{p} + b_2 sen\frac{2\pi x}{p} + \cdots$$

Nota: queremos expresar la función como una serie de funciones trigonométricas periódicas, lo que nos permite obtener aproximaciones muy buenas.

Para encontrar los coeficientes, suponemos que la función f se puede expresar como combinación de las funciones de las familias:

$$f(x) = c_0 + a_1\cos\frac{1\pi x}{p} + a_2\cos\frac{2\pi x}{p} + \cdots$$
$$+b_1 sen\frac{1\pi x}{p} + b_2 sen\frac{2\pi x}{p} + \cdots \qquad (1)$$

1. Para encontrar c_0, multiplicamos ambos miembros de (1) por la función 1 e integramos ambos miembros en el intervalo $[-p, p]$ suponiendo que en el lado derecho se puede escribir la integral como la suma de las integrales:

$$\int_{-p}^{p} 1\, f(x)dx = \int_{-p}^{p} 1c_0 dx + \int_{-p}^{p} 1\, a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} 1a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} dx + \cdots$$
$$+ \int_{-p}^{p} 1\, b_1 sen\frac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} 1b_2 sen\frac{2\pi x}{p} dx + \cdots$$

Sabemos que la constante 1 es ortogonal a todas las funciones seno y coseno, por lo tanto, las integrales dan 0, así

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = \int_{-p}^{p} c_0 dx + 0 + 0 + \cdots$$
$$= 2pc_0$$

Despejamos para obtener c_0 y nos da que:

$$c_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

2. Para encontrar a_1, multiplicamos ambos miembros de (1) por la función $\cos\frac{1\pi x}{p}$ e integramos ambos miembros en el intervalo $[-p, p]$ suponiendo que en el lado derecho se puede escribir la integral como la suma de las integrales:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p} dx = \int_{-p}^{p} c_0 \cos\frac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} dx + \cdots$$
$$+ \int_{-p}^{p} b_1 sen\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} b_2 sen\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} dx + \cdots$$

Sabemos que $\cos\frac{1\pi x}{p}$ es ortogonal a todas las funciones seno y coseno, excepto a sí misma, por lo tanto, las integrales dan 0, así

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p} dx = \int_{-p}^{p} a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} dx + 0 + 0 + \cdots$$
$$= pa_1$$

Despejamos para obtener a_1 y nos da que:

$$a_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p} dx$$

De manera similar lo hacemos para los a_n, siempre multiplicando por la función correspondiente, así obtenemos

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \ldots$$

Si $n = 0$, el coeficiente es $a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$. Este coeficiente es muy parecido a c_0, entonces podemos decir que $c_0 = \frac{a_0}{2}$.

3. De manera análoga a lo que realizamos en b) encontramos los valores de b_1 y b_n, los cuales quedan definidos de la siguiente manera

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \ldots$$

Una vez que hemos encontrado todos nuestros coeficientes, procedemos a definir la serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos los coeficientes como

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx\,; \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \ldots\,; \quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \ldots$$

Y definimos la serie generada por f como:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \right).$$

Nota: el símbolo ~ significa genera, la única relación que hay por ahora que hay entre f y la función definida por la serie es que f esta implícitamente en los coeficientes. Más adelante veremos qué condiciones nos aseguran que puede ser una igualdad

<u>Observación:</u>

- Si f está definida en $[0, 2p]$ se realiza de manera similar a lo que acabamos de demostrar

6.6. <u>Convergencia de series de Fourier(teorema)ver si hay que demostrarlo</u>

Sean f y f' continuas por partes(es decir, tienen un numero finito de discontinuidades de salto) en $[-p, p]$. Entonces para toda $x \in (-p, p)$ la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan los limites laterales de f en x por derecha e izquierda, respectivamente.

Además, en p y $-p$ la serie converge a

$$\frac{f(-p+) + f(p-)}{2}. (si\ los\ limites\ existen)$$

<u>Observación:</u>

- Si x es un punto de continuidad de f, la serie de Fourier converge a $f(x)$ en ese punto.

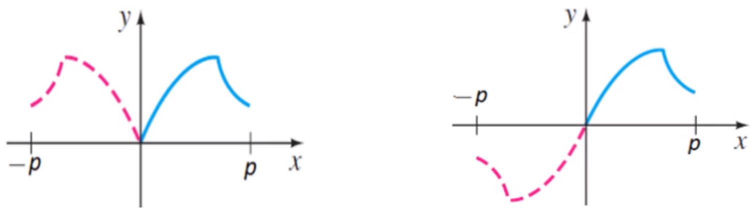
Ejemplos varios en U6 parte 4

6.7. <u>Funciones pares e impares(definición)</u>

Se dice que una función f es

- Par si $f(-x) = f(x)$
- Impar si $f(-x) = -f(x)$.

En un intervalo simétrico tal como $(-p, p)$, la gráfica de la función par tiene simetría respecto al eje y, mientras que la de una función impar tiene simetría respecto al origen.



<u>Observación:</u>

- Las funciones coseno son pares y las funciones de senos son impares

6.8. <u>Propiedades de las funciones pares e impares</u>

6.8.1. Si f es par, $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 2\int_{0}^{p} f(x)dx$.

DEMOSTRACION

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = -\int_{p}^{0} f(-u)du + \int_{0}^{p} f(x)dx = \int_{p}^{0} f(u)du + \int_{0}^{p} f(x)dx = 2\int_{0}^{p} f(x)dx$$

6.8.2. Si f es impar $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0$.

DEMOSTRACION

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = -\int_{-p}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{p} f(x)dx = \int_{p}^{0} f(u)du + \int_{0}^{p} f(x)dx$$
$$= -\int_{0}^{p} f(u)du + \int_{0}^{p} f(x)dx = 0$$

6.8.3. Si f y g son ambas pares o impares, $h = fg$ es par.

DEMOSTRACION

- Si f y g son ambas pares
$$h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = h(x)$$
- Si f y g son ambas impares
$$h(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x) = h(x)$$

6.8.4. Si f es par y g es impar, $h = f\ g$ es impar.

DEMOSTRACION

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -h(x)$$

6.9. <u>Función periódica(definición)</u>

Una función f es periodice si $f(x+P) = f(x)$ para todo x. P es una constante positiva. Cualquier numero positivo P con esta propiedad se llama periodo. EL menor periodo de una función se llama periodo fundamental de la misma.
Observación:

- Cualquier función $sen(nx), n = 1, 2, \dots$ tiene un periodo de $\frac{2\pi p}{n}, p = 1, 2, \dots$, por ejemplo: $g(x) = sen(2x)$ tiene periodos $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$., siendo π el fundamental. También sucede lo mismo para las funciones $\cos(nx)$
- Hay que tener en cuenta que cualquiera sea la función $sen(nx)$ o $\cos(nx)$, el periodo 2π siempre aparece.
- Decimos que la función con la que se genera la serie está definida en un intervalo $[0, 2p]$ o $[-p, p]$. Decimo que el miembro derecho de
- $f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\right)$tiene un periodo fundamental de 2p(a la constante c_0 la consideramos periódica con cualquier número que sea un número real positivo).Así podemos concluir que la serie de Fourier generada por un función continua en el intervalo $(-p, p)$ no solo representa la función en el intervalo, sino que también representa la extensión periódica de f fuera de este intervalo, en $\mathbb{R}$

6.10. <u>Serie de cosenos de Fourier o serie de Fourier generada por una función par(definición)</u>

Sea $f: [-p, p] \to \mathbb{R}$.. Suponemos que la función f es par, buscamos los coeficientes de Fourier de f:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx\,;$$
$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx\,, n = 1, 2, \dots;$$
$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = 0, n = 1, 2, \dots\ ;$$

Podemos reescribir al coeficiente de esa manera por las propiedades de funciones pares e impares. Teniendo los tres coeficientes definidos, así la serie generada por una función f par:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right)$$

También recibe el nombre de Serie de cosenos de Fourier, porque solo aparecen una constante y términos asociados al coseno.

6.11. <u>Serie de senos de Fourier o serie de Fourier generada por una función impar(definición)</u>

Sea $f: [-p, p] \to \mathbb{R}$.. Suponemos que la función f es impar, buscamos los coeficientes de Fourier de f:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = 0, n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{p}dx\,, n = 1, 2, \dots\;;$$

Podemos reescribir al coeficiente de esa manera por las propiedades de funciones pares e impares. Teniendo los tres coeficientes definidos, así la serie generada por una función f impar:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{p}\right)$$

También se la llama serie de senos de Fourier, porque solo aparecen términos asociados al seno.

6.12. <u>Extensiones par e impar de una función definida en un semiintervalo(definición)</u>

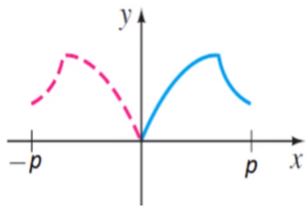
Dada $f: [0, L] \to \mathbb{R}$, se puede definir una nueva función, extensión de f al intervalo $[-L, L]$, tal que f que sea par o impar(esta última, si $f(0) = 0$):

Nota: También se la puede extender periódicamente. Cuando hablamos de extensión de una función nos referimos a una nueva función que tiene un dominio más amplio pero que en la $[0, L]$ del dominio ambas funciones coinciden.

En las gráficas la función original es azul y las restricciones son las líneas rojas punteadas

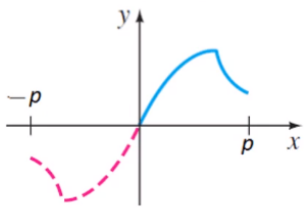
6.12.1. Extensión par

$$g: [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & si -L \le x < 0; \\ f(x) & si\ 0 \le x \le L. \end{cases}$$



6.12.2. Extensión impar(asumimos $f(0) = 0$

$$h: [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) & si -L \le x < 0; \\ 0 & si\ x = 0; \\ f(x) & si\ 0 < x \le L. \end{cases}$$



6.13. <u>Serie de cosenos(definición)</u>

La serie de cosenos de Fourier de una función definida en u intervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la extensión par de f.

Para $f\colon[0,L]\to\mathbb{R}$, la extensión par es:

$g\colon[-L,L]\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=\begin{cases} f(-x) \;\; si -L\le x<0; \\ f(x)\; si\; 0\le x\le L. \end{cases}$ $\qquad L=p$

Buscamos lo coeficientes

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)dx=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx\,;$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx\,,n=1,2,\dots;$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx=0,n=1,2,\dots\;;$$

La serie generada por la extensión par de f:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\cos\frac{n\pi x}{p}\right)$$

Observación:

- Por las propiedades de la integral no es necesario calcular la extensión g, ya que podemos usar f.

6.14. Serie de senos(definición)

La serie de senos de Fourier de una función definida en un intervalo $[0,L]$ es la serie de Fourier generada por la extensión impar de f.

Para $f\colon[0,L]\to\mathbb{R}$, la extensión impar es:

$h\colon[-L,L]\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=\begin{cases} -f(-x) \;\; si -L\le x<0; \\ 0\; si\; x=0; \\ f(x)\; si\; 0< x\le L. \end{cases}$ $\qquad L=p$

Buscamos lo coeficientes

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} h(x)dx=0;$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} h(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx=0,n=1,2,\dots;$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} h(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx\,,n=1,2,\dots\;;$$

La serie generada por la extensión impar es:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\right)$$

Observación:

- Por las propiedades de la integral no es necesario calcular la extensión h, ya que podemos usar f.

6.15. Serie de Fourier de una función definida en un semiintervalo(definición)

Si se desarrolla la función $f\colon[0,L]\to\mathbb{R}$ en series de Fourier, igualando $[0,L]=[0,2p]$ y $L=2p$, se obtienen los coeficientes de Fourier

$$a_0=\frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx\,;$$

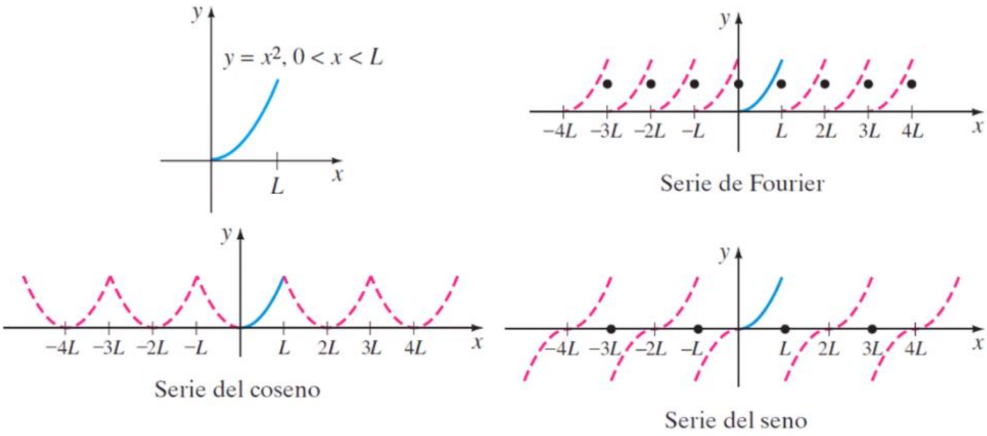
$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}dx\,, n = 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{2n\pi x}{L}dx\,, n = 1, 2, \ldots$$

Nota: no se aplican propiedades de integración, solo reescribimos el intervalo por así decir.
La serie generada queda como:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{L} + b_n\,\text{sen}\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

A continuación, se pone lo que hace la serie de Fourier con las extensiones



Ver ejemplos de U6 parte 6

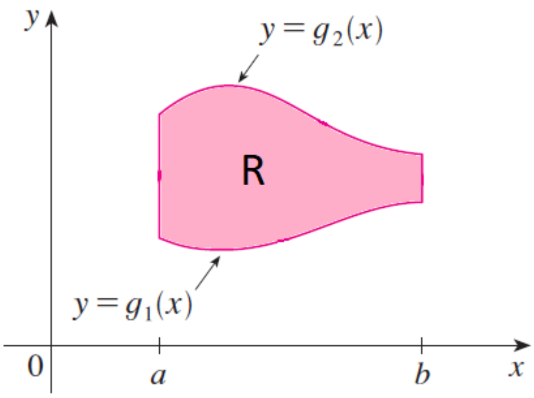
7. ANEXO

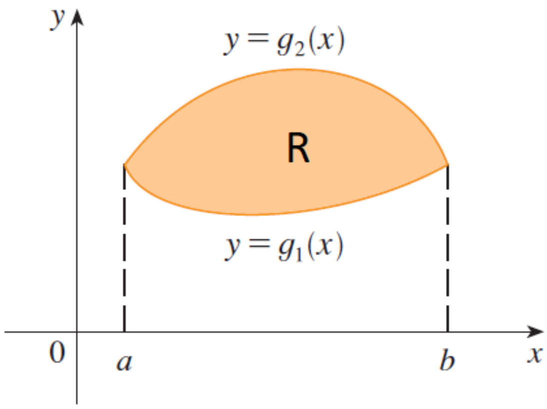
7.1. <u>Región Tipo 1 y 2 y Simple</u>

Para definir una región simple, debemos primero comprender que es una región plana de tipo 1 y que es una región plana de tipo 2.
Una región plana R es de tipo 1 cuando se puede describir de la siguiente manera:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

Para funciones continuas g_1 y g_2 definidas en $[a, b]$. EJ:

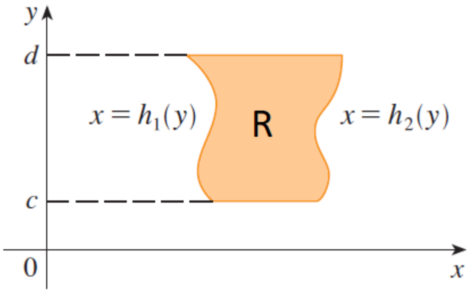


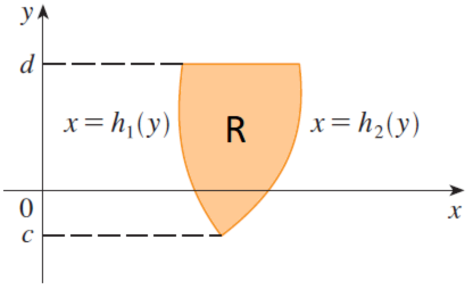


Una región plana R es de tipo 2 cuando se puede describir de la siguiente manera:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, h_1(x) \le x \le h_2(x)\},$$

Para funciones continuas h_1 y h_2 definidas en $[c, d]$. EJ:





Una región que es a la vez de tipo 1 y tipo 2 se llama región simple. Ej.