10 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

? Si usted se encuentra en el Polo Norte, la Estrella Polar, Polaris, estará casi directamente encima de su cabeza, mientras que las demás estrellas parecerán trazar círculos alrededor de ella. Pero hace 5000 años, una estrella diferente, Thuben, se localizaba directamente encima del Polo Norte y era la Estrella del Norte. ¿Qué ocasionó este cambio?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

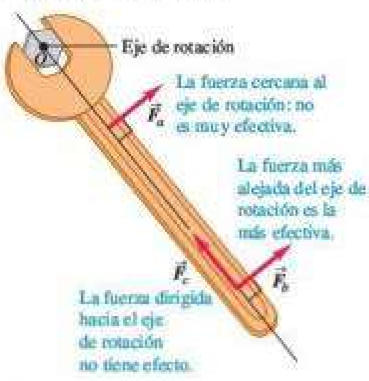
Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significado tiene una torca producida por una fuerza.
- Cómo la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento de rotación.
- Cómo se analiza el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo a través del espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia en el caso de cuerpos que giran.
- Qué se entiende por momento angular de una partícula o de un cuerpo rígido.
- Cómo cambia con el tiempo el momento angular de un sistema.
- Por qué un giróscopo en movimiento experimenta el curioso movimiento de precesión.

En los capítulos 4 y 5 aprendimos que una fuerza neta aplicada a un cuerpo le produce una aceleración. Pero, ¿qué se necesita para producir en un cuerpo una aceleración *angular*? Es decir, ¿qué se necesita para hacer girar a un cuerpo en reposo o para detener a uno que está girando? Se requiere una fuerza, pero se debe aplicar de manera que provoque una acción de torsión o un giro.

En este capítulo vamos a definir una nueva cantidad física, la *torca*, la cual describe la acción de torsión o giro producido por una fuerza. Encontraremos que la torca neta que actúa sobre un cuerpo rígido determina su aceleración angular, de la misma manera que la fuerza neta sobre un cuerpo determina su aceleración lineal. También estudiaremos el trabajo y la potencia en el movimiento de rotación para entender cómo se transmite la energía por el eje giratorio del motor de un automóvil. Por último, desarrollaremos un nuevo principio de conservación, la *conservación del momento angular*, que es sumamente útil para comprender el movimiento de rotación tanto de cuerpos rígidos como de los que no lo son. Terminaremos este capítulo con el estudio de los *giróscopos*, dispositivos giratorios que aparentemente desafían el sentido común y no se caen cuando se cree que deberían hacerlo, aunque en realidad se comportan en perfecto acuerdo con la dinámica del movimiento de rotación.

10.1 ¿Cuál de estas tres fuerzas de igual magnitud tiene la mayor probabilidad de aflojar el tornillo apretado?



10.1 Torca

Sabemos que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden afectar su **movimiento de traslación**, es decir, el movimiento del cuerpo como un todo a través del espacio. Ahora queremos aprender qué aspectos de una fuerza determinan qué tan efectiva es esta para provocar o modificar el movimiento de *rotación*. La magnitud y la dirección de la fuerza son importantes, al igual que el punto de su aplicación sobre el cuerpo. En la figura 10.1 se utiliza una llave para aflojar un tornillo apretado. La fuerza $\vec{F}_b$, aplicada cerca del extremo del mango es más eficaz que una fuerza igual $\vec{F}_a$ aplicada cerca del tornillo. La fuerza $\vec{F}_c$ no sirve de nada, ya que se aplica en el mismo punto y tiene la misma magnitud que $\vec{F}_b$, pero está dirigida a lo largo de la longitud del mango. La medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para provocar o modificar el movimiento de rotación de un cuerpo se llama *torca*; decimos que $\vec{F}_a$ genera una torca sobre el punto O a la llave de la figura 10.1, $\vec{F}_b$ aplica una torca mayor con respecto a O, y $\vec{F}_c$ aplica una torca nula sobre O.

La figura 10.2 muestra tres ejemplos de cómo calcular la torca. El cuerpo de la figura puede girar alrededor de un eje que es perpendicular al plano de la figura y que pasa por el punto O. Sobre el cuerpo actúan tres fuerzas, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ en el plano de la figura. La tendencia de la primera de estas fuerzas, $\vec{F}_1$, en provocar una rotación alrededor de O depende de su magnitud F_1. También depende de la distancia *perpendicular* l_1 entre el punto O y la **línea de acción** de la fuerza (es decir, la línea a lo largo de la cual se ubica el vector fuerza). Llamamos a la distancia l_1 el **brazo de palanca** (o **brazo de momento**) de la fuerza $\vec{F}_1$ con respecto a O. El esfuerzo de torsión es directamente proporcional tanto a l_1 como a F_1 así que la **torca** (o *momento*) de la fuerza $\vec{F}_1$ se define con respecto a O como el producto $F_1 l_1$. Usamos la letra griega τ (tau) para indicar la torca. En general, la torca para una fuerza de magnitud F cuya línea de acción es una distancia perpendicular l desde O es

$$\tau = Fl \qquad (10.1)$$

Los físicos suelen utilizar el término "torca", mientras que los ingenieros prefieren utilizar "momento" (a menos que se trate de un eje giratorio). Unos y otros utilizan el término "brazo de palanca" o "brazo de momento" para designar la distancia l.

El brazo de palanca de $\vec{F}_1$ en la figura 10.2 es la distancia perpendicular l_1, y el brazo de palanca de $\vec{F}_2$ es la distancia perpendicular l_2. La línea de acción de $\vec{F}_3$ pasa por el punto O, de modo que el brazo de palanca para $\vec{F}_3$ es cero y su torca con respecto a O es cero. De la misma manera, la fuerza $\vec{F}_c$ en la figura 10.1 tiene una torca nula con respecto al punto O; $\vec{F}_b$ tiene una torca mayor que $\vec{F}_a$ ya que su brazo de palanca es mayor.

CUIDADO **la torca siempre se mide con respecto a un punto** Observe que la torca *siempre* se define con referencia a un punto específico. Si modificamos la posición de este punto, la torca de cada fuerza también cambia. Por ejemplo, la torca de la fuerza $\vec{F}_3$ de la figura 10.2 es cero con respecto al punto O, pero la torca $\vec{F}_3$ *no* es cero con respecto al punto A. No es suficiente referirnos a "la torca de $\vec{F}$"; se debe decir "la torca de $\vec{F}$ con respecto al punto X" o "la torca de $\vec{F}$ alrededor del punto X".

La fuerza $\vec{F}_1$ en la figura 10.2 tiende a provocar la rotación en *sentido antihorario* con respecto a O, mientras que $\vec{F}_2$ ocasiona el giro en *sentido horario*. Para distinguir entre estas dos posibilidades, tenemos que elegir un sentido de giro positivo. Con la elección de que las *torcas en sentido antihorario son positivas y en sentido horario son negativas*, las torcas de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con respecto a O son

$$\tau_1 = +F_1 l_1 \qquad \tau_2 = -F_2 l_2$$

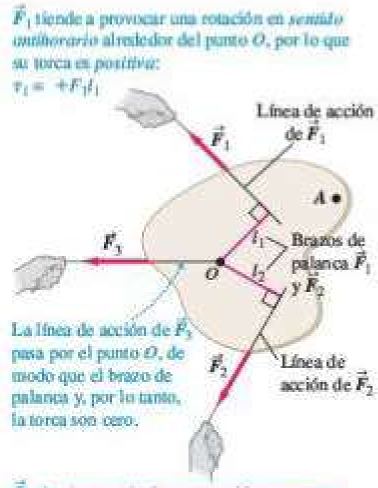
La figura 10.2 muestra esta opción para el signo de la torca. A menudo se utiliza el símbolo ⟲+ para indicar nuestra elección del sentido de rotación positivo.

La unidad del SI de la torca es el newton-metro. En nuestro análisis acerca del trabajo y la energía llamamos joule a esta combinación. Pero la torca *no* es trabajo ni energía, y se expresa en newton-metros, *no* en joules.

La figura 10.3 muestra una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto P descrito por un vector de posición $\vec{r}$ con respecto al punto elegido O. Hay tres formas de calcular la torca de esta fuerza:

1. Encontrar el brazo de palanca l y utilizar $\tau = Fl$.
2. Determinar el ángulo ϕ entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$; el brazo de palanca es r sen ϕ, así que $\tau = rF$ sen ϕ.
3. Representar $\vec{F}$ en términos de una componente radial F_{rad} a lo largo de la dirección de $\vec{r}$ y una componente tangencial F_{tan} en ángulos rectos, perpendiculares a $\vec{r}$. (Esto se denomina una componente tangencial porque si el cuerpo gira, el punto donde actúa la fuerza se mueve en un círculo, y esta componente es tangente a ese círculo). Entonces, $F_{tan} = F$ sen ϕ y $\tau = r(F \text{ sen } \phi) = F_{tan} r$.

10.2 La torca de una fuerza en torno a un punto es el producto de la magnitud de la fuerza por el brazo de palanca de la fuerza.



10.3 Tres maneras de calcular la torca de la fuerza $\vec{F}$ en torno al punto O. En esta figura, $\vec{r}$ y $\vec{F}$ se encuentran en el plano de la página y el vector torca $\vec{\tau}$ apunta saliendo de la página hacia usted.

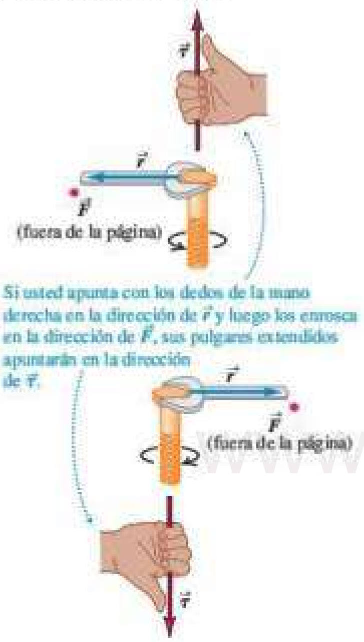
Video Tutor Demo

La componente F_{rad} *no* produce torca con respecto a O ya que su brazo de palanca con respecto al punto es cero (compare las fuerzas $\vec{F}_c$ en la figura 10.1 y $\vec{F}_3$ en la figura 10.2).

Resumiendo estas tres expresiones para la torca, tenemos

$$\tau = Fl = rF \operatorname{sen} \phi = F_{tan} r \qquad \text{(magnitud de la torca)} \qquad (10.2)$$

10.4 El vector torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige a lo largo del eje del tornillo, perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Los dedos de la mano derecha se enroscan en la dirección de la rotación que genera la torca.



Torca como un vector

En la sección 9.1 vimos que la velocidad angular y la aceleración angular se pueden representar como vectores; lo mismo es cierto para la torca. Para ver cómo hacerlo, observe que la cantidad $rF \operatorname{sen} \phi$ en la ecuación (10.2) es la magnitud del *producto vectorial* $\vec{r} \times \vec{F}$ que se define en la sección 1.10. (Regrese y repase esa definición). Ahora se generaliza la definición de la torca de la siguiente manera: cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa en un punto que tiene un vector de posición $\vec{r}$ con respecto a un origen O, como se muestra en la figura 10.3, la torca $\vec{\tau}$ de la fuerza con respecto a O es la cantidad *vectorial*

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(definición del vector torca)} \qquad (10.3)$$

La torca tal como se define en la ecuación (10.2) es solo la magnitud del vector $\vec{r} \times \vec{F}$. La dirección de $\vec{\tau}$ es perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. En particular, si tanto $\vec{r}$ como $\vec{F}$ se encuentran en un plano perpendicular al eje de rotación, como en la figura 10.3, entonces el vector torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige a lo largo del eje de rotación, con un sentido indicado por la regla de la mano derecha (figura 1.29). La figura 10.4 muestra las relaciones de dirección.

En los diagramas que implican $\vec{r}$, $\vec{F}$ y $\vec{\tau}$, es común tener uno de los vectores orientado en forma perpendicular a la página. (De hecho, por la naturaleza misma del producto cruz, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ *debe* ser perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$). Utilizaremos un punto (•) para representar un vector que apunta hacia afuera de la página (véase la figura 10.3) y una cruz (×) para representar un vector que apunta hacia adentro de la página.

En las siguientes secciones, por lo general, nos interesará la rotación de un cuerpo alrededor de un eje orientado en una dirección constante determinada. En ese caso, solo la componente de la torca a lo largo de ese eje es de interés, y con frecuencia la llamamos la componente de la torca con respecto al *eje* especificado.

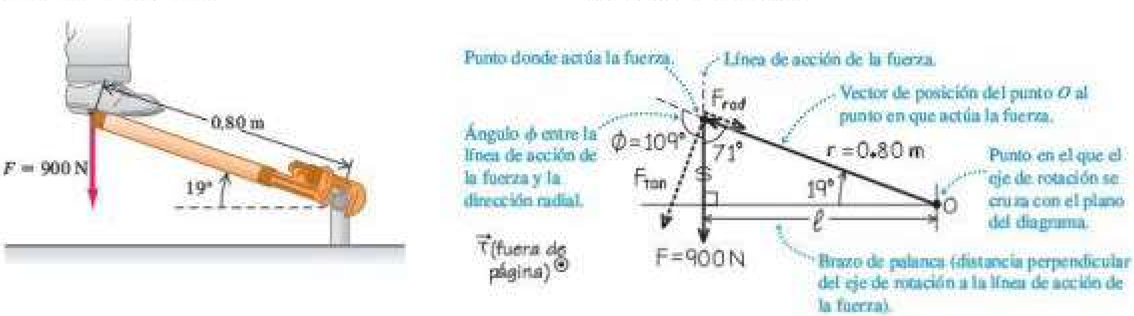
Ejemplo 10.1 Aplicación de una torca

Para aflojar una junta de tubería, un plomero aficionado ensarta un pedazo de tubo (una "extensión") en el mango de su llave. Se coloca de pie en el extremo del tubo, aplicando todo su peso de 900 N en un punto a 0.80 m del centro de la junta (figura 10.5*a*). El mango de la llave y la extensión forman un ángulo de 19° con la horizontal. Encuentre la magnitud y dirección de la torca que se aplica en torno al centro de la junta.

10.5 *a*) Un plomero aficionado intenta aflojar una junta de tubería colocándose de pie sobre una "extensión". *b*) Diagrama vectorial para encontrar la torca con respecto a O.

a) Diagrama de la situación

b) Diagrama de cuerpo libre



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 10.5*b* muestra los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y el ángulo entre ellos ($\phi = 109°$). La ecuación (10.1) o (10.2) nos indicará la magnitud de la torca. La regla de la mano derecha con la ecuación (10.3), $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, nos indica la dirección de la torca.

EJECUTAR: Para utilizar la ecuación (10.1), primero se calcula el brazo de palanca l. Como se muestra en la figura 10.5*b*,

$$l = r \text{ sen } \phi = (0.80 \text{ m}) \text{ sen } 109° = (0.80 \text{ m}) \text{ sen } 71° = 0.76 \text{ m}$$

Entonces, la ecuación (10.1) nos dice que la magnitud de la torca es

$$\tau = Fl = (900 \text{ N})(0.76 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se obtiene el mismo resultado de la ecuación (10.2):

$$\tau = rF \text{ sen } \phi = (0.80 \text{ m})(900 \text{ N})(\text{sen } 109°) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

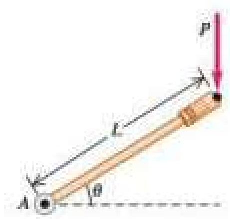
Alternativamente, podemos encontrar $F_{\tan}$, la componente tangencial de $\vec{F}$ que actúa perpendicular a $\vec{r}$. La figura 10.5*b* muestra que esta componente se encuentra en un ángulo de $109° - 90° = 19°$ de $\vec{F}$, de modo que $F_{\tan} = F \text{ sen } \phi = F(\cos 19°) = (900 \text{ N})(\cos 19°) = 851$ N. Entonces, de acuerdo con la ecuación 10.2,

$$\tau = F_{\tan} r = (851 \text{ N})(0.80 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Doble los dedos de la mano derecha de la dirección de $\vec{r}$ (en el plano de la figura 10.5*b*, hacia la izquierda y hacia arriba) a la dirección de $\vec{F}$ (verticalmente hacia abajo). Entonces su dedo pulgar derecho apunta hacia afuera del plano de la figura: esta es la dirección de $\vec{\tau}$.

EVALUAR: Para comprobar la torca $\vec{\tau}$, observe que la fuerza en la figura 10.5 tiende a producir una rotación en sentido antihorario en torno a O. Si enrosca los dedos de su mano derecha en dirección antihoraria, el pulgar apunta hacia afuera del plano de la figura 10.5, que es de hecho la dirección de la torca.

Evalúe su comprensión de la sección 10.1 La figura muestra una fuerza P que se aplica a un extremo de una palanca de longitud L. ¿Cuál es la magnitud de la torca de esta fuerza con respecto al punto A? **i.** PL sen θ; **ii.** PL cos θ; **iii.** PL tan θ.



10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido

Ahora estamos listos para desarrollar la relación fundamental de la dinámica rotacional de un cuerpo rígido. Vamos a demostrar que la aceleración angular de un cuerpo rígido que gira es directamente proporcional a la suma de las componentes de la torca a lo largo del eje de rotación. El factor de proporcionalidad es el momento de inercia.

Para desarrollar esta relación, de nuevo imagine que el cuerpo se compone de un gran número de partículas. Elegimos el eje de rotación en el eje z; la primer partícula tiene masa m_1 y la distancia r_1 a partir de este eje (figura 10.6). La *fuerza neta* $\vec{F}_1$ que actúa sobre esta partícula tiene una componente $F_{1,\text{rad}}$ a lo largo de la dirección radial, una componente $F_{1,\tan}$ que es tangente al círculo de radio r_1 en el que la partícula se mueve conforme gira el cuerpo, y una componente F_{1z} a lo largo del eje de rotación. La segunda ley de Newton para la componente tangencial es

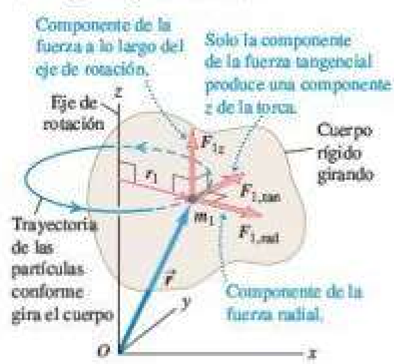
$$F_{1,\tan} = m_1 a_{1,\tan} \tag{10.4}$$

Podemos expresar la aceleración tangencial de la primera partícula en términos de la aceleración angular α_z del cuerpo usando la ecuación (9.14): $a_{1,\tan} = r_1\alpha_z$. Utilizando esta relación y multiplicando ambos lados de la ecuación (10.4) por r_1 obtenemos

$$F_{1,\tan} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \tag{10.5}$$

De acuerdo con la ecuación (10.2), $F_{1,\tan} r_1$ es justo la *torca* de la fuerza neta con respecto al eje de rotación, igual a la componente τ_{1z} del vector torca a lo largo de dicho eje. El subíndice z nos recuerda que la torca afecta la rotación en torno al eje z, de la misma manera que el subíndice en F_{1z} nos recuerda que esta fuerza afecta el movimiento de la partícula 1 a lo largo del eje z.

10.6 Conforme un cuerpo rígido gira alrededor del eje z, una fuerza neta $\vec{F}_1$ actúa sobre una partícula del cuerpo. Solo la componente de la fuerza $F_{1,\tan}$ puede afectar la rotación, ya que solo $F_{1,\tan}$ ejerce una torca en torno a O con una componente z (a lo largo del eje de rotación).



Las componentes $F_{1,\,rad}$ y F_{1z} no contribuyen a la torca alrededor del eje z, ya que ninguna tiende a modificar la rotación de la partícula alrededor de ese eje. Por lo tanto $\tau_{1z} = F_{1,\,tan}r_1$ es la torca total que actúa sobre la partícula con respecto al eje de rotación. Además, $m_1r_1^2$ es I_1, el momento de inercia de la partícula alrededor del eje de rotación. De esta manera, rescribimos la ecuación (10.5) como:

$$\tau_{1z} = I_1\alpha_z = m_1r_1^2\alpha_z$$

Escribimos una ecuación similar para cada partícula del cuerpo y luego sumamos todas las ecuaciones:

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \cdots = I_1\alpha_z + I_2\alpha_z + \cdots = m_1r_1^2\alpha_z + m_2r_2^2\alpha_z + \cdots$$

o

$$\sum \tau_{iz} = \left(\sum m_ir_i^2\right)\alpha_z \qquad (10.6)$$

El miembro izquierdo de la ecuación (10.6) es la suma de todas las torcas en torno al eje de rotación que actúan sobre todas las partículas. El miembro derecho es $I = \sum m_ir_i^2$, el momento de inercia total alrededor del eje de rotación, multiplicado por la aceleración angular α_z. Observe que α_z es la misma para todas las partículas, ya que este es un cuerpo *rígido*. Así, para el cuerpo rígido como un todo, la ecuación (10.6) es el ***análogo rotacional de la segunda ley de Newton***:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \quad \text{(análogo rotacional de la segunda ley de Newton para un cuerpo rígido)} \qquad (10.7)$$

Así como la segunda ley de Newton dice que la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la masa de la partícula multiplicada por su aceleración, la ecuación (10.7) dice que la torca neta que actúa sobre un cuerpo rígido es igual al momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación multiplicado por su aceleración angular (figura 10.7).

Observe que como en nuestra deducción supusimos que la aceleración angular α_z es la misma para todas las partículas del cuerpo, la ecuación (10.7) *solo* es válida para cuerpos *rígidos*. Por lo que esta ecuación no se aplica a un tanque de agua que gira o a un remolino de aire, donde la aceleración angular es diferente para diferentes partes. Además, como en la deducción utilizamos la ecuación (9.14), $a_{tan} = r\alpha_z$, α_z debe medirse en rad/s^2.

La torca que actúa sobre cada partícula se debe a la fuerza neta que actúa sobre esa partícula, la cual es la suma vectorial de las fuerzas externas e internas (véase la sección 8.2). De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas *internas* que cualquier par de partículas del cuerpo rígido ejercen una sobre la otra son iguales y opuestas (figura 10.8). Si estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que une las dos partículas, sus brazos de palanca con respecto a cualquier eje también serán iguales. Así, las torcas para estas dos partículas son iguales y opuestas, y suman cero. De hecho, *todas* las torcas internas suman cero, así que la suma $\sum \tau_z$ en la ecuación (10.7) incluye solo las torcas de las fuerzas *externas*.

Con frecuencia una fuerza externa importante que actúa sobre un cuerpo es su *peso*. Esta fuerza no se concentra en un solo punto, sino que actúa sobre todas las partículas del cuerpo. No obstante, resulta que si $\vec{g}$ tiene el mismo valor en todos los puntos, siempre obtenemos la torca correcta (con respecto a cualquier eje dado), si suponemos que todo el peso se concentra en el *centro de masa* del cuerpo. Demostraremos esto en el capítulo 11, pero mientras tanto lo usaremos en algunos problemas de este capítulo.

10.7 Para aflojar o apretar un tornillo, es preciso darle una aceleración angular y, así, aplicar una torca. Esto se facilita si se usa un destornillador con un mango de radio grande, pues así se aumenta el brazo de palanca de la fuerza que aplicamos con la mano.

10.8 Dos partículas de un cuerpo rígido ejercen fuerzas iguales y opuestas una sobre la otra. Si estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que une las partículas, los brazos de palanca de las fuerzas con respecto a un eje que pasa por O son iguales, y las torcas debidas a las dos fuerzas son iguales y opuestas. Solo las torcas *externas* afectan la rotación de un cuerpo.

Estrategia para resolver problemas 10.1 Dinámica rotacional de cuerpos rígidos

Nuestra estrategia para resolver problemas de dinámica rotacional es muy similar a la estrategia para resolver problemas 5.2, donde interviene la segunda ley de Newton.

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ecuación (10.7), $\sum \tau_z = I\alpha_z$, es útil en todos los casos en que actúan torcas sobre un cuerpo rígido. En algunos casos, tal vez se prefiera un método de energía, como se hizo en la sección 9.4. Sin embargo, cuando la incógnita es una fuerza, una torca, una aceleración, una aceleración angular o un tiempo transcurrido, usar $\sum \tau_z = I\alpha_z$ casi es siempre mejor.

PLANTEAR *el problema* empleando estos pasos:
1. Elabore un diagrama de la situación e identifique el cuerpo o los cuerpos que va a analizar. Indique el eje de rotación.
2. Para cada cuerpo, dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre la *forma* de cada cuerpo, incluyendo todas las dimensiones y los ángulos que necesita para los cálculos de la torca. Etiquete las cantidades pertinentes con símbolos algebraicos.
3. Elija ejes de coordenadas para cada cuerpo e indique un sentido de rotación positivo (horario o antihorario) para cada cuerpo que gire. Si conoce el sentido de α_z, elíjalo como el sentido de rotación positivo.

EJECUTAR *la solución:*
1. Para cada cuerpo del problema, determine si experimenta movimiento de traslación, movimiento de rotación o ambos. Luego, aplique $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (como en la sección 5.2), $\sum \tau_z = I\alpha_z$, o ambas al cuerpo.
2. Exprese en forma algebraica cualquier relación *geométrica* entre los movimientos de dos o más cuerpos. Un ejemplo es una cadena que se desenrolla, sin resbalar, de una polea o un volante que rueda sin deslizar (esto se analiza en la sección 10.3). Estas relaciones por lo general aparecen como relaciones entre aceleraciones lineal y/o angular.
3. Asegúrese de que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas. Resuelva las ecuaciones para obtener la(s) incógnita(s).

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que los signos algebraicos de sus resultados sean lógicos. Por ejemplo, si está desenrollando hilo de un carrete, ¡sus respuestas no deberán decirnos que el carrete gira en el sentido en que el hilo se enrolla! Compruebe que cualquier resultado algebraico sea correcto para casos especiales o valores extremos de las cantidades.

Ejemplo 10.2 Cable que se desenrolla I

La figura 10.9*a* muestra la situación que analizamos en el ejemplo 9.7 usando métodos de energía. ¿Cuál es la aceleración del cable?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: No se puede utilizar el método de energía de la sección 9.4, que no implica aceleración. En vez de ello, vamos a aplicar la dinámica rotacional para encontrar la aceleración angular del cilindro (figura 10.9*b*). Después se encontrará una relación entre el movimiento del cable y el movimiento del borde del cilindro, y esta se utilizará para encontrar la aceleración del cable. El cilindro gira en sentido antihorario cuando se tira del cable, así que tomamos la rotación antihoraria como positiva. La fuerza neta sobre el cilindro debe ser cero debido a que su centro de masa permanece en reposo. La fuerza F ejercida por el cable produce una torca alrededor del eje de rotación. El peso (magnitud Mg) y la fuerza normal (magnitud n) ejercida por los cojinetes del cilindro *no* producen torca alrededor del eje de rotación, ya que ambos actúan a lo largo de rectas que pasan por dicho eje.

EJECUTAR: El brazo de palanca de F es igual al radio $R = 0.060$ m del cilindro, así que la torca es $\tau_z = FR$. (Esta torca es positiva porque tiende a producir una rotación antihoraria). De acuerdo con la tabla 9.2, caso f), el momento de inercia del cilindro en torno al eje de rotación es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Por lo tanto, la ecuación (10.7) nos indica que

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9.0\ \text{N})}{(50\ \text{kg})(0.060\ \text{m})} = 6.0\ \text{rad/s}^2$$

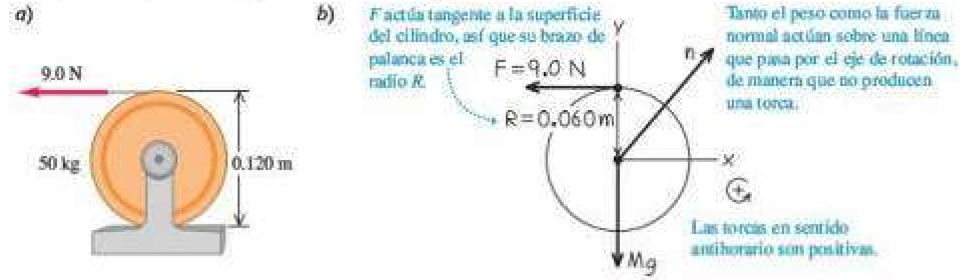
(Podemos agregar "rad" a nuestro resultado porque los radianes son cantidades adimensionales).

Para obtener la aceleración lineal del cable, recuerde de la sección 9.3 que la aceleración de un cable que se desenrolla de un cilindro es igual a la componente tangencial de la aceleración de un punto en la superficie del cilindro donde el cable es tangente a este. Esta aceleración tangencial está dada por la ecuación (9.14):

$$a_{\text{tan}} = R\alpha_z = (0.060\ \text{m})(6.0\ \text{rad/s}^2) = 0.36\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: ¿Puede usar este resultado, junto con una ecuación del capítulo 2, para determinar la rapidez del cable después de que se ha desenrollado 2.0 m? ¿Concuerda su resultado con el del ejemplo 9.7?

10.9 *a*) Cilindro y cable. *b*) Nuestro diagrama de cuerpo libre para el cilindro.



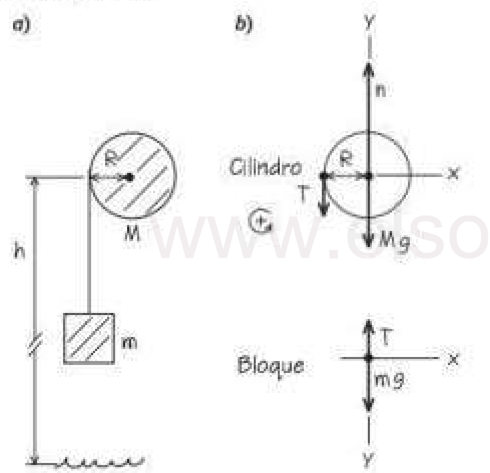
Ejemplo 10.3 Cable que se desenrolla II

En el ejemplo 9.8 (sección 9.4), ¿cuáles son la aceleración del bloque que cae y la tensión en el cable?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Aplicaremos dinámica traslacional al bloque y dinámica rotacional al cilindro. Como en el ejemplo 10.2, relacionaremos a la aceleración lineal del bloque (nuestra incógnita) con la aceleración angular del cilindro. En la figura 10.10 esbozamos la situación y dibujamos un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo. Tomamos el sentido de rotación antihorario como positivo para el cilindro, y la dirección hacia abajo de la coordenada y como positiva para el bloque.

10.10 *a)* Nuestro diagrama de la situación. *b)* Nuestros diagramas de cuerpo libre para el cilindro y el bloque. Suponemos que el cable tiene masa despreciable.



EJECUTAR: La segunda ley de Newton aplicada al bloque da

$$\sum F_y = mg + (-T) = ma_y$$

Para el cilindro, la única torca alrededor de su eje es la debida a la tensión del cable T. Por lo tanto, al aplicar la ecuación (10.7) se obtiene

$$\sum \tau_z = RT = I\alpha_z = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

Como en el ejemplo 10.2, la aceleración del cable es igual a la aceleración tangencial de un punto en el borde del cilindro. De acuerdo con la ecuación (9.14), es $a_y = a_{tan} = R\alpha_z$. Usamos esto para sustituir $R\alpha_z$ con a_y en la ecuación anterior del cilindro y después dividimos entre . El resultado es $T = \frac{1}{2}Ma_y$. Ahora sustituimos esta expresión para T en la segunda ley de Newton en el caso del bloque y despejamos la aceleración a_y:

$$mg - \tfrac{1}{2}Ma_y = ma_y$$

$$a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

Para encontrar la tensión del cable T, sustituimos nuestra expresión para a_y en la ecuación del bloque:

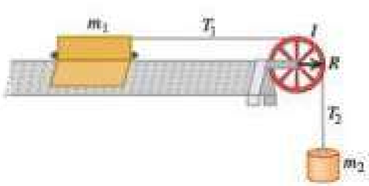
$$T = mg - ma_y = mg - m\left(\frac{g}{1 + M/2m}\right) = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

EVALUAR: La aceleración es positiva (en la dirección hacia abajo) y menor que g, como debería ser ya que el cable está frenando al bloque. La tensión en el cable *no* es igual al peso mg del bloque; si así fuera, el objeto no se podría acelerar.

Revisemos algunos casos específicos. Cuando M es mucho mayor que m, la tensión es casi igual a mg, y la aceleración, en consecuencia, es mucho menor que g. Cuando M es cero, $T = 0$ y $a_y = g$; el objeto cae libremente. Si el objeto parte del reposo ($v_{0y} = 0$) a una altura h sobre el piso, su velocidad en y cuando golpea al piso está dada por $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_yh = 2a_yh$, así que

$$v_y = \sqrt{2a_yh} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

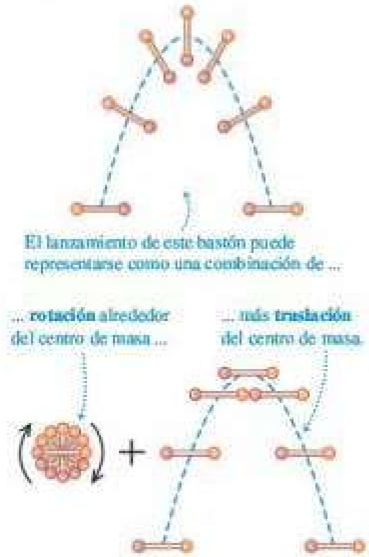
Este es el mismo resultado que obtuvimos usando consideraciones de energía en el ejemplo 9.8.



Evalúe su comprensión de la sección 10.2 La figura muestra un deslizador de masa m_1 que se mueve sin fricción sobre un riel horizontal de aire. Está sujeto a un objeto de masa m_2 con una cuerda de masa despreciable. La polea tiene radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. Cuando el objeto colgante se suelta, acelera hacia abajo, el deslizador acelera a la derecha y la cuerda hace girar la polea sin deslizarse ni estirarse. Ordene, de mayor a menor, las magnitudes de las siguientes fuerzas que actúan durante el movimiento. **i.** La fuerza de tensión (magnitud T_1) en la parte horizontal de la cuerda; **ii.** la fuerza de tensión (magnitud T_2) en la parte vertical de la cuerda; **iii.** el peso m_2g del objeto colgante. ❙

10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

Podemos extender nuestro análisis de la dinámica del movimiento de rotación a algunos casos en los que se mueve el eje de rotación. Cuando esto ocurre, el movimiento del cuerpo es de **traslación y rotación combinados**. La clave para entender estas situaciones es la siguiente: cada posible movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una combinación de *movimiento de traslación del centro de masa* y *de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa*. Esto se cumple aun si el centro de masa se acelera, de modo que no está en reposo en ningún marco inercial. La figura 10.11 ilustra esto para el movimiento de un bastón que se lanza: el centro de masa del bastón sigue una parábola, como si el bastón fuera una partícula situada en el centro de masa. Otros ejemplos de movimientos de traslación y de rotación combinados son una pelota que rueda cuesta abajo y un yoyo que se desenrolla al final de una cuerda.



10.11 El movimiento de un cuerpo rígido es una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de ese centro.

Traslación y rotación combinadas: Relaciones de energía

Está más allá del alcance de este libro demostrar que el movimiento de un cuerpo rígido siempre puede dividirse en movimientos independientes de traslación del centro de masa y de rotación alrededor del centro de masa. Pero podemos comprobar que esto es cierto para la *energía cinética* de un cuerpo rígido con movimiento tanto de traslación como de rotación. En este caso, la energía cinética del cuerpo es la suma de una parte $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ asociada con el movimiento del centro de masa y una parte $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ asociada con la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa:

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \qquad (10.8)$$

(cuerpo rígido con traslación y rotación)

Para demostrar esta relación, imaginamos otra vez que el cuerpo rígido se compone de partículas. Consideremos una partícula representativa de masa m_i, como se muestra en la figura 10.12. La velocidad $\vec{v}_i$ de esta partícula respecto de un marco inercial es la suma vectorial de la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$ y la velocidad $\vec{v}_i'$ de la partícula *relativa* al centro de masa:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i' \qquad (10.9)$$

La energía cinética K_i de esta partícula en el marco inercial es $\frac{1}{2}m_iv_i^2$, que también podemos expresar como $\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$. Sustituyendo la ecuación (10.9) en esto, obtenemos

$$\begin{aligned} K_i &= \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \\ &= \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i') \\ &= \tfrac{1}{2}m_i(v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2) \end{aligned}$$

La energía cinética total es la suma $\sum K_i$ para todas las partículas del cuerpo. Expresando los tres términos de la ecuación como sumas individuales, obtenemos

$$K = \sum K_i = \sum\left(\tfrac{1}{2}m_iv_{cm}^2\right) + \sum(m_i\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i') + \sum\left(\tfrac{1}{2}m_iv_i'^2\right)$$

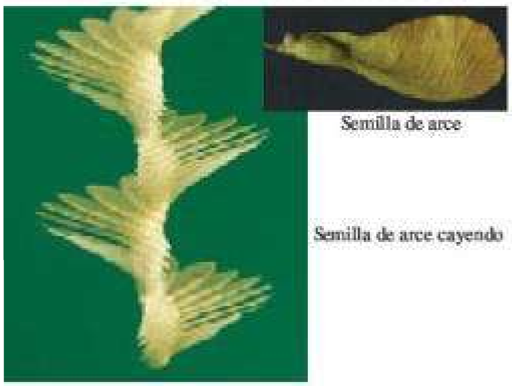
Los primeros dos términos tienen factores comunes que pueden sacarse de la sumatoria:

$$K = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v_{cm}^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \left(\sum m_i\vec{v}_i'\right) + \sum\left(\tfrac{1}{2}m_iv_i'^2\right) \qquad (10.10)$$

Aquí viene la recompensa a nuestro esfuerzo. En el primer término, $\sum m_i$ es la masa total M. El segundo término es cero porque $\sum m_i \vec{v}_i'$ es M multiplicada por la velocidad del centro de masa *con respecto al centro de masa*, que es cero por definición. El último término es la suma de las energías cinéticas de las partículas, calculada usando sus rapideces con respecto al centro de masa; esta es exactamente la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa. Siguiendo los mismos pasos que nos condu-

10.12 Cuerpo rígido con movimiento de traslación y de rotación.

Aplicación Combinación de movimiento de traslación y de rotación
Una semilla de arce consiste en una vaina unida a una ala aplanada, mucho más ligera. El aire alrededor del ala ralentiza la caída a aproximadamente 1 m/s y hace que la semilla gire alrededor de su centro de masa. La lenta caída de la semilla significa que una brisa puede llevar a la semilla a cierta distancia del árbol. En ausencia de viento, el centro de masa de la semilla cae directamente abajo.



jeron a la ecuación (9.17) para la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido, podemos escribir este último término como $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$, donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa, y ω es la rapidez angular. Así, la ecuación (10.10) se convierte en la ecuación (10.8):

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Rodar sin resbalar

Un caso importante de traslación y rotación combinadas es el de **rodar sin resbalar**, como el movimiento de la rueda que se muestra en la figura 10.13. La rueda es simétrica, así que su centro de masa está en su centro geométrico. Visualizamos el movimiento en un marco de referencia inercial, en el cual la superficie sobre la que la rueda se desplaza está en reposo. En este marco, el punto de la rueda que toca la superficie debe estar instantáneamente *en reposo* para que no resbale. Por lo tanto, la velocidad $\vec{v}_1'$ del punto de contacto, con respecto al centro de masa, debe tener la misma magnitud pero dirección opuesta que la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$. Si el radio de la rueda es R y su rapidez angular alrededor del centro de masa es ω, la magnitud de $\vec{v}_1'$ es $R\omega$; por lo tanto, debemos tener

$$v_{cm} = R\omega \qquad \text{(condición para rodar sin resbalar)} \qquad (10.11)$$

Como muestra la figura 10.13, la velocidad de un punto en la rueda es la suma vectorial de la velocidad del centro de masa y la velocidad del punto respecto al centro de masa. Así, mientras el punto 1 (el de contacto) está instantáneamente en reposo, el punto 3 en la parte de arriba se mueve hacia adelante con el *doble de la rapidez* del centro de masa, y los puntos 2 y 4 a los lados tienen velocidades a 45° con respecto a la horizontal.

En un instante dado, podemos pensar que la rueda gira alrededor de un "eje de rotación instantáneo" que pasa por el punto de contacto con el suelo. La velocidad angular ω es la misma para este eje que para un eje que pasa por el centro de masa; un observador en el centro de masa ve que el borde realiza el mismo número de revoluciones por segundo que el que ve un observador ubicado en el borde para el centro de masa alrededor de él. Si vemos así el movimiento de la rueda de la figura 10.13, la energía cinética de la rueda es $K = \frac{1}{2}I_1\omega^2$, donde I_1 es el momento de inercia de la rueda alrededor de un eje que pasa por el punto 1. Pero, por el teorema de los ejes paralelos, ecuación (9.19), $I_1 = I_{cm} + MR^2$, donde M es la masa total de la rueda e I_{cm} es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa. Usando la ecuación (10.11), la energía cinética de la rueda es

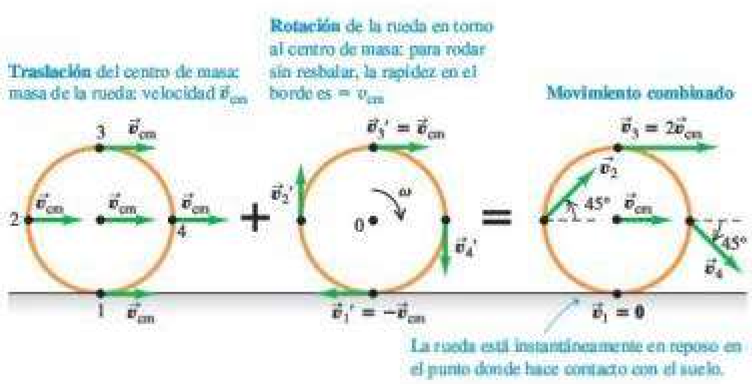
$$K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

que es igual a la ecuación (10.8).

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 7.11: Race Between a Block and a Disk

10.13 El movimiento de una rueda es la suma del movimiento de traslación del centro de masa y del movimiento de rotación de la rueda alrededor del centro de masa.



CUIDADO **Rodar sin resbalar** Observe que es importante tener en cuenta que la relación $v_{cm} = R\omega$ se cumple *únicamente* para el caso de rodar sin resbalar. Cuando un automóvil de "arrancones" comienza a moverse, los neumáticos traseros están girando con gran rapidez mientras que el vehículo casi no se mueve, así que $R\omega$ es mayor que v_{cm} (figura 10.14). Si el conductor aplica los frenos con demasiada fuerza y el coche derrapa, los neumáticos casi no girarán y $R\omega$ será menor que v_{cm}.

10.14 El humo que se eleva de los neumáticos traseros de este auto de arrancones indica que los neumáticos están resbalando sobre el pavimento, así que v_{cm} *no* es igual a $R\omega$.

Si un cuerpo rígido cambia de altura al moverse, también debemos considerar la energía potencial gravitacional. Como se analizó en la sección 9.4, la energía potencial gravitacional asociada a cualquier cuerpo extendido de masa M, rígido o no, es la misma que si sustituimos el cuerpo por una partícula de masa M situada en el centro de masa del cuerpo. Esto es,

$$U = Mgy_{cm}$$

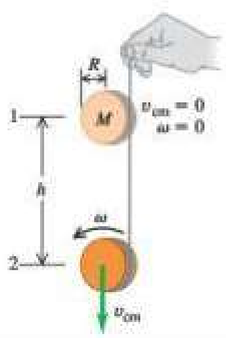
Ejemplo 10.4 Rapidez de un yoyo común

Se hace un yoyo enrollando una cuerda con masa despreciable varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R (figura 10.15). Se sostiene el extremo de la cuerda fija mientras se suelta el cilindro desde el reposo. La cuerda se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez v_{cm} del centro de masa del cilindro después de caer una distancia h.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El extremo superior de la cuerda está fijo, no se tira de este hacia arriba, así que su mano no efectúa trabajo sobre el sistema de la cuerda y el cilindro. Hay fricción entre la cuerda y el cilindro pero, como la cuerda no resbala sobre la superficie del cilindro, no se pierde energía mecánica. Por lo tanto, podemos usar la conservación de la energía mecánica. La energía cinética inicial del cilindro es $K_1 = 0$, y su energía cinética final K_2 está dada por la ecuación (10.8); la cuerda no tiene energía cinética porque no tiene masa. El momento de inercia es $I = \frac{1}{2}MR^2$ y, por la ecuación (9.13), $\omega = v_{cm}/R$ ya que la cuerda no resbala. Las energías potenciales son $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$.

10.15 Cálculo de la rapidez de un yoyo común.



EJECUTAR: Utilizando la ecuación (10.8), la energía cinética en el punto 2 es

$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$
$$= \frac{3}{4}Mv_{cm}^2$$

La energía cinética es $1\frac{1}{2}$ veces mayor que si el yoyo estuviera cayendo a una rapidez v_{cm} sin girar. Dos tercios de la energía cinética total ($\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$) son de traslación y un tercio ($\frac{1}{4}Mv_{cm}^2$) es de rotación. Utilizando conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + Mgh = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0$$
$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

EVALUAR: No se pierde ni se gana energía mecánica, así que desde el punto de vista de la energía, la cuerda no es más que una manera de convertir parte de la energía potencial gravitacional (que se libera conforme cae el cilindro) en energía cinética de rotación más que en energía cinética de traslación. Debido a que no toda la energía liberada entra en la traslación, v_{cm} es menor que la velocidad $\sqrt{2gh}$ de un objeto en caída libre desde una altura h.

Ejemplo 10.5 Carrera de cuerpos rodantes

En la demostración de una clase de física, un profesor "pone a competir" diversos cuerpos rígidos redondos, soltándolos del reposo desde arriba de un plano inclinado (figura 10.16). ¿Qué forma debe tener un cuerpo para ser el primero en llegar a la base?

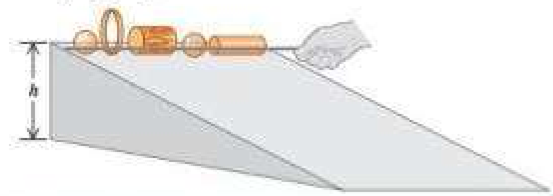
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fricción cinética no efectúa trabajo si los cuerpos ruedan sin resbalar. También podemos despreciar los efectos de la *fricción al rodar*, introducida en la sección 5.3, si los cuerpos

Continúa

y la superficie inclinada sobre la que ruedan son rígidos. (Más adelante en esta sección explicaremos por qué). Por lo tanto, podemos utilizar conservación de la energía. Cada cuerpo parte del reposo desde arriba de una pendiente de altura h, así que $K_1 = 0$, $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$. La energía cinética en la base del plano está dada por la ecuación (10.8); ya que los cuerpos ruedan sin resbalar, $\omega = v_{cm}/R$. Podemos expresar los momentos de inercia de los cuatro cuerpos redondos de la tabla 9.2, casos f) al i), como $I_{cm} = cMR^2$, donde c es un número menor que o igual a 1 que depende de la forma del cuerpo. Nuestro objetivo es hallar el valor de c que da al cuerpo la mayor rapidez v_{cm} después de que su centro de masa ha descendido una distancia vertical h.

10.16 ¿Cuál cuerpo rueda hacia abajo por la superficie inclinada más rápido y por qué?



EJECUTAR: Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \tfrac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 + 0$$

$$Mgh = \tfrac{1}{2}(1 + c)Mv_{cm}^2$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

EVALUAR: Para un valor dado de c, la rapidez v_{cm} una vez que se ha descendido una distancia h *no depende* de la masa M del cuerpo ni de su radio R. *Todos* los cilindros sólidos uniformes $(c = \frac{1}{2})$ tienen la misma rapidez abajo, sin importar sus masas y sus radios. Todos los valores de c nos indican que el orden de llegada para los cuerpos uniformes será el siguiente: **1.** cualquier esfera sólida $(c = \frac{2}{5})$, **2.** cualquier cilindro sólido $(c = \frac{1}{2})$, **3.** cualquier esfera hueca de pared delgada $(c = \frac{2}{3})$, y **4.** cualquier cilindro hueco de pared delgada $(c = 1)$. Los cuerpos con c pequeña siempre vencen a los cuerpos con c grande porque menos de su energía cinética se dedica a la rotación y más a la traslación.

Traslación y rotación combinadas: Dinámica

También podemos analizar los movimientos de traslación y de rotación combinados de un cuerpo rígido desde la perspectiva de la dinámica. En la sección 8.5 mostramos que, para un cuerpo de masa total M, la aceleración $\vec{a}_{cm}$ del centro de masa es igual a la de una masa puntual M sobre la que actúan todas las fuerzas externas a las que está sujeto el cuerpo:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad (10.12)$$

El movimiento de rotación alrededor del centro de masa se describe mediante el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, ecuación (10.7):

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \qquad (10.13)$$

10.17 El eje de una rueda de bicicleta pasa por el centro de masa de la rueda y es un eje de simetría. Por lo tanto, la rotación de la rueda está descrita por la ecuación (10.13), suponiendo que la bicicleta no dé la vuelta ni se incline hacia un lado (lo que alteraría la orientación del eje).

donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y $\sum\tau_z$ incluye todas las torcas externas con respecto a este eje. No es evidente de inmediato que la ecuación (10.13) sea aplicable al movimiento de un cuerpo rígido en traslación; después de todo, nuestra deducción de $\sum\tau_z = I\alpha_z$ en la sección 10.2 supuso que el eje de rotación era estacionario. Pero, la ecuación (10.13) es válida *aun si el eje de rotación se mueve*, siempre y cuando se cumplan las siguientes dos condiciones:

1. El eje que pasa por el centro de masa debe ser un eje de simetría.
2. El eje no debe cambiar de dirección.

Estas condiciones se satisfacen en muchos tipos de rotación (figura 10.17). Observe que, en general, este eje de rotación móvil *no* está en reposo en un marco de referencia inercial.

Ahora podemos resolver problemas de dinámica donde intervengan cuerpos rígidos con movimientos de traslación y de rotación simultáneos, suponiendo que el eje de rotación satisface las dos condiciones anteriores. La estrategia de resolución de problemas 10.1 (sección 10.2) es igualmente útil aquí, y le recomendamos repasarla. Tenga presente que, si un cuerpo tiene movimientos de traslación y de rotación al mismo tiempo, necesitamos dos ecuaciones de movimiento independientes *para el mismo cuerpo*. Una de estas, la ecuación (10.12), describe la traslación del centro de masa. La otra, ecuación (10.13), describe la rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa.

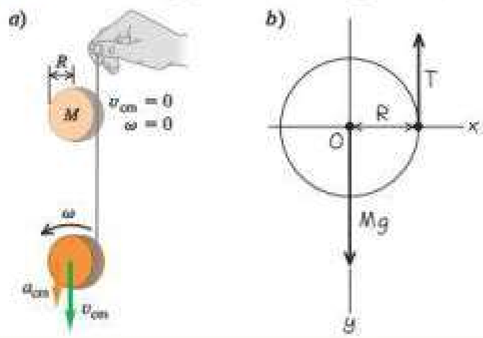
Ejemplo 10.6 Aceleración de un yoyo común

Para el yoyo común del ejemplo 10.4 (figura 10.18*a*), calcule la aceleración hacia abajo del cilindro y la tensión en la cuerda.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 10.18*b* es un diagrama de cuerpo libre del yoyo, donde se indican las direcciones de las coordenadas positivas. Nuestras incógnitas son $a_{cm\text{-}y}$ y T. Usaremos la ecuación (10.12) para el movimiento de traslación del centro de masa y la ecuación (10.13) para el movimiento de rotación alrededor del centro de masa. También utilizaremos la ecuación (10.11), que indica que la cuerda se desenrolla sin resbalar. Como en el ejemplo 10.4, el momento de inercia del yoyo para un eje que pasa por su centro de masa es $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

10.18 Dinámica de un yoyo común (véase la figura 10.15).



EJECUTAR: A partir de la ecuación (10.12),

$$\sum F_y = Mg + (-T) = Ma_{cm\text{-}y} \qquad (10.14)$$

De acuerdo con la ecuación (10.13),

$$\sum \tau_z = TR = I_{cm}\alpha_z = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha_z \qquad (10.15)$$

Según la ecuación (10.11), $v_{cm\text{-}z} = R\omega_z$; la derivada de esta expresión con respecto al tiempo es

$$a_{cm\text{-}y} = R\alpha_z \qquad (10.16)$$

Ahora usamos la ecuación (10.16) para eliminar α_z de la ecuación (10.15) y resolvemos las ecuaciones (10.14) y (10.15) simultáneamente para obtener T y $a_{cm\text{-}y}$. Los resultados son

$$a_{cm\text{-}y} = \tfrac{2}{3}g \qquad T = \tfrac{1}{3}Mg$$

EVALUAR: La cuerda detiene la caída del yoyo, pero no lo suficiente para detenerlo por completo. Por lo tanto, $a_{cm\text{-}y}$ es menor que el valor de g de caída libre y T es menor que el peso Mg del yoyo.

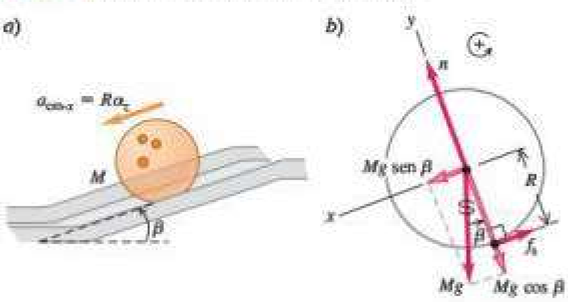
Ejemplo 10.7 Aceleración de una esfera rodante

Una bola de bolos sólida rueda sin resbalar bajando por una rampa que está inclinada un ángulo β con la horizontal (figura 10.19*a*). ¿Qué aceleración tiene la bola y cuál es la magnitud de la fuerza de fricción sobre esta? Trate la bola como esfera sólida uniforme, despreciando los agujeros.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El diagrama de cuerpo libre de la figura 10.19*b* muestra que solo la fuerza de fricción ejerce una torca en torno al centro de masa. Nuestras incógnitas son la aceleración $a_{cm\text{-}x}$ del centro de masa de la bola y la magnitud f de la fuerza de fricción. (Ya que la bola no resbala en el punto instantáneo de contacto con la rampa, esta es una fuerza de fricción *estática*; evita el deslizamiento e imparte a la bola su aceleración angular). Usaremos las ecuaciones (10.12) y (10.13) como en el ejemplo 10.6.

10.19 Una bola de bolos baja rodando una rampa.



EJECUTAR: El momento de inercia de una esfera sólida es $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$. Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = Mg\operatorname{sen}\beta + (-f) = Ma_{cm\text{-}x} \qquad (10.17)$$

$$\sum \tau_z = fR = I_{cm}\alpha_z = \left(\tfrac{2}{5}MR^2\right)\alpha_z \qquad (10.18)$$

Si la bola rueda sin resbalar, como en el ejemplo 10.6, se usa $a_{cm\text{-}x} = R\alpha_z$ para eliminar α_z de la ecuación (10.18):

$$fR = \tfrac{2}{5}MRa_{cm\text{-}x}$$

Esta ecuación y la (10.17) son dos ecuaciones para dos incógnitas, $a_{cm\text{-}x}$ y f. Despejamos f de la ecuación (10.17), y la sustituimos en la ecuación anterior para eliminar f y luego despejamos $a_{cm\text{-}x}$:

$$a_{cm\text{-}x} = \tfrac{5}{7}g\operatorname{sen}\beta$$

Por último, sustituimos esto en la ecuación (10.17) y despejamos f:

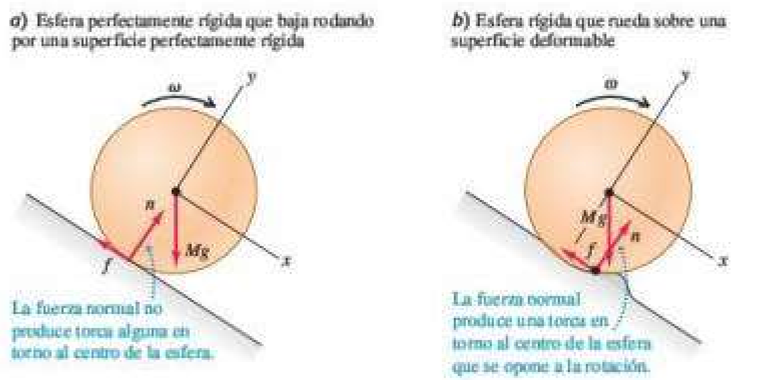
$$f = \tfrac{2}{7}Mg\operatorname{sen}\beta$$

Continúa

EVALUAR: La aceleración de la pelota es exactamente $\frac{5}{7}$ de la de un objeto que se *desliza* por la pendiente sin fricción. Si la bola desciende una distancia vertical h a medida que rueda por la rampa, su desplazamiento a lo largo de la rampa es $h/\text{sen}\beta$. Se puede demostrar que la velocidad de la bola en la parte inferior de la rampa es $v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$, lo mismo que nuestro resultado del ejemplo 10.5 con $c = \frac{2}{5}$.

Si la bola se hiciera rodar *cuesta arriba* sin resbalar, la fuerza de fricción aún estaría dirigida hacia arriba como se muestra en la figura 10.19*b*. ¿Sabe usted por qué?

10.20 Rodamiento descendente sobre *a*) una superficie perfectamente rígida y *b*) una superficie deformable. En el inciso *b*) la deformación se muestra muy exagerada.



Fricción por rodamiento

En el ejemplo 10.5 dijimos que podemos despreciar la fricción por rodamiento, si tanto el cuerpo como la superficie sobre la que rueda son perfectamente rígidos. En la figura 10.20*a* una esfera perfectamente rígida baja rodando una pendiente perfectamente rígida. La línea de acción de la fuerza normal pasa por el centro de la esfera, así que la torca es cero; no hay deslizamiento en el punto de contacto, así que la fricción no efectúa trabajo. La figura 10.20*b* muestra una situación más realista donde la superficie "se amontona" delante de la esfera y esta rueda en una zanja poco profunda. Debido a estas deformaciones, las fuerzas de contacto sobre la esfera ya no actúan en un solo punto, sino en un área, concentrándose en el frente de la esfera como se indica. En consecuencia, la fuerza normal ejerce ahora una torca que se opone a la rotación. Además, hay cierto deslizamiento de la esfera en la superficie debido a la deformación, causando pérdida de energía mecánica. La combinación de estos dos efectos es el fenómeno de *fricción por rodamiento*, que también ocurre si el cuerpo que rueda es deformable, como el neumático de un automóvil. Es común que el cuerpo que rueda y la superficie tengan la suficiente rigidez como para despreciar la fricción por rodamiento, y esto es lo que hemos hecho en los ejemplos de la sección.

Evalúe su comprensión de la sección 10.3 Suponga que el cilindro sólido que utilizó como yoyo en el ejemplo 10.6 se reemplaza con un cilindro hueco de igual masa y radio. *a*) La aceleración del yoyo **i.** ¿aumentará, **ii.** disminuirá o **iii.** permanecerá igual? *b*) La tensión en la cuerda **i.** ¿aumentará, **ii.** disminuirá o **iii.** permanecerá igual? MP

10.4 Trabajo y potencia en movimiento de rotación

Cuando pedaleamos una bicicleta, aplicamos fuerzas a un cuerpo en rotación y efectuamos trabajo sobre él. Algo similar ocurre en otras situaciones de la vida real, como el eje de un motor que gira, e impulsa una herramienta de potencia o un vehículo. Podemos expresar el trabajo en términos de la torca y del desplazamiento angular.

Suponga que una fuerza tangencial $\vec{F}_{tan}$ actúa en el borde de un disco con eje de rotación, por ejemplo, una niña que corre empujando un carrusel común (figura 10.21*a*). El disco gira un ángulo infinitesimal $d\theta$ alrededor de un eje fijo durante un tiempo infinitesimal dt (figura 10.21*b*). El trabajo dW efectuado por la fuerza $\vec{F}_{\tan}$ mientras que un punto del borde se mueve una distancia ds es $dW = F_{\tan}\,ds$. Si $d\theta$ se mide en radianes, entonces, $ds = R\,d\theta$ y

$$dW = F_{\tan}R\,d\theta$$

Ahora $F_{\tan}R$ es la *torca* τ_z debida a la fuerza $\vec{F}_{\tan}$, así que

$$dW = \tau_z\,d\theta \tag{10.19}$$

El trabajo total W efectuado por la torca durante un desplazamiento angular de θ_1 a θ_2 es

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z\,d\theta \qquad \text{(trabajo efectuado por una torca)} \tag{10.20}$$

Si la torca es *constante* y el ángulo cambia en una cantidad finita $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, entonces

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z\Delta\theta \quad \text{(trabajo efectuado por una torca constante)} \tag{10.21}$$

El trabajo efectuado por una torca *constante* es el producto de la torca y del desplazamiento angular. Si la torca se expresa en (N·m) y el desplazamiento angular en radianes, el trabajo está en joules. La ecuación (10.21) es el análogo rotacional de la ecuación (6.1), $W = Fs$, y la ecuación (10.20) es el análogo de la ecuación (6.7), $W = \int F_x\,dx$, para el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento rectilíneo.

Si la fuerza de la figura 10.21 tuviera una componente axial (paralela al eje de rotación) o radial (dirigida hacia el eje o alejándose de este), dicha componente no efectuaría trabajo, porque el desplazamiento del punto de aplicación solo tiene componente tangencial. Una componente de fuerza axial o radial tampoco contribuiría a la torca alrededor del eje de rotación, por lo que las ecuaciones (10.20) y (10.21) son correctas para *cualquier* fuerza, independientemente de sus componentes.

Si una torca efectúa trabajo sobre un cuerpo rígido que gira, la energía cinética experimenta un cambio en una cantidad igual a ese trabajo. Podemos demostrar esto usando exactamente el mismo procedimiento que en las ecuaciones (6.11) a (6.13) para la energía cinética de traslación de una partícula. Sea τ_z la torca *neta* sobre el cuerpo, de modo que, de acuerdo con la ecuación (10.7), $\tau_z = I\alpha_z$, suponiendo que el cuerpo es rígido y, por lo tanto, tiene momento de inercia I constante. Transformamos el integrando de la ecuación (10.20) en una integral sobre ω_z como se muestra a continuación:

$$\tau_z\,d\theta = (I\alpha_z)\,d\theta = I\frac{d\omega_z}{dt}\,d\theta = I\frac{d\theta}{dt}\,d\omega_z = I\omega_z\,d\omega_z$$

Puesto que τ_z es la torca neta, la integral de la ecuación (10.20) es el trabajo *total* efectuado sobre el cuerpo rígido en rotación. Así, la ecuación se convierte en

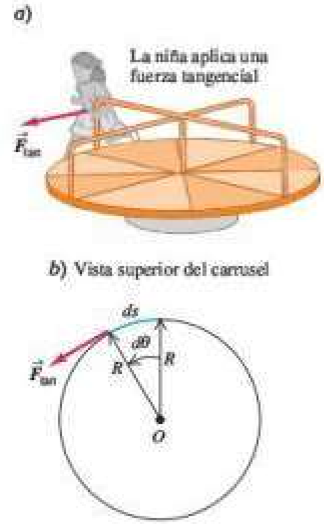
$$W_{\text{tot}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z\,d\omega_z = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_1^2 \tag{10.22}$$

El cambio de energía cinética de rotación de un cuerpo *rígido* es igual al trabajo efectuado por fuerzas ejercidas desde afuera del cuerpo (figura 10.22). Esta ecuación es análoga a la ecuación (6.13), el teorema trabajo-energía para una partícula.

¿Qué hay con respecto a la *potencia* asociada al trabajo efectuado por una torca sobre un cuerpo en rotación? Si dividimos ambos miembros de la ecuación (10.19) entre el intervalo dt durante el que se da el desplazamiento angular:

$$\frac{dW}{dt} = \tau_z\frac{d\theta}{dt}$$

10.21 Una fuerza tangencial aplicada a un cuerpo en rotación efectúa trabajo.



10.22 La energía cinética de rotación de una hélice de avión es igual a la suma total del trabajo realizado para que gire. Cuando está girando a una velocidad constante, el motor efectúa el trabajo positivo en la hélice y la resistencia del aire realiza trabajo negativo. Por lo tanto, el trabajo neto es cero y la energía cinética permanece constante.

Pero, dW/dt es la rapidez con que se efectúa trabajo, o *potencia* P, y $d\theta/dt$ es velocidad angular ω_z, así que

$$P = \tau_z \omega_z \qquad (10.23)$$

Si una torca τ_z (con respecto al eje de rotación) actúa sobre un cuerpo que gira con velocidad angular ω_z, su potencia (rapidez con que efectúa trabajo) es el producto de τ_z y ω_z. Esto es el análogo de la relación $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ que desarrollamos en la sección 6.4 para el movimiento de partículas.

Ejemplo 10.8 Cálculo de potencia a partir de la torca

Un motor eléctrico ejerce una torca constante de 10 N · m sobre una piedra de afilar montada que tiene un momento de inercia de la piedra de 2.0 kg · m^2. El sistema parte del reposo. Calcule el trabajo W efectuado por el motor en 8.0 s y la energía cinética K en ese lapso. ¿Qué potencia media P_{med} desarrolló el motor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La única torca que actúa se debe al motor. Puesto que la torca es constante, la piedra de afilar tiene una aceleración angular constante α_z. Usaremos la ecuación (10.7) para calcular el valor de α_z, y luego usaremos esto en las ecuaciones cinemáticas de la sección 9.2 para calcular el ángulo $\Delta\theta$ que la piedra de afilar gira en 8.0 s y su velocidad angular final ω_z. Podemos calcular W, K y P_{med}.

EJECUTAR: Tenemos $\sum \tau_z = 10\ \text{N} \cdot \text{m}$ e $I = 2.0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, de manera que $\sum \tau_z = I\alpha_z$ produce $\alpha_z = 5.0\ \text{rad/s}^2$. Según la ecuación (9.11),

$$\Delta\theta = \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2 = \tfrac{1}{2}(5.0\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s})^2 = 160\ \text{rad}$$

$$W = \tau_z \Delta\theta = (10\ \text{N} \cdot \text{m})(160\ \text{rad}) = 1600\ \text{J}$$

De acuerdo con las ecuaciones (9.7) y (9.17),

$$\omega_z = \alpha_z t = (5.0\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s}) = 40\ \text{rad/s}$$

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega_z^2 = \tfrac{1}{2}(2.0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(40\ \text{rad/s})^2 = 1600\ \text{J}$$

La potencia media es el trabajo realizado dividido entre el intervalo de tiempo:

$$P_{med} = \frac{1600\ \text{J}}{8.0\ \text{s}} = 200\ \text{J/s} = 200\ \text{W}$$

EVALUAR: La energía cinética inicial era cero, de manera que el trabajo efectuado W debe ser igual a la energía cinética final K [ecuación (10.22)]. Así es como lo calculamos. Podemos comprobar nuestro resultado $P_{med} = 200$ W considerando la potencia *instantánea*, $P = \tau_z \omega_z$. Dado que ω_z aumenta de forma continua, P también aumenta continuamente; este valor aumenta de cero en $t = 0$ a $(10\ \text{N} \cdot \text{m})(40\ \text{rad/s}) = 400$ W en $t = 8.0$ s. Tanto la velocidad angular como la potencia *media* aumentan *uniformemente* con el tiempo, así que la potencia *media* es la mitad de este valor máximo, es decir, 200 W.

Evalúe su comprensión de la sección 10.4 Se aplican torcas iguales a dos cilindros distintos, uno de los cuales tiene un momento de inercia dos veces mayor que el del otro. Cada cilindro está inicialmente en reposo. Después de una rotación completa, ¿cuál cilindro tiene mayor energía cinética? **i.** El cilindro con el mayor momento de inercia; **ii.** el cilindro con el menor momento de inercia; **iii.** ambos cilindros tienen la misma energía cinética.

MP

10.5 Momento angular

Todas las cantidades rotacionales que hemos estudiado en los capítulos 9 y 10 son análogas a alguna cantidad en el movimiento de traslación de una partícula. El análogo del *momento lineal* de una partícula en el movimiento de rotación es el **momento angular**, una cantidad vectorial denotada con $\vec{L}$. Su relación con el momento $\vec{p}$ (que con frecuencia llamaremos *momento lineal* por claridad) es exactamente la misma relación que hay entre la torca y la fuerza, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Para una partícula de masa constante m, velocidad $\vec{v}$, momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$, y vector de posición $\vec{r}$ con respecto al origen O de un marco inercial, el momento angular $\vec{L}$ se define como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \text{(momento angular de una partícula)} \qquad (10.24)$$

El valor de $\vec{L}$ depende del origen O elegido, ya que en él interviene el vector de posición de la partícula respecto al origen. Las unidades del momento angular son kg $\cdot$ m^2/s.

En la figura 10.23, una partícula se mueve en el plano xy; se muestran su vector de posición $\vec{r}$ y su momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. El vector momento angular $\vec{L}$ es perpendicular al plano xy. La regla de la mano derecha para productos vectoriales nos indica que su dirección está a lo largo del eje $+z$, y su magnitud es

$$L = mvr\,\text{sen}\,\phi = mvl \tag{10.25}$$

donde l es la distancia perpendicular desde la línea de $\vec{v}$ a O. Esta distancia hace las veces de "brazo de palanca" para el vector momento lineal.

Si una fuerza neta $\vec{F}$ actúa sobre una partícula, cambian su velocidad y su momento lineal, y también puede cambiar su momento angular. Podemos demostrar que la *rapidez de cambio* del momento angular es igual a la torca de la fuerza neta. Derivamos la ecuación (10.24) con respecto al tiempo usando la regla de la derivada de un producto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

El primer término es cero porque contiene el producto vectorial del vector $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ consigo mismo. En el segundo término sustituimos $m\vec{a}$ con la fuerza neta $\vec{F}$, para obtener

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \qquad \text{(para una partícula sobre la que actúa una fuerza neta } \vec{F}\text{)} \tag{10.26}$$

La rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual a la torca de la fuerza neta que actúa sobre ella. Compare este resultado con la ecuación (8.4), la cual dice que la rapidez de cambio $d\vec{p}/dt$ del momento *lineal* de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre esta.

Momento angular de un cuerpo rígido

Podemos usar la ecuación (10.25) para calcular el momento angular total de un *cuerpo rígido* que gira en torno al eje z con rapidez angular ω. Consideremos primero una rebanada del cuerpo que está en el plano xy (figura 10.24). Cada partícula de la rebanada se mueve en un círculo centrado en el origen, y en cada instante su velocidad $\vec{v}_i$ es perpendicular a su vector de posición $\vec{r}_i$, como se indica. Por consiguiente, en la ecuación (10.25), $\phi = 90°$ para toda partícula. Una partícula de masa m_i que está a una distancia r_i de O tiene una rapidez v_i igual a $r_i\omega$. De acuerdo con la ecuación (10.25), la magnitud L_i de su momento angular es

$$L_i = m_i(r_i\omega)r_i = m_i r_i^2\omega \tag{10.27}$$

La dirección del momento angular de cada partícula, dada por la regla de la mano derecha para el producto vectorial, es sobre el eje $+z$.

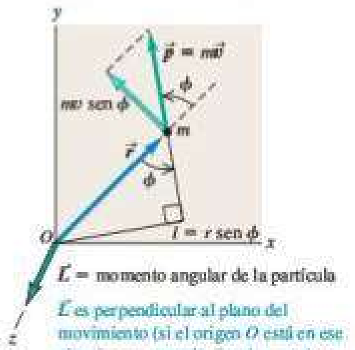
El momento angular *total* de la rebanada del cuerpo que está en el plano xy es la suma $\sum L_i$ de los momentos angulares L_i de las partículas. Haciendo la sumatoria de la ecuación (10.27), tenemos

$$L = \sum L_i = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega = I\omega$$

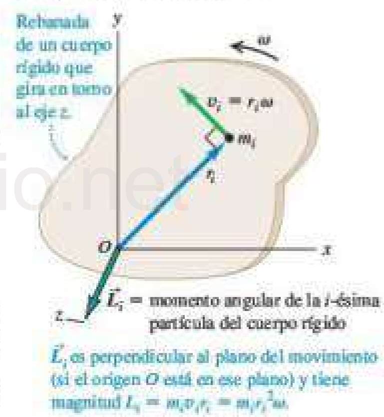
donde I es el momento de inercia de la rebanada alrededor del eje z.

Podemos efectuar este mismo cálculo para las demás rebanadas del cuerpo, todas paralelas al plano xy. Para los puntos que no están en ese plano, surge una complicación porque los vectores tienen componentes en la dirección z además de las direcciones x y y; esto da al momento angular de cada partícula una componente perpendicular al eje z. Pero *si el eje z es un eje de simetría*, las componentes perpendiculares de partículas en lados opuestos de este eje suman cero (figura 10.25). Así, cuando un cuerpo gira alrededor de un eje de simetría, su vector momento angular $\vec{L}$ queda sobre el eje de simetría y su magnitud es $L = I\omega$.

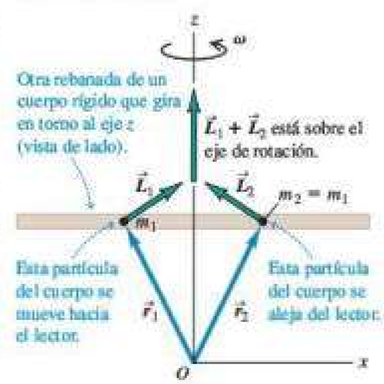
10.23 Cálculo del momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ de una partícula de masa m que se mueve en el plano xy.



10.24 Cálculo del momento angular de una partícula de masa m_i en un cuerpo rígido que gira con rapidez angular ω. (Compare con la figura 10.23).



10.25 Dos partículas con la misma masa están situadas simétricamente a cada lado del eje de rotación de un cuerpo rígido. Aunque los vectores de momento angular $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ de las dos partículas no están a lo largo del eje de rotación, su suma vectorial $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$ sí lo está.



10.26 En la rotación alrededor de un eje de simetría, $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ on paralelos y están sobre el eje. Las direcciones de ambos vectores están dadas por la regla de la mano derecha (compare con la figura 9.5).

El vector velocidad angular $\vec{\omega}$ también está sobre el eje de rotación, como se analizó al final de la sección 9.1. Por lo tanto, para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría, $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ tienen la misma dirección (figura 10.26). Así tenemos la relación *vectorial*

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{(para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría)} \qquad (10.28)$$

De acuerdo con la ecuación (10.26), la rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual a la torca de la fuerza neta que actúa sobre ella. Para cualquier sistema de partículas (incluidos cuerpos rígidos y no rígidos), la rapidez de cambio del momento angular *total* es igual a la suma de las torcas de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas. Las torcas de las fuerzas *internas* suman cero si las fuerzas actúan sobre la línea que va de una partícula a otra, como en la figura 10.8, así que la suma de las torcas solo incluye las torcas de las fuerzas *externas*. (Hubo una eliminación similar cuando hablamos del movimiento del centro de masa en la sección 8.5). Si el momento angular total del sistema de partículas es $\vec{L}$ y la suma de las torcas externas es $\sum\vec{\tau}$, entonces

$$\sum\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(para cualquier sistema de partículas)} \qquad (10.29)$$

Por último, si el sistema de partículas es un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría (el eje z), entonces $L_z = I\omega_z$ e I es constante. Si el eje tiene dirección fija en el espacio, los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ solo cambian en magnitud, no de dirección. En tal caso, $dL_z/dt = I\,d\omega_z/dt = I\alpha_z$, es decir,

$$\sum\tau_z = I\alpha_z$$

que es otra vez nuestra relación básica para la dinámica de la rotación de un cuerpo rígido. Si el cuerpo *no* es rígido, I puede cambiar y, en tal caso, L cambiará aun si ω es constante. Para un cuerpo que no es rígido, la ecuación (10.29) seguirá siendo válida, pero la ecuación (10.7) no.

Si el eje de rotación *no* es un eje de simetría, el momento angular en general *no* es paralelo al eje (figura 10.27). Al girar el cuerpo, el vector momento angular $\vec{L}$ describe un cono alrededor del eje de rotación. Puesto que $\vec{L}$ cambia, debe estar actuando una torca externa neta sobre el cuerpo, aun cuando la magnitud de la velocidad angular ω sea constante. Si el cuerpo es una rueda desbalanceada de un automóvil, esta torca provendrá de la fricción en los cojinetes, que hace que estos se desgasten. "Balancear" una rueda implica distribuir la masa de modo que el eje de rotación sea un eje de simetría; entonces, $\vec{L}$ apuntará a lo largo del eje de rotación y no se requerirá una torca neta para que la rueda siga girando.

En rotación de eje fijo, solemos usar el término "momento angular del cuerpo" para referirnos solo a la *componente* de $\vec{L}$ sobre el eje de rotación del cuerpo (el eje z en la figura 10.27), con un signo positivo o negativo para indicar el sentido de rotación, igual que con la velocidad angular.

10.27 Si el eje de rotación de un cuerpo rígido no es un eje de simetría, $\vec{L}$ no está en general sobre el eje de rotación. Aun si $\vec{\omega}$ es constante, la dirección de $\vec{L}$ cambia, y se requiere una torca neta para mantener la rotación.

Ejemplo 10.9 Momento angular y torca

Una hélice de turbina del motor a reacción de un avión tiene un momento de inercia de 2.5 kg · m² alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina, su velocidad angular es $\omega_z = (40\ \text{rad/s}^3)t^2$. *a*) Calcule el momento angular de la hélice en función del tiempo y su valor en $t = 3.0$ s. *b*) Determine la torca neta que actúa sobre la hélice en función del tiempo, y su valor en $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La hélice de una turbina gira alrededor de un eje de simetría (el eje z). Por lo tanto, el vector momento angular tiene solo una componente z, L_z, que podemos determinar a partir de la velocidad angular ω_z. Puesto que la dirección del momento angular es constante, la torca también tiene solo una componente τ_z a lo largo del eje de rotación. Usaremos la ecuación (10.28) para encontrar L_z a partir de ω_z y luego la ecuación (10.29) para calcular τ_z.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (10.28),

$$L_z = I\omega_z = (2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{rad/s}^3)t^2 = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t^2$$

(Omitimos "rad" de la respuesta porque el radián es una cantidad adimensional). En $t = 3.0$ s, $L_z = 900\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

b) De acuerdo con la ecuación (10.29),

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(2t) = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t$$

En $t = 3.0$ s,

$$\tau_z = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(3.0\ \text{s}) = 600\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 600\ \text{N}\cdot\text{m}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado de τ_z, vemos que la aceleración angular de la hélice es $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40\ \text{rad/s}^3)(2t) = (80\ \text{rad/s}^3)t$. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (10.7), la torca que actúa sobre la hélice es $\tau_z = I\alpha_z = (2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(80\ \text{rad/s}^3)t = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t$, lo que coincide con nuestro cálculo anterior.

Evalúe su comprensión de la sección 10.5 Una pelota está unida al extremo de una cuerda. Usted sostiene la cuerda por el otro extremo y hace girar a la pelota alrededor de su mano. *a*) Si la rapidez de la pelota es constante, ¿es constante su momento lineal $\vec{p}$? ¿Por qué? *b*) ¿Es constante su momento angular $\vec{L}$? ¿Por qué? |

10.6 Conservación del momento angular

Acabamos de ver que el momento angular puede servir para expresar de otro modo el principio dinámico básico del movimiento de rotación. También es la base del **principio de conservación del momento angular**. Al igual que la conservación de la energía y del momento lineal, este principio es una ley de conservación universal, válida en todas las escalas, desde los sistemas atómicos y nucleares hasta los movimientos de las galaxias. Este principio es consecuencia directa de la ecuación (10.29): $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Si $\sum\vec{\tau} = \mathbf{0}$, entonces $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$, y $\vec{L}$ es constante.

Si la torca externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva).

Una trapecista, un clavadista y una patinadora que realiza piruetas en la punta de un patín aprovechan este principio. Suponga que la trapecista acaba de separarse de un columpio con los brazos y las piernas extendidos, y girando en sentido antihorario alrededor de su centro de masa. Al encoger los brazos y las piernas, su momento de inercia I_{cm} con respecto a su centro de masa cambia de un valor grande I_1 a uno mucho menor I_2. La única fuerza externa que actúa sobre ella es su peso, que no tiene torca con respecto a un eje que pasa por su centro de masa. Así, su momento angular $L_z = I_{cm}\omega_z$ permanece constante, y su velocidad angular ω_z aumenta al disminuir I_{cm}. Esto es,

$$I_{1z} = I_2\omega_{2z} \qquad \text{(torca externa neta cero)} \qquad (10.30)$$

Cuando una patinadora o bailarina gira con los brazos extendidos y luego los encoge, su velocidad angular aumenta al disminuir su momento de inercia. En ambos casos, se conserva el momento angular en un sistema donde la torca externa neta es cero.

Si un sistema tiene varias partes, las fuerzas internas que esas partes ejercen entre sí provocan cambios en sus momentos angulares; pero el momento angular *total* no cambia. Por ejemplo, considere dos cuerpos *A* y *B* que interactúan entre sí pero con nadie más, como los astronautas de la sección 8.2 (véase la figura 8.8). Suponga que el cuerpo *A* ejerce una fuerza $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ sobre el cuerpo *B*; la torca correspondiente (con respecto al punto que elijamos) es $\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B}$. De acuerdo a la ecuación (10.29), esta torca es igual a la rapidez de cambio del momento angular de *B*:

$$\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{L}_B}{dt}$$

Al mismo tiempo, el cuerpo *B* ejerce una fuerza $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ sobre el cuerpo *A*, con una torca correspondiente $\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A}$, y

$$\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

10.28 Un gato que cae tuerce diversas partes de su cuerpo en direcciones distintas para caer parado. En todo momento durante este proceso, el momento angular total del gato sigue siendo cero.

Por la tercera ley de Newton, $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$. Además, si las fuerzas actúan en la misma línea, como en la figura 10.8, sus brazos de palanca con respecto al eje elegido son iguales. Así, las *torcas* de estas dos fuerzas son iguales y opuestas, y $\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B}$. Por lo tanto, si sumamos las dos ecuaciones anteriores, obtenemos

Video Tutor Demo

Video Tutor Demo

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \frac{d\vec{L}_B}{dt} = \mathbf{0}$$

o, puesto que $\vec{L}_A + \vec{L}_B$ es el momento angular *total* $\vec{L}$ del sistema,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{(torca externa neta cero)} \tag{10.31}$$

MasteringPHYSICS

PhET: Torque
ActivPhysics 7.14: Ball Hits Bat

Es decir, el momento angular total del sistema es constante. Las torcas de las fuerzas internas pueden transferir momento angular de un cuerpo al otro, pero no pueden cambiar el momento angular *total* del sistema (figura 10.28).

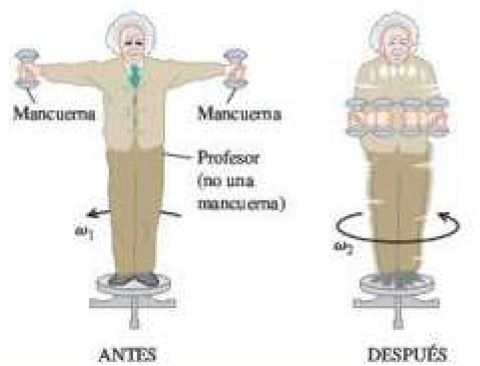
Ejemplo 10.10 Cualquiera puede bailar ballet

Un ágil profesor de física se pone de pie en el centro de una mesita giratoria y sin fricción con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5.0 kg en cada mano (figura 10.29). Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2.0 s. Calcule la velocidad angular final del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen. Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de 3.0 kg · m^2 con los brazos extendidos, y baja a 2.2 kg · m^2 si coloca las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1.0 m del eje al principio y a 0.20 m al final.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Ninguna torca externa actuará alrededor del eje vertical (z), así que L_z será constante. Utilizaremos la ecuación (10.30) para encontrar la velocidad angular final ω_{2z}. El momento de inercia del sistema es $I = I_{prof} + I_{manc}$. Tratamos a cada mancuerna como una partícula de masa m que aporta mr^2 a I_{manc}, donde r es la distancia perpendicular del eje de rotación a la mancuerna. Inicialmente, tenemos

10.29 Diversión con la conservación del momento angular.



$$I_1 = 3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5.0 \text{ kg})(1.0 \text{ m})^2 = 13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1 \text{ rev}}{2.0 \text{ s}} = 0.50 \text{ rev/s}$$

El momento de inercia final es

$$I_2 = 2.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5.0 \text{ kg})(0.20 \text{ m})^2 = 2.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

De acuerdo con la ecuación (10.30), la velocidad angular final es

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{1z} = \frac{13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{2.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}(0.50 \text{ rev/s}) = 2.5 \text{ rev/s} = 5\omega_{1z}$$

Observe que no tuvimos que cambiar "revoluciones" a "radianes" en este cálculo. ¿Por qué?

EVALUAR: El momento angular permanece constante, pero la velocidad angular aumenta por un factor de 5, de $\omega_{1z} = (0.50 \text{ rev/s})(2\pi \text{ rad/rev}) = 3.14$ rad/s a $\omega_{2z} = (2.5 \text{ rev/s})(2\pi \text{ rad/rev}) = 15.7$ rad/s. Las energías cinéticas inicial y final son entonces

$$K_1 = \tfrac{1}{2}I_1\omega_{1z}^2 = \tfrac{1}{2}(13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(3.14 \text{ rad/s})^2 = 64 \text{ J}$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 = \tfrac{1}{2}(2.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(15.7 \text{ rad/s})^2 = 320 \text{ J}$$

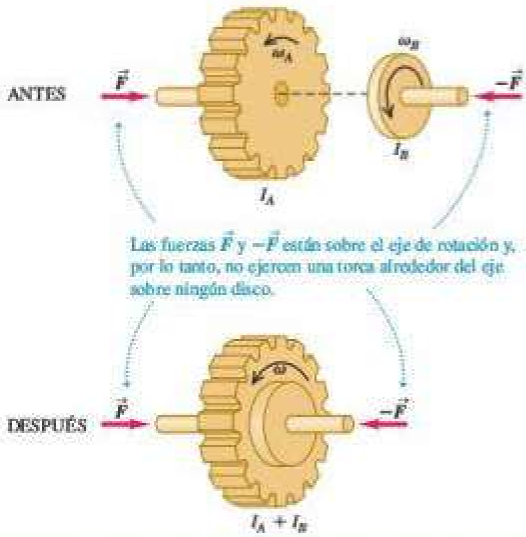
La energía cinética quintuplicada proviene del trabajo que el profesor realizó para llevar sus brazos y las mancuernas junto al abdomen.

Ejemplo 10.11 Un "choque" rotacional

La figura 10.30 muestra dos discos. Uno (A) es un volante de motor y el otro (B), una placa de embrague sujeta a un eje de transmisión. Sus momentos de inercia son I_A e I_B; inicialmente, los discos están girando con rapideces angulares constantes ω_A y ω_B, respectivamente. Juntamos los discos con fuerzas que actúan sobre el eje, con la finalidad de no aplicar una torca a ningún disco. Los discos se frotan entre sí y finalmente alcanzan una rapidez angular final común ω. Deduzca una expresión para ω.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: No hay torcas externas, así que la única torca que actúa sobre cualquiera de los discos es la aplicada por el otro disco. Por lo tanto, el momento angular total del sistema de los dos discos se conserva. Al final, giran como un solo cuerpo con momento de inercia total $I = I_A + I_B$ y rapidez angular ω. La figura 10.30



10.30 Cuando torca externa neta es cero, se conserva el momento angular.

muestra que todas las velocidades angulares tienen la misma dirección, así que podemos considerar que ω_A, ω_B y ω son componentes de velocidad angular a lo largo del eje de rotación. La conservación del momento angular da

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

EVALUAR: Este "choque" entre dos discos es similar a un choque totalmente inelástico (véase la sección 8.3). Cuando dos objetos en movimiento de traslación a lo largo del mismo eje se juntan y quedan adheridos, se conserva el momento lineal del sistema. En este caso, dos objetos en movimiento *de rotación* a lo largo del mismo eje "chocan" y se adhieren, y se conserva el momento *angular*.

La energía cinética de un sistema disminuye en un choque completamente inelástico. Aquí la energía cinética se pierde porque fuerzas internas no conservativas (fricción) actúan mientras se rozan los dos discos. Supongamos que un volante de inercia *A* tiene una masa de 2.0 kg, un radio de 0.20 m y una velocidad angular inicial de 50 rad/s (aproximadamente 500 rpm), y la placa de embrague *B* tiene una masa de 4.0 kg, un radio de 0.10 m y una velocidad angular inicial de 200 rad/s. ¿Puede demostrar que la energía cinética final es solo dos tercios de la energía cinética inicial?

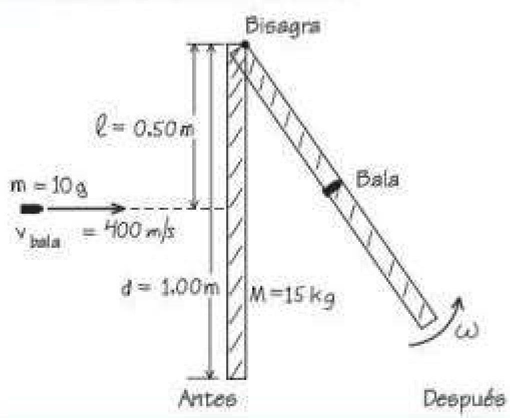
Ejemplo 10.12 Momento angular en una acción policiaca

Una puerta de 1.00 m de ancho y masa de 15 kg tiene bisagras en un costado, de modo que puede girar sin fricción sobre un eje vertical. Una bala de 10 g de masa con rapidez de 400 m/s pega en el centro de la puerta, en dirección perpendicular al plano de la puerta, y se incrusta dentro de esta. Calcule la rapidez angular de la puerta. ¿Se conserva la energía cinética?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Consideramos la puerta y la bala como un sistema. No hay torca externa alrededor del eje definido por las bisagras, por lo que se conserva el momento angular con respecto a este eje. La figura 10.31 muestra nuestro esquema. El momento angular inicial está totalmente en la bala y está dado por la ecuación (10.25). El momento angular final es el de un cuerpo rígido formado por la puerta y la bala incrustada. Igualaremos estas dos cantidades y despejaremos la rapidez angular ω de la puerta y de la bala.

10.31 Nuestro esquema para este problema.



EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (10.25), el momento angular inicial de la bala es:

$$L = mvl = (0.010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})(0.50\ \text{m}) = 2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

El momento angular final es $I\omega$, donde $I = I_{\text{puerta}} + I_{\text{bala}}$. De la tabla 9.2, caso *d*), para una puerta de ancho $d = 1.00$ m,

$$I_{\text{puerta}} = \frac{Md^2}{3} = \frac{(15\ \text{kg})(1.00\ \text{m})^2}{3} = 5.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia de la bala (con respecto al eje que pasa por las bisagras) es

$$I_{\text{bala}} = ml^2 = (0.010\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 = 0.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

La conservación del momento angular requiere que $mvl = I\omega$, o

$$\omega = \frac{mvl}{I} = \frac{2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{5.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 0.40\ \text{rad/s}$$

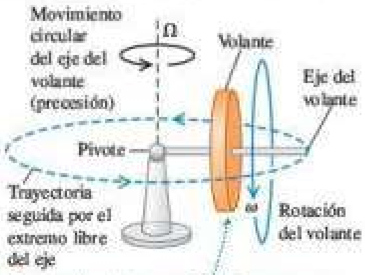
Las energías cinéticas inicial y final son

$$K_1 = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})^2 = 800\ \text{J}$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(5.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(0.40\ \text{rad/s})^2 = 0.40\ \text{J}$$

EVALUAR: ¡La energía cinética final es solo $\frac{1}{2000}$ del valor inicial! No esperábamos que la energía cinética se conservara: el choque es inelástico, ya que las fuerzas de fricción no conservativas actúan durante el impacto. La rapidez angular de la puerta es bastante baja: a 0.40 rad/s, la puerta tardará 3.9 s en oscilar 90° ($\pi/2$ radianes).

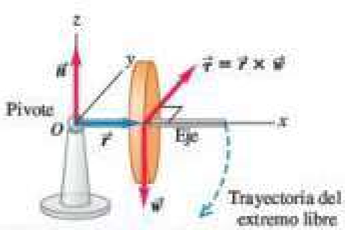
10.32 Un giróscopo apoyado en un extremo. El movimiento circular horizontal del volante y el eje se llama precesión. La rapidez angular de la precesión es Ω.



Cuando el volante y su eje están en reposo, caerán a la superficie de la mesa. Cuando el volante gira, este y su eje "flotan" en el aire mientras se mueven en círculo alrededor del pivote.

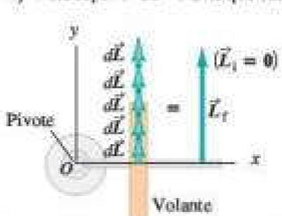
10.33 *a)* Si el volante de la figura 10.32 no está girando inicialmente, su momento angular inicial es cero. *b)* En cada intervalo sucesivo de tiempo dt, la torca produce un cambio $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ en el momento angular. El volante adquiere un momento angular $\vec{L}$ con la misma dirección que $\vec{\tau}$, y el eje del volante cae.

a) El volante que no gira cae



Cuando el volante no gira, su peso crea una torca alrededor del pivote, haciendo que este caiga en una trayectoria circular hasta que su eje descanse en la superficie de la mesa.

b) Vista superior del volante que cae



Al caer, el volante gira alrededor del pivote y, por ello, adquiere un momento angular $\vec{L}$. La *dirección* de $\vec{L}$ permanece constante.

Evalúe su comprensión de la sección 10.6 Si los casquetes polares se derritieran totalmente por el calentamiento global, el hielo derretido se redistribuiría en toda la Tierra. Este cambio haría que la duración del día (el tiempo que la Tierra tarda en girar sobre su eje) **i.** aumentara; **ii.** disminuyera; **iii.** permaneciera igual. (*Sugerencia:* Use ideas relacionadas con el momento angular. Suponga que el Sol, la Luna y los planetas ejercen torcas despreciables sobre la Tierra).

10.7 Giróscopos y precesión

En todas las situaciones que hemos examinado en este capítulo, el eje de rotación se ha mantenido fijo o, si acaso se ha movido, ha mantenido su dirección (como en el caso de rodar sin resbalar). Se presentan diversos fenómenos físicos nuevos, algunos inesperados, si el eje de rotación puede cambiar de dirección. Por ejemplo, considere un giróscopo de juguete apoyado en un extremo (figura 10.32). Si lo sostenemos con el eje del volante horizontal y lo soltamos, el extremo libre del eje cae debido a la gravedad, *si* el volante no está girando. Pero si el volante *está* girando, lo que sucede es muy distinto. Una posibilidad es un movimiento circular uniforme del eje en un plano horizontal, combinado con la rotación del volante alrededor del eje. Este sorprendente movimiento del eje, no intuitivo, se denomina **precesión**. La precesión se observa en la naturaleza, no solo en máquinas giratorias como los giróscopos. En este momento la Tierra misma está en precesión: su eje de rotación (que pasa por los Polos Norte y Sur) cambia lentamente de dirección, completando un ciclo de precesión cada 26,000 años.

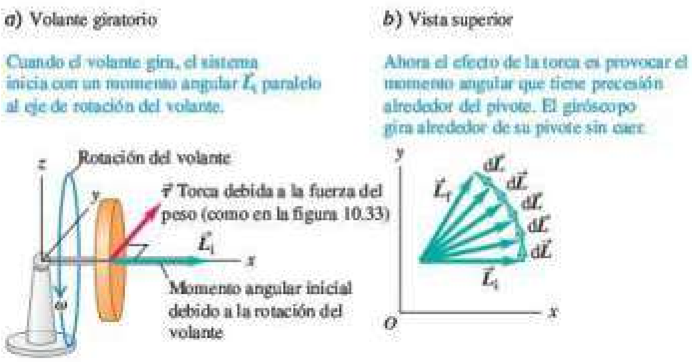
Para estudiar el extraño fenómeno de la precesión, debemos recordar que la velocidad angular, el momento angular y la torca son cantidades *vectoriales*. En particular, necesitamos la relación general entre la torca neta $\sum\vec{\tau}$ que actúa sobre un cuerpo y la rapidez de cambio del momento angular $\vec{L}$, del cuerpo dada por la ecuación (10.29), $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Apliquemos primero esta ecuación al caso en que el volante *no* gira (figura 10.33*a*). Tomamos el origen O en el pivote y suponemos que el volante es simétrico, con masa M y momento de inercia I alrededor de su eje. El eje del volante inicialmente está sobre el eje x. Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el giróscopo son la fuerza normal $\vec{n}$ que actúa en el pivote (donde suponemos que no hay fricción) y el peso $\vec{w}$ del volante que actúa en su centro de masa, a una distancia r del pivote. La fuerza normal tiene torca cero con respecto al pivote, y el peso tiene una torca $\vec{\tau}$ en la dirección y, como se muestra en la figura 10.33*a*. Al principio, no hay rotación y el momento angular inicial $\vec{L}_i$ es cero. De acuerdo con la ecuación (10.29), el *cambio* $d\vec{L}$ del momento angular en un intervalo corto dt después de este instante es

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt \tag{10.32}$$

Este cambio es en la dirección y, la de $\vec{\tau}$. Al transcurrir cada intervalo adicional dt, el momento angular cambia en incrementos $d\vec{L}$ en la dirección y porque la dirección de la torca es constante (figura 10.33*b*). El aumento constante del momento angular horizontal implica que el giróscopo girará hacia abajo alrededor del eje y con rapidez creciente, hasta tirar la base o golpear la mesa en la que esta descansa.

Veamos ahora qué sucede si el volante *está* girando inicialmente, de modo que el momento angular inicial $\vec{L}_i$ no es cero (figura 10.34*a*). Puesto que el volante gira alrededor de su eje de simetría, $\vec{L}_i$ está sobre el eje. Pero cada cambio de momento angular $d\vec{L}$ es perpendicular al eje, porque la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ también lo es (figura 10.34*b*). Esto hace que cambie la *dirección* de $\vec{L}$ pero no su magnitud. Los cambios $d\vec{L}$ siempre están en el plano horizontal xy, por lo que el vector momento angular y el eje del volante junto con el cual se mueve siempre son horizontales. En otras palabras, el eje no cae, solo tiene precesión.

Si esto todavía le parece misterioso, imagine una pelota atada a una cuerda. Si la pelota está inicialmente en reposo y tiramos de la cuerda, la pelota se moverá hacia nosotros. Pero si la bola se está moviendo inicialmente y tiramos continuamente de la cuerda en una dirección perpendicular al movimiento de la pelota, esta se moverá en



10.34 *a*) El volante está girando inicialmente con momento angular $\vec{L}_i$. Las fuerzas (que no se muestran) son las mismas que en la figura 10.33*a*. *b*) Puesto que el momento angular inicial no es cero, cada cambio $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ en el momento angular es perpendicular a $\vec{L}$. El resultado es que la magnitud de $\vec{L}$ no cambia, aunque su dirección cambia continuamente.

un círculo alrededor de nuestra mano; no se acercará a ella. En el primer caso, la pelota tiene cero momento lineal $\vec{p}$ al principio; cuando aplicamos una fuerza $\vec{F}$ hacia nosotros durante un tiempo dt, la pelota adquiere un momento lineal $d\vec{p} = \vec{F}\,dt$, también hacia nosotros. No obstante, si la pelota ya tiene un momento lineal $\vec{p}$, un cambio en el momento lineal $d\vec{p}$ perpendicular a $\vec{p}$ cambiará la dirección del movimiento, no la rapidez. Sustituya $\vec{p}$ por $\vec{L}$ y $\vec{F}$ por $\vec{\tau}$ en este argumento, y verá que la precesión es simplemente el análogo rotacional del movimiento circular uniforme.

En el instante que se muestra en la figura 10.34*a*, el giróscopo tiene momento angular $\vec{L}$. Un intervalo corto dt después, el momento angular es $\vec{L} + d\vec{L}$; el cambio infinitesimal en momento angular es $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$, que es perpendicular a $\vec{L}$. Como se muestra en el diagrama vectorial de la figura 10.35, esto implica que el eje de volante del giróscopo giró un ángulo pequeño $d\phi$ dado por $d\phi = |d\vec{L}|/|\vec{L}|$. La rapidez con que se mueve el eje, $d\phi/dt$, se denomina **rapidez angular de precesión**; denotando esta cantidad con Ω, tenemos

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{wr}{I\omega} \qquad (10.33)$$

10.35 Vista detallada de parte de la figura 10.34*b*.

Así, la rapidez angular de precesión es *inversamente* proporcional a la rapidez angular de giro alrededor del eje. Un giróscopo que gira rápidamente tiene precesión lenta; si la fricción en su cojinete hace que el volante se frene, ¡se *incrementa* la rapidez angular de precesión! La rapidez angular de precesión de la Tierra es muy lenta (1 rev/26,000 años), porque su momento angular L_z es grande y la torca τ_z debida a las influencias gravitacionales de la Luna y el Sol es relativamente pequeña. ?

Cuando un giróscopo tiene un movimiento de precesión, su centro de masa describe un círculo de radio r en un plano horizontal. Su componente vertical de aceleración es cero, así que la fuerza normal hacia arriba $\vec{n}$ ejercida por el pivote debe ser igual en magnitud al peso. El movimiento circular del centro de masa con rapidez angular Ω requiere una fuerza $\vec{F}$ dirigida hacia el centro del círculo, con magnitud $F = M\Omega^2 r$. Esta fuerza también debe ser proporcionada por el pivote.

Una suposición clave que hicimos en nuestro análisis del giróscopo fue que el vector momento angular $\vec{L}$ solo está asociado a la rotación del volante y es puramente horizontal. Pero también habrá una componente vertical de momento angular asociada a la precesión del giróscopo. Al ignorar esto, hemos supuesto tácitamente que la precesión es *lenta*, es decir, que la rapidez angular de precesión Ω es mucho menor que la rapidez angular de rotación ω. Como muestra la ecuación (10.33), un valor grande de ω automáticamente produce un valor pequeño de Ω, así que la aproximación es razonable. Cuando la precesión no es lenta, aparecen efectos adicionales, incluido un bamboleo vertical o *nutación* del eje del volante, superpuesto a la precesión. Podemos ver la nutación en un giróscopo cuando su rotación se hace lenta, de modo que Ω aumenta y la componente vertical de $\vec{L}$ ya no puede despreciarse.

Ejemplo 10.13 Giróscopo en precesión

La figura 10.36*a* es una vista superior de una rueda de giróscopo cilíndrica que un motor eléctrico puso a girar. El pivote está en O y la masa del eje es insignificante. *a*) Vista de arriba, ¿la precesión es en sentido horario o antihorario? *b*) Si el giróscopo en una revolución de precesión tarda 4.0 s, ¿qué rapidez angular tiene la rueda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Determinaremos la dirección de la precesión utilizando la regla de la mano derecha de la figura 10.34, que muestra el mismo tipo de giróscopo que la figura 10.36. Utilizaremos la relación entre rapidez angular de precesión Ω y la rapidez angular de giro ω, ecuación (10.33), para obtener el valor de ω.

EJECUTAR: *a*) La regla de la mano derecha indica que $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ están dirigidos hacia la izquierda en la figura 10.36*b*. El peso $\vec{w}$ apunta hacia adentro de la página en esta vista superior y actúa en el centro de masa (denotado con $\times$ en la figura). La torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ está dirigida hacia arriba de la página, por lo que $d\vec{L}/dt$ también está dirigido hacia arriba de la página. Sumando un pequeño $d\vec{L}$ al vector inicial $\vec{L}$ cambia la dirección de $\vec{L}$ como se muestra, así que la precesión es en sentido horario cuando se ve desde arriba.

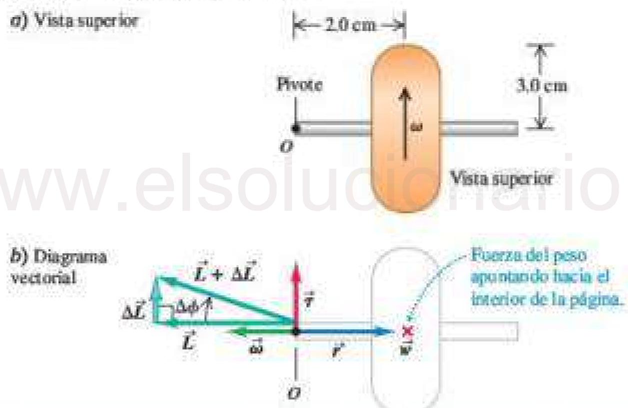
¡Tenga cuidado de no confundir ω y Ω! La rapidez de precesión angular es $\Omega = (1 \text{ rev})/(4.0 \text{ s}) = (2\pi \text{ rad})/(4.0 \text{ s}) = 1.57 \text{ rad/s}$. El peso es mg, y si la rueda es un cilindro uniforme sólido, su momento de inercia alrededor de su eje de simetría es $I = \frac{1}{2}mR^2$. De acuerdo con la ecuación (10.33),

$$\omega = \frac{wr}{I\Omega} = \frac{mgr}{(mR^2/2)\Omega} = \frac{2gr}{R^2\Omega}$$

$$= \frac{2(9.8 \text{ m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2} \text{ m})}{(3.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2(1.57 \text{ rad/s})} = 280 \text{ rad/s} = 2600 \text{ rev/min}$$

EVALUAR: La rapidez angular de precesión Ω es solo aproximadamente el 0.6% de la rapidez angular de rotación ω, así que tenemos un ejemplo de precesión lenta.

10.36 ¿Qué dirección y qué rapidez tiene la precesión del giróscopo?



Evalúe su comprensión de la sección 10.7 Suponga que la masa del volante de la figura 10.34 se aumenta al doble, pero manteniendo constantes todas las demás dimensiones y la rapidez angular de rotación. ¿Qué efecto tendría esto sobre la rapidez angular de precesión Ω? **i.** Ω aumentaría en un factor de 4; **ii.** se duplicaría Ω; **iii.** Ω no se vería afectada; **iv.** Ω se reduciría a la mitad; **v.** Ω se reduciría a la cuarta parte.

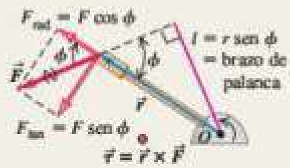
CAPÍTULO 10 RESUMEN

Video Tutor Solutions

Torca: Cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un cuerpo, la torca de esa fuerza con respecto a un punto O tiene una magnitud dada por el producto de la magnitud de la fuerza F y el brazo de palanca l. En términos más generales, la torca es un vector $\vec{\tau}$ igual al producto vectorial de $\vec{r}$ (el vector de posición del punto donde actúa la fuerza) y $\vec{F}$. (Véase el ejemplo 10.1).

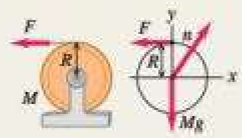
$$\tau = Fl \qquad (10.2)$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (10.3)$$



Dinámica rotacional: El análogo rotacional de la segunda ley de Newton dice que la torca neta que actúa sobre un cuerpo es igual al producto del momento de inercia del cuerpo y su aceleración angular. (Véase los ejemplos 10.2 y 10.3).

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \qquad (10.7)$$



Traslación y rotación combinadas: Si un cuerpo rígido se mueve en el espacio al tiempo que gira, su movimiento puede considerarse como la suma de un movimiento de traslación del centro de masa y un movimiento de rotación en torno a un eje que pasa por el centro de masa. De esta manera, la energía cinética es la suma de las energías cinéticas traslacional y rotacional. En dinámica, la segunda ley de Newton describe el movimiento del centro de masa y el equivalente rotacional de esa ley describe la rotación en torno al centro de masa. En el caso de un cuerpo que rueda sin resbalar, existe una relación especial entre el movimiento del centro de masa y el movimiento de rotación. (Véase los ejemplos 10.4 a 10.7).

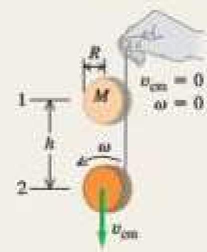
$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \qquad (10.8)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad (10.12)$$

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \qquad (10.13)$$

$$v_{cm} = R\omega \qquad (10.11)$$

(rodar sin resbalar)



Trabajo efectuado por una torca: Si una torca actúa sobre un cuerpo rígido que gira, efectúa trabajo sobre el cuerpo. Ese trabajo puede expresarse como una integral de la torca. El teorema trabajo-energía dice que el trabajo rotacional total efectuado sobre un cuerpo rígido es igual al cambio de energía cinética de rotación. La potencia, o rapidez con que la torca efectúa trabajo, es el producto de la torca y la velocidad angular. (Véase el ejemplo 10.8).

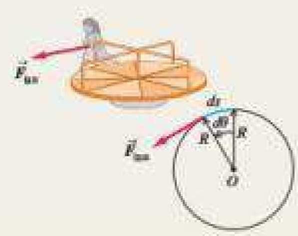
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta \qquad (10.20)$$

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \qquad (10.21)$$

(solo torca constante)

$$W_{tot} = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (10.22)$$

$$P = \tau_z\omega_z \qquad (10.23)$$



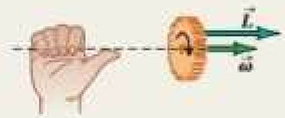
Momento angular: El momento angular de una partícula con respecto a un punto O es el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ de la partícula con respecto a O y a su momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. Si un cuerpo simétrico gira alrededor de un eje de simetría estacionario, su momento angular es el producto de su momento de inercia y su vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el cuerpo no es simétrico o el eje de rotación (z) no es un eje de simetría, la componente del momento angular sobre el eje de rotación es $I\omega_z$. (Véase el ejemplo 10.9).

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (10.24)$$

(partícula)

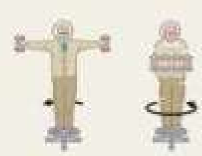
$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (10.28)$$

(cuerpo rígido que gira en torno a un eje de simetría)



Dinámica rotacional y momento angular: La torca externa neta sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de su momento angular. Si la torca externa neta que actúa sobre el sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva). (Véase los ejemplos del 10.10 al 10.13).

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (10.29)$$



PROBLEMA PRÁCTICO Física en el billar

Una bola blanca (una esfera maciza de masa m y radio R) se encuentra en reposo sobre una mesa de billar a nivel. Usando un taco de billar, le da un golpe fuerte a la bola, horizontal de magnitud F a una altura h arriba del centro de la pelota (figura 10.37). La fuerza del golpe es mucho mayor que la fuerza de fricción f que ejerce la superficie de la mesa sobre la bola. El impacto dura un tiempo corto Δt. *a)* ¿Para qué valor de h la pelota rodará sin resbalar? *b)* Si usted golpea el centro de la pelota ($h = 0$), la pelota se resbala sobre la mesa por un rato, pero finalmente rodará sin resbalar. ¿Cuál será entonces la velocidad de su centro de masa?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la bola en la situación del inciso *a)*, incluyendo la elección de los ejes de coordenadas. Observe que el taco ejerce tanto una fuerza de impulso sobre la pelota como una torca alrededor del centro de masa.
2. La fuerza del taco aplicado durante un tiempo Δt da al centro de masa de la bola una rapidez v_{cm}, y la torca aplicada por el taco para ese mismo tiempo da a la bola una velocidad angular ω. ¿Cuál debe ser la relación entre v_{cm} y ω para que la bola ruede sin resbalar?
3. Dibuje dos diagramas de cuerpo libre de la bola del inciso *b)*: uno que muestre las fuerzas durante el golpe y el otro que muestre las fuerzas después del golpe, pero antes de que el balón esté rodando sin resbalar.
4. ¿Cuál es la velocidad angular de la bola del inciso *b)* justo después del golpe? Mientras la pelota se resbala, ¿v_{cm} aumenta o disminuye? ¿ω aumenta o disminuye? ¿Cuál es la relación entre v_{cm} y ω cuando la pelota finalmente rueda sin resbalarse?

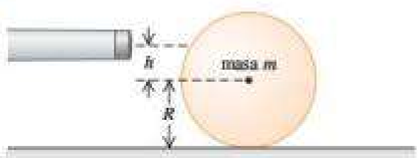
EJECUTAR

5. En el inciso *a)*, use el teorema de impulso-momento para encontrar la velocidad del centro de masa de la bola inmediatamente después del golpe. Luego, utilice la versión rotacional del teorema impulso-momento para encontrar la velocidad angular inmediatamente después del golpe. (*Sugerencia:* Para escribir la versión rotacional del teorema impulso-momento, recuerde que la relación entre la torca y el momento angular es la misma que existe entre la fuerza y el momento lineal).
6. Utilice los resultados del paso 5 para encontrar el valor de h que hará que la bola ruede sin resbalarse inmediatamente después del golpe.
7. En el inciso *b)*, de nuevo encuentre la rapidez angular del centro de masa de la bola inmediatamente después del golpe. Después, escriba la segunda ley de Newton para el movimiento de traslación y para el movimiento de rotación de la bola cuando se resbala. Utilice estas ecuaciones con la finalidad de escribir expresiones para v_{cm} y ω como funciones del tiempo t transcurrido desde el impacto.
8. Utilizando los resultados del paso 7, encuentre el tiempo t cuando v_{cm} y ω tienen la relación correcta para rodar sin resbalar. Después, encuentre el valor de v_{cm} en este tiempo.

EVALUAR

9. Si usted tiene acceso a una mesa de billar, pruebe los resultados de los incisos *a)* y *b)* ¡por sí mismo!
10. ¿Puede demostrar que si se utiliza un cilindro hueco en lugar de una bola sólida, tiene que pegar en la parte superior del cilindro para que ruede sin resbalar en el inciso *a)*?

10.37



Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P10.1 Al apretar los pernos de la cabeza de los cilindros de un motor de automóvil, la cantidad crítica es la *torca* aplicada a los pernos. ¿Por qué la torca es más importante que la *fuerza* real aplicada al mango de la llave?

P10.2 ¿Una sola fuerza aplicada a un cuerpo puede alterar tanto su movimiento de traslación como su movimiento de rotación? Explique por qué.

P10.3 Suponga que usted puede usar cualquier tipo de ruedas en el diseño de un carrito de cuatro ruedas, sin motor para carreras cuesta abajo, partiendo del reposo. Respetando las reglas de peso total del vehículo y el conductor, ¿conviene usar ruedas grandes y masivas, o ruedas pequeñas y ligeras? ¿Conviene usar ruedas sólidas o ruedas con la mayoría de la masa en el borde? Explique por qué.

P10.4 Un automóvil con tracción en las cuatro ruedas acelera hacia adelante partiendo del reposo. Indique la dirección en que giran las ruedas del vehículo y cómo esto origina una fuerza de fricción debida al pavimento, que acelera el auto hacia adelante.

P10.5 Los ciclistas experimentados dicen que reducir el peso de una bicicleta es más efectivo si se hace en las ruedas que en el cuadro. ¿Por qué reducir el peso en las ruedas sería más fácil para el ciclista que reducir la misma cantidad en el cuadro?

P10.6 Cuanto mayor sea la fuerza que se aplica al frenar conduciendo un auto hacia adelante, más bajará el frente del auto (y más subirá la parte de atrás). ¿Por qué? ¿Qué sucede al acelerar hacia adelante? ¿Por qué los vehículos de arrancones no usan solo tracción delantera?

P10.7 Cuando un equilibrista camina sobre la cuerda floja, extiende sus brazos hacia los lados. Esto le facilita recuperarse en caso de inclinarse hacia un lado o hacia el otro. Explique cómo funciona esto. [*Sugerencia:* Piense en la ecuación (10.7)].

P10.8 Al encenderse un motor eléctrico, tarda más en alcanzar su rapidez final si hay una rueda de afilar conectada al eje. ¿Por qué?

P10.9 Los buenos cocineros saben si un huevo está crudo o cocido haciéndolo rodar por una pendiente (y atrapándolo abajo). ¿Cómo es posible esto? ¿En qué se fijan?

P10.10 El trabajo efectuado por una fuerza es un producto de fuerza y distancia. La torca debida a una fuerza es un producto de fuerza y distancia. ¿Implica esto que la torca y el trabajo sean equivalentes? Explique por qué.

P10.11 Imagine que usted pertenece a un despacho de ingenieros y un cliente importante le lleva una esfera preciada porque quiere saber si es hueca o sólida. Él ha probado dándole golpecitos, pero eso no lo ha sacado de dudas. Diseñe un experimento sencillo y de bajo costo que pueda efectuar rápidamente, sin dañar la valiosa esfera, para averiguar si es hueca o sólida.

P10.12 Usted hace dos versiones del mismo objeto a partir del mismo material que tiene densidad uniforme. Para una versión, todas las dimensiones son exactamente el doble que la otra. Si actúa la misma torca en ambas versiones, dando a la más pequeña una aceleración angular α, ¿cuál será la aceleración angular de la versión más grande en términos de α?

P10.13 Dos masas idénticas están unidas a poleas sin fricción mediante cordeles muy delgados, enrollados alrededor del borde de la polea, y se liberan partiendo del reposo. Ambas poleas tienen la misma masa y el mismo diámetro, pero una es sólida y la otra es un aro. Conforme las masas caen, ¿en qué caso es mayor la tensión en la cuerda, o es la misma en ambos casos? Justifique su respuesta.

P10.14 La fuerza de gravedad actúa sobre el bastón de la figura 10.11. Las fuerzas producen torcas que alteran la velocidad angular de un cuerpo. Entonces, ¿por qué es constante la velocidad angular del bastón en la figura?

P10.15 Cierta esfera sólida uniforme alcanza una altura máxima h_0 cuando rueda cuesta arriba sin resbalarse. ¿Qué altura máxima (en términos de h_0) alcanzará si *a*) se duplica su diámetro, *b*) se duplica su masa, *c*) se duplican tanto su diámetro como su masa, *d*) se duplica su rapidez angular en la base de la pendiente?

P10.16 Una rueda está rodando sin resbalar por una superficie horizontal. En un marco de referencia inercial en el que la superficie está en reposo, ¿hay algún punto de la rueda con velocidad puramente vertical? ¿Hay algún punto con componente horizontal de velocidad opuesta a la velocidad del centro de masa? Explique su respuesta. ¿Cambian sus respuestas si la rueda resbala al rodar? ¿Por qué?

P10.17 Parte de la energía cinética de un automóvil que avanza está en el movimiento de rotación de sus ruedas. Al aplicarse los frenos a fondo en una calle con hielo, las ruedas se "bloquean" y el auto comienza a deslizarse. ¿Qué pasa con la energía cinética de rotación?

P10.18 Un aro, un cilindro sólido uniforme, una esfera hueca y una esfera sólida uniforme se sueltan del reposo en la parte alta de una pendiente. ¿En qué orden llegan a la base de la pendiente? ¿Importa si las masas y los radios de los objetos son iguales o no? Explique su respuesta.

P10.19 Una bola rueda con rapidez v sin resbalar sobre una superficie horizontal, cuando llega a una colina que se alza con un ángulo constante sobre la horizontal. ¿En cuál caso alcanzará mayor altura: si la colina tiene suficiente fricción para evitar deslizamientos o si la colina es perfectamente lisa? En ambos casos, justifique sus respuestas en términos de conservación de la energía y de la segunda ley de Newton.

P10.20 Imagine que, en la Casa de la Risa de una feria, usted está de pie en el centro de una mesa giratoria horizontal grande, que comienza a girar libremente sobre cojinetes sin fricción (ningún motor la impulsa). Si camina hacia el borde de la mesa giratoria, ¿qué pasa con el momento angular combinado de usted y la mesa? ¿Qué sucede con la rapidez de rotación de la mesa? Explique su respuesta.

P10.21 Un plato giratorio uniforme determinado de diámetro D_0 tiene un momento angular L_0. Si desea rediseñarlo de manera que conserve la misma masa pero su momento angular sea el doble con la misma velocidad angular igual que antes, ¿cuál debería ser su diámetro en términos de D_0?

P10.22 Una partícula puntual viaja en línea recta con rapidez constante y la distancia más cercana que parte del origen de las coordenadas es una distancia l. Con respecto a este origen, ¿la partícula tiene momento lineal diferente de cero? Conforme la partícula se mueve en línea recta, ¿cambia su momento angular con respecto al origen?

P10.23 En el ejemplo 10.10 (sección 10.6), la rapidez angular ω cambia, lo que implica una aceleración angular distinta de cero. Sin embargo, no hay torca alrededor del eje de rotación, si las fuerzas que el profesor aplica a las mancuernas se dirigen radialmente hacia adentro. Entonces, de acuerdo con la ecuación (10.7), α_z debe ser cero. Explique el error de este razonamiento que lleva a una aparente contradicción.

P10.24 En el ejemplo 10.10 (sección 10.6) la energía cinética rotacional del profesor y las mancuernas aumenta. Sin embargo, como no hay torcas externas, no se efectúa trabajo para alterar la energía cinética de rotación. Entonces, según la ecuación (10.22), ¡la energía cinética no debe cambiar! Explique el error de este razonamiento que lleva a una aparente contradicción. ¿De *dónde* sale la energía cinética adicional?

P10.25 Como vimos en la sección 10.6, el momento angular de una trapecista se conserva al dar vueltas en el aire. ¿Se conserva su momento *lineal*? ¿Por qué?

P10.26 Si usted detiene un huevo crudo en rotación durante el instante más corto que pueda y lo vuelve a soltar, el huevo comenzará a girar otra vez. Si hace lo mismo con un huevo duro, este se quedará detenido. Inténtelo y explíquelo.

P10.27 Un helicóptero tiene un rotor principal grande que gira en un plano horizontal y proporciona sustentación. También hay un rotor pequeño en la cola que gira en un plano vertical. ¿Para qué sirve? (*Sugerencia:* Considere que si no hubiera rotor de cola, ¿qué pasaría cuando el piloto alterara la rapidez angular del rotor principal?). Algunos helicópteros no tienen rotor de cola, pero tienen dos rotores principales grandes que giran en un plano horizontal. ¿Por qué es importante que los dos rotores principales giren en direcciones opuestas?

P10.28 En un diseño de giróscopo común, el volante y su eje se encierran en un marco esférico ligero con el volante en el centro. El giróscopo se equilibra entonces sobre un pivote, de modo que el volante esté directamente encima del pivote. ¿El giróscopo tiene un movimiento de precesión, si se suelta mientras el volante está girando? Explique su respuesta.

P10.29 Un giróscopo tarda 3.8 s en hacer un movimiento de precesión de 1.0 revolución alrededor de un eje vertical. Dos minutos después, solo tarda 1.9 s en hacer un movimiento de precesión de 1.0 revolución. Nadie tocó el giróscopo. Explique por qué.

P10.30 Un giróscopo hace un movimiento de precesión como en la figura 10.32. ¿Qué sucede si agregamos suavemente peso al extremo del eje del volante opuesto al pivote?

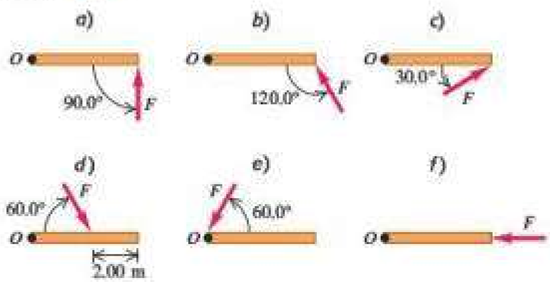
P10.31 Una bala sale de un rifle girando sobre su eje. Explique cómo esto evita que la bala dé volteretas y mantiene la punta dirigida hacia adelante.

EJERCICIOS

Sección 10.1 Torca

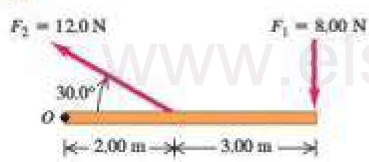
10.1 • Calcule la torca (magnitud y dirección) alrededor del punto O debida a la fuerza $\vec{F}$ en cada una de las situaciones que se representan en la figura E10.1. En todos los casos, la fuerza $\vec{F}$ y la varilla están en el plano de la página, la varilla mide 4.00 m de largo y la fuerza tiene magnitud $F = 10.0$ N.

Figura **E10.1**



10.2 • Calcule la torca alrededor del punto O para las dos fuerzas aplicadas como en la figura E10.2. La varilla y las dos fuerzas están en el plano de la página.

Figura **E10.2**



10.3 •• Una placa metálica cuadrada de 0.180 m por lado pivota sobre un eje que pasa por el punto O en su centro y es perpendicular a la placa (figura E10.3). Calcule la torca neta alrededor de este eje debida a las tres fuerzas que se muestran en la figura, si las magnitudes de las fuerzas son $F_1 = 18.0$ N, $F_2 = 26.0$ N y $F_3 = 14.0$ N. La placa y todas las fuerzas están en el plano de la página.

Figura **E10.3**

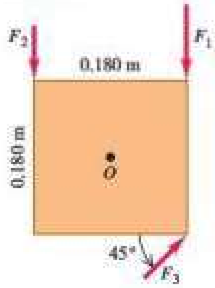
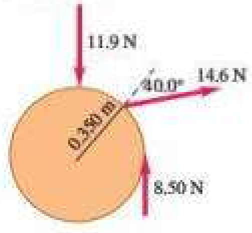


Figura **E10.4**



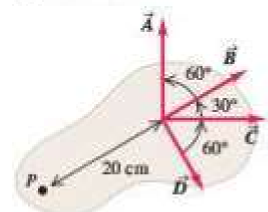
10.4 • Se aplican tres fuerzas a una rueda con radio de 0.350 m, como se indica en la figura E10.4. Una fuerza es perpendicular al borde, otra es tangente a este y la otra forma un ángulo de 40.0° con el radio. ¿Cuál es la torca neta sobre la rueda debida a estas tres fuerzas para un eje perpendicular a la rueda y que pasa por su centro?

10.5 • Una fuerza que actúa sobre una pieza mecánica es $\vec{F} = (-5.00\text{ N})\hat{\imath} + (4.00\text{ N})\hat{\jmath}$. El vector del origen al punto de aplicación de la fuerza es $\vec{r} = (-0.450\text{ m})\hat{\imath} + (0.150\text{ m})\hat{\jmath}$. *a)* Elabore un dibujo que muestre $\vec{r}$, $\vec{F}$, y el origen. *b)* Use la regla de la mano derecha para determinar la dirección de la torca. *c)* Calcule la torca vectorial producida por la fuerza para un eje en el origen. Verifique que la dirección de la torca sea la misma que obtuvo en el inciso *b*).

10.6 • Una barra de metal está en el plano xy con un extremo de la barra en el origen. Se aplica una fuerza $\vec{F} = (7.00\text{ N})\hat{\imath} + (-3.00\text{ N})\hat{\jmath}$ a la barra en el punto $x = 3.00$ m, $y = 4.00$ m. *a)* En términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, ¿cuál es el vector de posición $\vec{r}$ para el punto donde se aplica la fuerza? *b)* ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la torca con respecto al origen producido por $\vec{F}$?

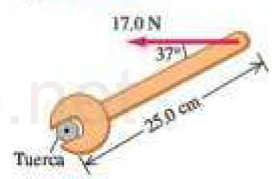
10.7 • En la figura E10.7, las fuerzas $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ y tienen cada una 50 N de magnitud y actúan en el mismo punto en el objeto. *a)* ¿Qué torca (magnitud y dirección) ejercen cada una de estas fuerzas sobre el objeto sobre el punto P? *b)* ¿Cuál es la torca total sobre el punto P?

Figura **E10.7**



10.8 • Un maquinista usa una llave inglesa para aflojar una tuerca. La llave tiene 25.0 cm de longitud y él ejerce una fuerza de 17.0 N en el extremo del mango, formando un ángulo de 37° con el mango (figura E10.8). *a)* ¿Qué torca ejerce el maquinista alrededor del centro de la tuerca? *b)* ¿Cuál es la torca máxima que el maquinista podría ejercer con esta fuerza y cómo debería orientarse la fuerza?

Figura **E10.8**



Sección 10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido

10.9 • El volante de un motor tiene momento de inercia de 2.50 kg · m^2 alrededor de su eje de rotación. ¿Qué torca constante se requiere para que alcance una rapidez angular de 400 rev/min en 8.00 s, partiendo del reposo?

10.10 •• Un disco uniforme con masa de 40.0 kg y radio de 0.200 m pivota en su centro alrededor de un eje horizontal, sin fricción que está en reposo. El disco está inicialmente en reposo, y luego se aplica una fuerza constante $F = 30.0$ N tangente al borde del disco. *a)* ¿Cuál es la magnitud v de la velocidad tangencial de un punto en el borde del disco después de que el disco ha girado 0.200 revoluciones? *b)* ¿Cuál es la magnitud a de la aceleración resultante de un punto en el borde del disco después de que el disco ha girado 0.200 revoluciones?

10.11 •• Una pieza de maquinaria tiene la forma de una esfera sólida uniforme con masa de 225 g y diámetro de 3.00 cm, y gira alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro, pero, en un punto de su ecuador roza contra un metal, lo que produce una fuerza de fricción de 0.0200 N en ese punto. *a)* Calcule su aceleración angular. *b)* ¿Cuánto tiempo requerirá para disminuir su rapidez rotacional en 22.5 rad/s?

10.12 • Una cuerda se enrolla en el borde de una rueda sólida uniforme de 0.250 m de radio y masa de 9.20 kg. Se tira de la cuerda con una fuerza horizontal constante de 40.0 N hacia la derecha, quitándola tangencialmente de la rueda, la cual está montada con cojinetes sin fricción en un eje horizontal que pasa por su centro. *a)* Calcule la aceleración angular de la rueda y la aceleración de la parte de la cuerda que ya se haya retirado de la rueda. *b)* Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza que ejerce el eje sobre la rueda. *c*) ¿Por qué las respuestas a los incisos *a*) y *b*) cambiarían si el tirón fuera hacia arriba en vez de horizontal?

10.13 •• **PA** Un libro de texto de 2.00 kg descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. Un cable unido al libro pasa sobre una polea, cuyo diámetro es de 0.150 m, para un libro con masa de 3.00 kg que cuelga. El sistema se libera a partir del reposo, y se observa que los libros se mueven 1.20 m en 0.800 s. *a*) ¿Cuál es la tensión en cada parte de la cuerda? *b*) ¿Cuál es el momento de inercia de la polea alrededor de su eje de rotación?

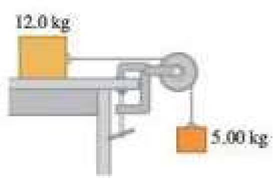
10.14 •• **PA** Una piedra cuelga del extremo libre de un cable enrollado en el borde exterior de una polea, como se muestra en la figura 10.10. La polea es un disco uniforme con masa de 10.0 kg y 50.0 cm de radio, que gira sobre cojinetes sin fricción. Se determina que la piedra recorre 12.6 m en los primeros 3.00 s partiendo del reposo. Calcule *a*) la masa de la piedra y *b*) la tensión en el cable.

10.15 • Una rueda gira sin fricción alrededor de un eje horizontal estacionario en el centro de la rueda. Una fuerza constante tangencial igual a 80.0 N se aplica al borde de la rueda; esta última tiene un radio de 0.120 m. Partiendo del reposo, la rueda tiene una rapidez angular de 12.0 rev/s después de 2.00 s. ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda?

10.16 •• **PA** Una cubeta con agua de 15.0 kg se suspende de una cuerda ligera, enrollada en un cilindro sólido de 0.300 m de diámetro y masa de 12.0 kg. El cilindro pivota en un eje sin fricción que pasa por su centro. La cubeta se suelta del reposo en la parte superior de un pozo y cae 10.0 m al agua. *a*) ¿Qué tensión hay en la cuerda mientras la cubeta cae? *b*) ¿Con qué rapidez golpea la cubeta el agua? *c*) ¿Cuánto tarda en caer? *d*) Mientras la cubeta cae, ¿qué fuerza ejerce el eje sobre el cilindro?

10.17 •• Una caja de 12.0 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unida a un peso de 5.00 kg con un alambre delgado y ligero que pasa por una polea sin fricción (figura E10.17). La polea tiene la forma de un disco sólido uniforme con masa de 2.00 kg y diámetro de 0.500 m. Después de que el sistema se libera, calcule *a*) la tensión en el alambre en ambos lados de la polea, *b*) la aceleración de la caja y *c*) las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el eje sobre la polea.

Figura **E10.17**



Sección 10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

10.18 • **BIO** **Gimnasia.** A grandes rasgos, podemos modelar un equipo de gimnasia como un cilindro sólido uniforme de masa de 75 kg y diámetro de 1.0 m. Si el cilindro rueda hacia adelante a 50 rev/s, *a*) ¿cuánta energía cinética tiene, y *b*) qué porcentaje de su energía cinética total es rotacional?

10.19 • Un aro de 2.20 kg y de 1.20 m de diámetro rueda hacia la derecha sin resbalar sobre un piso horizontal a 3.00 rad/s constantes. *a*) ¿Qué tan rápido se mueve su centro? *b*) ¿Cuál es la energía cinética total del aro? *c*) Calcule el vector velocidad de cada uno de los siguientes puntos, vistos por una persona en reposo en el suelo: **i.** el punto más alto del aro; **ii.** el punto más bajo del aro; **iii.** un punto al lado derecho del aro, a la mitad de la distancia entre la parte superior y la parte inferior. *d*) Calcule el vector velocidad de cada uno de los puntos del inciso *c*), pero esta vez como se ve por alguien que se mueve con la misma velocidad que el aro.

10.20 •• Se enrolla una cuerda varias veces en el borde de un aro pequeño de 8.00 cm de radio y masa de 0.180 kg. El extremo libre de la cuerda se sostiene fijo y el aro se suelta a partir del reposo (figura E10.20). Después de que el aro ha descendido 75.0 cm, calcule: *a*) la rapidez angular del aro al girar y *b*) la rapidez de su centro.

Figura **E10.20**

10.21 • ¿Qué fracción de la energía cinética total es rotacional para los siguientes objetos que ruedan sin resbalar por una superficie horizontal? *a*) Un cilindro sólido uniforme, *b*) una esfera uniforme, *c*) una esfera hueca de paredes delgadas, *d*) un cilindro hueco con radio exterior R y radio interior $R/2$.

10.22 •• Una esfera hueca con masa de 2.00 kg rueda sin resbalar bajando una pendiente de 38.0°. *a*) Calcule la aceleración, la fuerza de fricción y el coeficiente de fricción mínimo para que no resbale. *b*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas al inciso *a*) si la masa se duplicara a 4.00 kg?

10.23 •• Una esfera sólida se libera a partir del reposo y baja por una ladera que forma un ángulo de 65.0° abajo de la horizontal. *a*) ¿Qué valor mínimo debe tener el coeficiente de fricción estática entre la ladera y la esfera para que no haya deslizamiento? *b*) ¿El coeficiente de fricción calculado en el inciso *a*) bastaría para evitar que una esfera hueca (como un balón de fútbol) resbale? Justifique su respuesta. *c*) En el inciso *a*), ¿por qué usamos el coeficiente de fricción estática y no el coeficiente de fricción cinética?

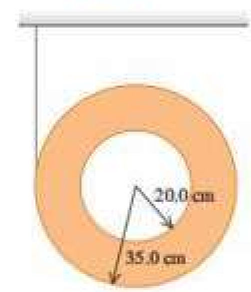
10.24 •• Una canica uniforme baja rodando por un tazón simétrico, partiendo del reposo en el borde izquierdo. El borde está una distancia h arriba del fondo del tazón. La mitad izquierda del tazón es lo bastante áspera como para que la canica ruede sin resbalar, pero la mitad derecha no tiene fricción porque está lubricada con aceite. *a*) ¿Qué altura alcanzará la canica en el lado resbaloso, medida verticalmente desde el fondo? *b*) ¿Qué altura alcanzaría la canica si el lado derecho fuera tan áspero como el izquierdo? *c*) ¿Cómo explica el hecho de que la canica alcance *más altura* en el lado derecho con fricción que sin fricción?

10.25 •• Una rueda de 392 N se desprende de un camión en movimiento, rueda sin resbalar por una carretera y, al llegar al pie de una colina, gira a 25.0 rad/s. El radio de la rueda es de 0.600 m y su momento de inercia alrededor de su eje de rotación es de $0.800MR^2$. La fricción efectúa trabajo sobre la rueda mientras esta sube la colina hasta que se detiene a una altura h sobre el pie de la colina; ese trabajo tiene valor absoluto de 3500 J. Calcule h.

10.26 •• **Bola que rueda cuesta arriba.** Una bola de bolos sube rodando sin resbalar por una rampa que forma un ángulo b con la horizontal. (Véase el ejemplo 10.7 de la sección 10.3). Trate la bola como una esfera sólida uniforme, sin tomar en cuenta los agujeros. *a*) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la bola. Explique por qué la fricción debe tener dirección *cuesta arriba*. *b*) ¿Qué aceleración tiene el centro de masa de la bola? *c*) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se necesita para que la bola no resbale?

10.27 •• Una cuerda delgada ligera se envuelve alrededor del borde exterior de un cilindro hueco uniforme de masa 4.75 kg que tiene radios interno y externo como se muestra en la figura E10.27. El cilindro se libera a partir del reposo. *a*) ¿Qué distancia

Figura **E10.27**



debe haber caído el cilindro antes de que su centro se mueva a 6.66 m/s? *b*) Si usted suelta este cilindro sin cuerda, ¿con qué rapidez se mueve su centro cuando ha caído la distancia del inciso *a*)? *c*) ¿Por qué se obtienen dos respuestas diferentes cuando el cilindro cae la misma distancia en ambos casos?

10.28 •• Un ciclista va cuesta abajo a 11.0 m/s cuando, para su horror, se sale una de sus ruedas de 2.25 kg cuando él está a 75.0 m arriba del pie de la colina. Podemos modelar la rueda como un cilindro de pared delgada, de 85.0 cm de diámetro y se desprecia la pequeña masa de los radios. *a*) ¿Qué tan rápido se mueve la rueda cuando alcanza el pie de la colina si rodó sin resbalarse en la bajada? *b*) ¿Cuánta energía cinética total tiene la rueda cuando llega a la parte inferior de la colina?

10.29 •• Una pelota de fútbol, de tamaño 5, con diámetro de 22.6 cm y masa de 426 g rueda hacia arriba por una colina sin resbalar, alcanzando una altura máxima de 5.00 m sobre la base de la colina. Podemos modelar esta pelota como una esfera hueca de paredes delgadas. *a*) ¿Con qué rapidez gira en la base de la colina? *b*) ¿Cuánta energía cinética de rotación tenía entonces?

Sección 10.4 Trabajo y potencia en movimiento de rotación

10.30 • El motor proporciona 175 hp a la hélice de un avión a 2400 rev/min. *a*) ¿Qué valor de la torca proporciona el motor del avión? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza el motor en una revolución de la hélice?

10.31 • Un carrusel con 2.40 m de radio tiene momento de inercia de 2100 kg·m^2 alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y gira con fricción despreciable. *a*) Un niño aplica una fuerza de 18.0 N tangencialmente al borde durante 15.0 s. Si el carrusel estaba inicialmente en reposo, ¿qué rapidez angular tiene al final de los 15.0 s? *b*) ¿Cuánto trabajo efectuó el niño sobre el carrusel? c) ¿Qué potencia media le suministró el niño?

10.32 •• Un motor eléctrico consume 9.00 kJ de energía eléctrica en 1.00 min. Si un tercio de la energía se pierde en forma de calor y otras formas de energía interna del motor, y el resto se da como potencia al motor, ¿cuál será el valor de la torca que desarrollará este motor si usted lo pone a 2500 rpm?

10.33 • Una rueda de afilar de 1.50 kg con forma de cilindro sólido tiene 0.100 m de radio. *a*) ¿Qué torca constante la llevará del reposo a una rapidez angular de 1200 rev/min en 2.5 s? *b*) ¿Qué ángulo habrá girado en ese tiempo? *c*) Use la ecuación (10.21) para calcular el trabajo efectuado por la torca. *d*) ¿Qué energía cinética tiene la rueda al girar a 1200 rev/min? Compare esto con el resultado del inciso *c*).

10.34 •• La hélice de un avión tiene longitud de 2.08 m (de punta a punta) y masa de 117 kg. Al arrancarse, el motor del avión aplica una torca constante de 1950 N·m a la hélice, que parte del reposo. *a*) Calcule la aceleración angular de la hélice, tratándola como varilla delgada y vea la tabla 9.2. *b*) Calcule la rapidez angular de la hélice después de 5.00 revoluciones. *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa el motor durante las primeras 5.00 revoluciones? *d*) ¿Qué potencia media desarrolla el motor durante las primeras 5.00 revoluciones? *e*) ¿Qué potencia instantánea desarrolla el motor en el instante en que la hélice ha girado 5.00 revoluciones?

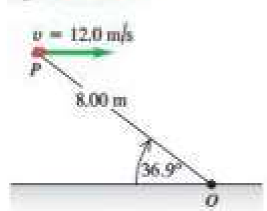
10.35 • *a*) Calcule la torca producida por un motor industrial que desarrolla 150 kW a una rapidez angular de 4000 rev/min. *b*) Un tambor de 0.400 m de diámetro y masa despreciable se conecta al eje del motor, y la potencia del motor se utiliza para levantar un peso que cuelga de una cuerda enrollada en el tambor. ¿Qué peso máximo puede levantar el motor, con rapidez constante? *c*) ¿Con qué rapidez subirá el peso?

Sección 10.5 Momento angular

10.36 •• Una mujer con masa de 50 kg está de pie en el borde de un disco grande, el cual gira a 0.50 rev/s alrededor de un eje que pasa por su centro. El disco tiene una masa de 110 kg y radio de 4.0 m. Calcule la magnitud del momento angular total del sistema mujer-disco. (Suponga que la mujer puede tratarse como punto).

10.37 • Una piedra de 2.00 kg tiene una velocidad horizontal con magnitud de 12.0 m/s cuando está en el punto *P* de la figura E10.37. *a*) En ese instante, ¿qué momento angular (magnitud y dirección) tiene con respecto a *O*? *b*) Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre la piedra es su peso, calcule la rapidez del cambio (magnitud y dirección) de su momento angular en ese instante.

Figura E10.37



10.38 •• *a*) Calcule la magnitud del momento angular de la Tierra en órbita alrededor del Sol. ¿Es razonable considerar a la Tierra como partícula? *b*) Calcule la magnitud del momento angular de la Tierra debido a su rotación en torno a un eje que pasa por los Polos Norte y Sur, tratando a la Tierra como una esfera uniforme. Consulte el apéndice E y los datos astronómicos del apéndice F.

10.39 •• Calcule la magnitud del momento angular del segundero de un reloj alrededor de un eje que pasa por el centro de la carátula. La manecilla tiene una longitud de 15.0 cm y masa de 6.00 g. Trate la manecilla como una varilla delgada que gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo.

10.40 •• CALC Una esfera hueca de pared delgada con masa de 12.0 kg y diámetro de 48.0 cm gira alrededor de un eje que pasa por su centro. El ángulo (en radianes) con el que gira en función del tiempo (en segundos) está dado por $\theta(t) = At^2 + Bt^4$, donde *A* tiene valor numérico de 1.50 y *B* tiene valor numérico de 1.10. *a*) ¿Cuáles son las unidades de las constantes *A* y *B*? *b*) En el instante t = 3.00 s, calcule **i.** el momento angular de la esfera y **ii.** la torca neta de la esfera.

Sección 10.6 Conservación del momento angular

10.41 •• En ciertas circunstancias, una estrella puede colapsar formando un objeto extremadamente denso constituido principalmente por neutrones y al que se conoce como *estrella de neutrones*. La densidad de tales estrellas es unas 10^{14} veces mayor que la de la materia sólida ordinaria. Suponga que representamos la estrella como esfera sólida, rígida y uniforme, tanto antes como después del colapso. El radio inicial era de 7.0×10^5 km (comparable al del Sol); y el radio final, de 16 km. Si la estrella original giraba una vez cada 30 días, calcule la rapidez angular de la estrella de neutrones.

10.42 • PA Un bloque pequeño de 0.0250 kg en una superficie horizontal sin fricción está atado a una cuerda de masa despreciable que pasa por un agujero en la superficie (figura E10.42). El bloque inicialmente está girando a una distancia de 0.300 m del agujero, con rapidez angular de 1.75 rad/s. Ahora se tira de la cuerda desde abajo, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0.150 m. El bloque puede tratarse como partícula. *a*) ¿Se conserva el momento angular del bloque? ¿Por qué? *b*) ¿Qué valor tiene ahora la rapidez angular? *c*) Calcule el cambio de energía cinética del bloque. *d*) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar de la cuerda?

Figura E10.42

10.43 •• **Patinador que gira.** Los brazos extendidos de un patinador que prepara un giro pueden considerarse como una varilla delgada que pivota sobre un eje que pasa por su centro (figura E10.43). Cuando los brazos se juntan al cuerpo para ejecutar el giro, se pueden considerar como un cilindro hueco de pared delgada. Los brazos y las manos tienen una masa combinada de 8.0 kg. Cuando se extienden, abarcan 1.8 m; y encogidos, forman un cilindro con 25 cm de radio. El momento de inercia del resto del cuerpo alrededor del eje de rotación es constante e igual a $0.40 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Si la rapidez angular original del patinador es de 0.40 rev/s, ¿cuál es la rapidez angular final?

Figura **E10.43**

10.44 •• Una clavadista salta del trampolín con los brazos hacia arriba y las piernas hacia abajo, lo que le confiere un momento de inercia alrededor de su eje de rotación de $18 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Luego, ella encoge su cuerpo para formar una pequeña esfera, reduciendo su momento de inercia a $3.6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, y gira dos revoluciones completas en 1.0 s. Si no se hubiera encogido, ¿cuántas revoluciones habría girado en los 1.5 s que tarda en caer desde el trampolín al agua?

10.45 •• Una tornamesa de madera de 120 kg con forma de disco plano tiene 2.00 m de radio y gira inicialmente alrededor de un eje vertical, que pasa por su centro, a 3.00 rad/s. De repente, un paracaidista de 70.0 kg se posa suavemente sobre la tornamesa en un punto cerca del borde. *a)* Calcule la rapidez angular de la tornamesa después de que el paracaidista se posa en ella. (Suponga que puede tratarse al paracaidista como partícula). *b)* Calcule la energía cinética del sistema antes y después de la llegada del paracaidista. ¿Por qué no son iguales estas energías?

10.46 •• Una puerta de madera sólida de 1.00 m de ancho y 2.00 m de alto tiene las bisagras en un lado y una masa total de 40.0 kg. La puerta, que inicialmente está abierta y en reposo, es golpeada en su centro por un puñado de lodo pegajoso con masa de 0.500 kg, que viaja en dirección perpendicular a la puerta a 12.0 m/s justo antes del impacto. Calcule la rapidez angular final de la puerta. ¿Es apreciable la aportación del lodo al momento de inercia?

10.47 •• Un pequeño bicho de 10.0 g está parado en el extremo de una barra delgada y uniforme que inicialmente se encuentra en reposo en una mesa horizontal lisa. El otro extremo de la barra pivota en torno a un clavo incrustado en la mesa, y puede girar libremente sin fricción. La masa de la barra es de 50.0 g, y su longitud de 100 cm. El bicho salta en dirección horizontal, perpendicular a la barra, con rapidez de 20.0 cm/s con respecto a la mesa. *a)* ¿Cuál es la rapidez angular de la barra inmediatamente después del salto del insecto juguetón? *b)* Calcule la energía cinética total del sistema inmediatamente después del salto. *c)* ¿De dónde proviene la energía?

10.48 •• **¡Choque de asteroide!** Suponga que un asteroide que viaja en línea recta hacia el centro de la Tierra fuera a estrellarse contra nuestro planeta en el ecuador y se incrustara apenas por debajo de la superficie. En términos de la masa terrestre M, ¿cuál tendría que ser la masa de dicho asteroide para que el día sea un 25.0% más largo de lo que actualmente es como resultado del choque? Suponga que el asteroide es muy pequeño en comparación con la Tierra y que esta es un cuerpo uniforme.

10.49 •• Una barra metálica delgada y uniforme, de 2.00 m de longitud y con un peso de 90.0 N, cuelga verticalmente del techo en un pivote sin fricción colocado en el extremo superior. De repente, una pelota de 3.00 kg, que viaja inicialmente a 10.0 m/s en dirección horizontal, golpea la barra 1.50 m abajo del techo. La pelota rebota en dirección opuesta con rapidez de 6.00 m/s. *a)* Calcule la rapidez angular de la barra inmediatamente después del choque. *b)* Durante el choque, ¿por qué se conserva el momento angular pero no el momento lineal?

10.50 •• Una varilla delgada uniforme tiene una longitud de 0.500 m y está girando en un círculo sobre una mesa sin rozamiento. El eje de rotación es perpendicular a la longitud de la varilla en un extremo y está en reposo. La varilla tiene una velocidad angular de 0.400 rad/s y un momento de inercia sobre el eje de $3.00 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Un bicho, inicialmente parado en el extremo de la varilla en el eje de rotación, decide arrastrarse hasta el otro extremo de la varilla. Cuando el bicho ha alcanzado el extremo de la varilla y se sienta allí, su rapidez tangencial es 0.160 m/s. El bicho se puede tratar como una masa puntual. *a)* ¿Cuál es la masa de la barra? *b)* ¿Cuál es la masa del bicho?

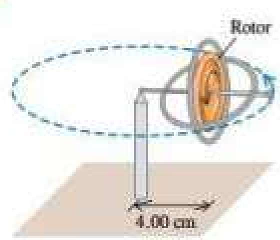
10.51 •• Un portón de madera sólida, cuadrado y uniforme, de 4.5 kg, de 1.5 m de lado cuelga verticalmente desde un pivote sin fricción en el centro de su extremo superior. Un cuervo de 1.1 kg que vuela horizontalmente a 5.0 m/s se dirige hacia el centro de la puerta y rebota en la dirección contraria 2.0 m/s. *a)* ¿Cuál es la velocidad angular de la puerta justo después de que es golpeada por el desafortunado cuervo? *b)* Durante la colisión, ¿por qué se conserva el momento angular, pero no el momento lineal?

10.52 •• **Sedna.** En noviembre de 2003, el ahora más lejano objeto conocido en el Sistema Solar fue descubierto mediante la observación con un telescopio en el Monte Palomar. Este objeto, conocido como Sedna, tiene aproximadamente 1700 km de diámetro, tarda alrededor de 10,500 años en orbitar nuestro Sol, y alcanza una rapidez máxima de 4.64 km/s. Los cálculos de su trayectoria completa, con base en varias mediciones de la posición, indican que su órbita es muy elíptica y varía desde 76 UA a 942 UA en su distancia con respecto al Sol; UA es la unidad astronómica, que es la distancia promedio de la Tierra al Sol (1.50×10^8 km). *a)* ¿Cuál es la rapidez mínima de Sedna? *b)* ¿En qué puntos de su órbita ocurren sus rapideces máxima y mínima? *c)* ¿Cuál es la razón entre la energía cinética máxima y la energía cinética mínima del Sedna?

Sección 10.7 Giróscopos y precesión

10.53 •• El rotor (volante) de un giróscopo de juguete tiene una masa de 0.140 kg. Su momento de inercia alrededor de su eje es $1.20 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. La masa del marco es de 0.0250 kg. El giróscopo se apoya en un solo pivote (figura E10.53) con su centro de masa a una distancia horizontal de 4.00 cm del pivote. El giróscopo hace un movimiento de precesión en un plano horizontal a razón de una revolución cada 2.20 s. *a)* Calcule la fuerza hacia arriba ejercida por el pivote. *b)* Calcule la rapidez angular en rpm con que el rotor gira sobre su eje. *c)* Copie el diagrama e indique con vectores el momento angular del rotor y la torca que actúa sobre este.

Figura **E10.53**



10.54 • **Un giróscopo en la Luna.** Cierto giróscopo efectúa un movimiento de precesión con una rapidez de 0.50 rad/s cuando se utiliza en la Tierra. Si se transportara a una base lunar, donde la aceleración debida a la gravedad es de $0.165g$, ¿cuál sería su rapidez de precesión?

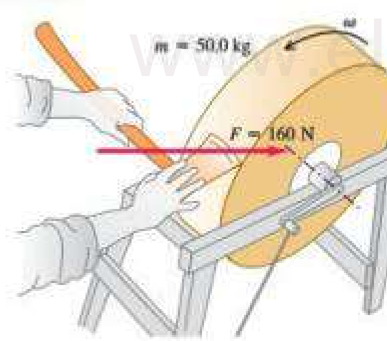
10.55 • Un giróscopo realiza un movimiento de precesión alrededor de un eje vertical. Describa qué pasa con la rapidez angular de precesión si se efectúan los siguientes cambios, sin alterar las demás variables: *a)* se duplica la rapidez angular del volante; *b)* se duplica el peso total; *c)* se duplica el momento de inercia del volante alrededor de su eje; *d)* se duplica la distancia del pivote al centro de gravedad. *e)* ¿Qué sucede si se duplican simultáneamente las cuatro variables de los incisos *a*) a *d*)?

10.56 • **Estabilización del Telescopio Espacial Hubble.** El Telescopio Espacial Hubble se estabiliza dentro de un ángulo de alrededor de 2 millonésimas de grado mediante una serie de giróscopos que giran a 19,200 rpm. Aunque la estructura de estos giróscopos es bastante compleja, podemos modelar a cada uno de ellos como un cilindro de pared delgada de 2.0 kg de masa y 5.0 cm de diámetro, girando alrededor de su eje central. ¿Qué magnitud de la torca se necesita para hacer que estos giróscopos realicen un movimiento de precesión de un ángulo de 1.0×10^{-6} grados durante una exposición de 5.0 horas de una galaxia?

PROBLEMAS

10.57 •• Una piedra de afilar de 50.0 kg es un disco sólido de 0.520 m de diámetro. Se empuja una hacha contra el borde con una fuerza normal de 160 N (figura P10.57). El coeficiente de fricción cinética entre la piedra y el hacha es de 0.60, y hay una torca por fricción constante de 6.50 N·m entre el eje de la piedra y sus cojinetes. *a*) ¿Qué fuerza debe aplicarse tangencialmente al extremo de una manivela impulsora de 0.500 m para llevar la piedra del reposo a 120 rev/min en 9.00 s? *b*) Una vez que la piedra alcanza esa rapidez angular, ¿qué fuerza tangencial se tendría que aplicar al extremo de la manivela impulsora para mantenerla con una rapidez angular constante de 120 rev/min? *c*) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en detenerse, si solo la fricción del eje actúa sobre ella y está girando a 120 rev/min?

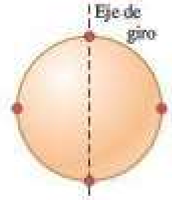
Figura **P10.57**



10.58 •• Una rueda experimental de bicicleta se coloca en un banco de pruebas, de modo que pueda girar libremente sobre su eje. Se ejerce una torca neta constante de 7.00 N·m a la rueda durante 2.00 s, aumentando la rapidez angular de la rueda de 0 a 100 rev/min. Luego, se deja de aplicar la torca externa y la fricción en los cojinetes de la rueda la detiene en 125 s. Calcule *a*) el momento de inercia de la rueda alrededor del eje de rotación; *b*) la torca por fricción; *c*) el número total de revoluciones que la rueda gira en ese lapso de 125 s.

10.59 ••• Una piedra de afilar en forma de un disco sólido con diámetro de 0.520 m y masa de 50.0 kg está girando a 850 rev/min. Se presiona un hacha contra el borde con una fuerza normal de 160 N (figura P10.57), y la piedra de afilar se detiene en 7.50 s. Encuentre el coeficiente de fricción entre el hacha y la piedra de afilar. Puede despreciar la fricción en los cojinetes.

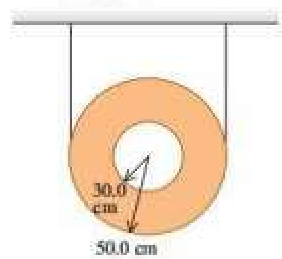
Figura **P10.60**



10.60 ••• Una esfera hueca uniforme de 8.40 kg y 50.0 cm de diámetro tiene cuatro masas pequeñas de 2.00 kg pegadas a su superficie exterior, a distancias iguales. Esta combinación gira en torno a un eje que pasa por el centro de la esfera y dos de las masas pequeñas (figura P10.60). ¿Qué torca por fricción se requiere para reducir la rapidez angular del sistema, de 75.0 a 50.0 rpm en 30.0 s?

10.61 ••• Un cilindro sólido uniforme con masa 8.25 kg y 15.0 cm de diámetro está girando a 220 rpm en un eje delgado, sin fricción que pasa a lo largo del eje del cilindro. Usted diseña un freno de fricción sencillo para detener el cilindro presionando el freno contra el borde exterior con una fuerza normal. El coeficiente de fricción cinética entre el freno y el borde es 0.333. ¿Cuál debe ser la fuerza aplicada normal para que el cilindro se detenga después de haber girado 5.25 revoluciones?

Figura **P10.62**



10.62 ••• Un disco hueco uniforme tiene dos trozos de alambre delgado ligero que se enrollan alrededor de su borde exterior y están sujetos al techo (figura P10.62). De repente, se rompe uno de los alambres, y el alambre que queda no se desliza conforme el disco rueda hacia abajo. Utilice la conservación de la energía para calcular la rapidez del centro de este disco, después de que haya caído una distancia de 2.20 m.

Figura **P10.63**

10.63 ••• Una barra delgada y uniforme de 3.80 kg y 80.0 cm de longitud tiene pegadas esferas muy pequeñas de 2.50 kg en cada uno de sus extremos (figura P10.63). La barra está apoyada horizontalmente en un eje delgado y sin fricción que pasa por su centro y es perpendicular a la barra. De repente, la esfera del lado derecho se despega y se cae, aunque la otra permanece pegada a la barra. *a*) Calcule la aceleración angular de la barra justo después de que la esfera se cae. *b*) ¿La aceleración angular permanece constante mientras la barra continua balanceándose? Si no es así, ¿aumentará o disminuirá? *c*) Obtenga la velocidad angular de la barra justo cuando se balancee por su posición vertical.

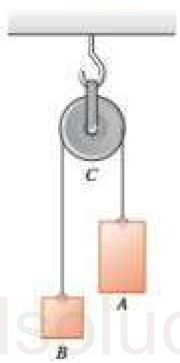
10.64 ••• Exena la Exterminadora está explorando un castillo. Un dragón la ve y la persigue por un pasillo. Exena se introduce en una habitación y trata de cerrar la pesada puerta antes de que el dragón la atrape. Inicialmente, la puerta es perpendicular a la pared, así que debe girar 90° para cerrarse. La puerta tiene 3.00 m de altura y 1.25 m de ancho, y pesa 750 N. Puede despreciarse la fricción en las bisagras. Si Exena aplica una fuerza de 220 N al borde de la puerta, perpendicular a ella, ¿cuánto tiempo tardará en cerrarla?

10.65 •• **CALC** Se ata una cuerda ligera a un punto en el borde de un disco vertical uniforme de radio R y masa M. El disco puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. Inicialmente, el disco está en reposo con la cuerda atada al punto más alto del disco. Se tira de la cuerda con una fuerza horizontal constante $\vec{F}$ hasta que el disco ha girado exactamente un cuarto de revolución, y luego se suelta. *a*) Use la ecuación (10.20) para calcular el trabajo realizado por la cuerda. *b*) Use la ecuación (6.14) para calcular el trabajo realizado por la cuerda. ¿Obtiene el mismo resultado que en el inciso *a*)? *c*) Determine la rapidez angular final del disco. *d*) Determine la aceleración tangencial máxima de un punto del disco. *e*) Determine la aceleración radial (centrípeta) máxima de un punto del disco.

10.66 ••• **Equilibrismo.** Una bolita de arcilla con masa M está pegada a un extremo de una varilla larga, delgada y uniforme de la misma masa M y longitud L. *a*) Ubique la posición del centro de masa del sistema varilla-arcilla. Marque esta posición en un dibujo de la varilla. *b*) Se equilibra con cuidado la varilla en una mesa sin fricción, de modo que quede colocada verticalmente, con el extremo que no tiene arcilla tocando la mesa. Ahora la varilla se inclina formando un ángulo pequeño q con la vertical. Determine su aceleración angular en este instante, suponiendo que el extremo sin arcilla no pierde contacto con la mesa. (*Sugerencia:* Véase la tabla 9.2). *c*) Se equilibra otra vez la varilla en la mesa sin fricción de modo que quede colocada verticalmente, pero ahora con el extremo *que tiene* la arcilla tocando la superficie. Otra vez, la varilla se inclina formando un ángulo pequeño q con la vertical. Determine su aceleración angular en ese instante, suponiendo que la arcilla permanece en contacto con la mesa. ¿Cómo se compara su resultado con el que obtuvo en el inciso *b*)? *d*) Un taco de billar es una varilla que tiene un extremo grueso y se adelgaza continuamente hasta el otro extremo. Es fácil equilibrar un taco verticalmente sobre un dedo, si el extremo delgado está en contacto con el dedo; sin embargo, resulta mucho más difícil si el extremo que está en contacto con el dedo es el grueso. Explique esta diferencia.

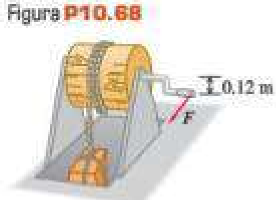
10.67 •• **Máquina de Atwood.** La figura P10.67 muestra una máquina de Atwood. Encuentre las aceleraciones lineales de bloques A y B, la aceleración angular de la rueda C y la tensión en cada lado del cable si no hay deslizamiento entre el cable y la superficie de la rueda. Sean las masas de los bloques A y B, 4.00 kg y 2.00 kg, respectivamente, el momento de inercia de la rueda en torno a su eje es 0.300 kg·m^2, y sea el radio de la rueda igual a 0.120 m.

Figura **P10.67**



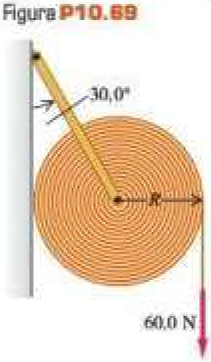
10.68 ••• El mecanismo de la figura P10.68 sirve para sacar una caja con provisiones de la bodega de un barco. La caja tiene una masa total de 50 kg. Una cuerda está enrollada en un cilindro de madera que gira sobre un eje metálico. El cilindro tiene un radio de 0.25 m y un momento de inercia I = 2.9 kg·m^2 alrededor del eje. La caja cuelga del extremo libre de la cuerda. Un extremo del eje pivota sobre cojinetes sin fricción; una manivela está unida al otro extremo. Cuando se gira la manivela, el extremo del mango gira alrededor del eje en un círculo vertical de 0.12 m de radio, el cilindro gira y la caja sube. ¿Qué magnitud de la fuerza $\vec{F}$ aplicada tangencialmente a la manivela se necesita para levantar la caja con una aceleración de 1.40 m/s^2? (Pueden despreciarse la masa de la cuerda, así como los momentos de inercia del eje y la manivela).

Figura **P10.68**



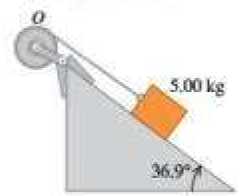
10.69 •• Un rollo de 16.0 kg de papel con radio R = 18.0 cm descansa contra la pared sostenido por un soporte unido a una varilla que pasa por el centro del rollo (figura P10.69). La varilla gira sin fricción en el soporte, y el momento de inercia del papel y la varilla alrededor del eje es de 0.260 kg·m^2. El otro extremo del soporte está unido a la pared mediante una bisagra sin fricción, de modo que el soporte forma un ángulo de 30.0° con la pared. El peso del soporte es despreciable. El coeficiente de fricción cinética entre el papel y la pared es μ_k = 0.25. Se aplica una fuerza vertical constante F = 60.0 N al papel, que se desenrolla. *a*) ¿Qué magnitud tiene la fuerza que la varilla ejerce sobre el rollo de papel al desenrollarse este? *b*) ¿Qué aceleración angular tiene el rollo?

Figura **P10.69**



10.70 •• Un bloque con masa m = 5.00 kg baja deslizándose por una superficie inclinada 36.9° con respecto a la horizontal (figura P10.70). El coeficiente de fricción cinética es 0.25. Una cuerda atado al bloque está enrollada en un volante con su eje fijo en O. El volante tiene una masa de 25.0 kg, y un momento de inercia con respecto al eje de 0.500 kg · m^2. La cuerda tira sin resbalar a una distancia perpendicular de 0.200 m con respecto a ese eje. *a*) ¿Qué aceleración tiene el bloque? *b*) ¿Qué tensión hay en la cuerda?

Figura **P10.70**

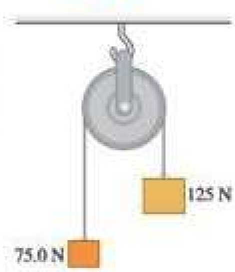


10.71 ••• Dos discos metálicos, uno con radio R_1 = 2.50 cm y masa M_1 = 0.80 kg y el otro con radio R_2 = 5.00 cm y masa M_2 = 1.60 kg, se sueldan entre sí y se montan en un eje sin fricción que pasa por su centro común, como en el problema 9.87. *a*) Una cuerda ligera se enrolla en el borde del disco de menor tamaño, y un bloque de 1.50 kg se cuelga del extremo libre de la cuerda. ¿Qué magnitud tiene la aceleración hacia abajo del bloque una vez que se suelta? *b*) Repita el cálculo del inciso *a*), ahora con la cuerda enrollada en el borde del disco de mayor tamaño. ¿En qué caso es mayor la aceleración del bloque? ¿Es lógica la respuesta?

10.72 •• Se tira horizontalmente de una máquina para cortar el césped, en forma de cilindro hueco con pared delgada y masa M, aplicando una fuerza horizontal constante F a un mango sujeto al eje. Si la máquina rueda sin resbalar, calcule la aceleración y la fuerza de fricción.

10.73 • Dos pesos están conectados por una cuerda flexible muy ligera, que pasa por una polea sin fricción de 80.0 N y radio de 0.300 m. La polea es un disco sólido uniforme y está apoyada de un gancho unido al techo (figura P10.73). ¿Qué fuerza ejerce el techo sobre el gancho?

Figura **P10.73**



10.74 •• Un disco sólido rueda sin resbalar en una superficie plana con rapidez constante de 3.60 m/s. *a*) ¿Hasta qué altura puede subir por una rampa de 30.0° antes de detenerse? *b*) Explique por qué su respuesta del inciso *a*) no depende de la masa ni del radio del disco.

10.75 • **El yoyo.** Un yoyo consiste en dos discos uniformes, cada uno con masa m y radio R, conectados por un eje ligero de radio b. Una cuerda ligera se enrolla varias veces en el eje y luego se mantiene fija mientras el yoyo se libera del reposo; el yoyo cae al desenrollarse el hilo. Calcule las aceleraciones lineal y angular del yoyo, y la tensión en la cuerda.

10.76 •• PA Un cascarón esférico de pared delgada, con masa m y radio r, parte del reposo y rueda hacia abajo sin deslizarse por la pista que se muestra en la figura P10.76. Los puntos A y B están en la parte circular de la pista, cuyo radio es R. El diámetro de la esfera es muy pequeño comparado con h_0 y R, y la fricción por rodamiento es despreciable. *a*) ¿Cuál es la altura mínima h_0 para la cual esta esfera dará una vuelta completa a la parte circular de la pista? *b*) ¿Qué tan fuerte empuja la pista sobre la esfera en el punto B, que está al mismo nivel que el centro del círculo? *c*) Suponga que la pista no tiene fricción y que la esfera se suelta desde la misma altura h_0 que usted obtuvo en el inciso *a*). ¿Daría la vuelta completa al bucle? ¿Cómo lo sabe? *d*) En el inciso *c*), ¿qué tan fuerte empuja la pista sobre la esfera en el punto A, la cima del círculo? ¿Qué tan fuerte empujó a la esfera en el inciso *a*)?

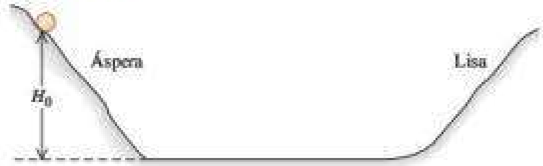
Figura **P10.76**

10.77 • Partiendo del reposo, se aplica una fuerza constante $F = 100$ N al extremo libre de un cable de 50 m, que está enrollado en el borde exterior de un cilindro sólido y uniforme de 4.00 kg con diámetro de 30.0 cm, en una situación similar a la de la figura 10.9*a*. El cilindro puede girar libremente en torno a un eje fijo, sin fricción, que pasa por su centro. *a*) ¿Cuánto tarda en desenrollarse todo el cable y con qué rapidez se está moviendo este en el instante en que termina de desenrollarse? *b*) Suponga ahora que, en vez de un cilindro, se usa un aro uniforme, pero sin alterar ninguna de las cantidades dadas. ¿Las respuestas a la pregunta del inciso *a*) serían valores más altos o más bajos en este caso? Explique su respuesta.

10.78 •• Como se muestra en la figura E10.20, una cuerda está enrollada varias vueltas en el borde de un aro con radio de 0.0800 m y masa de 0.180 kg. Se tira hacia arriba del extremo libre del aro, de forma tal que el aro no se mueve verticalmente mientras la cuerda se desenrolla. *a*) Calcule la tensión en el hilo mientras se desenrolla. *b*) Determine la aceleración angular del aro durante el desenrollado de la cuerda. *c*) Calcule la aceleración hacia arriba de la mano que tira del extremo libre de la cuerda. *d*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas si el aro se sustituyera por un disco sólido con los mismos masa y radio?

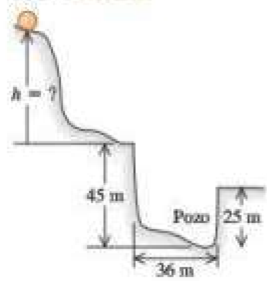
10.79 •• Una pelota de baloncesto (que se puede modelar muy bien como una esfera hueca) rueda por una ladera de la montaña en un valle y luego hasta el lado opuesto, partiendo del reposo a una altura H_0 por encima del fondo. En la figura P10.79, la parte áspera del terreno impide el deslizamiento, mientras que la parte lisa no tiene fricción. *a*) ¿Qué tan alto, en términos de H_0 subirá la pelota por el otro lado? *b*) ¿Por qué no regresa la pelota a la altura H_0? ¿Ha perdido algo de su energía potencial original?

Figura **P10.79**



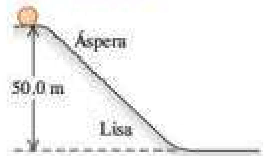
10.80 • **PA** Una canica uniforme baja rodando sin resbalar por el trayecto de la figura P10.80, partiendo del reposo. *a*) Calcule la altura mínima h que evita que la canica caiga en el foso. *b*) El momento de inercia de la canica depende de su radio. Explique por qué la respuesta al inciso *a*) no depende del radio de la canica. *c*) Resuelva el inciso *a*) para un bloque que se desliza sin fricción, en vez de una canica que rueda. ¿Cómo se compara la h mínima en este caso con la respuesta al inciso *a*)?

Figura **P10.80**



10.81 •• **Piedras rodantes.** Un peñasco esférico, sólido y uniforme parte del reposo y baja rodando por la ladera de una colina de 50.0 m de altura (figura P10.81). La mitad superior de la colina es lo bastante áspera como para que el peñasco ruede sin resbalar; sin embargo, la mitad inferior está cubierta de hielo y no hay fricción. Calcule la rapidez de traslación del peñasco al llegar al pie de la colina.

Figura **P10.81**



10.82 •• **PA** Una esfera sólida uniforme rueda sin resbalar subiendo una colina, como se muestra en la figura P10.82. En la cima, la esfera se mueve horizontalmente y después se cae por un acantilado vertical. *a*) ¿A qué distancia del pie del acantilado cae la esfera y con qué rapidez se está moviendo justo antes de tocar el suelo? *b*) Observe que, al tocar tierra, la esfera tiene mayor rapidez de traslación que cuando estaba en la base de la colina. ¿Implica esto que la esfera obtuvo energía de algún lado? ¡Explique su respuesta!

Figura **P10.82**

10.83 •• Una rueda de 42.0 cm de diámetro consiste en un borde y seis rayos; está hecha de un material plástico rígido y delgado con una densidad lineal de masa de 25.0 g/cm. Esta rueda se suelta desde el reposo en la cima de una colina de 58.0 m de altura. *a*) ¿Con qué rapidez rueda cuando llega a la base de la colina? *b*) ¿Cómo cambiaría su respuesta si la densidad lineal de masa y el diámetro de la rueda se duplicaran?

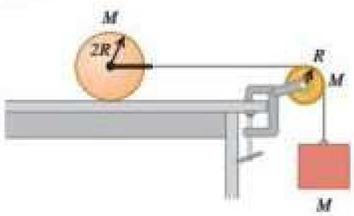
10.84 •• Una niña empuja un balón de baloncesto de 0.600 kg para que suba rodando por una rampa larga. El balón puede considerarse como esfera hueca de pared delgada. Cuando la niña suelta el balón en la base de la rampa, este tiene una rapidez de 8.0 m/s. Cuando el balón vuelve a ella después de subir por la rampa y regresar rodando, tiene una rapidez de 4.0 m/s. Suponga que el trabajo efectuado por la fricción sobre el balón es el mismo cuando sube o baja por la rampa, y que el balón rueda sin resbalar. Calcule el aumento máximo en la altura vertical del balón al subir por la rampa.

10.85 •• **PA** En un experimento, se deja que una bola sólida uniforme baje rodando por una pista curva, partiendo del reposo y rodando sin resbalar. La distancia vertical que la bola desciende es h. La base de la pista es horizontal y se extiende hasta el borde de una mesa; la bola sale de la pista viajando horizontalmente. En caída libre después de salir de la pista, la bola se mueve una distancia horizontal x y una distancia vertical y. *a*) Calcule x en términos de h y y, despreciando el trabajo de la fricción. *b*) ¿Cambiaría la respuesta al inciso *a*) en la Luna? *c*) Aunque el experimento se realice con mucho cuidado, el valor medido de x es siempre un poco menor que el calculado en el inciso *a*). ¿Por qué? *d*) ¿Cuánto valdría x con las mismas h y y del inciso *a*), si lo que rodara por la pista fuera una moneda de plata? Puede despreciarse el trabajo efectuado por la fricción.

10.86 •• Un puente levadizo uniforme de 8.00 m de longitud está unido al camino en un extremo mediante una articulación sin fricción, y puede levantarse con un cable unido al otro extremo. El puente está en reposo, suspendido 60.0° sobre la horizontal, cuando el cable se rompe repentinamente. *a*) Calcule la aceleración angular del puente inmediatamente después de romperse el cable. (La gravedad se comporta como si actuara en el centro de masa). *b*) ¿Podría usar la ecuación $\omega = \omega_0 + \alpha t$ para calcular la rapidez angular del puente levadizo en un instante posterior? Explique por qué. *c*) ¿Qué rapidez angular tiene el puente en el momento de quedar horizontal?

10.87 • Un cilindro sólido uniforme de masa M y radio $2R$ descansa en una mesa horizontal. Se ata una cuerda mediante un yugo a un eje sin fricción que pasa por el centro del cilindro, de modo que este pueda girar sobre el eje. La cuerda pasa por una polea con forma de disco de masa M y radio R, que está montada en un eje sin fricción que pasa por su centro. Un bloque de masa M se suspende del extremo libre del hilo (figura P10.87). La cuerda no resbala en la polea, y el cilindro rueda sin resbalar sobre la mesa. Si el sistema se libera del reposo, determine la magnitud de la aceleración del bloque.

Figura **P10.87**



10.88 ••• Una varilla uniforme de 0.0300 kg y 0.400 m de longitud gira en un plano horizontal alrededor de un eje fijo que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla. Dos anillos pequeños con masa de 0.0200 kg se montan, cada uno, de modo que puedan deslizarse a lo largo de la varilla, aunque inicialmente están sujetos con broches en posiciones a 0.0500 m del centro de la varilla a cada lado, y el sistema está girando a 30.0 rev/min. Sin alterar de otro modo el sistema, los broches se sueltan y los anillos se deslizan hacia afuera por la varilla, saliendo despedidos por los extremos. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el sistema en el instante en que los anillos llegan a los extremos de la varilla? *b*) ¿Qué rapidez angular tiene la varilla una vez que los anillos se salen?

10.89 ••• Una esfera de 5.00 kg se deja caer desde una altura de 12.0 m arriba de un extremo de una barra uniforme que está pivotada en su centro. La masa de la barra es de 8.00 kg y su longitud es de 4.00 m. Sobre el otro extremo de la barra descansa otra esfera de 5.00 kg, no sujeta a la barra. La esfera que cae se queda pegada a la barra después del choque. ¿Qué altura alcanzará la otra esfera después del choque?

10.90 •• **Tarzán y Jane en el siglo XXI.** Tarzán tontamente se ha metido en otro lío con los animales y Jane debe rescatarlo de nuevo. Jane, de 60.0 kg, parte del reposo a una altura de 5.00 m entre los árboles y se balancea hacia abajo al suelo con una delgada liana, pero muy rígida, de 30.0 kg y de 8.00 m de largo. Llega justo a tiempo para arrebatar a Tarzán, de 72.0 kg, de las fauces de un hipopótamo furioso. ¿Cuál es la rapidez angular de Jane (y de la liana) *a*) justo antes de que ella agarre a Tarzán y *b*) justo después de que lo agarra? *c*) ¿Hasta qué altura suben Tarzán y Jane en su primer balanceo después de este audaz rescate?

10.91 •• Una varilla uniforme de longitud L descansa en una superficie horizontal sin fricción. La varilla pivota en un extremo sobre un eje fijo sin fricción y está inicialmente en reposo. Una bala que viaja paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la varilla, con rapidez v, golpea la varilla en su centro y se incrusta en ella. La masa de la bala es un cuarto de la masa de la varilla. *a*) ¿Qué rapidez angular final tiene la varilla? *b*) ¿Qué proporción hay entre la energía cinética del sistema después del choque y la energía cinética de la bala antes del choque?

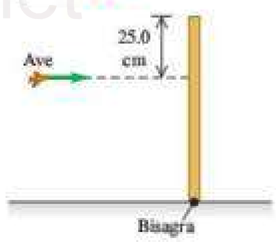
10.92 •• La puerta de madera sólida de un gimnasio tiene 1.00 m de ancho y 2.00 m de altura, bisagras en un lado y una masa total de 35.0 kg. La puerta, que está abierta y en reposo, es golpeada en su centro por un balón de baloncesto que le aplica una fuerza media de 1500 N durante 8.00 ms. Calcule la rapidez angular de la puerta después del impacto. [*Sugerencia:* Si integramos la ecuación (10.29), obtenemos $\Delta L_z = \int_{t_1}^{t_2}(\sum\tau_z)dt = (\sum\tau_z)_{med}\Delta t$. La cantidad $\int_{t_1}^{t_2}(\sum\tau_z)dt$ se denomina impulso angular].

10.93 ••• Una diana de una galería de tiro consiste en un tablero cuadrado vertical de madera de 0.750 kg y 0.250 m de lado, que pivota sobre un eje horizontal en su borde superior. Una bala de 1.90 g que viaja a 360 m/s golpea el tablero de frente en el centro y se incrusta en él. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el tablero justo después del impacto? *b*) ¿Qué altura máxima sobre la posición de equilibrio alcanza el centro del tablero? *c*) ¿Qué rapidez mínima tendría que tener la bala para que el tablero diera una vuelta completa después del impacto?

10.94 •• ***Glitches* de estrellas de neutrones.** A veces, una estrella de neutrones giratoria (véase el ejercicio 10.41) sufre una aceleración repentina e inesperada llamada *glitch*. Una explicación es que el *glitch* se presenta cuando la corteza de la estrella se asienta un poco, reduciendo el momento de inercia alrededor del eje de rotación. Una estrella de neutrones con rapidez angular $\omega_0 = 70.4$ rad/s sufrió un *glitch* en octubre de 1975, el cual aumentó su velocidad angular a $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, donde $\Delta\omega/\omega_0 = 2.01 \times 10^{-6}$. Si el radio de la estrella de neutrones antes del *glitch* era de 11 km, ¿en cuánto disminuyó su radio por el "sismo estelar"? Suponga que la estrella es una esfera uniforme.

10.95 ••• Un ave de 500.0 g vuela horizontal y distraídamente a 2.25 m/s, cuando de repente viaja directo hacia una barra vertical estacionaria, golpeándola a 25.0 cm debajo de la parte superior (figura P10.95). La barra es uniforme con longitud de 0.750 m y masa de 1.50 kg, y tiene una bisagra en la base. El choque aturde al ave, de modo que después simplemente cae hacia el suelo (aunque pronto se recupera para continuar volando felizmente). ¿Cuál es la velocidad angular de la barra, *a*) justo después de que es golpeada por el ave, y *b*) cuando esta llega al suelo?

Figura **P10.95**



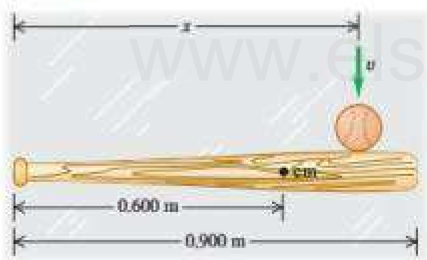
10.96 ••• **PA** Un bloque pequeño con masa de 0.250 kg se ata a una cuerda que pasa por un agujero en una superficie horizontal sin fricción (véase la figura E10.42). El bloque originalmente gira en un círculo de 0.800 m de radio alrededor del agujero, con rapidez tangencial de 4.00 m/s. Se tira lentamente de la cuerda desde abajo, acortando el radio del círculo descrito por el bloque. La resistencia a la rotura de la cuerda es de 30.0 N. ¿Qué radio tendrá el círculo cuando la cuerda se rompa?

10.97 • Un disco horizontal de madera rugosa con masa de 7.00 kg y 1.00 m de diámetro pivota sobre cojinetes sin fricción, alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Se pega en él una vía circular de tren de juguete con masa insignificante y diámetro medio de 0.95 m. Un trenecito de 1.20 kg operado con baterías descansa en la vía. Para demostrar la conservación del momento angular, se enciende el motor del tren. El tren se mueve en sentido antihorario, alcanzando en poco tiempo una rapidez constante de 0.600 m/s con respecto a la vía. Calcule la magnitud y la dirección de la velocidad angular del disco con respecto a la Tierra.

10.98 • Un hombre de 55 kg corre alrededor del borde de una tornamesa horizontal montada en un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La velocidad del corredor con respecto a la Tierra tiene magnitud de 2.8 m/s. La tornamesa gira en la dirección opuesta con velocidad angular de magnitud 0.20 rad/s con respecto a la Tierra. El radio de la tornamesa es de 3.0 m, y su momento de inercia alrededor del eje de rotación es de 80 kg$\cdot$m^2. Calcule la velocidad angular final del sistema, si el corredor se detiene con respecto a la tornamesa. (El corredor puede tratarse como partícula).

10.99 •• **Centro de percusión.** Un bate de béisbol con masa de 0.800 kg y 0.900 m de longitud descansa en una superficie horizontal sin fricción. Su centro de masa está a 0.600 m del extremo del mango (figura P10.99). El momento de inercia del bate alrededor de su centro de masa es de 0.0530 kg$\cdot$m^2. El bate es golpeado por una pelota que viaja perpendicular a él. El impacto aplica un impulso $J = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$ en un punto a una distancia x del extremo del bate. ¿Qué x se necesita para que el extremo del mango permanezca en reposo cuando el bate comience a moverse? [*Sugerencia:* Considere el movimiento del centro de masa y la rotación alrededor del centro de masa. Calcule x de modo que estos dos movimientos se combinen dando $v = 0$ para el extremo del bate justo después del choque. Además, observe que la integración de la ecuación (10.29) da $\Delta L = \int_{t_1}^{t_2}(\sum \tau)\,dt$ (véase el problema 10.92)]. El punto que ha encontrado en el bate se denomina *centro de percusión*. Si se golpea una bola lanzada con ese punto se reduce al mínimo la "punzada" que el bateador siente en las manos.

Figura **P10.99**



PROBLEMAS DE DESAFÍO

10.100 ••• Una esfera uniforme de radio R rueda sin resbalar entre dos rieles, de modo que la distancia horizontal entre los dos puntos de contacto de los rieles con la esfera es d. *a)* Elabore un dibujo y demuestre que, en cualquier instante, $v_{cm} = \omega\sqrt{R^2 - d^2/4}$. Analice esta expresión en los límites $d = 0$ y $d = 2R$. *b)* En el caso de una esfera uniforme que parte del reposo y desciende una distancia vertical h mientras baja una rampa rodando sin resbalar, $v_{cm} = \sqrt{10gh/7}$. Sustituyendo la rampa por los dos rieles, demuestre que

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10gh}{5 + 2/(1 - d^2/4R^2)}}$$

En ambos casos, se despreció el trabajo efectuado por la fricción. *c)* ¿Cuál rapidez del inciso *b)* es menor? ¿Por qué? Conteste en términos de la forma en que la pérdida de energía potencial se divide entre las ganancias de energías cinética de traslación y de rotación. *d)* ¿Para qué valor del cociente d/R las dos expresiones del inciso *b)* de la rapidez difieren en 5.0%? ¿Y en 0.50%?

10.101 ••• Cuando un objeto rueda sin resbalar, la fuerza de fricción por rodamiento es mucho menor que la fuerza de fricción cuando el objeto resbala; una moneda de plata rueda sobre su borde con mucho mayor rapidez que si resbala sobre su cara plana (véase la sección 5.3). Si un objeto rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal, podemos suponer que la fuerza de fricción es cero, de modo que a_x y α_z son aproximadamente cero, y v_x y ω_z son aproximadamente constantes. Rodar sin resbalar implica que $v_x = r\omega_z$ y $a_x = r\alpha_z$. Si un objeto se pone en movimiento en una superficie *sin* estas igualdades, la fricción por deslizamiento (cinética) actuará sobre el objeto mientras se desliza, hasta que se establece rueda sin resbalar. Un cilindro sólido de masa M y radio R, girando con rapidez angular ω_0 alrededor de un eje que pasa por su centro, se coloca en una superficie horizontal para la que el coeficiente de fricción cinética es μ_k. *a)* Dibuje un diagrama de cuerpo libre del cilindro en la superficie. Medite bien la dirección de la fuerza de fricción cinética que actúa sobre el cilindro. Calcule las aceleraciones a_x del centro de masa y α_z de rotación alrededor del centro de masa. *b)* Al inicio, el cilindro está resbalando totalmente, ya que $\omega_z = \omega_0$, pero $v_x = 0$. El rodamiento sin resbalar inicia cuando $v_x = R\omega_z$. Calcule la *distancia* que el cilindro rueda antes de que deje de resbalar. *c)* Calcule el trabajo efectuado por la fuerza de fricción sobre el cilindro, mientras este se movió desde el punto donde se colocó, hasta el punto donde comenzó a rodar sin resbalar.

10.102 ••• Se construye una rueda de giróscopo para demostración quitando el neumático de una rueda de bicicleta de 0.650 m de diámetro, enrollando alambre de plomo en el borde y pegándolo con cinta. El eje se proyecta 0.200 m a cada lado de la rueda y una mujer sostiene los extremos del eje en sus manos. La masa del sistema es de 8.00 kg; puede suponerse que toda la masa se encuentra en el borde. El eje es horizontal y la rueda está girando alrededor del eje a 5.00 rev/s. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza que cada mano ejerce sobre el eje *a)* cuando el eje está en reposo; *b)* cuando el eje gira en un plano horizontal alrededor de su centro a 0.050 rev/s; *c)* cuando el eje está girando en un plano horizontal alrededor de su centro a 0.300 rev/s. *d)* ¿Con qué rapidez debe girar el eje para que pueda sostenerse solo en un extremo?

10.103 ••• PA CALC Un bloque con masa m gira con rapidez lineal v_1 en un círculo de radio r_1 sobre una superficie horizontal sin fricción (véase la figura E10.42). Se tira de la cuerda lentamente desde abajo, hasta que el radio del círculo descrito por el bloque se reduce a r_2. *a)* Calcule la tensión T en la cuerda en función de r, la distancia entre el bloque y el agujero. Su respuesta estará en términos de la velocidad inicial v_1 y del radio r_1. *b)* Use $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}(r) \cdot d\vec{r}$ para calcular el trabajo efectuado por $\vec{T}$ cuando r cambia de r_1 a r_2. *c)* Compare los resultados del inciso *b)* con el cambio en la energía cinética del bloque.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo ?

La Tierra tiene un movimiento de precesión debido a que sobre ella se ejercen torcas debidas al Sol y la Luna. Como resultado, su eje de rotación (que pasa por los Polos Norte y Sur de la Tierra) lentamente cambia su orientación con respecto a las estrellas lejanas, y tarda 26,000 años para realizar un ciclo completo de precesión. Actualmente, el eje de rotación apunta hacia Polaris, pero hace 5000 años apuntaba hacia Thuban, y en 12,000 años a partir de ahora apuntará hacia la brillante estrella Vega.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

10.1 Respuesta: ii. La fuerza P actúa a lo largo de una línea vertical, de manera que el brazo de palanca es la distancia horizontal desde A hasta la línea de acción. Esta es la componente horizontal de la distancia L, que es $L \cos\theta$. Por lo tanto, la magnitud de la torca es el producto de la magnitud de la fuerza P por el brazo de palanca $L\cos\theta$ o $\tau = PL\cos\theta$.

10.2 Respuesta: iii, ii, i. Para que el objeto colgante de masa m_2 acelere hacia abajo, la fuerza neta sobre él debe ser hacia abajo. Por lo tanto, la magnitud m_2g de la fuerza del peso hacia abajo debe ser mayor que la magnitud T_2 de la fuerza de tensión hacia arriba. Para que la polea tenga aceleración angular en sentido horario, la torca neta sobre la polea debe ser en sentido horario. La tensión T_2 tiende a girar la polea en sentido horario, en tanto que la tensión T_1 tiende a girar la polea en sentido antihorario. Ambas fuerzas de tensión tienen el mismo brazo de palanca R, de manera que hay una torca T_2R en sentido horario y una torca T_1R en sentido antihorario. Para que la torca neta sea en sentido horario, T_2 debe ser mayor que T_1. Por consiguiente, $m_2g > T_2 > T_1$.

10.3 Respuestas: *a*) ii, *b*) i. Si usted vuelve a realizar los cálculos del ejemplo 10.6 con un cilindro hueco (momento de inercia $I_{cm} = MR^2$) en vez de un cilindro sólido (momento de inercia $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$), usted encontrará $a_{cm\text{-}y} = \frac{1}{2}g$ y $T = \frac{1}{2}Mg$ (en vez de $a_{cm\text{-}y} = \frac{2}{3}g$ y $T = \frac{1}{3}Mg$ para un cilindro sólido). Por lo tanto, la aceleración es menor aunque la tensión sea mayor. Usted puede llegar a la misma conclusión sin efectuar el cálculo. Mayor momento de inercia significa que el cilindro hueco girará más lentamente y, por consiguiente, rodará hacia abajo con mayor lentitud. Para hacer más lento el movimiento descendente, se requiere una mayor fuerza de tensión hacia abajo para oponerse a la fuerza de gravedad hacia abajo.

10.4 Respuesta: iii. Aplicamos la misma torca durante el mismo desplazamiento angular a ambos cilindros. Entonces, de acuerdo con la ecuación (10.21), efectuamos la misma cantidad de trabajo sobre los dos cilindros y les impartimos la misma energía cinética a ambos. (El que tiene menor momento de inercia desarrolla la mayor rapidez angular, aunque eso no es lo que se preguntó. Compare con el ejemplo conceptual 6.5 de la sección 6.2).

10.5 Respuestas: *a*) no, *b*) sí Conforme la pelota da vuelta al círculo, la magnitud de $\vec{p} = m\vec{v}$ no cambia (la rapidez es constante), pero su dirección sí lo hace, así que el vector momento lineal no es constante. Sin embargo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ *sí* es constante: la magnitud se mantiene constante (la rapidez y la distancia perpendicular entre la mano y la pelota no cambian) y la dirección también (sobre el eje de rotación, perpendicular al plano de movimiento de la pelota). El momento lineal cambia porque una *fuerza* neta $\vec{F}$ actúa sobre la pelota (hacia el centro del círculo). El momento angular no cambia porque no hay *torca* neta; el vector $\vec{r}$ apunta de la mano a la pelota, y la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la pelota apunta hacia la mano, de modo que el producto vectorial $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ es cero.

10.6 Respuesta: i. En ausencia de torcas externas, el momento angular de la Tierra $L_z = I\omega_z$ permanecería constante. El hielo derretido se movería de los polos al ecuador (es decir, se alejaría del eje de rotación del planeta) y el momento de inercia I de la Tierra aumentaría un poco. Por lo tanto, la velocidad angular ω_z disminuiría ligeramente y el día duraría un poco más.

10.7 Respuesta: iii. Aumentar al doble la masa del volante duplicaría tanto su momento de inercia I como su peso w, así que la razón I/w no cambiaría. La ecuación (10.33) dice que la rapidez angular de precesión depende de esta razón, así que el valor de Ω. *no* cambiaría.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** $h = \dfrac{2R}{5}$

***b*)** $\frac{5}{7}$ de la rapidez que tenía justo después del golpe