9 ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

? Todos los segmentos del aspa de una turbina giratoria de viento tienen la misma velocidad angular. En comparación con un segmento dado del aspa, ¿cuántas veces mayor es la rapidez lineal de un segundo segmento ubicado al doble de distancia del eje de rotación? ¿Cuántas veces mayor es su aceleración radial?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir la rotación de un cuerpo rígido en términos de las coordenadas, la velocidad y la aceleración angulares.
- Cómo analizar la rotación de un cuerpo rígido cuando la aceleración angular es constante.
- Cómo relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un punto en el cuerpo.
- El significado del momento de inercia de un cuerpo en torno a un eje de rotación y cómo se relaciona con la energía cinética de rotación.
- Cómo calcular el momento de inercia de varios cuerpos.

¿Qué tienen en común los movimientos de un disco compacto, una rueda de la fortuna, una sierra circular y un ventilador de techo? Ninguno puede representarse adecuadamente como un *punto* en movimiento; todos implican un cuerpo que *gira* alrededor de un eje que está fijo en algún marco de referencia inercial.

La rotación se da en todos los niveles, desde el movimiento de los electrones en los átomos hasta los movimientos de las galaxias enteras. Necesitamos desarrollar métodos generales para analizar el movimiento de un cuerpo en rotación. En este capítulo y en el siguiente consideraremos los cuerpos con tamaño y forma definidos que, en general, pueden tener movimiento de rotación además de movimiento de traslación.

Muchos cuerpos reales son muy complejos; las fuerzas que actúan sobre ellos pueden deformarlos: estirarlos, torcerlos y aplastarlos. Por el momento, ignoraremos estas deformaciones y supondremos que el cuerpo tiene forma y tamaño perfectamente definidos e inmutables. Llamamos a este modelo idealizado **cuerpo rígido**. Este capítulo y el siguiente tratan principalmente del movimiento de rotación de un cuerpo rígido.

Comenzaremos con el lenguaje de la cinemática para *describir* el movimiento de rotación. Luego estudiaremos la energía cinética de rotación, la clave para aplicar los métodos de energía en el movimiento de rotación. En el capítulo 10 desarrollaremos los principios dinámicos que relacionan las fuerzas sobre un cuerpo con su movimiento de rotación.

9.1 Velocidad y aceleración angulares

Para analizar el movimiento de rotación, pensemos primero en un cuerpo rígido que gira alrededor de un *eje fijo*, es decir, un eje que está en reposo en algún marco de referencia inercial y que no cambia de dirección relativa al marco. El cuerpo rígido en rotación podría ser la flecha de un motor, un trozo de asado en una brocheta o un carrusel.

La figura 9.1 muestra un cuerpo rígido (en este caso, la aguja indicadora de un velocímetro) que gira alrededor de un eje fijo, el cual pasa por el punto O y es perpendicu-

9.1 Aguja de un velocímetro (un ejemplo de cuerpo rígido) que gira en sentido antihorario alrededor de un eje fijo.

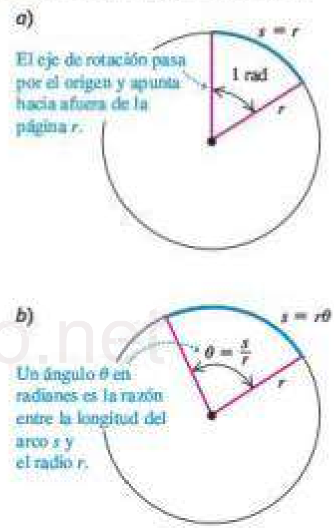
lar al plano del diagrama, al que llamamos plano xy. Una forma de describir la rotación de este cuerpo sería elegir un punto específico P del cuerpo y seguir la pista a sus coordenadas x y y. Este método no es el más conveniente, pues requiere dos números (las dos coordenadas x y y) para especificar la posición rotacional del cuerpo. En lugar de eso, observamos que la línea OP está fija en el cuerpo y gira con él. El ángulo θ que esta línea forma con el eje $+x$ describe la posición rotacional del cuerpo; usaremos solo esta cantidad θ como *coordenada* de rotación.

La coordenada angular θ de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo puede ser positiva o negativa. Si hacemos que los ángulos positivos se midan en sentido antihorario desde el eje $+x$, entonces el ángulo θ en la figura 9.1 es positivo. En cambio, si elegimos la dirección horaria como la rotación positiva, θ será negativo en la figura 9.1. Cuando consideramos el movimiento rectilíneo de una partícula, fue indispensable especificar la dirección del desplazamiento positivo sobre esa línea; al analizar la rotación alrededor de un eje fijo, es igualmente indispensable especificar la dirección de rotación positiva.

Al describir un movimiento de rotación, la forma más natural de medir el ángulo θ no es en grados, sino en **radianes**. Como se muestra en la figura 9.2*a*, un radián (1 rad) es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco cuya longitud es igual al radio del círculo. En la figura 9.2*b*, un ángulo θ es subtendido por un arco de longitud s en un círculo de radio r. El valor de θ (en radianes) es igual a s entre r:

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{o bien,} \qquad s = r\theta \tag{9.1}$$

9.2 Medición de ángulos en radianes.



Un ángulo en radianes es la razón de dos longitudes, así que es un número puro, sin dimensiones. Si $s = 3.0$ m y $r = 2.0$ m, entonces $\theta = 1.5$, pero a menudo escribiremos esto como 1.5 rad, para distinguirlo de un ángulo medido en grados o revoluciones.

La circunferencia de un círculo (es decir, la longitud del arco que rodea el círculo) es 2π veces el radio, así que hay 2π (unos 6.283) radianes en una revolución completa (360°). Por lo tanto,

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57.3°$$

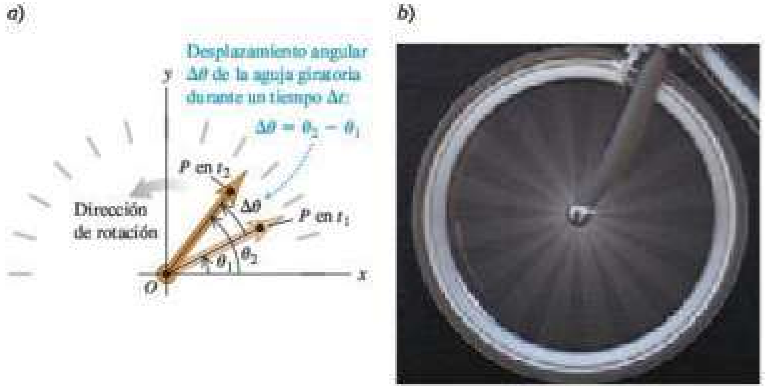
Asimismo, $180° = \pi$ rad, $90° = \pi/2$ rad, etcétera. Si insistiéramos en medir θ en grados, tendríamos que incluir un factor más de $(2\pi/360)$ en el lado derecho de $s = r\theta$ en la ecuación (9.1). Al medir los ángulos en radianes, mantenemos la relación entre el ángulo y la distancia a lo largo de un arco lo más sencilla posible.

Velocidad angular

La coordenada θ de la figura 9.1 especifica la posición rotacional de un cuerpo rígido en un instante determinado. Podemos describir el *movimiento* de rotación del cuerpo rígido en términos de la razón de cambio de θ, de forma análoga a como describimos el movimiento rectilíneo en el capítulo 2. En la figura 9.3*a*, una línea de referencia OP en un cuerpo que gira forma un ángulo θ_1 con el eje $+x$ en el instante t_1. En un instante posterior t_2, el ángulo cambió a θ_2. Definimos la **velocidad angular media** $\omega_{\text{med-}z}$ (la letra griega omega) del cuerpo en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como la razón del **desplazamiento angular** $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ en Δt:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{9.2}$$

9.3 *a*) Desplazamiento angular $\Delta\theta$ de un cuerpo en rotación. *b*) Cada parte de un cuerpo rígido en rotación tiene la misma velocidad angular media $\Delta\theta/\Delta t$.



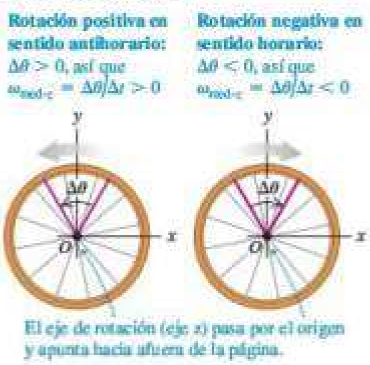
El subíndice z indica que el cuerpo de la figura 9.3*a* está girando en torno al eje z, que es perpendicular al plano del diagrama. La **velocidad angular instantánea** ω_z es el límite de $\omega_{\text{med-}z}$ cuando Δt tiende a cero, es decir, la derivada de θ con respecto a t:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(definición de velocidad angular)} \qquad (9.3)$$

Cuando nos referimos simplemente a "velocidad angular", hablamos de la velocidad angular instantánea, no de la velocidad angular media.

La velocidad angular ω_z puede ser positiva o negativa, dependiendo de la dirección en que gira el cuerpo rígido (figura 9.4). La *rapidez* angular ω, que usaremos mucho en las secciones 9.3 y 9.4, es la magnitud de la velocidad angular. Al igual que la rapidez ordinaria (lineal) v, la rapidez angular nunca es negativa.

9.4 La velocidad angular media de un cuerpo rígido (que aquí se muestra) y la velocidad angular instantánea pueden ser positivas o negativas.



CUIDADO **Velocidad angular contra velocidad lineal** Tenga presente la distinción entre velocidad angular ω_z y velocidad ordinaria, o *velocidad lineal*, v_x (véase la sección 2.2). Si un objeto tiene una velocidad v_x, el objeto en su totalidad se *mueve* a lo largo del eje x. En contraste, si un objeto tiene una velocidad angular ω_z, está *girando* en torno al eje z. *No* quiere decir que el objeto se mueve a lo largo del eje z.

Diferentes puntos de un cuerpo rígido en rotación recorren diferentes distancias en un tiempo dado, dependiendo de la distancia de cada punto al eje de rotación. No obstante, como el cuerpo es rígido, *todos* los puntos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo (figura 9.3*b*). Por lo tanto, *en cualquier instante, todas las partes de un cuerpo rígido en rotación tienen la misma velocidad angular.* La velocidad angular es positiva si el cuerpo gira en la dirección de θ creciente, y negativa si lo hace en la dirección de θ decreciente.

Si el ángulo de θ está en radianes, la unidad de velocidad angular es el radián por segundo (rad/s). Suelen usarse otras unidades, como revoluciones por minuto (rev/min o rpm). Puesto que 1 rev = 2π rad, dos conversiones útiles son

$$1 \text{ rev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ rev/min} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

Es decir, 1 rad/s es alrededor de 10 rpm.

Ejemplo 9.1 Cálculo de la velocidad angular

La posición angular θ de un volante de 0.36 m de diámetro está dada por

$$\theta = (2.0 \text{ rad/s}^3)t^3$$

a) Calcule θ, en radianes y en grados, en $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *b*) Calcule la distancia que recorre una partícula en el borde del volante durante el intervalo $t_1 = 2.0$ s a $t_2 = 5.0$ s. *c*) Calcule la velocidad angular media, en rad/s y en rev/min, en ese intervalo. *d*) Calcule las velocidades angulares instantáneas en $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos calcular las incógnitas θ_1 (la posición angular en el tiempo t_1), θ_2 (la posición angular en el tiempo t_2) y el desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ a partir de la expresión dada. Conociendo $\Delta\theta$, calcularemos la distancia recorrida y la velocidad angular media entre t_1 y t_2 empleando las ecuaciones (9.1) y (9.2), respectivamente. Para calcular las velocidades angulares instantáneas ω_{1z} (en el tiempo t_1) y ω_{2z} (en el tiempo t_2), derivaremos θ con respecto al tiempo, como en la ecuación (9.3).

EJECUTAR: *a*) Sustituimos los valores de t en la ecuación dada para θ:

$$\theta_1 = (2.0 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s})^3 = 16 \text{ rad}$$
$$= (16 \text{ rad})\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 920°$$
$$\theta_2 = (2.0 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s})^3 = 250 \text{ rad}$$
$$= (250 \text{ rad})\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 14{,}000°$$

b) Durante el intervalo de t_1 a t_2, el desplazamiento angular del volante es $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 250 \text{ rad} - 16 \text{ rad} = 234$ rad. El radio r es la mitad del diámetro, es decir, 0.18 m. Para usar la ecuación (9.1), los ángulos se *deben* expresar en radianes:

$$s = r\theta_2 - r\theta_1 = r\Delta\theta = (0.18 \text{ m})(234 \text{ rad}) = 42 \text{ m}$$

Omitimos "radianes" de las unidades de s porque θ es un número adimensional; la distancia s se mide en metros, al igual que r.

c) De acuerdo con la ecuación (9.2),

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{250 \text{ rad} - 16 \text{ rad}}{5.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = 78 \text{ rad/s}$$
$$= \left(78\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = 740 \text{ rev/min}$$

d) Según la ecuación (9.3):

$$\omega_z = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}[(2.0 \text{ rad/s}^3)t^3] = (2.0 \text{ rad/s}^3)(3t^2)$$
$$= (6.0 \text{ rad/s}^3)t^2$$

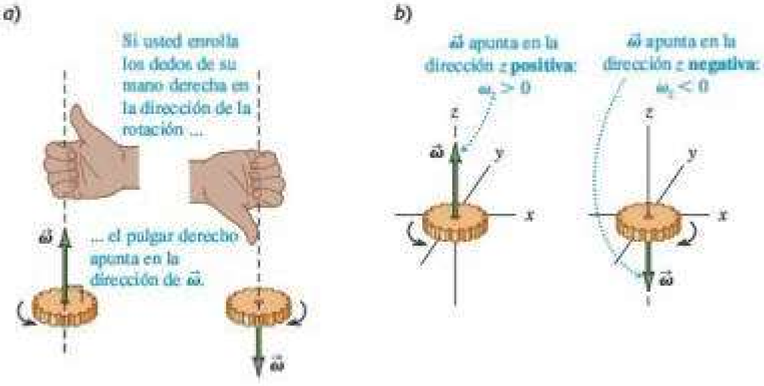
En los instantes $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s, tenemos

$$\omega_{1z} = (6.0 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s})^2 = 24 \text{ rad/s}$$
$$\omega_{2z} = (6.0 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s})^2 = 150 \text{ rad/s}$$

EVALUAR: La velocidad angular $\omega_z = (6.0 \text{ rad/s}^3)t^2$ aumenta con el tiempo. Nuestros resultados son congruentes con esto; la velocidad angular instantánea al final del intervalo ($\omega_{2z} = 150$ rad/s) es mayor que la inicial ($\omega_{1z} = 24$ rad/s), y la velocidad angular media $\omega_{\text{med-}z} = 78$ rad/s para el intervalo está entre estos dos valores.

Velocidad angular como un vector

Como hemos visto, la notación para la velocidad angular ω_z en torno al eje z recuerda la notación v_x, para la velocidad ordinaria a lo largo del eje x (véase la sección 2.2). Así como v_x es la componente x del vector velocidad $\vec{v}$, ω_z es la componente z del *vector* velocidad angular $\vec{\omega}$ dirigido a lo largo del eje de rotación. Como muestra la figura 9.5*a*, la dirección de $\vec{\omega}$ está dada por la regla de la mano derecha que empleamos



9.5 *a*) Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Si se invierte el sentido de la rotación, se invierte la dirección de $\vec{\omega}$. *b*) Signo de ω_z para la rotación a lo largo del eje z.

al definir el producto vectorial en la sección 1.10. Si la rotación es alrededor del eje z, $\vec{\omega}$ solo tiene componente z, la cual es positiva si $\vec{\omega}$ se encuentra a lo largo del eje z positivo, y negativa si $\vec{\omega}$ se encuentra a lo largo del eje z negativo (figura 9.5*b*).

La formulación vectorial tiene especial utilidad en situaciones donde *cambia* la dirección del eje de rotación. Examinaremos brevemente estas situaciones al final del capítulo 10. Sin embargo, en el presente capítulo, solo consideraremos situaciones en las que el eje de rotación es fijo. Por lo que, en este capítulo, usaremos el término "velocidad angular" para referirnos a ω_z, la componente del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ a lo largo del eje.

Aceleración angular

Si cambia la velocidad angular de un cuerpo rígido, se produce una *aceleración angular*. Cuando una persona pedalea una bicicleta con más intensidad para hacer que las ruedas giren más rápidamente, o aplica los frenos para detener las ruedas, genera una aceleración angular sobre estas. También se produce una aceleración angular cuando se modifica la rapidez de rotación de una pieza giratoria de una maquinaria, como el cigüeñal del motor de un automóvil.

9.6 Cálculo de la aceleración angular media de un cuerpo rígido que gira.

Si ω_{1z} y ω_{2z} son las velocidades angulares instantáneas en t_1 y t_2, definimos la **aceleración angular media** $\alpha_{\text{med-}z}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como el cambio de la velocidad angular dividido entre Δt (figura 9.6):

$$\alpha_{\text{med-}z} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} \tag{9.4}$$

La **aceleración angular instantánea** α_z es el límite de $\alpha_{\text{med-}z}$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} \quad \text{(definición de aceleración angular)} \tag{9.5}$$

La unidad usual de la aceleración angular es el radián por segundo por segundo, es decir, rad/s^2. De ahora en adelante, emplearemos el término "aceleración angular" para referirnos a la aceleración angular instantánea, no a la aceleración angular media.

Dado que $\omega_z = d\theta/dt$, también podemos expresar la aceleración angular como la segunda derivada de la coordenada angular:

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{9.6}$$

Probablemente el lector ya se percató de que estamos usando letras griegas para las variables de la cinemática angular: θ para la posición, ω_z para la velocidad angular, y α_z para la aceleración angular. Estas son análogas a x para la posición, v_x para la velocidad y a_x para la aceleración, respectivamente, en el movimiento rectilíneo. En ambos casos, la velocidad es la tasa de cambio de la posición con respecto al tiempo; en tanto que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Algunas veces, usaremos los términos "velocidad *lineal*" y "aceleración *lineal*" para referirnos a las cantidades conocidas que ya definimos en los capítulos 2 y 3, con la finalidad de distinguir claramente entre estas y las cantidades *angulares* presentadas en este capítulo.

En el movimiento de rotación, si la aceleración angular α_z es positiva, aumenta la velocidad angular ω_z; si α_z es negativa, ω_z disminuye. La rotación se está acelerando si α_z y ω_z tienen el mismo signo, y frenándose si tienen signos opuestos. (Estas relaciones son idénticas a las que existen entre la aceleración *lineal* a_x y la velocidad *lineal* v_x en el movimiento rectilíneo; véase la sección 2.3).

Ejemplo 9.2 Cálculo de la aceleración angular

Para el volante del ejemplo 9.1, *a*) calcule la aceleración angular media entre $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *b*) Calcule las aceleraciones angulares instantáneas en $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usamos la ecuación (9.4) para la aceleración angular media $\alpha_{\text{med-}z}$ y la ecuación (9.5) para la aceleración angular instantánea α_z.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con el ejemplo 9.1, los valores de ω_z en los dos instantes son

$$\omega_{1z} = 24 \text{ rad/s} \qquad \omega_{2z} = 150 \text{ rad/s}$$

Según la ecuación (9.4), la aceleración angular media es

$$\alpha_{\text{med-}z} = \frac{150 \text{ rad/s} - 24 \text{ rad/s}}{5.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = 42 \text{ rad/s}^2$$

b) Según la ecuación (9.5), el valor de α_z en cualquier instante t es

$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}[(6.0 \text{ rad/s}^3)(t^2)] = (6.0 \text{ rad/s}^3)(2t)$$
$$= (12 \text{ rad/s}^3)t$$

Por lo que

$$\alpha_{1z} = (12 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s}) = 24 \text{ rad/s}^2$$
$$\alpha_{2z} = (12 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s}) = 60 \text{ rad/s}^2$$

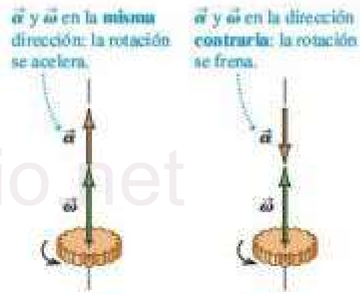
EVALUAR: Observe que la aceleración angular *no* es constante en esta situación. La velocidad angular ω_z siempre aumenta porque α_z siempre es positiva; además, la razón a la que aumenta la velocidad angular también está creciendo, ya que α_z aumenta con el tiempo.

Aceleración angular como un vector

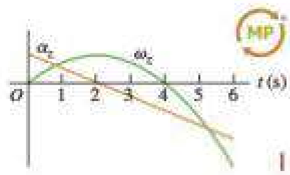
Al igual que en el caso de la velocidad angular, resulta útil definir un *vector* aceleración angular $\vec{\alpha}$. Matemáticamente, $\vec{\alpha}$ es la derivada con respecto al tiempo del vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el objeto gira en torno al eje z fijo, $\vec{\alpha}$ solo tiene componente z; la cantidad α_z es precisamente esa componente. En este caso, $\vec{\alpha}$ está en la misma dirección que $\vec{\omega}$ si la rotación se está acelerando, y es opuesta a $\vec{\omega}$ si se está frenando (figura 9.7).

El vector aceleración angular será especialmente útil en el capítulo 10 cuando veamos lo que sucede cuando el eje de rotación cambia de dirección. Sin embargo, en este capítulo el eje de rotación siempre estará fijo y solo necesitaremos usar la componente z: α_z.

9.7 Cuando el eje de rotación es fijo, los vectores aceleración angular y velocidad angular están sobre ese eje.



Evalúe su comprensión de la sección 9.1 La figura muestra una gráfica de ω_z y α_z contra el tiempo, para un cuerpo rígido en rotación. *a*) ¿En qué intervalos de tiempo la rotación se acelera? **i.** $0 < t < 2$ s; **ii.** $2 \text{ s} < t < 4$ s; **iii.** $4 \text{ s} < t < 6$ s. *b*) ¿En qué intervalos de tiempo la rotación se frena? **i.** $0 < t < 2$ s; **ii.** $2 \text{ s} < t < 4$ s; **iii.** $4 \text{ s} < t < 6$ s.



Aplicación Movimiento de rotación de las bacterias
La bacteria *Escherichia coli* (de aproximadamente 2 μm por 0.5 μm) se encuentra en el intestino grueso de los seres humanos y de otros animales de sangre caliente. La bacteria nada haciendo girar sus flagelos largos en forma de tirabuzón, los cuales actúan como las aspas de una hélice. Cada flagelo es impulsado por un notable motor proteínico en su base. El motor hace girar al flagelo a rapideces angulares de 200 a 1000 rev/min (aproximadamente de 20 a 100 rad/s) y puede variar su rapidez para dar al flagelo una aceleración angular.

9.2 Rotación con aceleración angular constante

En el capítulo 2, vimos que el movimiento rectilíneo es muy sencillo cuando la aceleración es constante. Lo mismo sucede con el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo. Si la aceleración angular es constante, podemos deducir ecuaciones para la velocidad y la posición angulares siguiendo el mismo procedimiento que usamos para el movimiento rectilíneo en la sección 2.4. De hecho, las ecuaciones que vamos a deducir son idénticas a las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) si sustituimos x por θ, v_x por ω_z, y a_x por α_z. Sugerimos repasar la sección 2.4 antes de continuar.

Sea ω_{0z} la velocidad angular de un cuerpo rígido en $t = 0$, y sea ω_z su velocidad angular en cualquier instante posterior t. La aceleración angular α_z es constante e igual al valor medio en cualquier intervalo. Usando la ecuación (9.4) en el intervalo de 0 a t, tenemos

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0} \qquad \text{o bien,}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \qquad \text{(solo aceleración angular constante)} \qquad (9.7)$$

El producto $\alpha_z t$ es el cambio total de ω_z entre $t = 0$ y el instante posterior t; la velocidad angular ω_z en el instante t es la suma del valor inicial ω_{0z} y este cambio total.

Con aceleración angular constante, la velocidad angular cambia a una tasa uniforme, así que su valor medio entre 0 y t es la media de los valores inicial y final:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\omega_{0z} + \omega_z}{2} \tag{9.8}$$

También sabemos que $\omega_{\text{med-}z}$ es el desplazamiento angular total $(\theta - \theta_0)$ dividido entre el intervalo de tiempo $(t - 0)$:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0} \tag{9.9}$$

Si igualamos las ecuaciones (9.8) y (9.9), y multiplicamos el resultado por t, obtenemos

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \quad \text{(solo aceleración angular constante)} \tag{9.10}$$

Para obtener una relación entre θ y t que no incluya a ω_z, sustituimos la ecuación (9.7) en la ecuación (9.10):

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}[\omega_{0z} + (\omega_{0z} + \alpha_z t)]t \qquad \text{o bien,}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad \text{(solo aceleración angular constante)} \tag{9.11}$$

Es decir, si en el tiempo inicial $t = 0$ el cuerpo tiene una posición angular θ_0 y una velocidad angular ω_{0z}, entonces su posición angular θ en cualquier instante posterior t será la suma de tres términos: su posición angular inicial θ_0, más la rotación $\omega_{0z}t$ que tendría si la velocidad angular fuera constante, más una rotación adicional $\frac{1}{2}\alpha_z t^2$ causada por el cambio en la velocidad angular.

Siguiendo el mismo procedimiento que para el movimiento rectilíneo de la sección 2.4, combinamos las ecuaciones (9.7) y (9.11) para obtener una relación entre θ y ω_z que no contenga t. Lo invitamos a efectuarlo, siguiendo el procedimiento que empleamos para obtener la ecuación (2.13). (Véase el ejercicio 9.12). De hecho, dada la analogía perfecta entre las cantidades rectilíneas y rotacionales, simplemente podemos tomar la ecuación (2.13) y sustituir cada cantidad rectilínea por su contraparte rotacional. Obtenemos

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad \text{(solo aceleración angular constante)} \tag{9.12}$$

CUIDADO **Aceleración angular constante** Tenga presente que estos resultados son válidos *solo* si la aceleración angular α_z es *constante*; no trate de aplicarlos a problemas donde α_z *no* sea constante. En la tabla 9.1 se muestra la analogía entre las ecuaciones (9.7), (9.10), (9.11) y (9.12), para rotación sobre un eje fijo y aceleración angular constante, y las ecuaciones correspondientes para el movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante.

Tabla 9.1 Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante		Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante	
a_x = constante		α_z = constante	
$v_x = v_{0x} + a_x t$	(2.8)	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$	(9.7)
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	(2.12)	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$	(9.11)
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(2.13)	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$	(9.12)
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	(2.14)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$	(9.10)

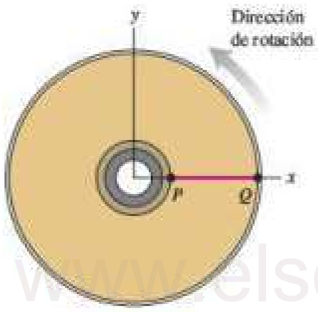
Ejemplo 9.3 Rotación con aceleración angular constante

Imagine que usted acaba de ver una película en Blu-ray y el disco se está deteniendo. La velocidad angular del disco en $t = 0$ es de 27.5 rad/s y su aceleración angular constante es de $-10.0\ \text{rad/s}^2$. En la superficie del disco se encuentra una línea PQ a lo largo del eje $+x$ en $t = 0$ (figura 9.8). *a)* ¿Qué velocidad angular tiene el disco en $t = 0.300$ s? *b)* ¿Qué ángulo forma la línea PQ con el eje $+x$ en ese instante?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La aceleración angular del disco es constante, así que podemos usar cualquiera de las ecuaciones que dedujimos en esta sección (tabla 9.1). Las incógnitas son la velocidad angular ω_z y el desplazamiento angular θ en $t = 0.300$ s. Puesto que se conocen $\omega_{0z} = 27.5$ rad/s, $\theta_0 = 0$ y $\alpha_z = -10.0\ \text{rad/s}^2$, lo más fácil es usar las ecuaciones (9.7) y (9.11) para obtener las incógnitas.

9.8 La línea PQ sobre un disco de Blu-ray que gira en $t = 0$.



EJECUTAR: *a)* Por la ecuación (9.7), en $t = 0.300$ s tenemos

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t = 27.5\ \text{rad/s} + (-10.0\ \text{rad/s}^2)(0.300\ \text{s}) = 24.5\ \text{rad/s}$$

b) Por la ecuación (9.11),

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2$$
$$= 0 + (27.5\ \text{rad/s})(0.300\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-10.0\ \text{rad/s}^2)(0.300\ \text{s})^2$$
$$= 7.80\ \text{rad} = 7.80\ \text{rad}\left(\frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}}\right) = 1.24\ \text{rev}$$

El disco ha girado una revolución completa más 0.24 de revolución, es decir, 360° más un ángulo adicional de (0.24 rev) (360°/rev) = 87°. Por lo tanto, la línea PQ forma un ángulo de 87° con el eje $+x$.

EVALUAR: La respuesta al inciso *a)* nos indica que disminuyó la velocidad angular del disco, como debe ser, dado que $\alpha_z < 0$. También podemos usar el valor de ω_z del inciso *a)* con la ecuación (9.12) para comprobar el resultado de θ del inciso *b)*. Para hacerlo, despejamos θ de la ecuación (9.12):

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$$
$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2\alpha_z}\right)$$
$$= 0 + \frac{(24.5\ \text{rad/s})^2 - (27.5\ \text{rad/s})^2}{2(-10.0\ \text{rad/s}^2)} = 7.80\ \text{rad}$$

Esto coincide con el resultado previo del inciso *b)*.

Evalúe su comprensión de la sección 9.2 Suponga que el disco del ejemplo 9.3 originalmente estaba girando al doble de la tasa (55.0 rad/s en lugar de 27.5 rad/s) y que frenó al doble de la tasa ($-20.0\ \text{rad/s}^2$ en vez de $-10.0\ \text{rad/s}^2$). *a)* En comparación con la situación del ejemplo 9.3, ¿cuánto tiempo le tomaría al disco llegar al reposo? **i.** La misma cantidad de tiempo; **ii.** el doble de tiempo; **iii.** 4 veces más tiempo; **iv.** $\frac{1}{2}$ del tiempo; **v.** $\frac{1}{4}$ del tiempo. *b)* En comparación con la situación del ejemplo 9.3, ¿cuántas revoluciones giraría el disco antes de detenerse? **i.** El mismo número de revoluciones; **ii.** el doble de revoluciones; **iii.** 4 veces más revoluciones; **iv.** $\frac{1}{2}$ de las revoluciones; **v.** $\frac{1}{4}$ de las revoluciones. |

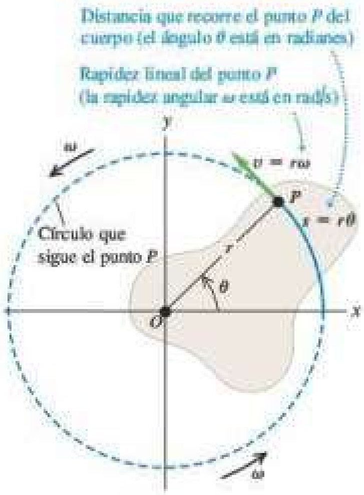
9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

¿Cómo obtenemos la velocidad y aceleración lineales de un punto dado en un cuerpo rígido en rotación? Se necesita la respuesta para continuar con nuestro estudio de la rotación. Por ejemplo, si deseamos obtener la energía cinética de un cuerpo en rotación, debemos partir de $K = \frac{1}{2}mv^2$ para una partícula, y esto requiere conocer la rapidez v de cada partícula del cuerpo. Entonces, vale la pena deducir relaciones generales entre la rapidez y la aceleración *angulares* de un cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo, y la rapidez y la aceleración *lineales* de un punto o de una partícula específicos del cuerpo.

Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, todas sus partículas se mueven en una trayectoria circular. El círculo se encuentra en un plano perpendicular al eje y está centrado en este último. La rapidez de una partícula es directamente proporcio-

9.9 Cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por el punto O.



nal a la velocidad angular del cuerpo; cuanto más rápidamente gira el cuerpo, mayor es la rapidez de cada partícula. En la figura 9.9, el punto P está a una distancia constante r del eje de rotación, así que se mueve en un círculo de radio r. En cualquier instante, el ángulo θ (en radianes) y la longitud del arco s están relacionados por

$$s = r\theta$$

Al derivar con respecto al tiempo, se observa que r es constante para una partícula específica, y se toma el valor absoluto de ambos lados:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

Ahora, $|ds/dt|$ es el valor absoluto de la tasa de cambio de la longitud de arco, que es igual a la rapidez *lineal* instantánea v de la partícula. De manera análoga, $|d\theta/dt|$ es el valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, que es la **rapidez angular** instantánea ω, es decir, la magnitud de la velocidad angular instantánea en rad/s. Así,

$$v = r\omega \qquad \text{(relación entre las rapideces lineal y angular)} \tag{9.13}$$

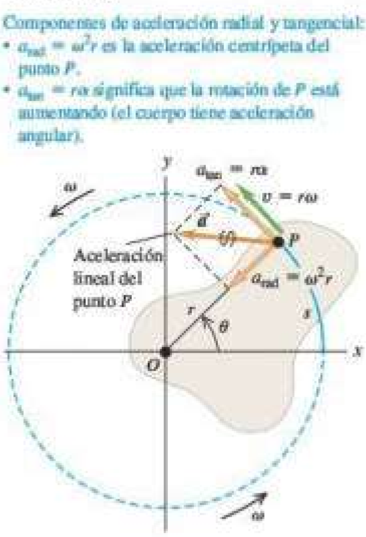
Cuanto más lejos está un punto del eje, mayor será su rapidez lineal. La *dirección* del *vector* velocidad lineal es tangente a la trayectoria circular en todos los puntos (figura 9.9).

MasteringPHYSICS
PhET: Ladybug Revolution

CUIDADO **Rapidez contra velocidad** Tenga presente la distinción entre las *rapideces* lineal y angular v y ω, que aparecen en la ecuación (9.13), y las *velocidades* lineal y angular v_x y ω_z. Las cantidades sin subíndices, v y ω, nunca son negativas; son las magnitudes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$, respectivamente, y sus valores indican con qué rapidez (v) se está moviendo la partícula o qué tan rápido está girando (ω). Las cantidades correspondientes con subíndice, v_x y ω_z, pueden ser positivas o negativas; su signo indica la dirección del movimiento.

Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

9.10 Cuerpo rígido cuya rotación está acelerando. La aceleración del punto P tiene una componente a_{rad} hacia el eje de rotación (perpendicular a $\vec{v}$) y una componente a_{tan} a lo largo del círculo que sigue el punto P (paralela a $\vec{v}$).



Podemos representar la aceleración de una partícula que se mueve en círculo en términos de sus componentes centrípeta y tangencial, a_{rad} y a_{tan} (figura 9.10), como hicimos en la sección 3.4. Le recomendamos repasar esa sección ahora. Vimos que la **componente tangencial de aceleración** a_{tan}, o componente paralela a la velocidad instantánea, actúa cambiando la *magnitud* de la velocidad de la partícula (su rapidez) y es igual a la tasa de cambio de la rapidez. Derivando la ecuación (9.13), obtenemos

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad \text{(aceleración tangencial de un punto en un cuerpo en rotación)} \tag{9.14}$$

Esta componente de la aceleración de una partícula siempre es tangente a la trayectoria circular de la partícula.

La cantidad $\alpha = d\omega/dt$ de la ecuación (9.14) es la tasa de cambio de la *rapidez* angular. No es la misma que $\alpha_z = d\omega_z/dt$, que es la tasa de cambio de la *velocidad* angular. Por ejemplo, consideremos un cuerpo que gira de modo que su vector velocidad angular apunta en la dirección $-z$ (véase la figura 9.5*b*). Si la rapidez angular del cuerpo está aumentando a una tasa de 10 rad/s por segundo, entonces $\alpha = 10$ rad/s^2. Sin embargo, ω_z es negativa y se hace más negativa a medida que la rotación aumenta, así que $\alpha_z = -10$ rad/s^2. La regla para la rotación en torno a un eje fijo es que α es igual a α_z si ω_z es positiva e igual a $-\alpha_z$ si ω_z es negativa.

La componente de la aceleración de la partícula que está dirigida hacia el eje de rotación, la **componente centrípeta de aceleración** a_{rad}, está asociada con el cambio de *dirección* de la velocidad de la partícula. En la sección 3.4 dedujimos la relación $a_{rad} = v^2/r$. Podemos expresar esto en términos de ω usando la ecuación (9.13):

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(aceleración centrípeta de un punto en un cuerpo en rotación)} \qquad (9.15)$$

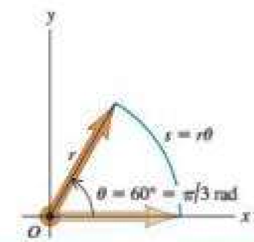
Esto se cumple en todo instante *aun si ω y v no son constantes*. La componente centrípeta siempre apunta hacia el eje de rotación.

La suma vectorial de las componentes centrípeta y tangencial de la aceleración de una partícula en un cuerpo en rotación es la aceleración lineal $\vec{a}$ (figura 9.10).

CUIDADO **Utilice ángulos en radianes en todas las ecuaciones** Es importante recordar que la ecuación (9.1), $s = r\theta$, es válida *solo* si θ se mide en radianes. Lo mismo sucede con todas las ecuaciones obtenidas a partir de ella, incluidas las ecuaciones (9.13), (9.14) y (9.15). Al usar estas ecuaciones, los ángulos *se deben* expresar en radianes, no en revoluciones ni en grados (figura 9.11).

Las ecuaciones (9.1), (9.13) y (9.14) también son válidas para cualquier partícula que tenga la misma velocidad tangencial de un punto en un cuerpo rígido en rotación. Por ejemplo, si una cuerda enrollada en un cilindro se desenrolla sin estirarse ni resbalarse, su rapidez y aceleración en cualquier instante son iguales a la rapidez y aceleración tangencial del punto en el cual es tangente al cilindro. El mismo principio se cumple en las cadenas y ruedas dentadas de una bicicleta, en correas y poleas que giran sin deslizarse, etcétera. Más adelante en este capítulo y en el capítulo 10, tendremos varias oportunidades de usar estas relaciones. Observe que la ecuación (9.15) para la componente centrípeta a_{rad} es aplicable a la cuerda o cadena *solo* en los puntos de contacto con el cilindro o la rueda dentada. Los demás puntos no tienen la misma aceleración hacia el centro del círculo que tienen los puntos sobre el cilindro o la rueda dentada.

9.11 Al relacionar cantidades lineales y angulares, utilice siempre radianes.



Ejemplo 9.4 Lanzamiento de disco

Un lanzador de disco gira el disco en un círculo con radio de 80.0 cm. En cierto instante, el lanzador gira a 10.0 rad/s y la rapidez angular está aumentando a 50.0 rad/s^2. Calcule las componentes de aceleración tangencial y centrípeta del disco en ese instante, y la magnitud de la aceleración en ese instante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Tratamos el disco como una partícula que sigue una trayectoria circular (figura 9.12*a*), así que podemos usar los conceptos que desarrollamos en esta sección. Conocemos el radio $r = 0.800$ m, $\omega = 10.0$ rad/s y $\alpha = 50.0$ rad/s^2 (figura 9.12*b*). Usaremos las ecuaciones (9.14) y (9.15), respectivamente, para obtener las componentes de aceleración a_{tan} y a_{rad}; luego calcularemos la magnitud de a aplicando el teorema de Pitágoras.

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (9.14) y (9.15):

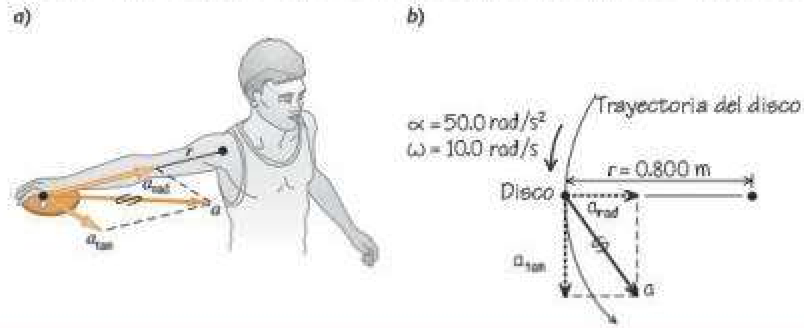
$$a_{tan} = r\alpha = (0.800\text{ m})(50.0\text{ rad/s}^2) = 40.0\text{ m/s}^2$$
$$a_{rad} = \omega^2 r = (10.0\text{ rad/s})^2(0.800\text{ m}) = 80.0\text{ m/s}^2$$

Entonces,

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_{rad}^2} = 89.4\text{ m/s}^2$$

EVALUAR: Observe que omitimos la unidad "radián" de los resultados para a_{tan}, a_{rad} y a. Podemos hacerlo porque el "radián" es una cantidad adimensional. ¿Puede usted demostrar que, si la rapidez angular se duplica a 20.0 rad/s mientras α permanece constante, la magnitud de la aceleración, a, aumenta a 322 m/s^2?

9.12 *a*) Lanzamiento de disco con giro circular. *b*) El diagrama muestra las componentes de la aceleración para el disco.



Ejemplo 9.5 Diseño de una hélice

Imagine que le piden diseñar la hélice de un avión que va a girar a 2400 rpm (figura 9.13*a*). La rapidez de avance del avión en el aire debe ser de 75.0 m/s, y la rapidez de las puntas de las aspas de la hélice en el aire no debe exceder 270 m/s. (Esto es cerca del 80% de la rapidez del sonido en el aire. Si la rapidez de las puntas de la hélice fuera mayor, producirían un ruido ensordecedor). *a*) ¿Qué radio máximo puede tener la hélice? *b*) Con este radio, ¿qué aceleración tiene la punta de la hélice?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Consideremos una partícula en la punta de la hélice; las incógnitas son la distancia entre esa partícula y el eje, y su aceleración. La rapidez de esta partícula con respecto al aire, debida *tanto* a la rotación de la hélice *como* al movimiento hacia adelante del avión, no puede exceder 270 m/s. La figura 9.13*b* muestra que la velocidad $\vec{v}_{punta}$ de una partícula en la punta de la hélice es la suma vectorial de su velocidad tangencial debida a la rotación de la hélice de magnitud $v_{tan} = \omega r$, dada por la ecuación (9.13), y la velocidad hacia adelante del avión, de magnitud $v_{avión} = 75.0$ m/s. El plano de rotación de la hélice es perpendicular a la dirección del vuelo, así que $\vec{v}_{tan}$ y $\vec{v}_{avión}$ son perpendiculares entre sí; de manera que podemos usar el teorema de Pitágoras para obtener una expresión para v_{punta}, a partir de v_{tan} y $v_{avión}$. Entonces, obtenemos v_{punta} igual a 270 m/s y despejamos el radio r. La rapidez angular de la hélice es constante, de manera que la aceleración de la punta de la hélice solo tiene una componente radial, la cual obtendremos con la ecuación (9.15).

EJECUTAR: Primero convertimos ω a rad/s (véase la figura 9.11):

$$\omega = 2400 \text{ rpm} = \left(2400\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 251 \text{ rad/s}$$

a) Según la figura 9.13*b* y la ecuación (9.13),

$$v_{punta}{}^2 = v_{avión}{}^2 + v_{tan}{}^2 = v_{avión}{}^2 + r^2\omega^2 \quad \text{o}$$

$$r^2 = \frac{v_{punta}{}^2 - v_{avión}{}^2}{\omega^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{\sqrt{v_{punta}{}^2 - v_{avión}{}^2}}{\omega}$$

Si $v_{punta} = 270$ m/s, el radio máximo de la hélice es

$$r = \frac{\sqrt{(270 \text{ m/s})^2 - (75.0 \text{ m/s})^2}}{251 \text{ rad/s}} = 1.03 \text{ m}$$

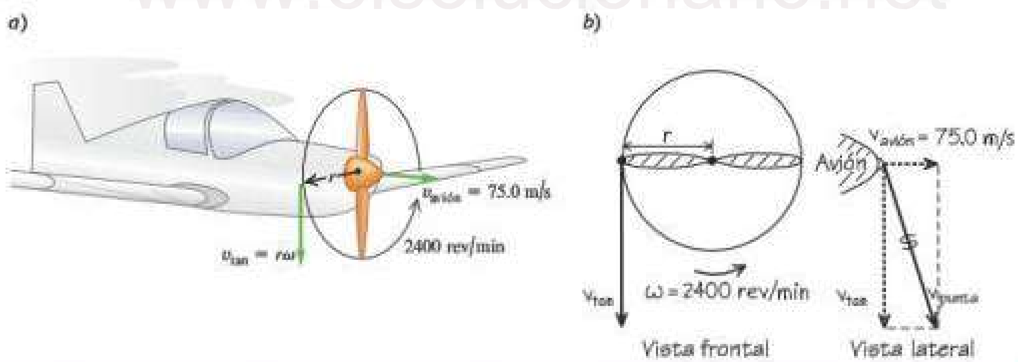
b) La aceleración centrípeta de la partícula es

$$a_{tan} = \omega^2 r = (251 \text{ rad/s})^2(1.03 \text{ m}) = 6.5 \times 10^4 \text{ m/s}^2 = 6600g$$

La aceleración *tangencial* a_{tan} es cero porque la rapidez angular es constante.

EVALUAR: De acuerdo con $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, ¡la hélice debe ejercer una fuerza de 6.5×10^4 N sobre cada kilogramo de material en la punta! Por eso, las hélices se fabrican con materiales resistentes; por lo general, se utiliza una aleación de aluminio.

9.13 *a*) Avión impulsado en el aire por una hélice. *b*) Diagrama que muestra las componentes de la velocidad en la punta de la hélice.



Evalúe su comprensión de la sección 9.3 En un disco (véase la figura 9.8), la información se almacena en un patrón codificado de agujeros diminutos, los cuales están dispuestos en una pista que forma una espiral del centro al borde del disco. Cuando el disco gira dentro de un reproductor, la pista se escanea con rapidez *lineal* constante. ¿Cómo debe cambiar la rapidez de rotación del disco mientras la cabeza lectora del reproductor se mueve a lo largo de la pista? **i.** La rapidez de rotación debe aumentar. **ii.** La rapidez de rotación debe disminuir. **iii.** La rapidez de rotación debe permanecer constante.

9.4 Energía en el movimiento de rotación

Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, así que tiene energía cinética. Como veremos, podemos expresar esta energía cinética en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad, llamada *momento de inercia*, que depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye.

Para empezar, visualicemos un cuerpo formado por un gran número de partículas, con masas $m_1, m_2, \ldots$ a distancias $r_1, r_2, \ldots$ del eje de rotación. Identificamos las partículas con el subíndice i: la masa de la i-ésima partícula es m_i y su distancia con respecto al eje de rotación es r_i. Las partículas no tienen que estar todas en el mismo plano, así que especificamos que r_i es la distancia *perpendicular* de la i-ésima partícula al eje.

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, la rapidez v_i de la i-ésima partícula está dada por la ecuación (9.13), $v_i = r_i\omega$, donde ω es la rapidez angular del cuerpo. Diferentes partículas tienen distintos valores de r, pero ω es igual para todas (de otra forma, el cuerpo no sería rígido). La energía cinética de la i-ésima partícula se expresa como

$$\tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

La energía cinética *total* del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \cdots = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

Sacando el factor común $\omega^2/2$ de esta expresión, obtenemos

$$K = \tfrac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots)\omega^2 = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_i m_i r_i^2\Big)\omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se denota con I y es el **momento de inercia** del cuerpo para este eje de rotación:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \qquad \text{(definición de momento de inercia)} \qquad (9.16)$$

www.elsolucionario.net

La palabra "momento" significa que I depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo; nada tiene que ver con un "momento" de tiempo. Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total determinada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia. En un cuerpo rígido, las distancias r_i son constantes, e I es independiente de cómo gira el cuerpo en torno al eje dado. La unidad del momento de inercia en el SI es el kilogramo-metro^2 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$).

En términos del momento de inercia I, la **energía cinética de rotación** K de un cuerpo rígido es

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(energía cinética de rotación de un cuerpo rígido)} \qquad (9.17)$$

La energía cinética dada por la ecuación (9.17) *no* es una nueva forma de energía; es simplemente la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales que forman al cuerpo rígido en rotación. Al usar la ecuación (9.17), ω *debe* medirse en radianes por segundo, no en revoluciones ni en grados por segundo, para obtener K en joules; la razón es que usamos $v_i = r_i\omega$ en la deducción.

La ecuación (9.17) ofrece una interpretación física sencilla del momento de inercia: *cuanto mayor sea el momento de inercia, mayor será la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una rapidez angular ω*. En el capítulo 6 vimos que la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo efectuado para acelerar ese cuerpo desde el reposo. De modo que, cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo, más difícil será ponerlo a girar si está en reposo, y más difícil será detener su rotación si ya está girando (figura 9.14). Por esta razón, I también se denomina *inercia rotacional*.

El siguiente ejemplo muestra cómo afecta al valor de I el *cambio* del eje de rotación.

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 7.7: Rotational Inertia

Video Tutor Demo

9.14 Aparato que gira libremente en torno a un eje vertical. El momento de inercia se puede variar fijando los dos cilindros de igual masa en diferentes posiciones sobre la varilla horizontal.

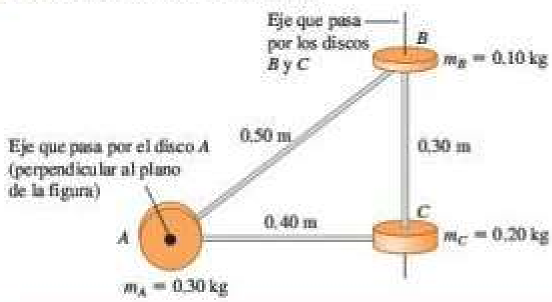
Ejemplo 9.6 Momentos de inercia para diferentes ejes de rotación

La pieza de una máquina (figura 9.15) está formada por tres discos unidos por puntales ligeros. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene este cuerpo con respecto a un eje que pasa por el centro del disco A y es perpendicular al plano del diagrama? *b*) ¿Qué momento de inercia tiene con respecto a un eje que pasa por el centro de los discos B y C? *c*) Si el cuerpo gira alrededor del eje que pasa por A con rapidez angular $\omega = 4.0$ rad/s, ¿qué energía cinética tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Consideraremos los discos como partículas masivas ubicadas en los centros de los discos, y a los puntales ligeros carentes de masa. En los incisos *a*) y *b*), usaremos la ecuación (9.16) para calcular los momentos de inercia. Conocido el momento de inercia con respecto al eje A, usaremos la ecuación (9.17) en el inciso *c*) para calcular la energía cinética de rotación.

9.15 Pieza mecánica de forma inusual.



EJECUTAR: *a*) La partícula en el punto A está *sobre* el eje que pasa por A, de modo que su distancia r al eje es cero, así que no contribuye al momento de inercia. De modo que solo B y C contribuyen, y de la ecuación (9.16) se obtiene

$$I_A = \sum m_i r_i^2 = (0.10 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 + (0.20 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.057 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

b) Las partículas en B y C están sobre el eje BC, así que ninguna contribuye al momento de inercia. Solo A contribuye, y tenemos

$$I_{BC} = \sum m_i r_i^2 = (0.30 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.048 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

c) De acuerdo con la ecuación (9.17),

$$K_A = \tfrac{1}{2} I_A \omega^2 = \tfrac{1}{2}(0.057 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(4.0 \text{ rad/s})^2 = 0.46 \text{ J}$$

EVALUAR: El momento de inercia con respecto al eje que pasa por A es mayor que el momento de inercia con respecto al eje BC. Por lo tanto, considerando los dos ejes, es más fácil hacer girar la pieza alrededor del eje BC.

Aplicación Momento de inercia del ala de un ave
Cuando un ave aletea, hace girar sus alas arriba y abajo alrededor del hombro. Un colibrí tiene alas pequeñas con un momento de inercia pequeño, de modo que puede hacer que sus alas se muevan rápidamente (hasta 70 aleteos por segundo). En contraste, el cóndor de Los Andes (*Vultur gryphus*) tiene alas muy grandes que son difíciles de mover debido a su gran momento de inercia. Los cóndores efectúan un aleteo por segundo aproximadamente en el despegue, pero la mayoría de las veces prefieren planear mientras mantienen sus alas fijas.

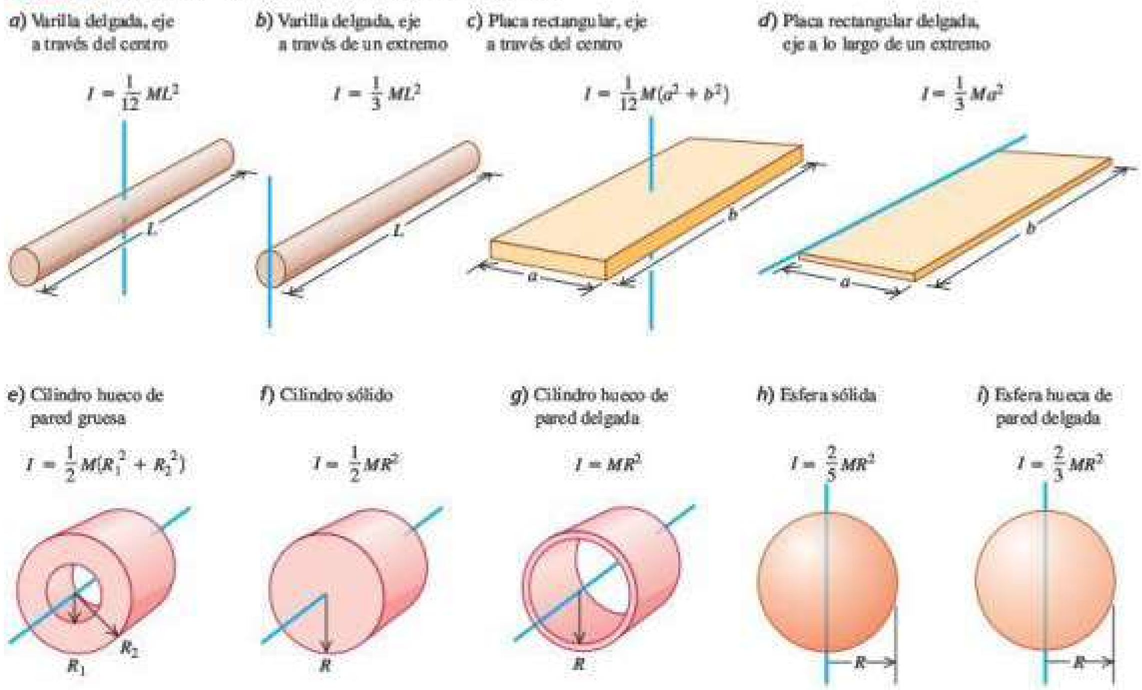
CUIDADO **El momento de inercia depende de la elección del eje** Los resultados de los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 9.6 demuestran que el momento de inercia de un cuerpo depende de la ubicación y orientación del eje. No basta con decir: "El momento de inercia de este cuerpo es de 0.048 kg·m²". Debemos ser específicos y decir: "El momento de inercia de este cuerpo *con respecto al eje que pasa por B y C* es de 0.048 kg·m²".

En el ejemplo 9.6, representamos el cuerpo como varias masas puntuales, y evaluamos la sumatoria directamente con la ecuación (9.16). Si el cuerpo es una distribución *continua* de masa, como un cilindro o una placa sólidos, la sumatoria se convierte en una integral y necesitamos usar el cálculo integral para determinar el momento de inercia. Daremos varios ejemplos de estos cálculos en la sección 9.6; mientras tanto, en la tabla 9.2 se dan los momentos de inercia de varias formas comunes en términos de sus masas y dimensiones. Todos los cuerpos mostrados en la tabla 9.2 son *uniformes*; es decir, la densidad tiene el mismo valor en todos los puntos dentro de las partes sólidas del cuerpo..

CUIDADO **Cálculo del momento de inercia** Es posible que el lector se sienta tentado a calcular el momento de inercia de un cuerpo suponiendo que toda la masa está concentrada en el centro de masa, multiplicando después la masa total por el cuadrado de la distancia del centro de masa al eje. Resista la tentación, ¡sería un error hacerlo! Por ejemplo, si una varilla delgada y uniforme de longitud L y masa M pivota sobre un eje que pasa por un extremo, perpendicular a la varilla, el momento de inercia es $I = ML^2/3$ [caso *b*) en la tabla 9.2]. Si tomáramos la masa como si estuviera concentrada en el centro, a una distancia $L/2$ del eje, obtendríamos el resultado *incorrecto* $I = M(L/2)^2 = ML^2/4$.

Ahora que sabemos calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación, podemos aplicar los principios de energía del capítulo 7 al movimiento de rotación. Veamos ciertos aspectos de la estrategia y algunos ejemplos.

Tabla 9.2 Momentos de inercia de diversos cuerpos



Estrategia para resolver problemas 9.1 Energía de rotación

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Podemos usar las relaciones de trabajo-energía y la conservación de la energía, para obtener relaciones entre la posición y el movimiento de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo. El método de energía generalmente no es útil para resolver problemas en los que interviene el tiempo. En el capítulo 10 veremos cómo tratar problemas de rotación de ese tipo.

PLANTEAR *el problema* siguiendo la Estrategia para resolver problemas descrita en la sección 7.1, con las siguientes adiciones:

5. Use las ecuaciones (9.13) y (9.14) en problemas que incluyen una cuerda (o similar) enrollada en un cuerpo rígido que gira, si la cuerda no resbala. Estas ecuaciones relacionan la rapidez lineal y la aceleración tangencial de un punto de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo. (Véase los ejemplos 9.7 y 9.8).
6. Use la tabla 9.2 para calcular momentos de inercia. Aplique el teorema de los ejes paralelos, ecuación (9.19) (que se deducirá en la sección 9.5), con la finalidad de calcular momentos de inercia para rotación alrededor de un eje paralelo a los mostrados en la tabla.

EJECUTAR *la solución:* Escriba las expresiones de las energías cinética y potencial iniciales y finales K_1, K_2, U_1 y U_2 y la del trabajo no conservativo W_{otras} (si lo hay), donde K_1 y K_2 deben incluir ahora la energía cinética de rotación $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Sustituya estas expresiones en la ecuación (7.14), $K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2$ (si se efectúa trabajo no conservativo), o la ecuación (7.11), $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ (si solo se efectúa trabajo conservativo), y despeje las incógnitas. Es útil dibujar gráficas de barras que muestren los valores iniciales y finales de K, U y $E = K + U$.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que su respuesta sea lógica desde el punto de vista físico.

Ejemplo 9.7 Cable que se desenrolla I

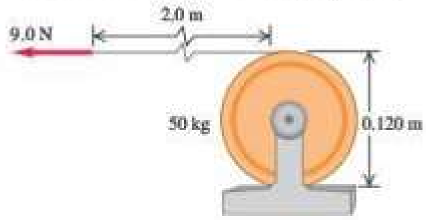
Un cable ligero, y que no se estira, se enrolla alrededor de un cilindro sólido con masa de 50 kg y 0.120 m de diámetro, que gira alrededor de un eje fijo horizontal y está montado en cojinetes sin fricción (figura 9.16). Una fuerza constante de 9.0 N tira del extremo libre del cable una distancia de 2.0 m, haciendo girar el cilindro conforme se desenrolla sin resbalar. Si el cilindro está inicialmente en reposo, calcule su rapidez angular final y la rapidez final del cable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Resolveremos este problema empleando métodos de energía. Supondremos que el cable tiene masa despreciable, de modo que solo el cilindro tiene energía cinética. No hay cambios en la energía potencial gravitacional. Hay fricción entre el cable y el cilindro; pero como el cable no resbala, no hay movimiento del cable relativo

Continúa

9.16 Un cable se desenrolla de un cilindro (vista lateral).



al cilindro y no se pierde energía mecánica por la fricción. Puesto que el cable tiene masa despreciable, la fuerza que el cable ejerce sobre el borde del cilindro es igual a la fuerza aplicada F.

PLANTEAR: El punto 1 es aquel donde el cable comienza a moverse. El cilindro inicialmente está en reposo, así que $K_1 = 0$. El punto 2 se presenta cuando el cable se ha movido una distancia $s = 2.0$ m, y el cilindro tiene una energía cinética $K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$. Una de las incógnitas es ω; la otra es la rapidez del cable en el punto 2, que es igual a la rapidez tangencial v del cilindro en ese punto. Usaremos la ecuación (9.13) para obtener v a partir de ω.

EJECUTAR: El trabajo efectuado sobre el cilindro es $W_{\text{otras}} = Fs = (9.0\ \text{N})(2.0\ \text{m}) = 18\ \text{J}$. Según la tabla 9.2, el momento de inercia es

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(50\ \text{kg})(0.060\ \text{m})^2 = 0.090\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

(El radio R es la mitad del diámetro del cilindro). De acuerdo con la ecuación (7.14), $K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$, así que

$$0 + 0 + W_{\text{otras}} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{\text{otras}}}{I}} = \sqrt{\frac{2(18\ \text{J})}{0.090\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}} = 20\ \text{rad/s}$$

Según la ecuación (9.13), la rapidez tangencial final del cilindro, y por ende la rapidez final del cable, es

$$v = R\omega = (0.060\ \text{m})(20\ \text{rad/s}) = 1.2\ \text{m/s}$$

EVALUAR: Si la masa del cable no es despreciable, una parte de los 18 J de trabajo se convertirá en energía cinética del cable. De manera que el cilindro adquiriría menos energía cinética y tendría menor rapidez angular que las calculadas aquí.

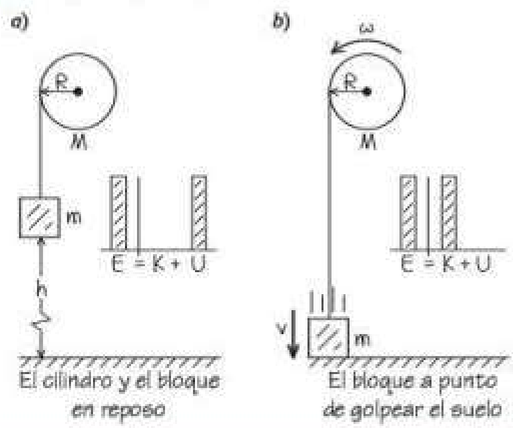
Ejemplo 9.8 Cable que se desenrolla II

Enrollamos un cable ligero y que no se estira en un cilindro sólido de masa M y radio R. El cilindro gira con fricción despreciable alrededor de un eje horizontal fijo. Atamos el extremo libre del cable a un bloque de masa m y soltamos el bloque a partir del reposo a una distancia h sobre el piso. Conforme el bloque cae, el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar. Obtenga las expresiones para la rapidez del bloque que cae y la rapidez angular del cilindro cuando el bloque golpea el suelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 9.7, el cable no resbala y la fricción no efectúa trabajo. Suponemos que el cable tiene masa despreciable, de modo que las fuerzas que ejerce sobre el cilindro y sobre el bloque tienen igual magnitud. En el extremo superior, la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección, y en el extremo inferior tienen direcciones opuestas, por lo que el cable no efectúa trabajo *neto* y $W_{\text{otras}} = 0$. Solo la fuerza de gravedad realiza trabajo, y la energía mecánica se conserva.

9.17 Diagramas para este problema.



PLANTEAR: La figura 9.17*a* muestra la situación antes de que el bloque comience a caer (punto 1). La energía cinética es $K_1 = 0$. Tomamos la energía potencial gravitacional como cero cuando el bloque está en el piso (punto 2), por lo que $U_1 = mgh$ y $U_2 = 0$. (Se ignora la energía potencial gravitacional del cilindro que gira, ya que su altura no cambia). Justo antes de que el bloque golpee el piso (figura 9.17*b*), tanto el bloque como el cilindro tienen energía cinética, por lo que

$$K_2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

El momento de inercia del cilindro es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Además, $v = R\omega$ ya que la rapidez del bloque que cae debe ser igual a la rapidez tangencial en la superficie exterior del cilindro.

EJECUTAR: Utilizamos las expresiones para K_1, U_1, K_2 y U_2, y la relación $\omega = v/R$ en la ecuación (7.4), $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, y despejamos v:

$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0 = \tfrac{1}{2}\left(m + \tfrac{1}{2}M\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

La rapidez angular final ω del cilindro es $\omega = v/R$.

EVALUAR: Si M es mucho mayor que m, v es muy pequeña; si M es mucho menor que m, v es casi igual a $\sqrt{2gh}$, que es la rapidez de un cuerpo en caída libre desde una altura h. Ambos resultados son los esperados.

Energía potencial gravitacional de un cuerpo extenso

En el ejemplo 9.8, el cable tenía masa despreciable y podíamos ignorar su energía cinética y la energía potencial gravitacional asociada a él. Si la masa *no* es despreciable, necesitamos saber cómo calcular la *energía potencial gravitacional* asociada con dicho cuerpo extenso. Si la aceleración de la gravedad g es la misma en todos los puntos del cuerpo, la energía potencial gravitacional es igual que si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa del cuerpo. Tomemos el eje y vertical hacia arriba. Entonces, para un cuerpo de masa total M, la energía potencial gravitacional U es simplemente

$$U = Mgy_{cm} \quad \text{(energía potencial gravitacional de un cuerpo extenso)} \qquad (9.18)$$

donde y_{cm} es la coordenada y del centro de masa. Esta expresión es válida para cualquier cuerpo extenso, sea rígido o no (figura 9.18).

Para demostrar la ecuación (9.18), representamos otra vez el cuerpo como un conjunto de elementos de masa m_i. La energía potencial del elemento m_i es $m_i g y_i$, y la energía potencial total es

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \cdots = (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots)g$$

Pero, según la ecuación (8.28), que define las coordenadas del centro de masa,

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots = (m_1 + m_2 + \cdots)y_{cm} = My_{cm}$$

donde $M = m_1 + m_2 + \cdots$ es la masa total. Al combinar esto con la expresión anterior para U, tenemos que $U = Mgy_{cm}$, lo que coincide con la ecuación (9.18).

Aplicaremos la ecuación (9.18) en los problemas. Usaremos esta relación en el capítulo 10 al analizar problemas de cuerpo rígido cuando el eje de rotación se mueve.

9.18 En la técnica de salto de altura llamada "caída Fosbury", en honor de su inventor, el atleta arquea el cuerpo al pasar sobre la barra. Como resultado, su centro de masa realmente pasa *bajo* la barra. Esta técnica requiere de un menor aumento en la energía potencial gravitacional [ecuación (9.18)], que el método antiguo de saltar a horcajadas sobre la barra.

Evalúe su comprensión de la sección 9.4 Suponga que el cilindro y el bloque del ejemplo 9.8 tienen la misma masa, de manera que $m = M$. Justo antes de que el objeto golpee el piso, ¿qué enunciado es correcto acerca de la relación entre la energía cinética del bloque que cae y la energía cinética de rotación del cilindro? **i.** El bloque tiene más energía cinética que el cilindro. **ii.** El bloque tiene menos energía cinética que el cilindro. **iii.** El bloque y el cilindro tienen cantidades iguales de energía cinética.

MP

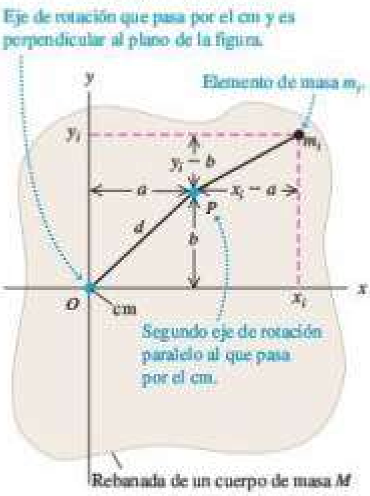
9.5 Teorema de los ejes paralelos

En la sección 9.4 se señaló que un cuerpo no tiene un momento de inercia único. De hecho, tiene un número infinito, porque el número de ejes sobre los que podría girar es infinito. No obstante, hay una relación sencilla entre el momento de inercia I_{cm} de un cuerpo de masa M alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y el momento de inercia I_P alrededor de cualquier otro eje paralelo al original pero desplazado una distancia d. Esta relación, llamada **teorema de los ejes paralelos**, establece que

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \quad \text{(teorema de los ejes paralelos)} \qquad (9.19)$$

Para demostrar este teorema, consideramos dos ejes paralelos al eje z: uno pasa por el centro de masa, y el otro por un punto P (figura 9.19). Primero tomamos una rebanada muy delgada del cuerpo, paralela al plano xy y perpendicular al eje z. Tomamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de masa del cuerpo; así, las coordenadas del centro de masa son $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$. El eje que pasa por el centro de masa atraviesa esta rebanada delgada en el punto O, y el eje paralelo la atraviesa en el punto P, cuyas coordenadas x y y son (a, b). La distancia entre este eje y el que pasa por el centro de masa es d, donde $d^2 = a^2 + b^2$.

9.19 El elemento de masa m_i tiene coordenadas (x_i, y_i) con respecto a un eje de rotación que pasa por el centro de masa (cm), y coordenadas $(x_i - a, y_i - b)$ con respecto al eje paralelo que pasa por el punto P.



Podemos escribir una expresión para el momento de inercia I_P alrededor del eje que pasa por P. Sea m_i un elemento de masa de la rebanada, con coordenadas (x_i, y_i, z_i). Entonces, el momento de inercia I_{cm} de la rebanada alrededor del eje que pasa por el centro de masa (en O) es

$$I_{cm} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

El momento de inercia de la rebanada alrededor del eje que pasa por P es

$$I_P = \sum_i m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

En estas expresiones no intervienen las coordenadas z_i, medidas perpendicularmente a las rebanadas, de manera que podemos ampliar las sumatorias para incluir *todas* las partículas de *todas* las rebanadas. Así, I_P se convierte en el momento de inercia de *todo* el cuerpo para un eje que pasa por P. Expandiendo los cuadrados y reagrupando, se obtiene

$$I_P = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) - 2a\sum_i m_i x_i - 2b\sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2)\sum_i m_i$$

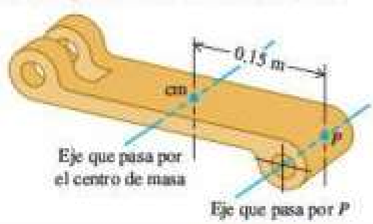
La primera sumatoria es I_{cm}. De acuerdo con la ecuación (8.28), la definición de centro de masa, la segunda y la tercera sumatorias son proporcionales a x_{cm} y y_{cm}, que son cero porque tomamos el origen en el centro de masa. El último término es d^2 multiplicado por la masa total, es decir, Md^2. Queda demostrado que $I_P = I_{cm} + Md^2$.

Como muestra la ecuación (9.19), un cuerpo rígido tiene menor momento de inercia con respecto a un eje que pasa por su centro de masa que con respecto a cualquier otro eje paralelo. Por ello, es más fácil poner a girar un cuerpo si el eje de rotación pasa por el centro de masa. Esto sugiere que, de algún modo, es más natural que un cuerpo en rotación gire sobre un eje que pasa por su centro de masa; haremos más cuantitativa esta idea en el capítulo 10.

Ejemplo 9.9 Uso del teorema de ejes paralelos

La pieza de un acoplamiento mecánico (figura 9.20) tiene una masa de 3.6 kg. Su momento de inercia I_P alrededor de un eje que pasa a 0.15 m de su centro de masa es $I_P = 0.132\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Calcule el momento de inercia I_{cm} alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

9.20 Cálculo del I_{cm} a partir de una medición del I_P.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Determinaremos la incógnita I_{cm} usando el teorema de ejes paralelos, ecuación (9.19). Reacomodamos la ecuación y obtenemos

$$I_{cm} = I_P - Md^2 = 0.132\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - (3.6\ \text{kg})(0.15\ \text{m})^2$$
$$= 0.051\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

EVALUAR: Como se esperaba, I_{cm} es menor que I_P; el momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es menor que para cualquier otro eje paralelo.

Evalúe su comprensión de la sección 9.5 Un taco de billar es una varilla de madera con una composición uniforme; uno de sus extremos tiene un diámetro más grande que el otro, ya que la estructura se va afinando a lo largo de la varilla. Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar si un taco de billar tiene un momento de inercia mayor **i.** para un eje que pasa por el extremo más grueso de la varilla y es perpendicular a la longitud de esta, o **ii.** para un eje que pasa por el extremo más delgado de la varilla y es perpendicular a la longitud de esta. ❙

9.6 Cálculos de momento de inercia

Si un cuerpo rígido es una distribución continua de masa, como un cilindro o una esfera sólidos, no puede representarse con unas cuantas masas puntuales. En este caso, la *sumatoria* de masas y distancias que define el momento de inercia [ecuación (9.16)] se vuelve una *integral*. Imagine que divide el cuerpo en elementos muy pequeños de masa dm, de modo que todos los puntos de un elemento estén prácticamente a la misma distancia perpendicular del eje de rotación. Llamamos r a esta distancia, como antes. El momento de inercia es, entonces,

$$I = \int r^2\,dm \qquad (9.20)$$

Para evaluar la integral, debemos representar r y dm en términos de la misma variable de integración. Si tenemos un objeto prácticamente unidimensional, como las varillas delgadas *a*) y *b*) de la tabla 9.2, podemos usar una coordenada x a lo largo y relacionar dm con un incremento dx. Si el objeto es tridimensional, suele ser más fácil expresar dm en términos de un elemento de volumen dV y la *densidad* ρ del cuerpo. La densidad es la masa por unidad de volumen, es decir, $\rho = dm/dV$, así que también podemos escribir la ecuación (9.20) como

$$I = \int r^2 \rho\,dV$$

Esta expresión nos dice que el momento de inercia de un cuerpo depende de la forma en que su densidad varía dentro de su volumen (figura 9.21). Si la densidad del cuerpo es uniforme, podemos sacar ρ de la integral:

$$I = \rho \int r^2\,dV \qquad (9.21)$$

Para usar esta ecuación, debemos expresar el elemento de volumen dV en términos de las diferenciales de las variables de integración, tales como $dV = dx\,dy\,dz$. Siempre debemos elegir dV de modo que todos sus puntos estén casi a la misma distancia del eje de rotación. Los límites de la integral se determinan por la forma y las dimensiones del cuerpo. En el caso de cuerpos de forma regular, la integración suele ser sencilla.

9.21 Al medir las pequeñas variaciones en las órbitas de los satélites, los geofísicos pueden calcular el momento de inercia de la Tierra. Esto nos dice cómo está distribuida la masa de nuestro planeta en su interior. Los datos indican que la Tierra es mucho más densa en el núcleo que en sus capas exteriores.

Ejemplo 9.10 Cilindro hueco o sólido que gira alrededor del eje de simetría

La figura 9.22 muestra un cilindro hueco con densidad uniforme de masa ρ, longitud L, radio interior R_1 y radio exterior R_2. (Podría ser el cilindro de acero de una imprenta). Usando integración, calcule el momento de inercia alrededor del eje de simetría del cilindro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Elegimos como elemento de volumen una capa cilíndrica delgada de radio r, espesor dr y longitud L; todas sus partes están prácticamente a la misma distancia r del eje. El volumen de la capa es casi igual al de una lámina plana de espesor dr, longitud L y anchura $2\pi r$ (la circunferencia de la capa). La masa de la capa es

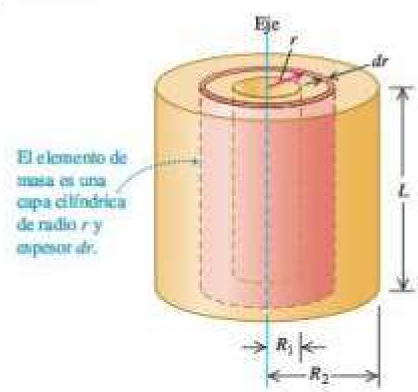
$$dm = \rho\,dV = \rho(2\pi rL\,dr)$$

Usaremos esta expresión en la ecuación (9.20) e integraremos de $r = R_1$ a $r = R_2$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (9.20), el momento de inercia es

$$\begin{aligned} I &= \int r^2\,dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi rL\,dr) \\ &= 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr \\ &= \frac{2\pi\rho L}{4}(R_2^4 - R_1^4) \\ &= \frac{\pi\rho L}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) \end{aligned}$$

9.22 Cálculo del momento de inercia de un cilindro hueco alrededor de su eje de simetría.



[En el último paso usamos la identidad $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$]. Expresamos este resultado en términos de la masa total M del cuerpo, que es su densidad ρ multiplicada por el volumen total V. El volumen del cilindro es

$$V = \pi L(R_2^2 - R_1^2)$$

así que la masa total M es

$$M = \rho V = \pi L\rho(R_2^2 - R_1^2)$$

Continúa

Comparando con la expresión anterior de I, vemos que

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

EVALUAR: Esto concuerda con el caso *e*) de la tabla 9.2. Si el cilindro es sólido, con radio exterior $R_2 = R$ y radio interior $R_1 = 0$, su momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

de acuerdo con el caso *f*). Si la pared del cilindro es muy delgada, tenemos que $R_1 \approx R_2 = R$ y el momento de inercia es

$$I = MR^2$$

de acuerdo con el caso *g*). Podríamos haber predicho este último resultado sin efectuar cálculos; en un cilindro de pared delgada, toda la masa está a la misma distancia $r = R$ del eje, por lo que $I = \int r^2\, dm = R^2 \int dm = MR^2$.

Ejemplo 9.11 Esfera uniforme de radio R, eje a través del centro

Calcule el momento de inercia de una esfera sólida con densidad uniforme de masa (como una bola de billar), alrededor de un eje que pasa por su centro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Dividimos la esfera en discos sólidos delgados de espesor dx (figura 9.23), cuyo momento de inercia conocemos por el caso *f*) de la tabla 9.2. Integraremos sobre ellos para calcular el momento de inercia total.

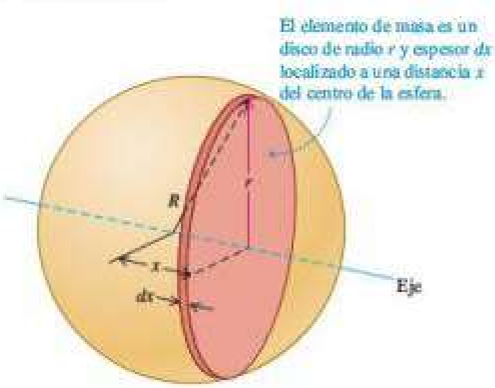
EJECUTAR: El radio y, por lo tanto, el volumen y la masa del disco dependen de su distancia x al centro de la esfera. El radio r del disco que se muestra en la figura 9.23 es

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Su volumen es

$$dV = \pi r^2\, dx = \pi(R^2 - x^2)\, dx$$

9.23 Cálculo del momento de inercia de una esfera alrededor de un eje que pasa por su centro.



y su masa es

$$dm = \rho\, dV = \pi\rho(R^2 - x^2)\, dx$$

De acuerdo con el caso *f*) de la tabla 9.2, el momento de inercia de un disco de radio r y masa dm es

$$dI = \frac{1}{2}r^2\, dm = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)[\pi\rho(R^2 - x^2)\, dx]$$
$$= \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2\, dx$$

Integrando esta expresión de $x = 0$ a $x = R$, obtenemos el momento de inercia del hemisferio derecho. Por simetría, el I total de la esfera completa es el doble de esto:

$$I = (2)\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)^2\, dx$$

Realizando la integración, obtenemos

$$I = \frac{8\pi\rho R^5}{15}$$

El volumen de la esfera es $V = 4\pi R^3/3$, por lo que, en términos de su masa M, su densidad es

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Aquí, la expresión para I se convierte en

$$I = \left(\frac{8\pi R^5}{15}\right)\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right) = \frac{2}{5}MR^2$$

EVALUAR: Este resultado concuerda con el caso *h*) de la tabla 9.2. Observe que el momento de inercia $I = \frac{2}{5}MR^2$ de una esfera sólida de masa M y radio R es menor que el momento de inercia $I = \frac{1}{2}MR^2$ de un *cilindro* sólido con los mismos valores de masa y radio, porque la mayor parte de la masa de la esfera está cerca del eje.

Evalúe su comprensión de la sección 9.6 Dos cilindros huecos tienen los mismos radios interno y externo, así como la misma masa; sin embargo, tienen longitudes diferentes. Uno está hecho de madera de baja densidad y el otro de plomo de alta densidad. ¿Cuál cilindro tiene el mayor momento de inercia alrededor de su eje de simetría? **i.** El cilindro de madera; **ii.** el cilindro de plomo; **iii.** los dos momentos de inercia son iguales. **|**

CAPÍTULO 9 RESUMEN

Video Tutor Solutions

Cinemática rotacional: Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo (que por lo general se llama eje z), su posición está descrita por una coordenada angular θ. La velocidad angular ω_z es la derivada de θ con respecto al tiempo, y la aceleración angular α_z es la derivada de ω_z con respecto al tiempo, es decir, la segunda derivada de θ. (Véase los ejemplos 9.1 y 9.2). Si la aceleración angular es constante, entonces θ, ω_z y α_z están relacionadas por ecuaciones sencillas de cinemática análogas a las del movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante. (Véase el ejemplo 9.3).

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (9.3)$$

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9.5),\ (9.6)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad (9.11)$$

(solo para α_z constante)

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \quad (9.10)$$

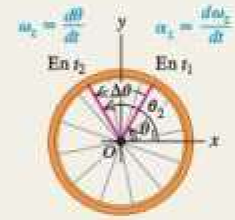
(solo para α_z constante)

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \quad (9.7)$$

(solo para α_z constante)

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad (9.12)$$

(solo para α_z constante)



Relación entre cinemática angular y lineal: La rapidez angular ω de un cuerpo rígido es la magnitud de su velocidad angular. La razón de cambio de ω es $\alpha = d\omega/dt$. En el caso de una partícula de un cuerpo que está a una distancia r del eje de rotación, la rapidez v y las componentes de la aceleración $\vec{a}$ están relacionadas con ω y α. (Véase los ejemplos 9.4 y 9.5).

$$v = r\omega \quad (9.13)$$

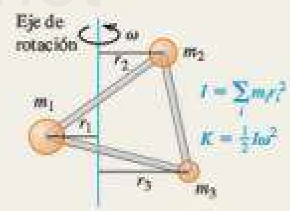
$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (9.14)$$

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (9.15)$$

Momento de inercia y energía cinética de rotación: El momento de inercia I de un cuerpo alrededor de un eje dado es una medida de su inercia rotacional: cuanto mayor sea el valor de I, más difícil será cambiar el estado de rotación del cuerpo. El momento de inercia se expresa como una sumatoria de las partículas m_i que constituyen el cuerpo, cada una de las cuales está a una distancia perpendicular r_i del eje. La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo depende de la rapidez angular ω y del momento de inercia I para ese eje de rotación. (Véase los ejemplos 9.6 a 9.8).

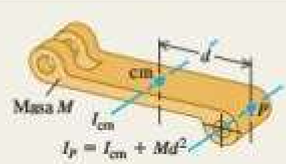
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \quad (9.16)$$

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \quad (9.17)$$



Cálculo del momento de inercia: El teorema de los ejes paralelos relaciona los momentos de inercia de un cuerpo rígido de masa M alrededor de dos ejes paralelos: un eje que pasa por el centro de masa (momento de inercia I_{cm}) y un eje paralelo que está a una distancia d del primero (momento de inercia I_P). (Véase el ejemplo 9.9). Si el cuerpo tiene una distribución continua de masa, el momento de inercia se calcula por integración. (Véase los ejemplos 9.10 y 9.11).

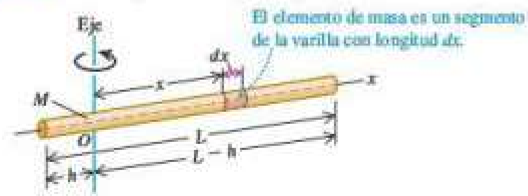
$$I_P = I_{cm} + Md^2 \quad (9.19)$$



PROBLEMA PRÁCTICO Varilla delgada uniforme que gira

La figura 9.24 muestra una varilla uniforme delgada con masa M y longitud L. Podría ser el bastón (sin las tapas de hule) de una bastonera que marcha en una banda. *a*) Use integración para calcular su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por O, a una distancia arbitraria h de un extremo. *b*) Inicialmente la varilla está en reposo. Si adquiere una aceleración angular constante de magnitud α alrededor del eje que pasa por O, calcule el trabajo realizado sobre la varilla al tiempo t. *c*) En ese instante, ¿cuál es la aceleración *lineal* del punto de la varilla más lejano de su eje?

9.24 Varilla delgada con un eje que pasa por O.



GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Elabore una lista de incógnitas de este problema.
2. Para calcular el momento de inercia de la varilla, tiene que dividirla en elementos de masa infinitesimales. Si un elemento tiene una longitud dx, ¿cuál es la masa del elemento? ¿Cuáles son los límites de integración?
3. ¿Cuál es la rapidez angular de la varilla en el instante t? ¿Cómo se compara el trabajo requerido para acelerar la varilla desde el reposo hasta esa rapidez angular con la energía cinética de la varilla en ese instante t?
4. En el instante t, ¿el punto más alejado del eje de la varilla tiene aceleración centrípeta? ¿Y aceleración tangencial? ¿Por qué?

EJECUTAR

5. Efectúe la integración requerida para calcular el momento de inercia.
6. Use el resultado del paso 5 para calcular el trabajo realizado en el tiempo t para acelerar la varilla a partir del reposo.
7. Calcule las componentes de aceleración lineal para el punto en cuestión en el instante t; con base en esa información, calcule la magnitud de la aceleración.

EVALUAR

8. Verifique sus resultados para los casos especiales en que $h = 0$ (el eje pasa por un extremo de la varilla) y $h = L/2$ (el eje pasa por el punto medio de la varilla). ¿Son congruentes estos límites con la tabla 9.2? ¿Y con el teorema de los ejes paralelos?
9. ¿La magnitud de la aceleración obtenida en el paso 7 es constante? ¿Así lo esperaba?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com

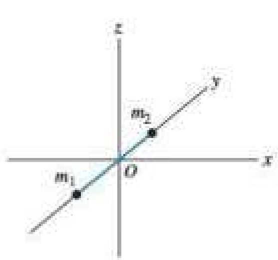
•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P9.1 ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es válida si la aceleración angular de un objeto *no* es constante? En cada caso, explique su razonamiento. *a*) $v = r\omega$; *b*) $a_{tan} = r\alpha$; *c*) $\omega = \omega_0 + \alpha t$; *d*) $a_{tan} = r\omega^2$; *e*) $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

P9.2 Una molécula diatómica puede modelarse como dos masas puntuales, m_1 y m_2, ligeramente separadas (figura P9.2). Si la molécula está orientada a lo largo del eje y, tiene energía cinética K cuando gira alrededor del eje x. ¿Cuál es su energía cinética (en términos de K) si gira con la misma rapidez angular alrededor del *a*) eje z y *b*) eje y?

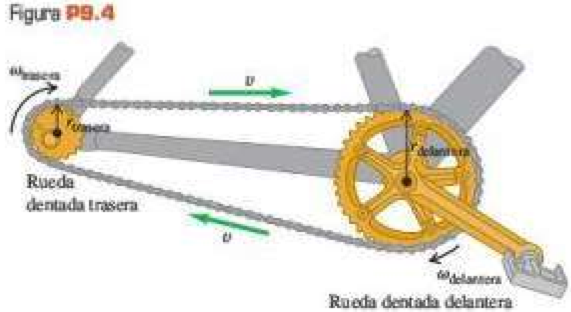
Figura **P9.2**



P9.3 ¿Qué diferencia hay entre aceleración tangencial y aceleración radial para un punto de un cuerpo que gira?

P9.4 En la figura P9.4, todos los puntos de la cadena tienen la misma rapidez lineal. ¿La magnitud de la aceleración lineal también es igual para todos esos puntos? ¿Qué relación hay entre las aceleraciones angulares de las dos ruedas dentadas? Explique su respuesta.

Figura **P9.4**



P9.5 En la figura P9.4, ¿qué relación hay entre las aceleraciones radiales de los puntos en los dientes de las dos ruedas? Justifique su respuesta.

P9.6 Un volante gira con velocidad angular constante. ¿Un punto en su borde tiene aceleración tangencial? ¿Y aceleración radial? ¿Tienen estas aceleraciones magnitud constante? ¿Y dirección constante? Justifique sus respuestas en cada caso.

P9.7 ¿Para qué sirve el ciclo de centrifugado de una lavadora? Explique en términos de las componentes de aceleración.

P9.8 Aunque la velocidad y la aceleración angulares pueden tratarse como vectores, no sucede lo mismo con el desplazamiento angular θ, a pesar de tener magnitud y dirección, porque θ no cumple la ley conmutativa de la suma de vectores (ecuación 1.3). Demuestre esto como sigue: coloque este libro sobre un escritorio con la portada hacia arriba, de modo que pueda leer las palabras. Gire el borde lejano 90° alrededor de un eje horizontal de modo que el extremo más lejano se mueva hacia usted. Llame a este desplazamiento θ_1. Ahora gire el borde izquierdo 90° hacia usted sobre un eje vertical. Llame a este desplazamiento θ_2. El lomo del libro deberá mirar ahora hacia usted con las palabras orientadas de modo que pueda leerlas. Ahora comience otra vez desde el principio, pero realice las rotaciones en orden inverso. ¿El resultado es diferente? Es decir, ¿$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$? Ahora repita el experimento, pero con un ángulo de 1° en lugar de 90°. ¿Cree que el desplazamiento infinitesimal $d\vec{\theta}$ cumple la ley conmutativa de la suma y, por lo tanto, puede considerarse un vector? De ser así, ¿qué relación hay entre la dirección de $d\vec{\theta}$ y la dirección de $\vec{\omega}$?

P9.9 ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes posibles? Si es así, mencione un ejemplo; si no, explique por qué no es posible. ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes que pasan por cierto punto? Si es así, dé un ejemplo e indique dónde se ubica el punto.

P9.10 Para maximizar el momento de inercia de un volante mientras se minimiza su peso, ¿qué forma y distribución de masa debería tener? Explique su respuesta.

P9.11 ¿Cómo se podría determinar experimentalmente el momento de inercia de un cuerpo de forma irregular alrededor de un eje dado?

P9.12 Un cuerpo cilíndrico tiene masa M y radio R. ¿La masa puede estar distribuida dentro del cuerpo de modo tal que su momento de inercia alrededor de su eje de simetría sea mayor que MR^2? Explique su respuesta.

P9.13 Describa cómo podría usar el inciso *b*) de la tabla 9.2 para deducir el resultado del inciso *d*).

P9.14 Un cascarón esférico hueco de radio R que gira alrededor de un eje que pasa por su centro tiene una energía cinética de rotación K. Si usted quiere modificar esta esfera de manera que tenga tres veces más energía cinética con la misma rapidez angular manteniendo constante la masa, ¿cuál debería ser el radio en términos de R?

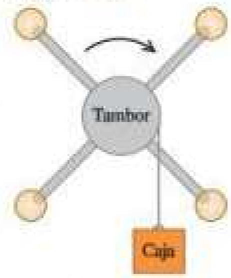
P9.15 Para que sean válidas las ecuaciones de I dadas en los incisos *a*) y *b*) de la tabla 9.2, ¿la varilla debe tener sección transversal circular? ¿Hay alguna restricción sobre el tamaño de esta sección para que las ecuaciones sean válidas? Explique su respuesta.

P9.16 En el inciso *d*) de la tabla 9.2, el espesor de la placa debe ser mucho menor que a para que la expresión de I sea válida. En el inciso *c*), en cambio, la expresión para I es válida sin importar qué espesor tenga la placa. Explique por qué.

P9.17 Dos esferas idénticas A y B están unidas cada una a una cuerda ligera, y cada cuerda se enrolla alrededor de una polea sin fricción de masa M. La única diferencia es que la polea para la esfera A es un disco sólido, mientras que la polea para la esfera B es un disco hueco, como el del inciso *e*) de la tabla 9.2. Si ambas esferas se liberan desde el reposo y descienden la misma distancia, ¿cuál tendrá mayor energía cinética? ¿O acaso tendrán la misma energía cinética? Explique su razonamiento.

P9.18 Una polea complicada consiste en cuatro esferas idénticas colocadas en los extremos de unos rayos que se prolongan desde un tambor giratorio (figura P9.18). Una caja está atada a una cuerda delgada y ligera que se enrolla alrededor del borde del tambor. Cuando se libera del reposo, la caja adquiere una rapidez V después de descender una distancia d. Después, las cuatro esferas se mueven hacia adentro más cerca del tambor, y de nuevo la caja se suelta del reposo. Después de descender una distancia d, ¿su rapidez será igual a V, mayor que V, o menor que V? Demuestre o explique por qué.

Figura **P9.18**



P9.19 Se puede usar cualquier medida angular (radianes, grados o revoluciones) en algunas de las ecuaciones del capítulo 9; sin embargo, en otras solo se pueden usar radianes. Identifique las ecuaciones en las que es necesario usar radianes y aquellas donde no. En cada caso, justifique sus respuestas.

P9.20 Al calcular el momento de inercia de un objeto, ¿podemos tratar toda su masa como si estuviera concentrada en el centro de masa del objeto? Justifique su respuesta.

P9.21 Una rueda gira en torno a un eje perpendicular al plano de la rueda y que pasa por el centro de la misma. La rapidez angular de la rueda está aumentando a tasa constante. El punto A está en el borde de la rueda; y el punto B, a la mitad de la distancia entre el borde y el centro. Para cada una de las siguientes cantidades, indique si la magnitud es mayor en el punto A, en el punto B, o si es igual en ambos puntos: *a*) rapidez angular, *b*) rapidez tangencial, *c*) aceleración angular, *d*) aceleración tangencial, *e*) aceleración radial. Justifique sus respuestas.

P9.22 Estime su propio momento de inercia respecto a un eje vertical que pasa por el centro de la parte superior de su cabeza cuando está de pie con los brazos extendidos. Realice aproximaciones razonables y mida o estime las cantidades necesarias.

EJERCICIOS

Sección 9.1 Velocidad y aceleración angulares

9.1 • *a*) ¿Qué ángulo en radianes es subtendido por un arco de 1.50 m en la circunferencia de un círculo cuyo radio mide 2.50 m? ¿Cuánto es esto en grados? *b*) Un arco de 14.0 cm de longitud en la circunferencia de un círculo subtiende un ángulo de 128°. ¿Qué radio tiene el círculo? *c*) El ángulo entre dos radios de un círculo de 1.50 m de radio mide 0.700 rad. ¿Qué longitud tiene el arco delimitado en la circunferencia por estos dos radios?

9.2 • La hélice de un avión gira a 1900 rpm (rev/min). *a*) Calcule la velocidad angular de la hélice en rad/s. *b*) ¿Cuántos segundos tarda la hélice en girar 35°?

9.3 • **PA CALC** La velocidad angular de un volante obedece la ecuación $\omega_z(t) = A + Bt^2$, donde t está en segundos, y A y B son constantes cuyos valores numéricos son 2.75 y 1.50, respectivamente. *a*) ¿Cuáles son las unidades de A y B si ω_z está en rad/s? *b*) ¿Cuál es la aceleración angular del volante en **i.** $t = 0.00$ y **ii.** $t = 5.00$ s? *c*) ¿Qué ángulo gira el volante durante los primeros 2.00 s? (*Sugerencia:* Véase la sección 2.6).

9.4 •• **CALC** El aspa de un ventilador gira con una velocidad angular dada por $\omega_z(t) = \gamma - \beta t^2$, donde $\gamma = 5.00$ rad/s y $\beta = 0.800$ rad/s^3. *a*) Calcule la aceleración angular en función del tiempo. *b*) Calcule la aceleración angular instantánea α_z en $t = 3.00$ s y la aceleración angular media $\alpha_{\text{med-}z}$ para el intervalo de $t = 0$ a $t = 3.00$ s. ¿Qué diferencia hay entre ambas cantidades? Si son diferentes, ¿por qué lo son?

9.5 •• **CALC** Un niño está empujando un carrusel. El ángulo que describe el carrusel al girar varía con el tiempo según la ecuación $\theta(t) = \gamma t + \beta t^3$, donde $\gamma = 0.400$ rad/s y $\beta = 0.0120$ rad/s^3. *a)* Calcule la velocidad angular del carrusel en función del tiempo. *b)* ¿Qué valor inicial tiene la velocidad angular? *c)* Calcule el valor instantáneo de la velocidad angular ω_z en $t = 5.00$ s y la velocidad angular media $\omega_{\text{med-}z}$ en el intervalo de $t = 0$ a $t = 5.00$ s. Demuestre que $\omega_{\text{med-}z}$ *no* es igual al promedio de las velocidades angulares instantáneas en $t = 0$ y $t = 5.00$ s, y explique por qué.

9.6 • **CALC** En $t = 0$, se invierte la corriente de un motor eléctrico de corriente continua, causando un desplazamiento angular del eje del motor dado por $\theta(t) = (250\ \text{rad/s})t - (20.0\ \text{rad/s}^2)t^2 - (1.50\ \text{rad/s}^3)t^3$. *a)* ¿En qué instante la velocidad angular del eje del motor es cero? *b)* Calcule la aceleración angular en ese instante. *c)* ¿Cuántas revoluciones gira el eje del motor entre el momento en que se invierte la corriente y el instante en el que la velocidad angular es cero? *d)* ¿Con qué rapidez estaba girando el eje en $t = 0$, cuando se invirtió la corriente? *e)* Calcule la velocidad angular media para el periodo entre $t = 0$ y el tiempo calculado en el inciso *a)*.

9.7 • **CALC** El ángulo θ que describe una unidad de disco al girar está dado por $\theta(t) = a + bt - ct^3$, donde a, b y c son constantes, t está en segundos y θ en radianes. Cuando $t = 0$, $\theta = \pi/4$ rad y la velocidad angular es de 2.00 rad/s, y cuando $t = 1.50$ s, la aceleración angular es 1.25 rad/s^2. *a)* Calcule a, b y c con sus unidades. *b)* ¿Cuál es la aceleración angular cuando $\theta = \pi/4$ rad? *c)* ¿Cuáles son θ y la velocidad angular cuando la aceleración angular es 3.50 rad/s^2?

9.8 • Una rueda gira en torno a un eje que está en la dirección z. La velocidad angular ω_z es de -6.00 rad/s en $t = 0$; esta aumenta linealmente con el tiempo y su valor es de $+8.00$ rad/s en $t = 7.00$ s. Se considera positiva la rotación en sentido antihorario. *a)* ¿La aceleración angular durante este intervalo de tiempo es positiva o negativa? *b)* ¿Durante qué intervalo está aumentando la rapidez de la rueda? ¿Y disminuyendo? *c)* Determine el desplazamiento angular de la rueda en $t = 7.00$ s.

Sección 9.2 Rotación con aceleración angular constante

9.9 • La rueda de una bicicleta tiene una velocidad angular inicial de 1.50 rad/s. *a)* Si su aceleración angular es constante e igual a 0.300 rad/s^2, ¿qué velocidad angular tiene en $t = 2.50$ s? *b)* ¿Qué ángulo gira la rueda entre $t = 0$ y $t = 2.50$ s?

9.10 •• Un ventilador eléctrico se apaga, y su velocidad angular disminuye uniformemente de 500 a 200 rev/min en 4.00 s. *a)* Calcule la aceleración angular en rev/s^2 y el número de revoluciones que efectuó el motor en el intervalo de 4.00 s. *b)* ¿Cuántos segundos más tardará el ventilador en detenerse, si la aceleración angular se mantiene constante en el valor calculado en el inciso *a)*?

9.11 •• Las aspas de una licuadora giran con aceleración angular constante de 1.50 rad/s^2. *a)* ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar una velocidad angular de 36.0 rad/s, partiendo del reposo? *b)* ¿Cuántas revoluciones giran las aspas en ese tiempo?

9.12 • *a)* Deduzca la ecuación (9.12) combinando las ecuaciones (9.7) y (9.11) para eliminar t. *b)* La velocidad angular de la hélice de un avión aumenta de 12.0 a 16.0 rad/s mientras gira 7.00 rad. Calcule su aceleración angular en rad/s^2.

9.13 •• Una tornamesa gira con aceleración angular constante de 2.25 rad/s^2. Después de 4.00 s ha girado un ángulo de 60.0 rad. ¿Cuál era su velocidad angular al iniciar el intervalo de 4.00 s?

9.14 • La hoja de una sierra circular de 0.200 m de diámetro parte del reposo y acelera con aceleración angular constante hasta una velocidad angular de 140 rad/s en 6.00 s. Calcule la aceleración angular y el ángulo que ha girado la hoja.

9.15 •• El volante de alta velocidad de un motor giraba a 500 rpm cuando se interrumpió la alimentación eléctrica. El volante tiene una masa de 40.0 kg y un diámetro de 75.0 cm. El motor no recibe electricidad durante 30.0 s y, en ese lapso, el volante disminuye su velocidad por la fricción en los cojinetes de su eje, realizando 200 revoluciones completas. *a)* ¿Con qué rapidez está girando el volante cuando se restablece la alimentación eléctrica? *b)* ¿Cuánto tiempo después de la interrupción eléctrica se habría detenido el volante, si el suministro no se hubiera restablecido, y cuántas revoluciones habría girado el volante en ese tiempo?

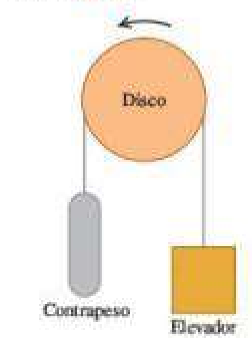
9.16 •• En $t = 0$, la velocidad angular de una rueda de afilar es de 24.0 rad/s, y tiene una aceleración angular constante de 30.0 rad/s^2, hasta que un interruptor de circuito se abre en $t = 2.00$ s. A partir de ese momento, la rueda gira 432 rad con aceleración angular constante hasta detenerse. *a)* ¿Qué ángulo total giró la rueda entre $t = 0$ y el instante en que se detiene? *b)* ¿En qué tiempo se detiene? *c)* ¿Qué aceleración tiene al irse frenando?

9.17 •• Un dispositivo de seguridad detiene la hoja de una podadora eléctrica, que tenía una rapidez angular inicial ω_1, en 1.00 revolución. Con la misma aceleración constante, ¿cuántas revoluciones efectuaría la hoja hasta detenerse, si la rapidez angular inicial ω_3 fuera el triple: $\omega_3 = 3\omega_1$?

Sección 9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

9.18 • En un encantador hotel del siglo XIX, un elevador antiguo está conectado a un contrapeso mediante un cable que pasa por un disco giratorio de 2.50 m de diámetro (figura E9.18). El elevador sube y baja al girar el disco; el cable no resbala en el borde del disco, más bien gira con él. *a)* ¿Cuántas rpm debe girar el disco para que el elevador suba a 25.0 cm/s? *b)* Para que el elevador empiece a moverse, debe acelerarse a $\frac{1}{8}g$. ¿Cuál debe ser la aceleración angular del disco en rad/s^2? *c)* ¿Qué ángulo (en radianes y grados) gira el disco cuando este sube el elevador 3.25 m entre los pisos?

Figura E9.18



9.19 • Con los datos astronómicos del apéndice F, junto con el hecho de que la Tierra gira sobre su propio eje una vez al día, calcule *a)* la rapidez angular orbital de la Tierra (en rad/s) debida a su movimiento alrededor del Sol, *b)* su rapidez angular (en rad/s) debida a su giro axial, *c)* la rapidez tangencial de la Tierra alrededor del Sol (suponiendo una órbita circular), *d)* la rapidez tangencial de un punto en el ecuador terrestre debida al giro axial del planeta y *e)* las componentes de la aceleración radial y tangencial del punto descrito en el inciso *d)*.

9.20 • **Disco compacto.** Un disco compacto (CD) almacena música en un patrón codificado de agujeros diminutos de 10^{-7} m de profundidad, dispuestos en una pista espiral que va desde el centro hasta el borde del disco; los radios interior y exterior de la espiral son de 25.0 mm y 58.0 mm, respectivamente. Dentro del reproductor de CD, mientras el disco gira, la pista es escaneada con rapidez *lineal* constante de 1.25 m/s. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el CD cuando se escanea la parte más interna de la pista? ¿Y cuando se escanea la parte exterior? *b*) La duración máxima de la reproducción de un CD es de 74.0 min. ¿Qué longitud tendría la pista del CD si se pudiera estirar en línea recta? *c*) ¿Qué aceleración angular media tiene un CD durante los 74.0 min que dura la reproducción? Tome la dirección de rotación del disco como positiva.

9.21 •• Una rueda con diámetro de 40.0 cm parte del reposo y gira con una aceleración angular constante de 3.00 rad/s^2. En el instante en que la rueda ha completado su segunda revolución, calcule la aceleración radial de un punto en el borde de dos maneras: *a*) usando la relación $a_{rad} = \omega^2 r$ y *b*) a partir de la relación $a_{rad} = v^2/r$.

9.22 •• Imagine que usted debe diseñar un eje cilíndrico giratorio para levantar cubetas de cemento de 800 N de peso, desde el suelo hasta una azotea a 78.0 m sobre este. Las cubetas se colgarán de un gancho en el extremo libre de un cable que se enrolla en el eje; al girar este, las cubetas ascienden. *a*) ¿Qué diámetro debe tener el eje para levantar las cubetas con una rapidez constante de 2.00 cm/s mientras gira a 7.5 rpm? *b*) Si el eje debe impartir a las cubetas una aceleración hacia arriba de 0.400 m/s^2, ¿qué aceleración angular deberá tener el eje?

9.23 • Un volante con radio de 0.300 m parte del reposo y acelera con aceleración angular constante de 0.600 rad/s^2. Calcule la magnitud de las aceleraciones tangencial y radial, así como de la aceleración resultante de un punto en su borde *a*) al principio; *b*) después de girar 60.0°; *c*) después de girar 120.0°.

9.24 •• Un plato giratorio eléctrico de 0.750 m de diámetro gira sobre un eje fijo con velocidad angular inicial de 0.250 rev/s y aceleración angular constante de 0.900 rev/s^2. *a*) Calcule la velocidad angular del plato después de 0.200 s. *b*) ¿Cuántas revoluciones giró el plato en este tiempo? *c*) ¿Qué rapidez tangencial tiene un punto en el borde del plato en $t = 0.200$ s? *d*) ¿Qué magnitud tiene la aceleración *resultante* de un punto en el borde en $t = 0.200$ s?

9.25 •• **Centrifugador.** En un anuncio se asegura que un centrifugador solo ocupa 0.127 m de espacio en una mesa de trabajo, pero que puede producir una aceleración radial de 3000*g* a 5000 rev/min. Calcule el radio que debe tener el centrifugador. ¿Es verosímil el anuncio?

9.26 • *a*) Deduzca una ecuación para la aceleración radial que incluya v y ω, pero no r. *b*) Imagine que está diseñando un carrusel, donde un punto en el borde tendrá una aceleración radial de 0.500 m/s^2 cuando la velocidad tangencial en ese punto tenga una magnitud de 2.00 m/s. ¿Qué velocidad angular se necesita para obtener estos valores?

9.27 • **Taladro eléctrico.** Según el manual del usuario, para hacer un agujero de 12.7 mm de diámetro en madera, plástico o aluminio, se recomienda que la rapidez del taladro sea de 1250 rev/min. Para una broca de 12.7 mm de diámetro, que gira con rapidez constante de 1250 rev/min, calcule *a*) la rapidez lineal máxima de cualquier punto de la broca; *b*) la aceleración radial máxima de cualquier punto de la broca.

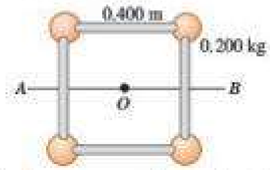
9.28 • En $t = 3.00$ s, un punto en el borde de una rueda con radio de 0.200 m tiene una rapidez tangencial de 50.0 m/s, mientras la rueda se frena con aceleración tangencial de magnitud constante igual a 10.0 m/s^2. *a*) Calcule la aceleración angular constante de la rueda. *b*) Calcule las velocidades angulares en $t = 3.00$ s y $t = 0$. *c*) ¿Qué ángulo giró la rueda entre $t = 0$ y $t = 3.00$ s? *d*) ¿En qué instante la aceleración radial es igual a *g*?

9.29 • Los ciclos de centrifugado de una lavadora tienen dos rapideces angulares, 423 y 640 rev/min. El diámetro interno del tambor es de 0.470 m. *a*) ¿Cuál es el cociente de la fuerza radial máxima de lavado entre la rapidez angular máxima y entre la rapidez mínima? *b*) ¿Cuál es el cociente de la rapidez tangencial máxima de lavado entre la rapidez angular máxima y entre la rapidez mínima? *c*) Calcule la rapidez tangencial máxima de lavado y la aceleración radial máxima en términos de *g*.

Sección 9.4 Energía en el movimiento de rotación

9.30 • Cuatro esferas pequeñas, que pueden considerarse como puntos con masa de 0.200 kg cada una, están colocadas en un cuadrado de 0.400 m de lado, conectadas por varillas muy ligeras (figura E9.30). Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje *a*) que pasa por el centro del cuadrado, perpendicular a su plano (que pasa por *O* en la figura); *b*) que biseca dos lados opuestos del cuadrado (a lo largo de la línea *AB* en la figura); *c*) que pasa por los centros de las esferas superior izquierda e inferior derecha y por el punto *O*.

Figura **E9.30**



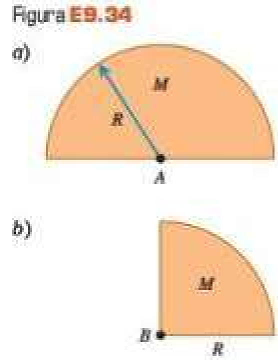
9.31 • Calcule el momento de inercia de cada uno de los siguientes objetos uniformes en torno a los ejes indicados. Consulte la tabla 9.2 si lo requiere. *a*) Una varilla delgada de 2.50 kg con longitud de 75.0 cm, alrededor de un eje perpendicular a ella y que pasa **i.** por un extremo, **ii.** por su centro y **iii.** alrededor de un eje paralelo a la varilla y que pasa a través de ella. *b*) Una esfera de 3.00 kg con diámetro de 38.0 cm, alrededor de un eje que pasa por su centro, si la esfera **i.** es sólida y **ii.** es un cascarón hueco de pared delgada. *c*) Un cilindro de 8.00 kg con longitud de 19.5 cm y diámetro de 12.0 cm, alrededor del eje central del cilindro, si el cilindro es **i.** hueco de pared delgada y **ii.** sólido.

9.32 •• Bloques pequeños de masa *m* están sujetos en los extremos y en el centro de una varilla de longitud *L* y masa despreciable. Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por *a*) el centro de la varilla y *b*) un punto a un cuarto de su longitud a partir de un extremo.

9.33 • Dos esferas pequeñas están pegadas a los extremos de una barra uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 4.00 kg. Las esferas tienen masa de 0.500 kg cada una y se pueden tratar como masas puntuales. Calcule el momento de inercia de esta combinación en torno a cada uno de los ejes siguientes: *a*) un eje perpendicular a la barra que pasa por su centro; *b*) un eje perpendicular a la barra que pasa por una de las esferas; *c*) un eje paralelo a la barra que pasa por ambas esferas; *d*) un eje paralelo a la barra que está a 0.500 m de ella.

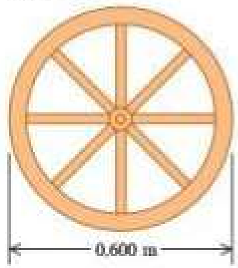
9.34 • Un disco uniforme con radio *R* se corta por la mitad de manera que la mitad que queda tiene masa *M* (figura E9.34*a*). *a*) ¿Cuál es el momento de inercia de esta mitad con respecto a un eje perpendicular a su plano que pasa por el punto *A*? *b*) ¿Por qué su respuesta al inciso *a*) resultó igual que si se tratara de un disco completo de masa *M*? *c*) ¿Cuál sería el momento de inercia de un cuarto del disco de masa *M* y radio *R* con respecto a un eje perpendicular a su plano que pasa por el punto *B* (figura E9.34*b*)?

Figura **E9.34**



9.35 •• La rueda de una carreta está construida como se muestra en la figura E9.35. El radio de la rueda es de 0.300 m y la masa de su borde es de 1.40 kg. Cada uno de sus ocho rayos que se encuentran sobre un diámetro tiene 0.300 m de longitud, y una masa de 0.280 kg. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda con respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano? (Use las fórmulas de la tabla 9.2).

Figura **E9.35**



9.36 •• La hélice de un avión tiene 2.08 m de longitud (de punta a punta) y masa de 117 kg, y gira a 2400 rpm (rev/min) alrededor de un eje que pasa por su centro. Trate a la hélice como una varilla delgada. *a)* ¿Qué energía cinética de rotación tiene? *b)* Suponga que, debido a restricciones de peso, usted tuviera que reducir la masa de la hélice al 75.0% de su masa original, pero siguiera requiriendo el mismo tamaño y la misma energía cinética. ¿Cuál tendría que ser su rapidez angular en rpm?

9.37 •• Un disco compuesto con diámetro exterior de 140.0 cm está constituido por un disco sólido uniforme de 50.0 cm de radio y densidad de área de 3.00 g/cm^2, rodeado por un anillo concéntrico, cuyo radio interior es de 50.0 cm y radio exterior de 70.0 cm con densidad de área de 2.00 g/cm^2. Calcule el momento de inercia de este objeto alrededor de un eje perpendicular al plano del objeto y que pasa por su centro.

9.38 • Una rueda gira con aceleración angular constante alrededor de un eje que pasa por su centro. Partiendo del reposo, en $t = 0$, la rueda gira 8.20 revoluciones en 12.0 s y en este instante tiene una energía cinética de 36.0 J. ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro?

9.39 • Una esfera uniforme con masa de 28.0 kg y radio de 0.380 m gira con velocidad angular constante alrededor de un eje fijo que se encuentra a lo largo de un diámetro de la esfera. Si la energía cinética de la esfera es de 176 J, ¿cuál es la velocidad tangencial de un punto en el borde de la esfera?

9.40 •• Un cascarón esférico hueco tiene una masa de 8.20 kg y radio de 0.220 m. Se encuentra inicialmente en reposo y luego gira con una aceleración constante de 0.890 rad/s^2 alrededor de un eje fijo que se encuentra a lo largo de un diámetro. ¿Cuál es la energía cinética del cascarón después de girar 6.00 rev?

9.41 • **¿Energía desde la Luna?** Suponga que en algún momento del futuro decidimos aprovechar la energía rotacional de la Luna para usarla en la Tierra. Además de los datos astronómicos del apéndice F, tal vez usted necesite saber que la Luna gira sobre su eje una vez cada 27.3 días. Suponga que la Luna es completamente homogénea. *a)* ¿Cuánta energía total podríamos obtener de la rotación lunar? *b)* En la actualidad el mundo consume aproximadamente 4.0×10^{20} J de energía por año. Si en el futuro la Tierra usara cinco veces más energía cada año, ¿cuántos años de rotación lunar nos abastecerían de energía? De acuerdo con su respuesta, ¿sería recomendable invertir en esta fuente de energía considerando la relación costo-beneficio?

9.42 •• Usted necesita diseñar un plato giratorio industrial de 60.0 cm de diámetro con energía cinética de 0.250 J cuando gira a 45.0 rpm (rev/min). *a)* ¿Cuál debe ser el momento de inercia del plato alrededor de su eje de rotación? *b)* Si su taller elabora dicho plato con la forma de un disco sólido uniforme, ¿cuál debe ser su masa?

9.43 •• El volante de un motor de gasolina debe ceder 500 J de energía cinética mientras su velocidad angular se reduce de 650 a 520 rev/min. ¿Qué momento de inercia se requiere?

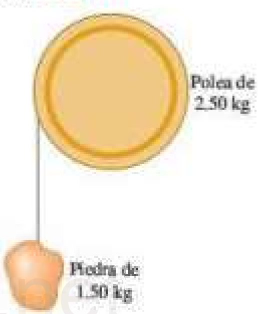
9.44 • Una cuerda ligera y flexible se enrolla varias veces alrededor de un cilindro *hueco* con peso de 40.0 N y radio de 0.25 m, que gira sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo. El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable, e inicialmente está en reposo. Se tira del extremo libre de la cuerda con una fuerza constante P una distancia de 5.00 m, punto en el cual la cuerda se está moviendo a 6.00 m/s. Si la cuerda no resbala sobre el cilindro, ¿cuánto vale P?

9.45 •• Se almacenará energía en un volante con forma de disco sólido uniforme con radio $R = 1.20$ m y masa de 70.0 kg. Para evitar que falle estructuralmente el volante, la aceleración radial máxima permitida de un punto en su borde es de 3500 m/s^2. ¿Qué energía cinética máxima puede almacenar el volante?

9.46 •• Suponga que el cilindro sólido del aparato del ejemplo 9.8 (sección 9.4) se sustituye por un cilindro hueco de paredes delgadas, con la misma masa M y radio R. El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable. *a)* Calcule la rapidez de la masa m que cuelga justo antes de golpear el piso. *b)* Utilice los conceptos de energía para explicar por qué la respuesta al inciso *a)* es diferente de la rapidez calculada en el ejemplo 9.8.

9.47 •• Una polea sin fricción tiene la forma de un disco sólido uniforme de masa igual a 2.50 kg y radio de 20.0 cm. Una piedra de 1.50 kg se sujeta a un alambre muy ligero que se enrolla alrededor del borde de la polea (figura E9.47), y el sistema se libera del reposo. *a)* ¿Qué distancia debe descender la piedra para que la polea tenga 4.50 J de energía cinética? *b)* ¿Qué porcentaje de la energía cinética total tiene la polea?

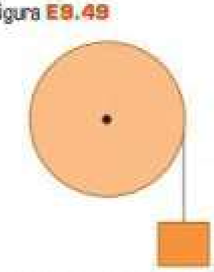
Figura **E9.47**



9.48 •• Una cubeta de masa m se ata a un cable de masa despreciable que se enrolla alrededor del borde exterior de una polea uniforme sin fricción de radio R, similar al sistema que se presenta en la figura E9.47. En términos de las variables indicadas, ¿cuál debe ser el momento de inercia de la polea, de forma que siempre tenga la mitad de la energía cinética de la cubeta?

9.49 •• **PA** Un alambre ligero y delgado se enrolla alrededor del borde de una rueda, como se muestra en la figura E9.49. La rueda gira sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. La rueda es un disco uniforme de radio $R = 0.280$ m. Del extremo libre del alambre se encuentra suspendido un objeto de $m = 4.20$ kg. El sistema se libera del reposo y el objeto desciende con aceleración constante una distancia de 3.00 m en 2.00 s. ¿Cuál es la masa de la rueda?

Figura **E9.49**



9.50 •• Una escalera uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 9.00 kg está apoyada contra un muro vertical formando un ángulo de 53.0° con el piso. Un trabajador empuja la escalera contra la pared hasta que queda vertical. ¿Cuál es el aumento de la energía potencial gravitacional de la escalera?

9.51 •• **Cómo cambia *I*.** Si multiplicamos todas las dimensiones de diseño de un objeto por un factor de escala f, su volumen y masa se multiplicarán por f^3. *a)* ¿Por qué factor se multiplicará su momento de inercia? *b)* Si un modelo a escala de $\frac{1}{48}$ tiene una energía cinética de rotación de 2.5 J, ¿cuánto valdrá la del objeto a escala normal fabricado con el mismo material y que gira con la misma velocidad angular?

9.52 •• Una cuerda uniforme de 3.00 kg y 24.0 m de longitud está en el suelo en la cima de un risco vertical. Un alpinista deja caer desde la cima la mitad de la cuerda, para ayudar a su compañero a escalar el risco. ¿Cuál es el cambio en la energía potencial de la cuerda durante esta maniobra?

Sección 9.5 Teorema de los ejes paralelos

9.53 •• ¿Alrededor de qué eje el momento de inercia de una esfera uniforme de madera tendrá el mismo valor que el momento de inercia de una esfera hueca de plomo de pared delgada alrededor de un eje a lo largo de un diámetro, con los mismos valores de masa y radio?

9.54 •• Calcule el momento de inercia de un aro (anillo hueco de paredes delgadas) con masa M y radio R, alrededor de un eje perpendicular al plano del aro y que pasa por el borde.

9.55 •• Una placa metálica rectangular delgada tiene lados que miden a y b y una masa M. Use el teorema de los ejes paralelos para calcular el momento de inercia de la lámina alrededor de un eje perpendicular al plano de la placa y que pasa por una esquina de esta.

9.56 • *a*) Para la placa rectangular delgada que se muestra en el inciso *d*) de la tabla 9.2, calcule el momento de inercia en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de esta y es paralelo al eje que se muestra en la figura. *b*) Calcule el momento de inercia de la placa en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de esta y es perpendicular al eje del inciso *a*).

9.57 •• Una varilla delgada uniforme de masa M y longitud L se dobla por su centro de manera que los dos segmentos son ahora perpendiculares entre sí. Determine el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por *a*) el punto donde se cruzan los dos segmentos y *b*) el punto medio de la recta que conecta los dos extremos.

Sección 9.6 Cálculos de momento de inercia

9.58 • CALC Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de una varilla delgada uniforme con masa M y longitud L alrededor de un eje en un extremo, perpendicular a la varilla.

9.59 •• CALC Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de un disco sólido uniforme de masa M y radio R con respecto a un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro.

9.60 •• CALC La masa por unidad de longitud de una varilla delgada de longitud L varía con la distancia al extremo izquierdo, donde $x = 0$, según $dm/dx = \gamma x$, donde γ tiene unidades de kg/m^2. *a*) Calcule la masa total de la varilla en términos de γ y L. *b*) Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de la varilla con respecto a un eje en el extremo izquierdo, perpendicular a la varilla. Use la expresión que dedujo en el inciso *a*) para expresar I en términos de M y L. Compare su resultado con el de una varilla uniforme y explique las diferencias. *c*) Repita el inciso *b*) para un eje en el extremo derecho de la varilla y compare los resultados de los incisos *b*) y *c*). Explique las diferencias.

PROBLEMAS

9.61 • PA CALC Un volante tiene una aceleración angular $\alpha_z(t) = 8.60\ \text{rad/s}^2 - (2.30\ \text{rad/s}^3)t$, donde la rotación antihoraria es positiva. *a*) Si el volante está en reposo en $t = 0$, ¿cuál es la velocidad angular en 5.00 s? *b*) ¿Qué ángulo (en radianes) gira el volante en el intervalo de $t = 0$ a $t = 5.00$ s?

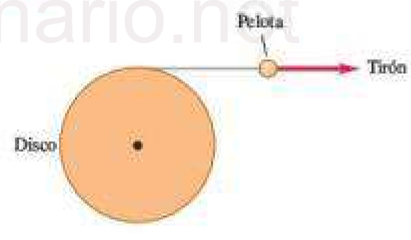
9.62 •• CALC Un disco uniforme con radio $R = 0.400$ m y masa de 30.0 kg gira en un plano horizontal alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por el centro del disco. El ángulo que gira el disco varía con el tiempo de acuerdo con $\theta(t) = (1.10\ \text{rad/s})t + (8.60\ \text{rad/s}^2)t^2$. ¿Cuál es la aceleración lineal resultante en un punto sobre el borde del disco en el instante en que este ha girado 0.100 rev?

9.63 •• PA La cuchilla de una sierra circular con radio de 0.120 m parte del reposo y gira en un plano vertical con una aceleración angular constante de 3.00 rev/s^2. Después de que la cuchilla ha girado 155 rev, una pequeña pieza se rompe de la parte superior de la misma. Después de que la pieza se rompe, viaja inicialmente con una velocidad horizontal e igual a la velocidad tangencial del borde de la cuchilla. La pieza recorre una distancia vertical de 0.820 m para llegar al piso. ¿Qué distancia recorre horizontalmente la pieza desde donde se desprendió hasta que llega al suelo?

9.64 • CALC El rodillo de una imprenta gira un ángulo $\theta(t)$ dado por $\theta(t) = \gamma t^2 - \beta t^3$, donde $\gamma = 3.20\ \text{rad/s}^2$ y $\beta = 0.500\ \text{rad/s}^3$. *a*) Calcule la velocidad angular del rodillo en función del tiempo. *b*) Calcule la aceleración angular del rodillo en función del tiempo. *c*) ¿Cuál es la máxima velocidad angular positiva que alcanza, y en qué instante t ocurre?

9.65 •• PA CALC Un disco con radio de 25.0 cm tiene libertad para girar en torno a un eje perpendicular a él que pasa por su centro. Tiene una cuerda muy delgada, pero fuerte, enrollada alrededor de su borde, y la cuerda está unida a una pelota de la que se tira tangencialmente para alejarla del borde del disco (figura P9.65). El tirón aumenta en magnitud y produce una aceleración de la pelota que obedece la ecuación $a(t) = At$, donde t está en segundos y A es una constante. El disco parte del reposo y, al final del tercer segundo, la aceleración de la pelota es de 1.80 m/s^2. *a*) Calcule A. *b*) Exprese la aceleración angular del disco en función del tiempo. *c*) ¿Cuánto tiempo después de que el disco comenzó a girar alcanzará una rapidez angular de 15.0 rad/s? *d*) ¿Qué ángulo ha girado el disco justo cuando alcanza 15.0 rad/s? (*Sugerencia:* Véase la sección 2.6).

Figura P9.65

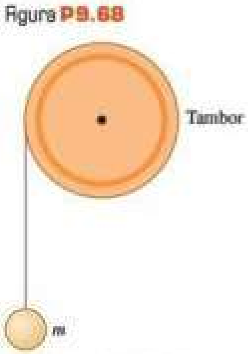


9.66 •• Cuando un automóvil de juguete es empujado rápidamente por el piso, almacena energía en un volante. El automóvil tiene una masa de 0.180 kg y el volante tiene un momento de inercia de $4.00 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. El automóvil tiene 15.0 cm de longitud. La publicidad asegura que el automóvil puede viajar con una rapidez a escala de hasta 700 km/h (440 mi/h). La rapidez a escala es la rapidez del automóvil de juguete multiplicada por el cociente de la la longitud de un automóvil real entre la longitud del juguete. Suponga que un automóvil real mide 3.0 m. *a*) Con una rapidez a escala de 700 km/h, ¿qué rapidez de traslación real tiene el automóvil? *b*) Si toda la energía cinética que está inicialmente en el volante se convierte en energía cinética de traslación del juguete, ¿cuánta energía se almacenó originalmente en el volante? *c*) ¿Qué velocidad angular inicial del volante se necesitó para almacenar la energía calculada en el inciso *b*)?

9.67 • Un automóvil Chevrolet Corvette clásico modelo 1957, con masa de 1240 kg, parte del reposo y tiene una aceleración tangencial constante de 2.00 m/s^2 en una pista circular de prueba con radio de 60.0 m. Trate el automóvil como partícula. *a*) ¿Qué aceleración angular tiene? *b*) ¿Qué rapidez angular tiene 6.00 s después de arrancar? *c*) ¿Qué aceleración radial tiene en ese instante? *d*) Dibuje una vista superior mostrando la pista circular, el automóvil, el vector velocidad y las componentes del vector aceleración a los 6.00 s después de que el auto arranca. *e*) ¿Qué magnitudes tienen la aceleración total y la fuerza neta del automóvil en ese instante? *f*) ¿Qué ángulo forman estos vectores con la velocidad del automóvil a los 6.00 s?

9.68 •• Unos ingenieros están diseñando un sistema en el que una masa m, al caer, imparte energía cinética a un tambor uniforme giratorio, al cual está unida con un alambre delgado y muy ligero que está enrollado alrededor del borde del tambor (figura P9.68). No hay fricción considerable en el eje del tambor y todo el sistema parte del reposo. Este sistema se probó en la Tierra, pero debe utilizarse en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de 3.71 m/s^2. En las pruebas en la Tierra, cuando m es de 15.0 kg y se le permite descender una distancia de 5.00 m, imparte 250.0 J de energía cinética al tambor. *a*) Si el sistema se opera en Marte, ¿qué distancia tendría que descender la masa de 15.0 kg para impartir la misma cantidad de energía cinética al tambor? *b*) ¿Con qué rapidez se moverá la masa de 15.0 kg en Marte justo cuando el tambor gane 250.0 J de energía cinética?

Figura **P9.68**



9.69 • La banda de una aspiradora pasa sobre una flecha de 0.45 cm de radio y una rueda de 1.80 cm de radio. La disposición de estas piezas es similar a la de la cadena y las ruedas dentadas de la figura P9.4. El motor hace girar la flecha a 60.0 rev/s, y la banda hace girar la rueda, que se conecta mediante otra flecha al rodillo que saca el polvo de la alfombra que se está limpiando. Suponga que la banda no resbala en el eje ni en la rueda. *a*) ¿Qué rapidez tiene un punto en la banda? *b*) ¿Qué velocidad angular tiene la rueda en rad/s?

9.70 •• El motor de una sierra de banco gira a 3450 rev/min. Una polea conectada al eje del motor impulsa una segunda polea con la mitad del diámetro mediante una correa en "V". La sierra circular de 0.208 m de diámetro está montada en el mismo eje giratorio de la segunda polea. *a*) El operador se descuida y la sierra atrapa y lanza hacia atrás un trocito de madera, el cual se mueve con rapidez lineal igual a la rapidez tangencial del borde de la cuchilla. Calcule dicha rapidez. *b*) Calcule la aceleración radial de los puntos en el borde exterior de la cuchilla para saber por qué el aserrín no se adhiere a los dientes.

9.71 ••• Al conducir una bicicleta de varias velocidades, el ciclista puede seleccionar el radio de la rueda dentada trasera, que está fija al eje posterior. La rueda dentada delantera tiene 12.0 cm de radio. Si la rapidez angular de la rueda dentada delantera es de 0.600 rev/s, ¿cuál es el radio de la rueda dentada trasera para el cual la rapidez tangencial de un punto en el borde de la rueda trasera es de 5.00 m/s? La rueda trasera tiene 0.330 m de radio.

9.72 ••• Una unidad de disco de computadora se enciende partiendo del reposo y tiene aceleración angular constante. Si la unidad tardó 0.750 s en realizar su *segunda* revolución completa, *a*) ¿cuánto tiempo le tomó efectuar su primera revolución completa?, y *b*) ¿cuál es su aceleración angular en rad/s^2?

9.73 • Una rueda cambia su velocidad angular con una aceleración angular constante, al girar sobre un eje fijo que pasa por su centro. *a*) Demuestre que el cambio en la magnitud de la aceleración radial de un punto de la rueda, durante cualquier lapso, es el doble del producto de la aceleración angular, el desplazamiento angular y la distancia perpendicular del punto al eje. *b*) La aceleración radial de un punto de la rueda a 0.250 m del eje cambia de 25.0 a 85.0 m/s^2 mientras la rueda gira 20.0 rad. Calcule la aceleración tangencial de este punto. *c*) Demuestre que el cambio de energía cinética de la rueda durante cualquier lapso es el producto del momento de inercia alrededor del eje, la aceleración angular y el desplazamiento angular. *d*) Durante el desplazamiento angular de 20.0 rad del inciso *b*), la energía cinética de la rueda aumenta de 20.0 a 45.0 J. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda en torno al eje de rotación?

9.74 •• Una esfera está formada por un centro esférico sólido de madera con densidad de 800 kg/m^3 y radio de 0.30 m, cubierto por una capa delgada de plomo con densidad de área de 20 kg/m^2. Calcule el momento de inercia de esta esfera en torno a un eje que pasa por su centro.

9.75 ••• Se ha sugerido que las plantas eléctricas deberían aprovechar las horas de bajo consumo (por ejemplo, después de medianoche) para generar energía mecánica y almacenarla hasta que se necesite durante los periodos de carga máxima, como a mediodía. Una propuesta consiste en almacenar la energía en enormes volantes que giren sobre cojinetes casi sin fricción. Considere un volante de hierro (con densidad de 7800 kg/m^3) en forma de disco uniforme de 10.0 cm de espesor. *a*) ¿Qué diámetro debería tener este disco para almacenar 10.0 megajoules de energía cinética al girar a 90.0 rpm en torno a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro? *b*) ¿Qué aceleración centrípeta tendría un punto en su borde al girar con esta rapidez?

9.76 •• Al rediseñar el motor para un cohete, usted desea reducir su peso reemplazando una pieza esférica sólida con un cascarón esférico hueco del mismo tamaño. Las piezas giran alrededor de un eje que pasa por su centro. Usted necesita asegurarse de que la pieza nueva siempre tenga la misma energía cinética de rotación que tenía la pieza original a cualquier tasa de rotación dada. Si la pieza original tenía una masa M, ¿cuál debe ser la masa de la pieza nueva?

9.77 • La Tierra, que no es una esfera uniforme, tiene un momento de inercia de $0.3308MR^2$ alrededor de un eje que pasa por sus polos. La Tierra tarda 86,164 s en dar una revolución. Use el apéndice F para calcular *a*) la energía cinética de la Tierra debida a esta rotación y *b*) la energía cinética de la Tierra debida a su movimiento orbital en torno al Sol. *c*) Explique cómo sabemos, por el valor del momento de inercia de la Tierra, que su masa está concentrada en su centro.

9.78 ••• Un disco sólido uniforme de masa m y radio R pivota sobre un eje horizontal que pasa por su centro, y un objeto pequeño con la misma masa m se sujeta al borde del disco. Si el disco se suelta del reposo con el objeto en el extremo de un radio horizontal, calcule la rapidez angular cuando el objeto esté directamente abajo del eje.

9.79 •• **CALC** Un anuncio metálico de una concesionaria automotriz es un triángulo rectángulo delgado y uniforme con base de longitud b y altura h. La masa del anuncio es M. *a*) Calcule su momento de inercia para la rotación en torno al cateto de longitud h. *b*) Si $M = 5.40$ kg, $b = 1.60$ m y $h = 1.20$ m, ¿qué energía cinética tiene el letrero cuando está girando a 2.00 rev/s en torno a un eje que coincide con el cateto de 1.20 m?

9.80 •• **Medición de I.** Imagine que trabaja como pasante en una empresa de ingenieros y le piden que mida el momento de inercia de una rueda grande, que gira en torno a un eje que pasa por su centro. Como usted fue buen estudiante de física, sabe lo que debe hacer. Mide la rueda y determina que su diámetro es de 0.740 m y que tiene un peso de 280 N. Luego monta la rueda, empleando cojinetes sin fricción, en un eje horizontal que pasa por el centro de la rueda. Enrolla una cuerda ligera en el borde de la rueda y cuelga una masa de 8.00 kg del extremo libre, como se muestra en la figura 9.17. Ahora suelta la masa desde el reposo; la masa desciende y la rueda gira mientras la cuerda se desenrolla. Usted determina que la masa tiene una rapidez de 5.00 m/s después de haber descendido 2.00 m. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la rueda para un eje perpendicular que pasa por su centro? *b*) Su jefe le dice que se requiere un I más grande y le pide diseñar una rueda con la misma masa y radio que tenga $I = 19.0$ kg·m^2. ¿Qué le contesta usted?

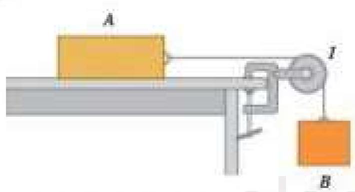
9.81 •• **PA** Un metro de madera de 0.180 kg pivota sobre un extremo, de manera que puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal.

El metro se sostiene en posición horizontal y se suelta. Conforme gira, al pasar por la vertical, calcule *a*) el cambio de energía potencial gravitacional que haya ocurrido; *b*) la rapidez angular del metro; *c*) la rapidez lineal del extremo opuesto al eje. *d*) Compare la respuesta del inciso *c*) con la rapidez de una partícula que ha caído 1.00 m desde el reposo.

9.82 •• Exactamente una vuelta de una cuerda flexible de masa m está enrollada en un cilindro uniforme de masa M y radio R, que gira sin fricción alrededor de un eje horizontal a lo largo del eje del cilindro. Un extremo de la cuerda está sujeto al cilindro, el cual inicia con rapidez angular ω_0. Después de una revolución del cilindro, la cuerda se ha desenrollado y, en ese instante, cuelga verticalmente, tangente al cilindro. Calcule la rapidez angular del cilindro y la rapidez lineal del extremo inferior de la cuerda en ese instante. Puede ignorar el espesor de la cuerda. [*Sugerencia:* Use la ecuación (9.18)].

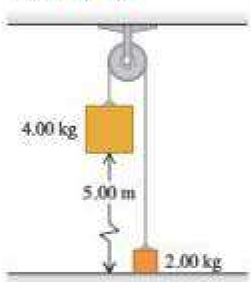
9.83 • La polea de la figura P9.83 tiene radio R y momento de inercia I. La cuerda no resbala sobre la polea y esta gira sobre un eje sin fricción. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y la mesa es μ_k. El sistema se suelta del reposo y el bloque B desciende. El bloque A tiene masa m_A; y la de B es m_B. Use métodos de energía para calcular la rapidez de B en función de la distancia d que ha descendido.

Figura **P9.83**



9.84 •• La polea de la figura P9.84 tiene 0.160 m de radio y su momento de inercia es de 0.560 kg·m^2. La cuerda no resbala en la polea. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 4.00 kg justo antes de golpear el piso.

Figura **P9.84**

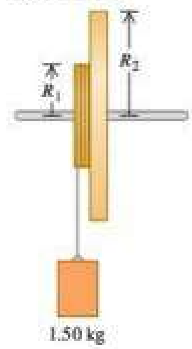


9.85 •• Se cuelga un aro delgado de radio R de un clavo. El aro se desplaza lateralmente (dentro de su plano) un ángulo β con respecto a su posición de equilibrio y se suelta. ¿Qué rapidez angular tiene al volver a su posición de equilibrio? [*Sugerencia:* Use la ecuación (9.18)].

9.86 •• Un autobús de pasajeros en Zurich, Suiza, obtenía su fuerza motriz a partir de la energía almacenada en un volante grande. La rapidez del volante se aumentaba periódicamente (cuando el autobús hacía una parada) con un motor eléctrico que entonces podía conectarse a las líneas eléctricas. El volante era un cilindro sólido con masa de 1000 kg y 1.80 m de diámetro; su rapidez angular máxima era de 3000 rev/min. *a*) Con esta rapidez angular, ¿qué energía cinética tiene el volante? *b*) Si la potencia media que requería el autobús era de 1.86×10^4 W, ¿cuánto tiempo podía operar entre paradas?

9.87 •• Dos discos metálicos, con radios $R_1 = 2.50$ cm y $R_2 = 5.00$ cm, y masas $M_1 = 0.80$ kg y $M_2 = 1.60$ kg, se sueldan y se montan en un eje sin fricción que pasa por el centro común (figura P9.87). *a*) ¿Qué momento de inercia total tienen los discos? *b*) Una cuerda ligera se enrolla en el extremo del disco más chico y del extremo libre de la cuerda se cuelga un bloque de 1.50 kg. Si el bloque se suelta del reposo a una altura de 2.00 m sobre el piso, ¿qué rapidez tiene justo antes de golpear el piso? *c*) Repita el inciso *b*), pero ahora con la cuerda enrollada en el borde del disco grande. ¿En qué caso el bloque alcanza mayor rapidez? Explique su respuesta.

Figura **P9.87**



9.88 •• Un alambre ligero y delgado se enrolla alrededor del borde de una rueda, como se muestra en la figura E9.49. La rueda gira alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. La rueda tiene un radio de 0.180 m y un momento de inercia alrededor de su eje de $I = 0.480$ kg·m^2. Del extremo libre del alambre se encuentra suspendido un pequeño bloque de masa igual a 0.340 kg. Cuando el sistema se libera del reposo, el bloque desciende con aceleración constante. Los cojinetes de la rueda en el eje están oxidados, de modo que la fricción realiza −6.00 J de trabajo conforme el bloque desciende 3.00 m. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad angular de la rueda después de que el bloque ha descendido 3.00 m?

9.89 ••• En el sistema que se ilustra en la figura 9.17, una masa de 12.0 kg se suelta desde el reposo y cae, haciendo que el cilindro uniforme con masa de 10.0 kg y diámetro de 30.0 cm gire en torno a un eje sin fricción que pasa por su centro. ¿Qué distancia deberá descender la masa para impartir al cilindro 480 J de energía cinética?

9.90 • En la figura P9.90, el cilindro y la polea giran sin fricción en torno a ejes horizontales estacionarios que pasan por sus respectivos centros. Se enrolla una cuerda ligera en el cilindro, la cual pasa por la polea y tiene una caja de 3.00 kg suspendida de su extremo libre. No hay deslizamiento entre la cuerda y la superficie de la polea. El cilindro uniforme tiene masa de 5.00 kg y radio de 40.0 cm. La polea es un disco uniforme con masa de 2.00 kg y radio de 20.0 cm. La caja se suelta desde el reposo y desciende mientras la cuerda se desenrolla del cilindro. Calcule la rapidez que tiene la caja cuando ha descendido 2.50 m.

Figura **P9.90**

9.91 •• Un disco plano uniforme tiene masa M y radio R. Se perfora en él un agujero circular de radio $R/4$, con centro en un punto a $R/2$ del centro del disco. *a*) Calcule el momento de inercia del disco agujerado alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del disco. (*Sugerencia:* Calcule el momento de inercia de la pieza que se quitó al disco). *b*) Calcule el momento de inercia del disco agujerado en torno a un eje que pasa por el centro del agujero, perpendicular al plano del disco.

9.92 •• **BIO Energía rotacional del ser humano.** Una bailarina gira a 72 rpm alrededor de un eje que pasa por su centro con los brazos extendidos, como se muestra en la figura P9.92. Mediciones biomédicas indican que la distribución de la masa del cuerpo humano es como sigue:

Figura **P9.92**

Cabeza: 7.0%
Brazos: 13% (para ambos)
Tronco y piernas: 80.0%

Suponga que usted es esta bailarina. Usando esta información, más mediciones de longitud de su propio cuerpo, calcule *a*) su momento de inercia alrededor de su eje de giro y *b*) su energía cinética de rotación. Use las figuras de la tabla 9.2 para modelar aproximaciones razonables de las partes pertinentes de su cuerpo.

9.93 •• BIO Energía cinética en una caminata. Si una persona de masa M simplemente se mueve hacia adelante con rapidez V, su energía cinética sería $\frac{1}{2}MV^2$. Sin embargo, además de tener movimiento hacia adelante, varias partes de su cuerpo (como los brazos y las piernas) experimentan una rotación. Por lo tanto, su energía cinética total es la suma de la energía de su cuerpo por el movimiento hacia adelante, más la energía cinética de rotación de sus brazos y piernas. El objetivo de este problema es ver cuánto contribuye el movimiento de rotación a la energía cinética de la persona. Mediciones biomédicas indican que los brazos y las manos, en conjunto, normalmente contribuyen con un 13% a la masa de la persona, mientras que las piernas y los pies, en conjunto, contribuyen con un 37%. Para un cálculo burdo (pero razonable), se pueden modelar brazos y piernas como barras uniformes delgadas girando alrededor de los hombros y las caderas, respectivamente. Con paso ligero, los brazos y las piernas se pueden mover un ángulo de ±30° (un total de 60°) a partir de la vertical en aproximadamente 1 segundo. Supondremos que se mantienen rectos en lugar de doblados, lo cual no es completamente cierto. Consideremos a una persona de 75 kg caminando a 5.0 km/h, que tiene brazos de 70 cm de largo y piernas de 90 cm. *a*) ¿Cuál es la velocidad angular media de sus brazos y piernas? *b*) Usando la velocidad angular media del inciso *a*), calcule la cantidad de energía cinética de rotación en los brazos y las piernas de esta persona al caminar. *c*) ¿Cuál es la energía cinética total debida tanto al movimiento hacia adelante como a la rotación? *d*) ¿Qué porcentaje de esta energía cinética se debe a la rotación de las piernas y los brazos?

9.94 •• BIO La energía cinética en una carrera. Usando como guía el problema 9.93, aplíquelo a una persona que corre a 12 km/h, con los brazos y las piernas girando ±30° en $\frac{1}{2}$s. Como antes, suponga que los brazos y las piernas se mantienen rectos.

9.95 •• Teorema de los ejes perpendiculares. Considere un cuerpo rígido que es una lámina delgada plana de forma arbitraria en el plano *xy*, con el origen de coordenadas O situado en cualquier punto dentro o fuera del cuerpo. Sean I_x e I_y los momentos de inercia alrededor de los ejes *x* y *y*, y sea I_O el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por O, perpendicular al plano. *a*) Considerando elementos de masa m_i con coordenadas (x_i, y_i), demuestre que $I_x + I_y = I_O$. Este es el teorema de los ejes perpendiculares. Observe que el punto O no tiene que ser el centro de masa. *b*) Para una arandela delgada con masa M y radios interior y exterior R_1 y R_2, use el teorema de los ejes perpendiculares para calcular el momento de inercia alrededor de un eje que está en el plano de la arandela y que pasa por su centro. Puede usar la información de la tabla 9.2. *c*) Use el teorema de los ejes perpendiculares para demostrar que, en el caso de una lámina delgada cuadrada con masa M y longitud de lado L, el momento de inercia en torno a *cualquier* eje en el plano de la lámina que pase por el centro de esta es $\frac{1}{12}ML^2$. Puede usar la información de la tabla 9.2.

9.96 ••• Una varilla uniforme delgada se dobla formando un cuadrado de lado a. Si la masa total es M, calcule el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro y es perpendicular al plano del cuadrado. (*Sugerencia:* Use el teorema de los ejes paralelos).

9.97 • CALC La densidad de un cilindro de radio R y masa M aumenta linealmente con la distancia r al eje del cilindro, $\rho = \alpha r$, donde α es una constante positiva. *a*) Calcule el momento de inercia del cilindro alrededor de un eje longitudinal que pasa por su centro, en términos de M y R. *b*) ¿Su respuesta es mayor o menor que el momento de inercia de un cilindro con la misma masa y radio, pero con densidad uniforme? Explique por qué este resultado es lógico cualitativamente.

9.98 •• CALC Estrellas de neutrones y restos de supernovas. La Nebulosa del Cangrejo es una nube de gas brillante de unos 10 años luz de diámetro, a una distancia aproximada de 6500 años luz de la Tierra (figura P9.98). Es el residuo de una estrella que experimentó una *explosión supernova* que se vio en la Tierra en el año 1054. Esta nebulosa libera energía a razón de aproximadamente 5×10^{31} W, unas 10^5 veces la energía radiada por el Sol. El origen de esa energía es la rotación rápida de una *estrella de neutrones* en el centro de la nebulosa. Este objeto gira una vez cada 0.0331 s, y este periodo aumenta 4.22×10^{-13} s cada segundo que pasa. *a*) Si la rapidez con que la estrella de neutrones pierde energía es igual a la rapidez con que la nebulosa libera energía, calcule el momento de inercia de la estrella de neutrones. *b*) Las teorías sobre supernovas predicen que la estrella de neutrones de la Nebulosa del Cangrejo tiene una masa aproximadamente 1.4 veces mayor que la del Sol. Modelando la estrella de neutrones como una esfera sólida uniforme, calcule su radio en kilómetros. *c*) ¿Qué rapidez lineal tiene un punto en el ecuador de esa estrella? Compare esto con la rapidez de la luz. *d*) Suponga que la estrella de neutrones es uniforme y calcule su densidad, comparándola con la de una roca ordinaria (3000 kg/m^3) y la densidad de un núcleo atómico (aproximadamente 10^{17} kg/m^3). Justifique la afirmación de que una estrella de neutrones es, en esencia, un núcleo atómico grande.

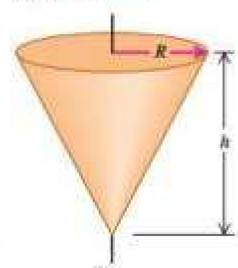
Figura **P9.98**

9.99 •• CALC Una esfera de radio $R = 0.200$ m tiene una densidad ρ que disminuye con la distancia r desde el centro de la esfera de acuerdo con $\rho = 3.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3 - (9.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^4)r$. *a*) Calcule la masa total de la esfera. *b*) Calcule el momento de inercia de la esfera con respecto a un eje a lo largo de un diámetro.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

9.100 ••• CALC Calcule el momento de inercia de un cono sólido uniforme de masa M y altura h alrededor de un eje que pasa por su centro (figura P9.100). El radio de la base circular es R.

Figura **P9.100**



9.101 ••• CALC En un disco compacto (CD), la música se codifica en un patrón de agujeros diminutos dispuestos en una pista que corre en espiral hacia el borde del disco. Al girar el disco dentro del reproductor, la pista es escaneada con una rapidez *lineal* constante de $v = 1.25$ m/s. Puesto que el radio de la pista varía al irse alejando del centro, la rapidez *angular* del disco debe cambiar al reproducirse el CD. (Véase el ejercicio 9.20). Veamos qué aceleración angular se necesita para mantener v constante. La ecuación de una espiral es $r(\theta) = r_0 + \beta\theta$, donde r_0 es el radio de la espiral en $\theta = 0$ y β es una constante. En un CD, r_0 es el radio interior de la pista. Si tomamos la dirección de rotación del CD como positiva, β debe ser positiva para que r aumente al girar el disco y aumentar θ. *a*) Al girar el disco un ángulo pequeño $d\theta$, la distancia escaneada sobre la pista es $ds = r\,d\theta$. Usando la expresión anterior para $r(\theta)$, integre ds para obtener la distancia total s

barrida a lo largo de la pista en función del ángulo total θ que ha girado el disco. *b*) Puesto que la pista se escanea con rapidez lineal constante v, la distancia s obtenida en el inciso *a*) es igual a vt. Use esto para obtener θ en función del tiempo. Habrá dos soluciones para θ; elija la positiva y explique por qué es la adecuada. *c*) Con su expresión para $\theta(t)$, calcule la velocidad angular ω_z y la aceleración angular α_z en función del tiempo. ¿α_z es constante? *d*) En un CD, el radio interior de la pista es de 25.0 mm, el radio aumenta 1.55 μm cada revolución y la duración de la reproducción del CD es de 74.0 min. Calcule r_0 y β y determine el número total de revoluciones del disco durante su reproducción. *e*) Con sus resultados de *c*) y *d*), grafique ω_z (en rad/s) contra t y α_z (en rad/s^2) contra t entre $t = 0$ y $t = 74.0$ min.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo ?

Ambos segmentos del aspa rígida tienen la misma rapidez angular ω. De acuerdo con las ecuaciones (9.13) y (9.15), al duplicar la distancia r para la misma ω, se duplica la rapidez lineal $v = r\omega$ y se duplica la aceleración radial $a_{rad} = \omega^2 r$.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

9.1 Respuestas: *a*) i y iii, *b*) ii. La rotación se está acelerando cuando la aceleración y la velocidad angulares tienen el mismo signo, y se está frenando cuando tienen signos opuestos. Por lo tanto, acelera para $0 < t < 2$ s (ω_z y α_z son positivas) y para $4\text{ s} < t < 6$ s (ω_z y α_z son negativas); pero se está frenando para $2\text{ s} < t < 4$ s (ω_z es positiva y α_z es negativa). Observe que el cuerpo gira en una dirección para $t < 4$ s (ω_z es positiva) y en la dirección opuesta para $t > 4$ s (ω_z es negativa).

9.2 Respuestas: *a*) i, *b*) ii. Cuando el disco se detiene, $\omega_z = 0$. De acuerdo con la ecuación (9.7), esto sucede en el *instante* $t = (\omega_z - \omega_{0z})/\alpha_z = -\omega_{0z}/\alpha_z$ (este es un tiempo positivo porque α_z es negativa). Si duplicamos la velocidad angular inicial ω_{0z} y duplicamos también la aceleración angular α_z, su cociente no cambia y la rotación se detiene en el mismo tiempo. El *ángulo* con el que gira el disco está dado por la ecuación (9.10): $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t = \frac{1}{2}\omega_{0z}t$ (ya que la velocidad angular final es $\omega_z = 0$). La velocidad angular inicial ω_{0z} se duplica, pero el tiempo t es el mismo, así que el desplazamiento angular $\theta - \theta_0$ (y, por ende, el numero de revoluciones) se duplica. Podemos usar la ecuación (9.12) para obtener la misma conclusión.

9.3 Respuesta: ii. De acuerdo con la ecuación (9.13), $v = r\omega$. Para mantener una rapidez lineal v constante, la rapidez angular ω debe disminuir a medida que la cabeza lectora se mueve hacia afuera (mayor r).

9.4 Respuesta: i. La energía cinética del objeto que desciende es $\frac{1}{2}mv^2$, y la del cilindro que gira, $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$. Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es $\frac{3}{4}mv^2$, de la cual dos tercios están en el bloque y un tercio está en el cilindro.

9.5 Respuesta: ii. Más de la masa del taco de billar está concentrada en el extremo más grueso, así que el centro de masa está más cercano a dicho extremo. El momento de inercia en un punto P en cualquiera de sus extremos es $I_P = I_{cm} + Md^2$; el extremo más delgado está más alejado del centro de masa, por lo que la distancia d y el momento de inercia I_P son mayores para el extremo más delgado.

9.6 Respuesta: iii. El resultado del ejemplo 9.10 *no* depende de la longitud del cilindro L. El momento de inercia depende solo de la distribución *radial* de la masa, no de su distribución a lo largo del eje.

Problema práctico

Respuestas: *a*) $I = \left[\frac{M}{L}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-h}^{L-h} = \frac{1}{3}M(L^2 - 3Lh + 3h^2)$

b) $W = \frac{1}{6}M(L^2 - 3Lh + 3h^2)\alpha^2 t^2$

c) $a = (L - h)\alpha\sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$