Trabajo Práctico: Funciones vectoriales

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Cálculo de varias variables”de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\|\, dt \qquad \text{Longitud de arco}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{\|\mathbf{v}(t)\|}\mathbf{v}(t) \qquad \text{Vector tangente unitario}$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\|}\frac{d\mathbf{T}}{ds}; \quad \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(t)\|}\mathbf{T}'(t) \qquad \text{Vector normal unitario principal}$$

$$\kappa = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\|; \qquad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\mathbf{r}'(t)} \qquad \text{Curvatura}$$

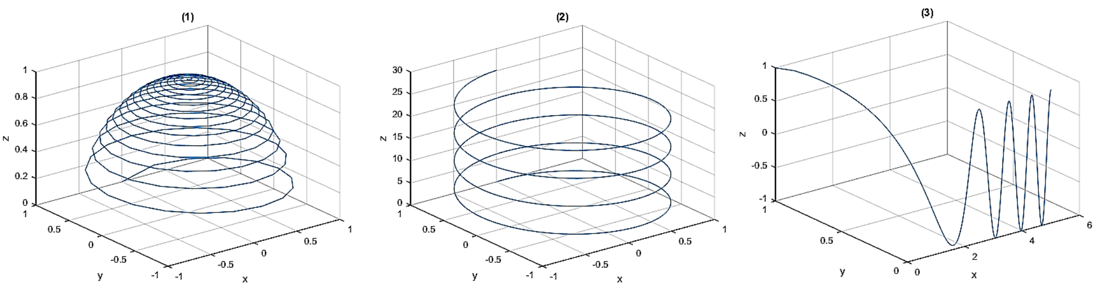
$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \qquad \text{Curvatura en el espacio}$$

Funciones vectoriales: introducción

1. Represente gráficamente la curva que es la imagen de cada una de las siguientes funciones vectoriales, indicando punto inicial y final en cada caso. (En caso de ser posible escriba la o las ecuaciones cartesianas que representen las coordenadas de los puntos en la curva)

   a) $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $-2 \le t \le 2$.
   b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $-2 \le t \le 2$.
   c) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $-2 \le t \le 2$.
   d) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
   e) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $-\pi \le t \le \pi$.
   f) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
   g) $\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
   h) $\mathbf{r}(t) = (1, t^2, t)$, $0 \le t \le 2$.
   i) $\mathbf{r}(t) = (\cos(3t)\cos(t), \cos(3t)\operatorname{sen}(t))$, $0 \le t \le 2\pi$. En esta curva analice si se corta a sí misma e indique cuál es una condición para que una función vectorial represente una curva que no se corte a sí misma (es decir, que sea simple).

2. Indique qué gráfico se corresponde con qué curva:(En caso de ser posible escriba la o las ecuaciones cartesianas que representen las coordenadas de los puntos en la curva)



$\mathbf{r}_1(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 8\pi]$;
$\mathbf{r}_2(t) = (\sqrt{t}, e^{-t}, \cos t)$, $t \in [0, 8\pi]$;
$\mathbf{r}_3(t) = ((1-t)\operatorname{sen}(100\,t), (1-t)\cos(100\,t), \sqrt{1-(1-t)^2})$, $t \in [0, 1]$.

3. Para cada una de las funciones del ejercicio 1,

   a) analice la continuidad;

   b) calcule la derivada en cada punto e indique si se trata o no de una curva suave;

   c) halle la rapidez, velocidad, aceleración, vector tangente unitario, vector normal unitario en el punto intermedio de cada intervalo.

4. Sean $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{s}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ funciones con valores vectoriales dadas por $\mathbf{r}(t)=r_1(t)\mathbf{i}+r_2(t)\mathbf{j}+\mathbf{r}_3(t)\mathbf{k}$ y $\mathbf{s}(t)=s_1(t)\mathbf{i}+s_2(t)\mathbf{j}+\mathbf{s}_3(t)\mathbf{k}$. Pruebe las siguientes propiedades:

   a) $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\mathbf{L}=(l_1,l_2,l_3)$ si y sólo si $\lim_{t\to a}r_1(t)=l_1$, $\lim_{t\to a}r_2(t)=l_2$ y $\lim_{t\to a}r_3(t)=l_3$.

   b) $\mathbf{r}$ es continua en $t_0\in\mathbb{R}$ is y sólo si r_1, r_2 y r_3 son continuas en t_0.

   c) Si $\mathbf{r}$ es diferenciable en t_0, entonces es continua en t_0.

   Si, además, las funciones componentes de $\mathbf{r}$ y de $\mathbf{s}$ son derivables en $t_0\in\mathbb{R}$, pruebe que:

   d) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)+\mathbf{s}(t)]=\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)+\frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)$.

   e) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{s}(t)]=\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\cdot\mathbf{s}(t)+\mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)$.

   f) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{s}(t)]=\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\times\mathbf{s}(t)+\mathbf{r}(t)\times\frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)$.

   g) Si f es una función real de una variable real, derivable, $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)]=f'(t)\mathbf{r}(t)+f(t)\mathbf{r}'(t)$.

   h) Si f es una función real de una variable real, derivable, $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(f(t))]=f'(t)\mathbf{r}'(f(t))$.

5. Sea $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ una función con derivadas de todos los órdenes. Si u es una función definida en $\mathbb{R}$ por $u(t)=\mathbf{r}(t)\cdot[\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)]$, pruebe que $u'(t)=\mathbf{r}(t)\cdot[\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}'''(t)]$.

6. Pruebe que si $\mathbf{r}$ es una función vectorial diferenciable de módulo constante, entonces la derivada $\mathbf{r}'$ es ortogonal a $\mathbf{r}$ en cada punto.

7. En cada uno de los siguientes ejercicios $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el plano xy en el instante t. Halle una ecuación en x e y cuyo gráfico sea la trayectoria de la partícula. Halle los vectores velocidad y aceleración de la partícula en el valor indicado de t.

   a) $\mathbf{r}(t)=(t+1)\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j}$, $t=1$.

   b) $\mathbf{r}(t)=(e^t,\frac{2}{9}e^{2t})$, $t=\ln 3$.

8. La posición de una partícula que se mueve sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$ en el plano xy viene dada por $\mathbf{r}(t)=(\operatorname{sen}(t),\cos(t))$, $t\in\mathbb{R}$. Halle la velocidad y aceleración de la partícula en los instantes $\pi/4$ y $\pi/2$ y represéntelos como vectores sobre la curva.

9. La posición de una partícula que se mueve en el espacio viene dada por

$$\mathbf{r}(t)=(t+1,t^2-1,2t),\ t\in\mathbb{R}.$$

   Halle la velocidad y aceleración de la partícula. También halle la rapidez y dirección del movimiento de la partícula en el instante $t=1$. Escriba la velocidad de la partícula como el producto de la rapidez y la dirección de movimiento.

10. Repita el ejercicio anterior para $\mathbf{r}(t)=(2\cos t,3\operatorname{sen}t,4t)$ y $t=\pi/2$.

11. Dé ecuaciones paramétricas para la recta que es tangente a la curva dada en el valor dado del parámetro:

    a) $\mathbf{r}(t)=(\operatorname{sen}t,t^2-\cos t,e^t)$, $t_0=0$.

b) $\mathbf{r}(t) = (\ln t, \frac{t-1}{t+2}, t \ln t)$, $t_0 = 1$.

12. Considere las siguientes funciones:

    a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$;
    b) $\mathbf{r}(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$, $t \geq 0$;
    c) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t - \frac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2}))$, $t \geq 0$;
    d) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$;
    e) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t^2), \operatorname{sen}(t^2)$, $t \geq 0$;

    Cada una de las ecuaciones anteriores describe el movimiento de una partícula sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Para cada caso responda las siguientes preguntas:

    i) ¿Es constante la rapidez de la partícula?
    ii) ¿Es la aceleración de la partícula ortogonal a su velocidad en todos los puntos?
    iii) ¿El movimiento de la partícula es en sentido horario o contrario al movimiento de las agujas del reloj?
    iv) ¿La partícula está inicialmente en el punto $(1, 0)$?

13. Una partícula se mueve a lo largo de la rama superior de la parábola $y^2 = 2x$, de izquierda a derecha, con una rapidez constante de 5 unidades por segundo (halle la trayectoria a partir del vector tangente unitario). Halle la velocidad de la partícula al pasar por el punto $(2, 2)$.

14. Sea $\mathbf{r}$ una función vectorial diferenciable de t. Pruebe que si $\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ para todo t, entonces $\|\mathbf{r}\|$ es constante.

Integrales de funciones vectoriales

15. Calcule:

    a) $\int (\cos t, 1, -2t) dt$
    b) $\int_0^{\pi} (\cos t, 1, -2t) dt$

16. Suponga que se desconoce la trayectoria de un planeador pero se conoce su aceleración: $\mathbf{a}(t) = -3\cos t\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Se sabe que inicialmente (en $t = 0$) el planeador partió del punto $(3, 0, 0)$ con velocidad $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$. Determine la posición del planeador como función de t.

17. Un proyectil es disparado desde el origen de coordenadas sobre suelo horizontal con una rapidez inicial de $500\frac{m}{s}$ y un ángulo de lanzamiento de $60°$. ¿Cuál será la ubicación del proyectil $10s$ más tarde?

18. Evalúe las siguientes integrales:

    a) $\int_0^1 (t^3, 7, t + 1) dt$,
    b) $\int_0^1 (t\, e^{t^2}, e^{-t}, 1) dt$.

19. Resuelva la ecuación diferencial $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ sujeta a la condición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, para $\mathbf{r}$ como función vectorial de t.

20. Pruebe las siguientes propiedades, suponiendo que $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son funciones vectoriales (con valores en $\mathbb{R}^n$) integrables en $[a, b]$, $k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$:

a) $\int_a^b k\mathbf{r}_1(t)dt = k\int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt$.

b) $\int_a^b (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt \pm \int_a^b \mathbf{r}_2(t)dt$.

c) $\int_a^b \mathbf{C}\cdot\mathbf{r}_1(t)dt = \mathbf{C}\cdot\int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt$.

d) Si $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ para todo $t \in [a, b]$, entonces $\int_a^b \mathbf{C}\times\mathbf{r}_1(t)dt = \mathbf{C}\times\int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt$.

Longitud de arco en el plano y en el espacio

21. Un planeador se eleva a lo largo de la hélice de ecuación $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \geq 0$. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria del planeador, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$?

22. Consideremos la hélice dada por la ecuación

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

y llamemos $t_0 = 0$.

a) Encuentre el parámetro de la longitud de arco $s(t)$ a lo largo de la hélice desde t_0 hasta t.

b) En la ecuación obtenida despeje t en función de s.

c) Sustituya este valor $t(s)$ en la ecuación (1) para obtener la parametrización por longitud de arco para la hélice.

d) ¿Cuáles son los puntos $\mathbf{r}(t(0))$, $\mathbf{r}(t(\sqrt{2}\pi))$, $\mathbf{r}(t(-1))$?

23. Obtenga el vector tangente unitario a la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, t^2)$, que representa la trayectoria de cierto planeador.

24. En cada ejercicio obtenga el vector tangente unitario a la curva. También calcule la longitud de la parte indicada de la curva.

a) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \sqrt{5}t\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq \pi$.

b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq 8$.

25. Obtenga el punto en la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (5\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (5\cos t)\mathbf{j} + 12t\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$, que se encuentra a una distancia, a lo largo de la curva, de 26π unidades desde el punto $(0, 5, 0)$ y en la dirección en la que crece la longitud de arco.

26. Obtenga el parámetro de longitud de arco a lo largo de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 3t), t \in \mathbb{R},$$

desde el punto donde $t = 0$, calculando la integral

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)|d\tau.$$

Luego, calcule la longitud de la parte de la curva para la cual $0 \leq t \leq \pi/2$.

Curvatura y vectores normales de una curva

27. Obtenga $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ y κ para las curvas planas dadas a continuación:

    a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln \cos t)\mathbf{j}$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

    b) $\mathbf{r}(t) = (2t+3)\mathbf{i} + (5-t^2)\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$.

28. **Fórmula de la curvatura para la gráfica de una función en el plano xy.**

    a) La gráfica de una función $y = f(x)$ en el plano xy automáticamente tiene la parametrización $\mathbf{r}(x) = (x, f(x))$, $x \in \operatorname{Dom} f$. Use esta fórmula para demostrar que si f es una función de x dos veces derivable, entonces

    $$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}.$$

    b) Use la fórmula para κ del inciso (a) para determinar la curvatura de $y = \ln(\cos x)$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Compare su respuesta con la del ejercicio (ej1).

    c) Demuestre que la curvatura es cero en un punto de inflexión.

29. **Fórmula para la curvatura de una curva plana parametrizada.**

    Demuestre que la curvatura de una curva suave $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, $t \in [a, b]$, definida mediante las funciones dos veces derivables $x = f(t)$ y $y = g(t)$, está dada por la fórmula

    $$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

    donde un punto indica derivada primera y dos puntos indica derivada segunda, ambas con respecto a t.

    Aplique la fórmula anterior para determinar la curvatura de la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t, \ln \operatorname{sen} t), 0 < t < \pi$.

30. Dada una curva plana por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, $t \in (a, b)$, definida mediante las funciones derivables $x = f(t)$ y $y = g(t)$, demuestre que $\mathbf{n}(t) = -g'(t)\mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}$ y $-\mathbf{n}(t) = g'(t)\mathbf{i} - f'(t)\mathbf{j}$ son normales a la curva en el punto $(f(t), g(t))$, $t \in (a, b)$.

    Para obtener el vector normal unitario $\mathbf{N}$ para una curva plana particular, se puede seleccionar entre $\mathbf{n}$ o $-\mathbf{n}$ el que apunte hacia el lado cóncavo de la curva y convertirlo en un vector unitario. Aplique este método para encontrar $\mathbf{N}$ en la curva dada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$.

31. Obtenga $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$,$\mathbf{B}$ y κ para las curvas en el espacio dadas a continuación:

    a) $\mathbf{r}(t) = (3 \operatorname{sen} t, 3\cos t, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$.

    b) $\mathbf{r}(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\mathbf{j}$, $t > 0$.

32. Demuestre que la parábola $y = ax^2$, $a \neq 0$, tiene su mayor curvatura en su vértice y que no tiene curvatura mínima. (Obsérvese que este resultado es aplicable a todas las parábolas.)

Componentes tangencial y normal de la aceleración

33. Para la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, escriba $\mathbf{a}$ en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ sin obtener $\mathbf{T}$ ni $\mathbf{N}$.

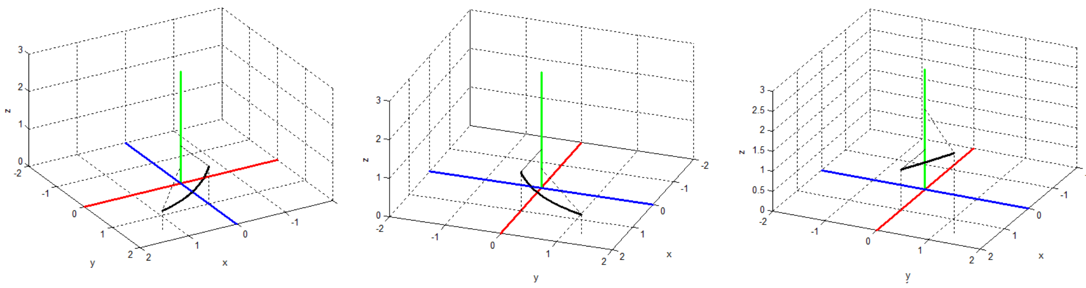
34. Para la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$, escriba $\mathbf{a}$ en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ sin obtener $\mathbf{T}$ ni $\mathbf{N}$ para el valor $t = 1$.

35. Para la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -1)$, $t \in \mathbb{R}$, obtenga $\mathbf{r}, \mathbf{T}, \mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ para el valor $t = \pi/4$. Además dé las ecuaciones de los planos osculador y normal para ese valor de t.

Ejercicios tomados en exámenes

36. Considere la función vectorial dada por $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos(t), e^t \operatorname{sen}(t), e^t)$, $0 \leq t \leq \ln 2$.

    a) Indique cuál de los siguientes gráficos corresponde a la curva dada por $\mathbf{r}$.



    b) Indique, en el gráfico correspondiente, cuál es el sentido de recorrido de la curva.

    c) Indique si se trata o no de una curva suave, justi cando su respuesta.

    d) Suponga que $\mathbf{r}$ representa la posición de una partícula y el parámetro t representa el tiempo.

      1) Indique cuál es la velocidad de la partícula en el instante $t = \frac{\pi}{2}$ y represéntela en el gráfico.
      2) ¿Pasará esta partícula dos veces por el mismo lugar (durante el intervalo de tiempo considerado)? Justifique su respuesta.
      3) ¿En qué instante la partícula experimenta la mayor rapidez? Justifique su respuesta.
      4) Calcule la longitud del arco que la partícula recorre durante este periodo de tiempo.

37. Dados $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, $t_0 \in (a, b)$ y $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^2$, escriba la definición de límite $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$.

38. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

    a) $\boxed{}$ Sea $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función con derivadas de todos los órdenes. Si u es una función definida en $\mathbb{R}$ por $u(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, entonces $u'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$.

    b) $\boxed{}$ Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial derivable de t que cumple que el módulo de $\mathbf{r}(t)$ es constante, entonces $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$.

    c) $\boxed{}$ La función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.

    d) $\boxed{}$ La curvatura de una curva en un punto es menor cuanto más alejado esté el punto del origen de coordenadas.

    e) $\boxed{}$ Sea C una curva parametrizada por una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$. La longitud de dicha curva está dada por $L = \int_a^b \mathbf{r}'(t)dt$.

    f) $\boxed{}$ Sea la función vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ definida en $[a, b]$ una representación paramétrica de una curva suave y sea f un campo escalar definido en $\mathbb{R}^3$. Si f presenta un valor extremo en un punto (a, b, c), entonces el gradiente de f en (a, b, c) es normal a la derivada $\mathbf{r}'(t)$.

    g) $\boxed{}$ Sea C una curva parametrizada por una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$. La longitud de dicha curva está dada por $L = \int_a^b \mathbf{r}'(t)dt$.

h) ☐ Sean $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funciones derivables. Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)$.

i) ☐ La función vectorial $\mathbf{r}(t) = (t; t^2)$ definida en $(-2; 2)$ representa un arco de parábola en el plano.

j) ☐ La función vectorial $\mathbf{r}(t) = (t; t^2)$ definida en $(-2; 2)$ presenta en uno de sus puntos una curvatura máxima.

Selección: 1abdgh 2 3 4cdg 6 7 9 11a 12ae 13 15 19 21 22 24b 27a 31a 33