Funciones vectoriales

Facultad de Ingeniería

2019

Recorrido

Recorrido

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$, si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$, si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$, $t_0 \in [a, b]$ *y* $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$, si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$, $t_0 \in [a, b]$ *y* $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ *si y solo si* $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = L_i$, $i = 1, ..., n$.

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$.

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in [a, b]$.

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$.
Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que*
$\mathbf{r} = (f_1, \ldots, f_n)$ *y* $t_0 \in [a, b]$.
$\mathbf{r}$ *es continua en* t_0 *si y solo si* f_i *es continua en* t_0, $i = 1, \ldots, n$.

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$.
Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in [a, b]$.
$\mathbf{r}$ *es continua en* t_0 *si y solo si* f_i *es continua en* t_0, $i = 1, ..., n$.

DEMOSTRAR

Recorrido

1. Funciones vectoriales
   - Límite y continuidad
   - Derivación de funciones vectoriales
   - Integración de funciones vectoriales
   - Longitud de arco
   - Vector tangente unitario
   - Curvatura
   - Vectores normal unitario principal y binormal

Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$.

Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$ .Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$ .Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$ .Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.

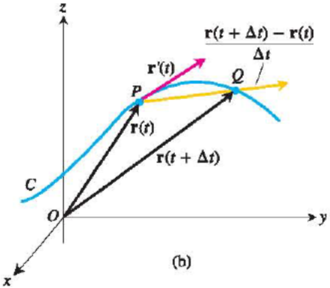
Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$ .Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



(b)

Derivación de funciones vectoriales

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.

Derivación de funciones vectoriales

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, \ldots, f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$*.*
Entonces $\mathbf{r}'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0))$*.*

Derivación de funciones vectoriales

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.
Entonces $\mathbf{r}'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_n'(t_0))$.

DEMOSTRACIÓN DEJADA COMO TAREA

Definición

Una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.

Definición

Una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.
Por otra parte, se dice que $\mathbf{r}$ define una curva suave por partes si es la unión de un número finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

Definición

Una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.
Por otra parte, se dice que $\mathbf{r}$ define una curva suave por partes si es la unión de un número finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

Definición

Una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.
Por otra parte, se dice que $\mathbf{r}$ define una curva suave por partes si es la unión de un número finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

Definición

Una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.
Por otra parte, se dice que $\mathbf{r}$ define una curva suave por partes si es la unión de un número finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$;

Definición

Una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.
Por otra parte, se dice que $\mathbf{r}$ define una curva suave por partes si es la unión de un número finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t),\ t \in \mathbb{R};$
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2),\ t \in \mathbb{R};$
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3),\ t \in \mathbb{R};$

Definición

Una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.
Por otra parte, se dice que $\mathbf{r}$ define una curva suave por partes si es la unión de un número finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t), \ t \in \mathbb{R};$
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2), \ t \in \mathbb{R};$
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3), \ t \in \mathbb{R};$
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3), \ t \in \mathbb{R}.$

Interpretación física

DEFINICIONES Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces

1. La velocidad es la derivada de la posición: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.
2. La rapidez es la magnitud de la velocidad: Rapidez $= |\mathbf{v}|$.
3. La aceleración es la derivada de la velocidad: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.
4. El vector unitario $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es la dirección del movimiento en el tiempo t.

Derivación de funciones vectoriales

Reglas de derivación: demostrar alguna en clase, todas en casa. La del producto vectorial está incompleta en el libro.

Reglas para derivar funciones vectoriales

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ funciones vectoriales diferenciables de t, $\mathbf{C}$ un vector constante, c un escalar y f una función escalar derivable.

1. *Regla para una función constante:* $\dfrac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{0}$
2. *Reglas para múltiplos escalares:* $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$
3. *Regla de la suma:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
4. *Regla de la resta:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)$
5. *Regla del producto punto:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
6. *Regla del producto cruz:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$
7. *Regla de la cadena:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$

Derivación de funciones vectoriales

Teorema

Funciones vectoriales de magnitud constante:
Si $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función de magnitud constante (i.e.* $|\mathbf{r}(t)| = cte$ *en* $[a, b]$*), entonces* $\mathbf{r}(t)$ *es ortogonal a* $\mathbf{r}'(t)$ *en todo* $t \in [a, b]$.

DEMOSTRAR

Recorrido

1. Funciones vectoriales
   - Límite y continuidad
   - Derivación de funciones vectoriales
   - Integración de funciones vectoriales
   - Longitud de arco
   - Vector tangente unitario
   - Curvatura
   - Vectores normal unitario principal y binormal

Integración de funciones vectoriales

Definiciones de:
Antiderivada, integral indefinida e integral definida.

Integración de funciones vectoriales

Definiciones de:
Antiderivada, integral indefinida e integral definida.
Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1),\ t \in \mathbb{R}$.

Integración de funciones vectoriales

Definiciones de:
Antiderivada, integral indefinida e integral definida.
Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1),\ t \in \mathbb{R}$.

Integral definida.

Integración de funciones vectoriales

Definiciones de:
Antiderivada, integral indefinida e integral definida.
Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1),\ t \in \mathbb{R}$.

Integral definida.
Ejemplo: calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathbf{r}(t)dt$.

Integración de funciones vectoriales

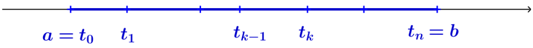
Definiciones de:
Antiderivada, integral indefinida e integral definida.
Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1),\ t \in \mathbb{R}$.

Integral definida.
Ejemplo: calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathbf{r}(t)dt$.

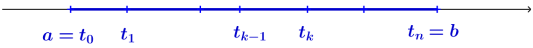
$$\int_0^{\pi} (\cos t, t^2, e^t + 1)\, dt = \left(\operatorname{sen} t, \frac{t^3}{3}, e^t + t\right)\Big|_0^{\pi}.$$

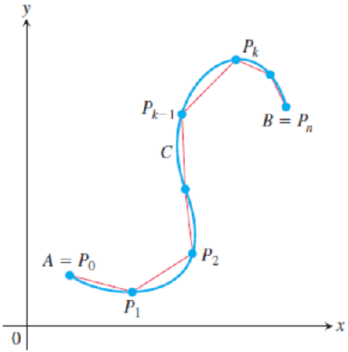
Recorrido

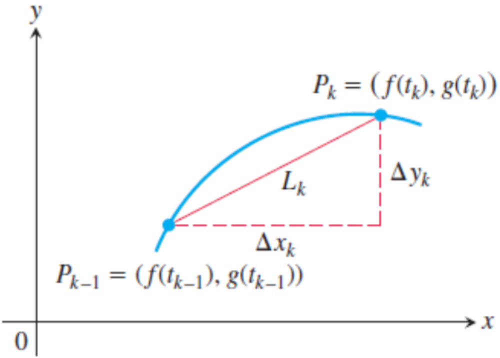
Longitud de arco



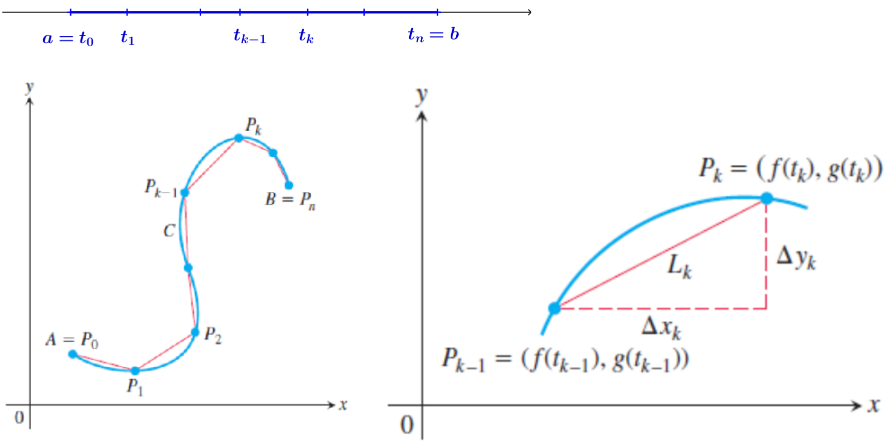
Longitud de arco







Longitud de arco



Asumiendo que el camino desde A hasta B se recorre una sola vez cuando t varía desde $t = a$ hasta $t = b$, sin volverse sobre sí mismo o retroceder, una aproximación a la longitud del arco AB es la suma de las longitudes L_k.

Longitud de arco

La longitud de arco de una curva suave dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, que se recorre una vez cuando t crece de a a b, es

Longitud de arco

La longitud de arco de una curva suave dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, que se recorre una vez cuando t crece de a a b, es

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Longitud de arco

La longitud de arco de una curva suave dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, que se recorre una vez cuando t crece de a a b, es

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Longitud de arco

La longitud de arco de una curva suave dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, que se recorre una vez cuando t crece de a a b, es

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

r(t)=(cos t, sen t, t), $\quad 0 < t < \pi$

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$:

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.
b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.
b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau$

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.
b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.
b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.
b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.
Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.
b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.
Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right),$$

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.
b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \int_\pi^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.
Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi), \operatorname{sen}(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi), \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi),$$

$$-\sqrt{2}\pi \leq s \leq \sqrt{2}\pi.$$

Parámetro longitud de arco

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.
b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \int_\pi^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.
Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi), \operatorname{sen}(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi), \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi),$$

$$-\sqrt{2}\pi \leq s \leq \sqrt{2}\pi.$$

Observación: el mismo punto de la curva, $(-1, 0, \pi)$, corresponde a $\mathbf{r}(\pi)$ y a $\mathbf{u}(0)$.

Recorrido

1. Funciones vectoriales
   - Límite y continuidad
   - Derivación de funciones vectoriales
   - Integración de funciones vectoriales
   - Longitud de arco
   - Vector tangente unitario
   - Curvatura
   - Vectores normal unitario principal y binormal

Vector tangente unitario

Definición

Dada $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$, se define

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

Vector tangente unitario

Definición

Dada $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$, se define

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

Observación: ¿Qué pasaría si $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ para algún valor de t?

Vector tangente unitario

Definición

Dada $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$, se define

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

Observación: ¿Qué pasaría si $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ para algún valor de t?

Recorrido

Curvatura

Se define la curvatura en un punto de una curva suave como $\kappa := \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$.

Curvatura

Se define la curvatura en un punto de una curva suave como $\kappa := \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$.
Fórmula de cálculo:

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Curvatura

Se define la curvatura en un punto de una curva suave como $\kappa := \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$.
Fórmula de cálculo:

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Ejemplos: recta y circunferencia.

Recorrido

1. Funciones vectoriales
   - Límite y continuidad
   - Derivación de funciones vectoriales
   - Integración de funciones vectoriales
   - Longitud de arco
   - Vector tangente unitario
   - Curvatura
   - Vectores normal unitario principal y binormal

Vector normal unitario principal

Recordemos:

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|\mathbf{T}| = 1; \qquad\qquad \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0.$$

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|\mathbf{T}| = 1; \qquad\qquad \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0.$$

El vector $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ es, por la regla de la cadena,

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|\mathbf{T}| = 1; \qquad \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0.$$

El vector $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}$:

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|\mathbf{T}| = 1; \qquad\qquad \mathbf{T}'(t)\cdot\mathbf{T}(t) = 0.$$

El vector $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{T}'(t)$ y es ortogonal a $\mathbf{T}$.

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|\mathbf{T}| = 1; \qquad\qquad \mathbf{T}'(t)\cdot\mathbf{T}(t) = 0.$$

El vector $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{T}'(t)$ y es ortogonal a $\mathbf{T}$.

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $\mathbf{N} := \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\kappa}$.

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|\mathbf{T}| = 1; \qquad\qquad \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0.$$

El vector $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{T}'(t)$ y es ortogonal a $\mathbf{T}$.

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $\mathbf{N} := \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\kappa}$.

Fórmula de cálculo:

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|\mathbf{T}| = 1; \qquad\qquad \mathbf{T}'(t)\cdot\mathbf{T}(t) = 0.$$

El vector $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{T}'(t)$ y es ortogonal a $\mathbf{T}$.

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $\mathbf{N} := \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\kappa}$.

Fórmula de cálculo:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\kappa}$$

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|\mathbf{T}| = 1; \qquad\qquad \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0.$$

El vector $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{T}'(t)$ y es ortogonal a $\mathbf{T}$.

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $\mathbf{N} := \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\kappa}$.

Fórmula de cálculo:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\kappa} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \left|\frac{dt}{ds}\right|}$$

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|\mathbf{T}| = 1; \qquad \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0.$$

El vector $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{T}'(t)$ y es ortogonal a $\mathbf{T}$.

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $\mathbf{N} := \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\kappa}$.

Fórmula de cálculo:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\kappa} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|\left|\frac{dt}{ds}\right|} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}.$$

Vector binormal

El vector binormal en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

Vector binormal

El vector binormal en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.
Observación: $|\mathbf{B}| =?$

Vector binormal

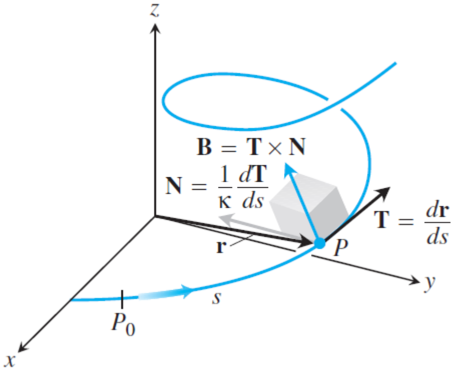
El vector binormal en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.
Observación: $|\mathbf{B}| =?$
Marco TNB

Vector binormal

El vector binormal en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

Observación: $|\mathbf{B}| = ?$

Marco TNB



Componentes tangencial y normal de la aceleración

Recordar que en una curva suave, tenemos que

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Recordar que en una curva suave, tenemos que

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{T}$$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Recordar que en una curva suave, tenemos que

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{T}$$

Así

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}.$$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Recordar que en una curva suave, tenemos que

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{T}$$

Así

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}.$$

Además

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt}$$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Recordar que en una curva suave, tenemos que

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{T}$$

Así

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}.$$

Además

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt}$$

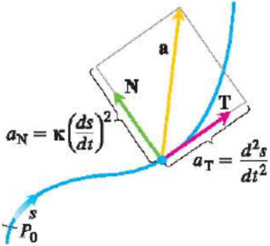
Componentes tangencial y normal de la aceleración

$$\mathbf{a} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d^2 s}{dt^2}\mathbf{T}$$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

$$\mathbf{a} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}$$

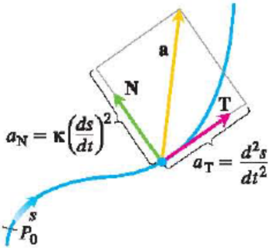
$$\mathbf{a} = |\mathbf{r}'(t)|^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d}{dt}|\mathbf{r}'(t)|\mathbf{T}$$



Componentes tangencial y normal de la aceleración

$$\mathbf{a} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d^2 s}{dt^2}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{a} = |\mathbf{r}'(t)|^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d}{dt}|\mathbf{r}'(t)|\mathbf{T}$$

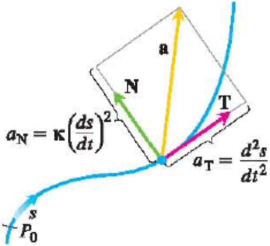


Regla de cálculo:

Componentes tangencial y normal de la aceleración

$$\mathbf{a} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d^2 s}{dt^2}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{a} = |\mathbf{r}'(t)|^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d}{dt}|\mathbf{r}'(t)|\mathbf{T}$$



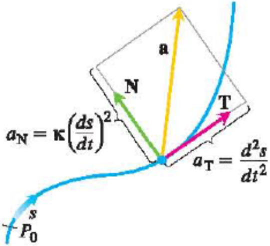
Regla de cálculo:

De $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_T^2 + a_N^2$,

Componentes tangencial y normal de la aceleración

$$\mathbf{a} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d^2 s}{dt^2}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{a} = |\mathbf{r}'(t)|^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d}{dt}|\mathbf{r}'(t)|\mathbf{T}$$



Regla de cálculo:

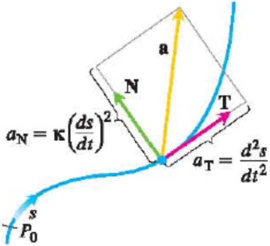
De $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_T^2 + a_N^2$,

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2}$$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

$$\mathbf{a} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d^2 s}{dt^2}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{a} = |\mathbf{r}'(t)|^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d}{dt}|\mathbf{r}'(t)|\mathbf{T}$$



Regla de cálculo:

De $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_T^2 + a_N^2$,

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2}$$