Funciones de varias variables o campos escalares: Linealización y extremos

Ingeniería

2019

Recorrido

1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Estimación del cambio en una dirección específica
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables

2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange

Recorrido

1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Estimación del cambio en una dirección específica
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables
2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange

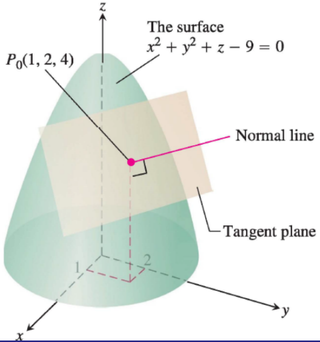
Recorrido

1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Estimación del cambio en una dirección específica
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables

2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange

Definición (Plano tangente y recta normal a una superficie de nivel)

Si f es una función diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, el **plano tangente** y la **recta normal** a la superficie de nivel de f que contiene al punto (x_0, y_0, z_0), en dicho punto, son el plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es normal al vector $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector director $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, respectivamente.



Planos tangentes y rectas normales

Ecuaciones:

Plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Ejemplo:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

El gráfico de f es la superficie de nivel $g(x,y,z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$:

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0.$$

Recorrido

Estimación del cambio en una dirección específica

Sea f diferenciable en (a, b). Entonces:

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Si $h \neq 0$:

$$\frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} \approx \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

$$f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b) \approx (\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u})h$$

$$\Delta f(a, b) \approx (\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u})h.$$

Estimación del cambio en una dirección específica

Sea f diferenciable en (a, b). Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h} = \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u}$$

Si $h \neq 0$:

$$\frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h} \approx \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u}$$

$$f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b) \approx (\nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u})h$$

$$\Delta f(a,b) \approx (\nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u})h.$$

Ejemplo:
Aproxime el cambio en el valor de $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 6xy + 3y^2$ cuando se mueve del punto $(1,0)$ una distancia de $0,1$ en la dirección de $\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
Rta: $\Delta f(1,0) \simeq 0,84$.

Recorrido

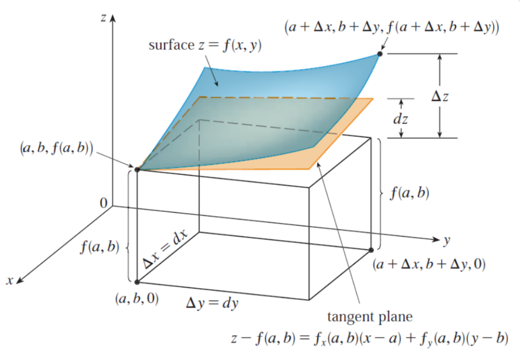
1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Estimación del cambio en una dirección específica
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables
2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange

Aproximación Lineal Estándar de f en un punto

Definición

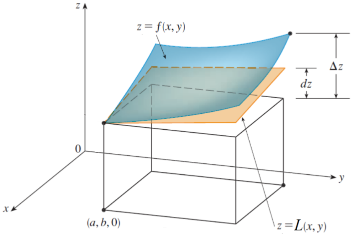
Si f es una función de dos variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f, se define la linealización de f en P_0 por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



Linealización de una función en un punto

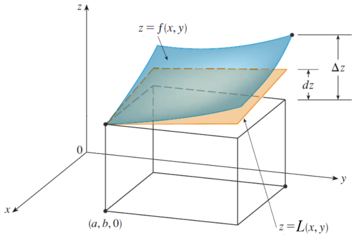
$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



$$\begin{aligned}
\Delta L(x_0, y_0) &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0) \\
&= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y - f(x_0, y_0) - 0 - 0 \\
&= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y
\end{aligned}$$

Linealización de una función en un punto

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

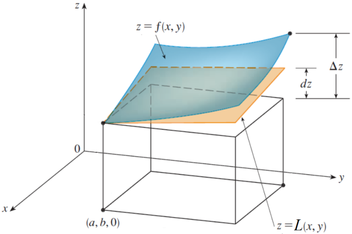


$$\begin{aligned}\Delta L(x_0,y_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - L(x_0,y_0)\\ &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y - f(x_0,y_0) - 0 - 0\\ &= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y\end{aligned}$$

$$\Delta f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y.$$

Linealización de una función en un punto

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$



$$\begin{aligned}
\Delta L(x_0,y_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - L(x_0,y_0) \\
&= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y - f(x_0,y_0) - 0 - 0 \\
&= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y
\end{aligned}$$

$$\Delta f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y.$$

Observación: si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0.

Recorrido

Diferencial de una función de dos variables

Definición

Si f es diferncíable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy,$$

si f es de dos variables.

Diferencial de una función de dos variables

Definición

Si f es difernciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy,$$

si f es de dos variables.

Si f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

$$df_{(x_0,y_0)}(dx, dy) = \qquad f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Diferencial de una función de tres variables

Definición

Si f es diferncialble en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz,$$

si f es de tres variables.

Diferencial de una función de tres variables

Definición

Si f es diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz,$$

si f es de tres variables.

Si f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z.$$

$$L_{f,P_0}(x, y, z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0).$$

$$df_{(P_0)}(dx, dy, dz) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz.$$

Ejemplo

$$f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$
$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

Ejemplo

$$f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$
$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, luego

$$\Delta f(2,-1) = -6\Delta x + 6\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Ejemplo

$$f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$

$$\nabla f(x, y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, luego

$$\Delta f(2, -1) = -6\Delta x + 6\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

$$L_{f,(2,-1)}(x, y) = -1 - 6(x - 2) + 6(y + 1)$$

Ejemplo

$$f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$

$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, luego

$$\Delta f(2,-1) = -6\Delta x + 6\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

$$L_{f,(2,-1)}(x,y) = -1 - 6(x-2) + 6(y+1)$$

$$df_{(2,-1)}(dx,dy) = -6dx + 6dy$$

Recorrido

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h. Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + \varepsilon_r \Delta r + \varepsilon_h \Delta h \approx V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Si los valores nominales r y h están fijos, pequeños errores Δr y Δh influyen de distinta manera, según los valores de r y h. Como

$$|error| = \left|\frac{Aprox - Real}{Real}\right| = \left|\frac{\Delta magnitud}{magnitud\ real}\right|,$$

si se mide r con un error no mayor de ε_r y h con un error que no supera ε_h, el máximo error posible en el cálculo de V es

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| = \left|\frac{2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h}{\pi r^2 h}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| \leq 2\varepsilon_r + \varepsilon_h$$

Recorrido

1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Estimación del cambio en una dirección específica
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables
2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange

Fórmula de Taylor para dos variables

Dados $(a, b) \in \operatorname{int} D$ y h, k tales que $(a+h, b+k) \in D$,

definimos $\mathbf{r}(t) = (a+th, b+tk)$, $0 \leq t \leq 1$

que une (a, b) y $(a+h, b+k)$. Entonces:

$$f(a+h, b+k) = f(\mathbf{r}(1)); \qquad f(a, b) = f(\mathbf{r}(0)).$$

Definimos la función compuesta w por

$$w(t) := f(\mathbf{r}(t)); \qquad \text{así:} \quad f(a+h, b+k) = w(1); \qquad f(a, b) = w(0).$$

Recordando la **fórmula de Taylor para w alrededor de 0**:

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

para algún α entre 0 y t.

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}t^{n+1}, \ \alpha \text{ entre } 0 \text{ y } t$$

$$w(1) = w(0) + w'(0)1 + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}1^n + \frac{w^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}1^{n+1}, \ \alpha \text{ entre } 0 \text{ y } 1$$

Si f y sus derivadas parciales hasta orden $n+1$ son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a,b), entonces en R:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a,b)} + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(a+ch, b+ck)}$$

para cierto c entre 0 y 1.

¿Cómo hacer para obtener c entre 0 y β para cualquier $\beta > 0$?
Cambiar la parametrización

$$\mathbf{r}(t) = (a + th, b + tk),\ 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{que une } (a, b) \text{ y } (a + h, b + k)$$

por

$$\mathbf{r}(t) = (a + \frac{t}{\beta}h, b + \frac{t}{\beta}k),\ 0 \leq t \leq \beta$$

$$\text{une } (a, b) \text{ y } (a + h, b + k)$$

y al finalizar todo el desarrollo se llegará a c entre 0 y β.

Fórmula de Taylor para dos variables

Si f y sus derivadas parciales hasta orden 2 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a,b), entonces en R:

$$f(a+h,b+k) = f(a,b)+(hf_x+kf_y)\Big|_{(a,b)}+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

para cierto c entre 0 y 1.

Observación: la linealización de f en (a,b) coincide con la fórmula de Taylor de primer orden sin el término de error.

1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Estimación del cambio en una dirección específica
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables

2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange

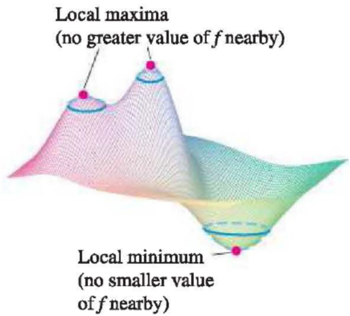
Recorrido

1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Estimación del cambio en una dirección específica
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables

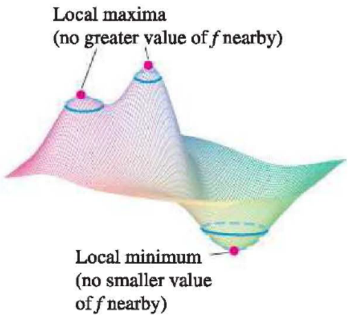
2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange

Recorrido

Definiciones de máximo local y mínimo local



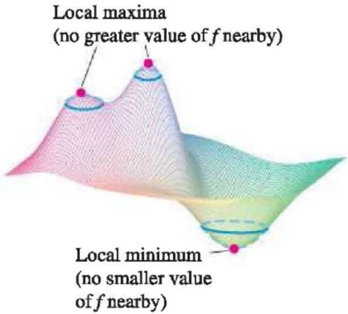
Definiciones de máximo local y mínimo local



Definición

Si f está definida en una región que contiene al punto (a, b) y $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los (x, y) en algún entorno de (a, b), entonces $\mathbf{f(a, b)}$ es un (valor) máximo local de f. Además se dice que f **alcanza** un máximo local en (a, b).

Definiciones de máximo local y mínimo local



Definición

Si f está definida en una región que contiene al punto (a, b) y $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los (x, y) en algún entorno de (a, b), entonces $\mathbf{f(a, b)}$ es un (valor) máximo local de f. Además se dice que f **alcanza** un máximo local en (a, b).

Similarmente se define mínimo local.

Punto crítico y punto de silla

Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ es un punto crítico de f.

Punto crítico y punto de silla

Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ es un punto crítico de f.

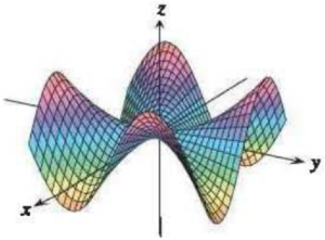
Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P)$ no existe, es un punto (singular o) crítico de f.

Punto crítico y punto de silla

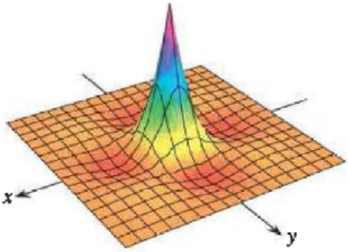
Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ es un punto crítico de f.

Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P)$ no existe, es un punto (singular o) crítico de f.

Si f es diferenciable en P , tiene un punto de silla en P si P es un punto crítico de f y f no presenta en P un máximo local ni un mínimo local.



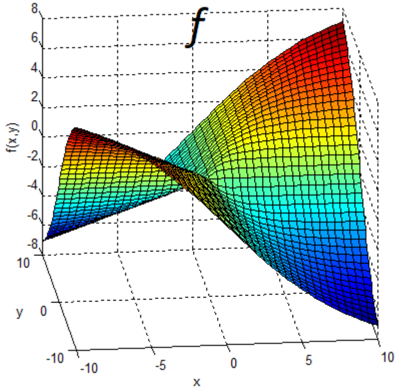
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

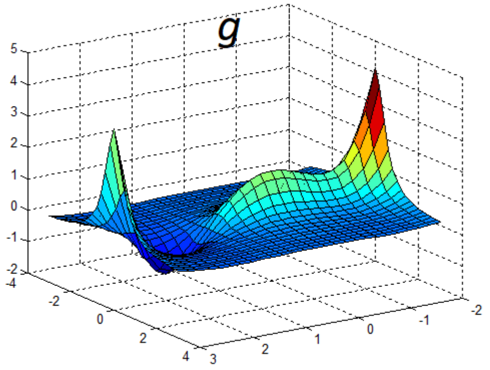


$$z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

Considere las funciones f y g (g dada por su gráfico):

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$





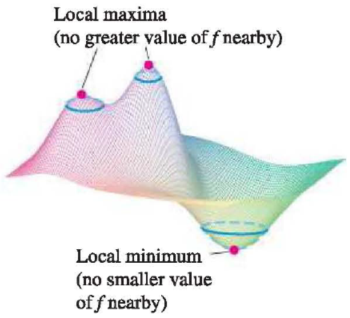
Recorrido

Teorema: valores extremos de funciones continuas en conjuntos compactos.

Teorema

Si f es una función continua en un conjunto D que es cerrado y acotado, entonces existen en D puntos en los cuales f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

SIN DEMOSTRAR



Observación: una función continua puede tener dos máximos locales en una región y eso no implica que deba haber un mínimo local en esta región. Ver imagen.

Criterio de la derivada primera para valores extremos locales

Teorema

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto P_0 interior al dominio de f y, si las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en P_0, entonces $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$.

DEMOSTRAR

Criterio de la derivada primera para valores extremos locales

Teorema

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto P_0 interior al dominio de f y, si las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en P_0, entonces $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$.

DEMOSTRAR

Ejemplo:

Criterio de la derivada primera para valores extremos locales

Teorema

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto P_0 interior al dominio de f y, si las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en P_0, entonces $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$.

DEMOSTRAR

Ejemplo:

$$f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$$

$$\nabla f(x,y) = (-2x, 2y - 4y^3)$$

$$\begin{cases} -2x & = 0 \\ 2y - 4y^3 & = 0 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix};$$

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Teorema (DEMOSTRAR)

Suponga que f y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Entonces,

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Teorema (DEMOSTRAR)

Suponga que f y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Entonces,

1. *f tiene un* **máximo local** *en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$;*

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\left| \begin{array}{cc} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{array} \right|; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Teorema (DEMOSTRAR)

Suponga que f y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Entonces,

1. *f tiene un* **máximo local** *en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$;*
2. *f tiene un* **mínimo local** *en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$;*

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Teorema (DEMOSTRAR)

Suponga que f y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Entonces,

1. *f tiene un* **máximo local** *en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$;*
2. *f tiene un* **mínimo local** *en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$;*
3. *f tiene un* **punto de silla** *en (a,b) si $H_f(a,b) < 0$;*

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Teorema (DEMOSTRAR)

Suponga que f y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Entonces,

1. *f tiene un* **máximo local** *en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$;*
2. *f tiene un* **mínimo local** *en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$;*
3. *f tiene un* **punto de silla** *en (a,b) si $H_f(a,b) < 0$;*
4. *el criterio* **no es concluyente** *si $H_f(a,b) = 0$.*

Ejemplo

$$f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$$
$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

Ejemplo

$$f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$$
$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Ejemplo

$$f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$$
$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$f_{xx}(x,y) = -2; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = 2 - 12y^2.$$

$$H_f(x,y) = 4(6y^2 - 1);$$

Ejemplo

$$f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$$
$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$f_{xx}(x,y) = -2; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = 2 - 12y^2.$$

$$H_f(x,y) = 4(6y^2 - 1); \quad H_f(0,0) = -4 < 0; \quad H_f(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = 8 > 0.$$

Ejemplo

$$f(x, y) = y^2 - y^4 - x^2$$

$$\nabla f(x, y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

Puntos críticos: $(0, 0)$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$f_{xx}(x, y) = -2; \quad f_{xy} = 0; \quad f_{yy} = 2 - 12y^2.$$

$$H_f(x, y) = 4(6y^2 - 1); \quad H_f(0, 0) = -4 < 0; \quad H_f(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = 8 > 0.$$

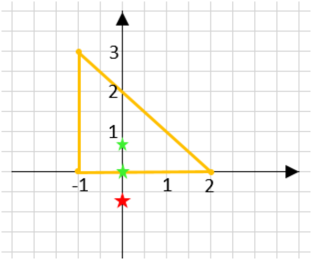
$f(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4}$ son máximos locales de f.
f presenta un punto de silla en $(0, 0)$.

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas. Ejemplo.

Buscar los extremos de $f(x, y) = y^2 - y^4 - x^2$ en los puntos de D que es el triángulo con vértices $(2, 0)$, $(-1, 0)$ y $(-1, 3)$.

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas. Ejemplo.

Buscar los extremos de $f(x, y) = y^2 - y^4 - x^2$ en los puntos de D que es el triángulo con vértices $(2, 0)$, $(-1, 0)$ y $(-1, 3)$.



Los puntos críticos de f son $(0, 0)$, $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, pero el último de éstos no pertenece a D y lo descartamos.

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas

Evaluamos f en los puntos críticos:

$$f(0,0) = 0; \qquad f(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4}.$$

Evaluamos f en la frontera de D:

1. $f(-1,0) = -1; \quad f(2,0) = -4; \quad f(-1,3) = -73;$
2. $f(x,0) = -x^2;$
3. $f(-1,y) = y^2 - y^4 - 1; \quad f(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -0,75;$
4. $f(2-y,y) = -y^4 + 4y - 4; \quad f(1,1) = -1.$

El valor máximo es $\frac{1}{4}$ y se alcanza en $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$; el valor mínimo es -73 y se alcanza en $(-1,3)$.

Recorrido

Multiplicadores de Lagrange

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

Multiplicadores de Lagrange

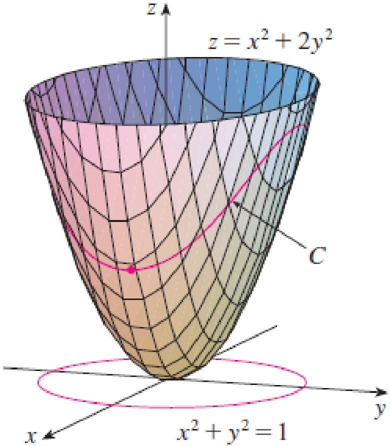
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

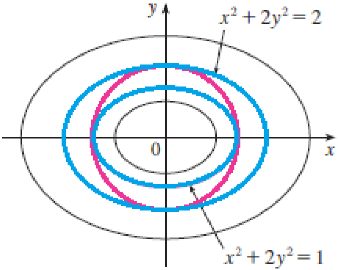
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 \qquad\qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Buscamos los extremos de f sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$.

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Buscamos los extremos de f sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$.





Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f *es diferenciable en una región abierta de* $\mathbb{R}^3$ *y que* C *es una curva suave dentro de la misma región. Si* P_0 *es un punto de* C *donde* f *tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre* C*, entonces* ∇f *es ortogonal a* C *en* P_0*.*

Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre C, entonces ∇f es ortogonal a C en P_0.

DEMOSTRAR

Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre C, entonces ∇f es ortogonal a C en P_0.

DEMOSTRAR

Corolario

En $\mathbb{R}^2$ también vale.

Método de multiplicadores de Lagrange

Teorema

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0 \in S$).
Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$.
Entonces, si f restringida a S tiene un extremo local en P_0, entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

SIN DEMOSTRACIÓN

Método de multiplicadores de Lagrange

Teorema

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0 \in S$).
Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$.
Entonces, si f restringida a S tiene un extremo local en P_0, entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

SIN DEMOSTRACIÓN
El punto P_0 es un **punto crítico** de f restringida a S (puede haber más de uno).

Método de multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si este conjunto S no es vacío), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma **simultánea** las ecuaciones

Método de multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x,y,z)=0$ (si este conjunto S no es vacío), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma **simultánea** las ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla f = & \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = & 0. \end{cases}$$

Para funciones de dos variables, es similar.

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & \lambda 2x \\ 4y & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Rta:

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
$f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x & = & \lambda 2x \\ 4y & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x & = & \lambda \\ 4y & = & \lambda \\ x + y & = & 1 \end{cases}$$

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

   Rta:

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x+y &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 1 punto crítico: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
   $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ¿es máximo o mínimo?

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

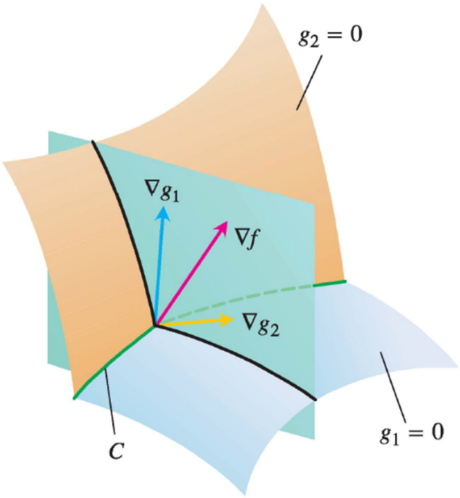
   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

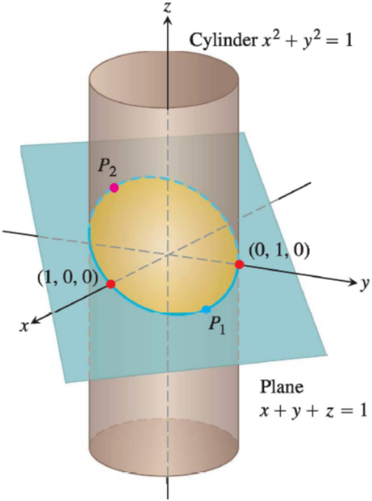
2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x+y &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 1 punto crítico: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
   $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ¿es máximo o mínimo?
   Es mínimo.

Multiplicadores de Lagrange: 2 restricciones





Multiplicadores de Lagrange: 2 restricciones

El planteo es:

$$\begin{cases} \nabla f = & \lambda \nabla g + \mu \nabla h \\ g(x,y,z) = & 0 \\ h(x,y,z) = & 0. \end{cases}$$

Notar que es un **sistema de 5 ecuaciones no lineales con 5 incógnitas**.

Ejemplos especiales

Hallar los extremos de f sujeta a $g = 0$ para

1. $f(x,y) = y$ y $g(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2 - \frac{1}{2}$.
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ y $g(x,y) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}) - 1$.
3. $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = y - x$.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Ejemplos especiales

Hallar los extremos de f sujeta a $g = 0$ para

1. $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2 - \frac{1}{2}$.
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ y $g(x, y) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2 + y^2}) - 1$.
3. $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = y - x$.
4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

En los dos primeros se verifica que $\nabla g(P_0) = \mathbf{0}$, siendo P_0 punto crítico de este problema. En el tercero se puede notar que no hay ningún problema cuando $\lambda = 0$. En el cuarto, se observa que $g = 0$ es una curva de nivel de f y todos los puntos que cumplen $g = 0$ son puntos críticos para este problema.

Ejercicio integrador

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{4} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_1, definida por $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ejercicio integrador

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{4} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_1, definida por $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Planteo:

$$\nabla f(x,y) = (0,0); \qquad (-2x, 2y - y^3) = (0,0).$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ y $(0,\sqrt{2})$. Los dos últimos **no** pertenecen a D_1.
Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_1 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$.
Evalúo f: $f(0,0) = 0$; $f(0,\pm 1) = 3/4$; $f(\pm 1, 0) = -1$.
Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_1 de 0.75, en los puntos $(0,\pm 1)$, y un mínimo absoluto de -1 en los puntos $(\pm 1, 0)$.

Ejercicio integrador 2

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{4} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_2, definida por $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.
Planteo:

$$\nabla f(x,y) = (0,0); \qquad (-2x, 2y - y^3) = (0,0).$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ y $(0,\sqrt{2})$. Los dos últimos sí pertenecen a D_2.
Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_2 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-\sqrt{2})$, $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$.
Evalúo f: $f(0,0) = 0$; $f(0,\pm\sqrt{2}) = 1$; $f(\pm\sqrt{2},0) = -2$.
Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_2 de 1, en los puntos $(0,\pm\sqrt{2})$, y un mínimo absoluto de -2 en los puntos $(\pm\sqrt{2},0)$.

Ejercicio integrador 3

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{4} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_3, definida por $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
Planteo:

$$\nabla f(x,y) = (0,0); \qquad (-2x, 2y - y^3) = (0,0).$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ y $(0,\sqrt{2})$. Los dos últimos sí pertenecen a D_2.
Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_3 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-2)$, $(0,2)$, $(2,0)$ y $(-2,0)$.
Evalúo f: $f(0,0) = 0$; $f(0,\pm\sqrt{2}) = 1$; $f(\pm 2, 0) = -4$; $f(0,\pm 2) = 0$.
Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_3 de 1, en los puntos $(0,\pm\sqrt{2})$, y un mínimo absoluto de -4 en los puntos $(\pm 2, 0)$.