MATEMÁTICA DISCRETA
Teoría de Números

Prof. Sergio Salinas

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo

Agosto 2024

Inducción matemática

Introducción

- Dados dos enteros **diferentes** x, y, sabemos que $x < y$ o $y < x$. Sin embargo, esto es también es cierto si, en vez de ser enteros, x e y son números racionales o números reales. ¿Qué hace especial a $\mathbb{Z}$ en este caso?

- Supongamos que tratamos de expresar el subconjunto $\mathbb{Z}^+$ de $\mathbb{Z}$, mediante los símbolos de desigualdad $>$ y $\geq$. Vemos que podemos definir el conjunto de los elementos positivos de $\mathbb{Z}$ como: $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 1\}$.

- Si intentamos realizar lo mismo con los números racionales y reales vemos que $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ y $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ pero no podemos representar $\mathbb{Q}^+$ o $\mathbb{R}^+$ con $\geq$ como lo hicimos con $\mathbb{Z}^+$.

Introducción

El conjunto $\mathbb{Z}^+$ es diferente de los conjuntos $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{R}^+$ por el hecho de que todo subconjunto no vacío X de $\mathbb{Z}^+$ contiene un entero $a \in X$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$, es decir, X contiene un elemento menor o mínimo.

Principio del buen orden

Cualquier conjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$ contiene un elemento mínimo, entonces decimos que $\mathbb{Z}^+$es **bien ordenado**.

Este principio es la base de una técnica de demostración conocida como **inducción matemática**. Esta técnica permite demostrar una proposición matemática general relacionada con los enteros positivos.

Cuenta la historia que cuando el matemático alemán Cari Friedrich Gauss tenía diez años, su maestro necesitaba salir del salón de clase y para dejar entretenidos a los alumnos les pidió que llevaran a cabo la siguiente sumatoria: $1 + 2 + 3 + \ldots + 998 + 999 + 1000$. Seguramente el maestro esperaba que los alumnos hicieran 1000 sumas para obtener el resultado, sin embargo se dice que cuando se disponía a salir del salón Gauss le dijo que ya tenía el resultado, lo cual le sorprendió por lo que le pidió que le explicara cómo lo había obtenido. Vean el próximo video para saber como pudo haber terminado la historia.

https://www.youtube.com/watch?v=LpNHKkFSQII

Inducción matemática según Paenza:

https://www.youtube.com/watch?v=FTBJF0U1DrE

Inducción matemática según Cabezón:

https://www.youtube.com/watch?v=5HuMMTTfAGs&t=112s

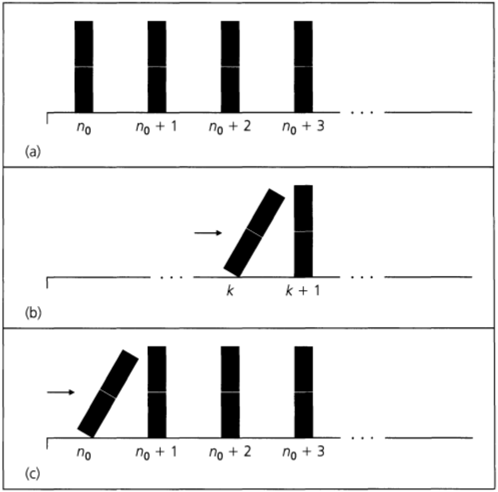

Figura: Inducción matemática.

- En la parte (a) de la figura vemos las primeras cuatro fichas de una disposición ordenada y finita de fichas de dominó, cada una ubicada en forma vertical.

- El espacio que hay entre dos fichas consecutivas es siempre el mismo y es tal que si cualquier ficha (k) se empuja hacia la derecha entonces golpeará la siguiente $(k+1)$.

- Este proceso se representa en la figura (b) e intuitivamente pensamos en que este efecto se repetirá con el resto de las fichas.

Ejemplo

¿Cómo se demuestra utilizando inducción matemática si la siguiente proposición es verdadera?

$$S(n) : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Principio de inducción matemática

Sea $S(n)$ una proposición abierta en la que aparece una o varias veces la variable n, que representa a un entero positivo.

a) Si $S(1)$ es verdadero **(Paso base)**

b) Siempre que $S(k)$ sea verdadera, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ particular elegido al azar, $S(k+1)$ será verdadera.**(Paso inductivo)**

c) Entonces se concluye que $S(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

En la demostración por inducción se necesita que la proposición abierta $S(n)$ sea verdadera para un primer elemento $n_0 \in \mathbb{Z}$ para que el proceso de inducción tenga un lugar de inicio. Se necesita que $S(n_0)$ sea verdadera como base de la inducción.

Ejemplo

Demostrar por inducción si la siguiente proposición es verdadera:

$$S(n) : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) Paso base:

$$S(1) : \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

2) Hipótesis de la inducción:

$$S(k) : \sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Ejemplo

$$S(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} i = \underline{1+2+3+\cdots+k} + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$$

Solución de una ecuación de segundo grado:

Ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

Solución: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Expresión utilizando las raíces de la ecuación: $(x - x_1)(x - x_2)$

Ejemplo

$$S(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k^2+3k+2}{2}$$

Variables de la ecuación: $a = 1$, $b = 3$ y $c = 2$

$x_1 = \frac{-2+\sqrt{2^2-4.2}}{2} = -2$

$x_2 = \frac{-2-\sqrt{2^2-4.2}}{2} = -1$

A partir de la hipótesis obtenemos el siguiente resultado:

$$S(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

Ejemplo

Verificación del resultado obtenido:

Proposición original:

$$S(n) : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposición original utilizando $k+1$:

$$S(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

El resultado coincide con el obtenido al considerar la hipótesis inductiva.

$$1)\quad S(n): 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$2)\quad S(n): 2+4+\cdots+2n=n^2+n, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq 1$$

$$3)\quad S(n): 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq 1$$

$$4)\quad S(n): \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq 2$$

Resolución ejercicio 1:

$$S(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Paso base:

$$S(1) : 1 = 1$$

Hipótesis inductiva:

$$S(k) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = \underline{k^2}$$

Paso inductivo:

$$S(k+1) : \underline{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)} + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$$

Demostración:

$$\underline{k^2} + (2(k+1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Resolución ejercicio 2:

$$S(n) : 2 + 4 + \cdots + 2n = n^2 + n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

Paso base:

$$S(1) : 2 = 2$$

Hipótesis inductiva:

$$S(k) : 2 + 4 + \cdots + 2k = \underline{k^2 + k}$$

Paso inductivo:

$$S(k+1) : \underline{2 + 4 + \cdots + 2k} + 2(k+1) = (k+1)^2 + (k+1)$$

Demostración:

$$\underline{k^2 + k} + 2(k+1) = k^2 + k + 2k + 2 = (k^2 + 2k + 1) + (k+1) = (k+1)^2 + (k+1)$$

Resolución ejercicio 3:

$$S(n) : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

Paso base:

$$S(1) : 1 = 1$$

Hipótesis inductiva:

$$S(k) : 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \underline{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$$

Paso inductivo:

$$S(k+1) : \underline{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Demostración:

$$\underline{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

Ejercicios

Resolución ejercicio 4:

$$S(n) : \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

Paso base:

$$S(2) : \sum_{i=1}^{2-1} i(i+1) = 2 = 2$$

Hipótesis inductiva:

$$S(k) : \sum_{i=1}^{k-1} k(k+1) = \underline{\frac{k(k-1)(k+1)}{3}}$$

Paso inductivo:

$$S(k+1) : \underline{\sum_{i=1}^{k-1} k(k+1)} + k(k+1) = \frac{(k+1)(k)(k+2)}{3}$$

Ejercicios

Resolución ejercicio 4:
Demostración:
Parte 1:

$$\frac{k(k-1)(k+1)}{3} + k(k+1) = \frac{k(k-1)(k+1) + 3k(k+1)}{3}$$

$$= \frac{(k^2-k)(k+1) + 3k^2 + 3k}{3} = \frac{k^3 + k^2 - k^2 - k + 3k^2 + 3k}{3}$$

$$= \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{3}$$

Parte 2:

$$\frac{(k+1)(k)(k+2)}{3} = \frac{(k^2+k)(k+2)}{3} = \frac{(k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k)}{3}$$

$$= \frac{(k^3 + 3k^2 + 2k)}{3}$$

Fin