Lógica Proposicional

Prof. Sergio Ariel Salinas

Licenciatura en Ciencias de la Computación
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo

Lógica - 2025

Outline

Introducción

Lenguaje de la lógica proposicional

Alfabeto

Diremos que un conjunto finito Σ es un alfabeto si $\Sigma \neq \emptyset$ y $\forall x \in \Sigma$, x es un símbolo indivisible (no está compuesto por subsimbolos).

- Un alfabeto consiste de todos los posibles caracteres utilizados para escribir expresiones en el lenguaje.
- El alfabeto Σ para la lógica proposicional consiste de tres diferentes componentes:
    - Átomos: representan los componentes básicos de expresiones proposicionales.
    - Conectores: permiten combinar átomos.
    - Marcadores de puntuación: demarcan la estructura de oraciones compuestas.

Lenguaje de la lógica proposicional

El alfabeto de la lógica proposicional es una estructura (A, C, M) donde:

- A es el conjunto de símbolos $p, q, r, s, t_1, t_2, \ldots$
- C es el conjunto de símbolos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, T, F$
- Mes el conjunto de símbolos $), (,], [$

Sintáxis de la lógica proposicional

Sintáxis

La sintáxis de un lenguaje determina la forma de una oración en un lenguaje. La sintáxis para la lógica proposicional es definida por un esquema de reglas según la siguiente definición.

Definición

Dado el alfabeto de la lógica proposicional, una fórmula bien formada (fbf) resulta de:

- Un elemento en A de la lógica es una proposición o fórmula bien formada.
- Si P y Q representan proposiciones entonces las siguientes también son proposiciones (fbf):
    1. (P)
    2. $\neg(P)$
    3. $(P \wedge Q)$
    4. $(P \vee Q)$
    5. $(P \rightarrow Q)$
    6. $(P \leftrightarrow Q)$

Definición de una proposición

Definition

Una proposición es una afirmación que sólo puede tener un valor verdadero o falso pero no ambos en un momento de tiempo determinado.

Ejemplos de proposiciones:

1. p: $2 + 3 = 5$
2. q: Erich Fromm es autor del libro Tener o Ser.

Ejemplos de oraciones que no son proposiciones:

1. El clima de hoy está muy agradable.
2. Debes ingerir alimentos saludables.

Tipos de proposiciones

Proposición primitiva

Una proposición primitiva o fórmula atómica es una afirmación que no puede dividirse en partes más pequeñas.

Proposición compuesta

Una proposición compuesta o fórmula se construye a partir de proposiciones primitivas relacionadas mediante conectores lógicos.

Operaciones lógicas

Sean p, q dos proposiciones primitivas entonces se definen las siguientes operaciones lógicas.

1. Negación: se representa mediante la siguiente notación$\neg p$ y el resultado es verdadero si p es falso y viceversa.
2. Conjunción: se representa mediante la notación $p \wedge q$. El resultado de esta operarción es verdadero siempre que todas las proposiones primitivas sean verdaderas caso contrario el resultado es falso.

Operaciones lógicas

1. Disyunción inclusiva: se representa mediante $p \vee q$. El resultado de esta operación es verdadero siempre que ambas o al menos una de las proposiciones primitivas sea verdadera caso contrario el resultado es falso.

2. Disyunción exclusiva: se representa mediante $p \veebar q$. El resultado es verdadero siempre que sólo una de las proposiciones sea verdadera.

1. Implicación: se representa mediante $p \to q$ y se lee p implica q donde p se denomina hipótesis y q se denomina conclusión. También se puede leer de las siguientes formas.

si p entonces q	p sólo si q
p es suficiente para q	q es necesaria para p
p es condición suficiente para q	q es condición necesaria para p

Ejemplo:

- Si soy mendocino entonces soy argentino.
- Es suficiente ser mendocino para ser argentino.
- Soy mendocino sólo si soy argentino.
- Es necesario ser argentino para ser mendocino.

2. Doble implicación: se presenta mediante $p \longleftrightarrow q$, se lee p si y sólo si q o p es necesaria y suficiente para q. También, se expresa mediante *iff* una abreviación del término en inglés if and only if.

Las operaciones lógicas pueden representarse mediante tablas verdad de la siguiente forma:

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \rightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

El poder expresivo de los operadores lógicos

- Los operadores lógicos definidos anteriormente están relacionados con el lenguaje natural.
- Cuántos operadores binarios es posible definir?

P	Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V

El poder expresivo de los operadores lógicos

Por ejemplo, podría definir operadores nuevos de la siguiente forma:

p	q	$p \diamond q$	$p \bigtriangleup q$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	F	V

El poder expresivo de los operadores lógicos

- Es posible utilizar un número reducido de operadores lógicos sin sacrificar el poder expresivo de la lógica proposicional.

- Es posible definir las operaciones lógicas presentadas anteriormente sólo utilizando los operadores $\neg$ y $\vee$.

Ejercicio: construir y comparar las tablas de verdad de las siguientes proposiciones.

1. $p \to q$ y $\neg p \vee q$
2. $p \wedge q$ y $\neg(\neg p \vee \neg q)$
3. $p \leftrightarrow q$ y $(p \to q) \wedge (q \to p)$

Semántica de la lógica proposicional

Semántica de la lógica proposicional

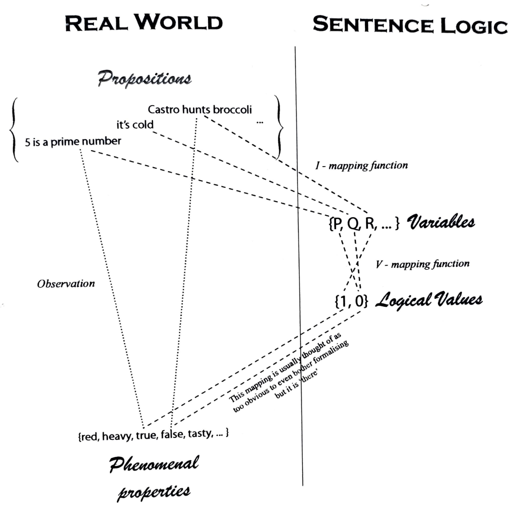


Figura del libro "Understanding Logic the first order of reasoning" Guy Davies, Love

Semántica de la lógica proposicional

Definición

Una **interpretación** en lógica proposicional es una función $I : A \to \Gamma$ del conjunto de átomos A en lógica proposicional al conjunto de valores Γ de proposiciones.

Definición

Dada una **interpretación** I y las variables proposicionales P y Q entonces una evaluación V de I es una función desde el conjunto de proposiciones in en lógica proposicional a los valores de verdad tal que para cualquier proposición se cumple que:

1. Si P es un átomo entonces $V^I(P) = 1$ si $I(P)$ es una proposición verdadera de otra forma $V^I(P) = 0$.
2. $V^I(\neg P) = 0$ iff $V^I(P) = 1$
3. $V^I(P \wedge Q) = 1$ iff $V^I(P) = 1$ y $V^I(Q) = 1$
4. $V^I(P \vee Q) = 1$ iff $V^I(P) = 1$ o $V^I(Q) = 1$
5. $V^I(P \rightarrow Q) = 1$ iff $V^I(P) = 0$ o $V^I(Q) = 1$ o $V^I(Q) = 0$
6. $V^I(P \leftrightarrow Q) = 1$ iff $V^I(P) = V^I(Q)$

Semántica de la lógica proposicional

Definición

Un modelo m para una proposición P es un interpretación I tal que $V^I(P) = 1$. Un modelo m para un conjunto de proposiciones Γ es una interpretación I tal que $V^I(P) = 1$ para cada proposición $P \in \Gamma$ en tal caso se dice que m satisface Γ.

Definición

Un contra-modelo c para una proposición P es un interpretación I tal que $V^I(P) = 0$. Un contra-modelo c para un conjunto de proposiciones Γ es una interpretación I tal que $V^I(P) = 0$ para cada proposición $P \in \Gamma$ en tal caso se dice que c no satisface (falsifies) Γ.

Tautología, contingencia y contradicción

Definition

Una proposición compuesta es una **tautología o fórmula válida** si para cada valor de las proposiciones primitivas el resultado de la proposición compuesta es verdadero y se denota con la letra T_0.

Definition

Una proposición compuesta es una **contingencia o fórmula satisfacible** si el resultado de la proposición compuesta contiene valores verdaderos y falsos.

Definition

Una proposición compuesta es una **contradicción o fórmula no satisfacible** si para cada valor de las proposiciones primitivas el resultado de la proposición compuesta es falso y se denota con la letra F_0.

Contenido de información de una proposición

- En una proposición P el número de $1's$ en la tabla de verdad puede ser considerada como una medida de la información contenida en la proposición.

- Por ejemplo:

  - Castro aprobó matemática discreta.
  - Castro aprobó álgebra o desaprobó álgebra.

- Mientras mayor sea el número de $1's$ en una tabla de verdad de una proposición menor será la información contenida en la misma.

Equivalencia lógica: las leyes de la lógica

Equivalencia Lógica

Definition

Dos proposiciones s_1, s_2 son lógicamente equivalentes y se representa $s_1 \iff s_2$cuando la proposición $s_1$es verdadera (respectivamente falsa) si y sólo sí la proposición s_2 es verdadera (respectivamente falsa).

Dos proposiciones lógicamente equivalentes tienen la misma tabla de verdad.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \longleftrightarrow q$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V

Definición de Dualidad

Dual

Sea una s una proposición compuesta donde sólo existen conectores $\wedge$ y $\vee$ entonces el dual de s se escribe como s^dy se obtiene de reemplazar cada ocurrencia $\vee$,$\wedge$ por $\wedge$,$\vee$ respectivamente y cada ocurrencia T, F por F, T respectivamente.

- El dual de una proposición primitiva es igual a la misma proposición sin cambios.
- El dual de una proposición $(\neg p)^d = \neg p$.

Principio de Dualidad

Theorem

Sean s y t proposiciones que sólo contienen los operadores lógicos $\wedge$ y $\vee$ si $s \Longleftrightarrow t$ entonces $s^d \Longleftrightarrow t^d$.

Sustitución de proposiciones

Es posible derivar equivalencia lógicas como se muestra en el siguiente ejemplo:
Si q, r, s son proposiciones primitivas es posible probar que $(r \wedge s) \rightarrow q \Longleftrightarrow \neg(r \wedge s) \vee q$ es decir que $(r \wedge s) \rightarrow q \longleftrightarrow \neg(r \wedge s) \vee q$ es una tautología. Sin embargo, en lugar de construir tablas de verdad extensas es posible considerar a p como una proposición compuesta por $(r \wedge s)$y se esta forma obtener $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \neg p \vee q$.

Reglas de sustitución:

1. Sea P una proposición compuesta y además una tautología entonces si p es una proposición primitiva que aparece en P y se reemplaza cada ocurrencia de p por la misma proposición q entonces la proposición compuesta P_1es también una tautología.
2. Sea P una proposición compuesta donde p es una proposición arbitraria que aparece en P y sea q una proposición tal que $p \Longleftrightarrow q$. Si en P se reemplazan una o más ocurrencias de p por q obteniendo así P_1 entonces $P \Longleftrightarrow P_1$.

Ejemplos

Ejemplos primera regla de sustitución:

- De acuerdo a la Ley de DeMorgan la siguiente proposición $P: \neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ es una tautología.
- Si reemplazamos cada ocurrencia de p por $r \wedge s$ entonces $P_1: \neg[(r \wedge s) \vee q] \Longleftrightarrow [\neg(r \wedge s) \wedge \neg q]$ también es una tautología.
- Si además reemplazamos cada ocurrencia de q por $t \to u$ entonces $P_2: \neg[(r \wedge s) \vee (t \to u)] \Longleftrightarrow [\neg(r \wedge s) \wedge \neg(t \to u)]$ continua siendo una tautología.

Ejemplos

Ejemplo segunda regla de sustitución:

- Sea $P : (p \to q) \to r$ de acuerdo a la siguiente equivalencia lógica $p \to q \Longleftrightarrow \neg p \vee q$ es posible obtener $P_1 : (\neg p \vee q) \to r$ donde $P \Longleftrightarrow P_1$.
- Sea $P : p \to (p \vee q)$ y $\neg\neg p \Longleftrightarrow p$ entonces es posible obtener $P_1 : p \to (\neg\neg p \vee q)$ donde también $P \Longleftrightarrow P_1$.

Ley de Demorgan nro 1

$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Ley de Demorgan nro 2

$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
V	V	V	F	F	F	F	V	F	F

Leyes distributivas

Ley distributiva de la conjunción sobre la disyunción:

$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Ley distributiva de la disyunción sobre la conjunción:

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Resumen leyes lógicas

Leyes Lógicas		
1	Doble negación	$\neg\neg p \iff p$
2	DeMorgan	$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
		$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$
3	Commutativa	$p \vee q \iff q \vee p$
		$p \wedge q \iff q \wedge p$
4	Asociativa	$p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$
		$p \wedge (q \wedge r) \iff (p \wedge q) \wedge r$
5	Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
		$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Resumen leyes lógicas

Leyes Lógicas		
6	Idempotencia	$p \vee p \iff p$
		$p \wedge p \iff p$
7	Identidad	$p \vee F \iff p$
		$p \wedge T \iff p$
8	Inversa	$p \vee \neg p \iff T$
		$p \wedge \neg p \iff F$
9	Dominación	$p \vee T \iff T$
		$p \wedge F \iff F$
10	Absorción	$p \vee (p \wedge q) \iff p$
		$p \wedge (p \vee q) \iff p$

Aplicación de leyes lógicas y reglas de sustitución

Negar y simplificar la siguiente proposición $(p \vee q) \to r$.

1. $(p \vee q) \to r \Longleftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r$
2. La negación del punto 1 resulta en
   $\neg[(p \vee q) \to r] \Longleftrightarrow \neg[\neg(p \vee q) \vee r]$
3. De acuerdo a las leyes de DeMorgan
   $\neg[\neg(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r$
4. Considerando la ley de doble negación
   $\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg r$
5. Es posible concluir que $\neg[(p \vee q) \to r] \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg r$

Implicación

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$
F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
				$(p \to q) \iff (\neg q \to \neg p)$		$(q \to p) \iff (\neg p \to \neg q)$	

- Implicación $p \to q$
- Contrapositiva $\neg q \to \neg p$
- Conversa $q \to p$
- Inversa $\neg p \to \neg q$

Ejemplo 1:

1. $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$
2. $\iff (p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$ DeMorgan
3. $\iff (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ Doble negación
4. $\iff p \vee (q \wedge \neg q)$ Distributiva
5. $\iff p \vee F_0$ Inversa
6. $\iff p$ Identidad

Por lo tanto $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \iff p$

Ejemplos de simplificación

Ejemplo 2:

1. $\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q]$
2. $\Longleftrightarrow \neg\neg[(p \vee q) \wedge r] \wedge \neg\neg q$ DeMorgan
3. $\Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge r] \wedge q$ Doble negación
4. $\Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (r \wedge q)$ Asociativa
5. $\Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \wedge r)$ Commutativa
6. $\Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge q] \wedge r$ Asociativa
7. $\Longleftrightarrow q \wedge r$ Absorción

Dibujar el circuito de la red que está representada por la expresión $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg t \vee r)$ y aplicando leyes lógicas simplicar el diseño para obtener una red simplificada definida por $p \vee [r \wedge (t \vee \neg q)]$. Justificar cada paso en el proceso de simplicación.

Formas Normales Conjuntiva y Disyuntiva

Definición

Un literal es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica y nos referimos a estos como positivos o negativos, respectivamente.

Ejemplo:
Si A es una fórmula atómica, entonces A es un literal positivo y $\neg A$ es un literal negativo.

Forma Normal Conjuntiva

Definición

Una fórmula F está en forma normal conjuntiva (FNC) si es una conjunción de disyunciones de literales. Es decir,

$$\mathrm{F} = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m} L_{i,j} \right)$$

Forma Normal Disyuntiva

Definición

Una fórmula F está en forma normal disyuntiva (FND) si es una disyunción de conjunciones de literales. Es decir,

$$\mathrm{F} = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{i,j} \right)$$

Ejemplos

- $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg D)$ [FNC]

- $(\neg A \wedge B) \vee C \vee (B \wedge \neg C \wedge D)$ [FND]

- $(A \vee B) \wedge ((A \wedge C) \vee (B \wedge D))$ [No se encuentra en ninguna forma normal]

Definición: Minitérminos

Dado un número de variables, las conjunciones en las que cada literal o su negación pero no ambas ocurre sólo una vez se denominan minitérminos. Existen 2^n minitérminos donde n es el número de variables. Por ejemplo, para dos variables p y q los posibles minitérminos son: $p \wedge q$,$p \wedge \neg q$, $\neg p \wedge q$ y $\neg p \wedge \neg q$.

Definición: Maxitérminos

Dado un número de variables, las disyunciones en las que cada literal o su negación pero no ambas ocurre sólo una vez se denominan maxitérminos. Existen 2^n maxitérminos donde n es el número de variables. Por ejemplo, para dos variables p y q los posibles minitérminos son: $p \vee q$,$p \vee \neg q$, $\neg p \vee q$ y $\neg p \vee \neg q$.

Formas Normales Principales

Definición: Forma Normal Disyuntiva Principal (FNDP)

Una fórmula que consta sólamente de disyunciones de minitérminos en los literales y es equivalente a una fórmula dada se conoce como forma normal disyuntiva principal.

Definición: Forma Normal Conjuntiva Principal (FNCP)

Una fórmula que consta sólamente de conjunciones de maxitérminos en los literales y es equivalente a una fórmula dada se conoce como forma normal conjuntiva principal.

Ejemplos

- $f(p,q) = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ [FNDP]

- $f(p,q) = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ [FNCP]

Máquina expendedora de latas de gaseosas

Supongamos tenemos que diseñar una máquina expendedora de gaseosas para que suministre una lata de naranja cuando se pulse el botón A, una de limonada cuando se pulse el botón B y una de gaseosa cola cuando están pulsados ambos botones. La máquina dispone de dos sensores C y D. El primero nos indica si se ha ingresado la ficha correspondiente y el segundo se activa cuando no hay latas disponibles. Si se cumplen las condiciones de suministro, un motor deberá abrir el acceso a la bebida. Se debe diseñar un circuito lógico que controle el motor de apertura.

Caso de aplicación (2)

#D	Botón A	Botón B	Ficha	No hay latas	Resultado
015	on	on	on	on	ninguno
014	on	on	on	off	coca cola
013	on	on	off	on	ninguno
012	on	on	off	off	ninguno
011	on	off	on	on	ninguno
010	on	off	on	off	naranja
009	on	off	off	on	ninguno
008	on	off	off	off	ninguno
007	off	on	on	on	ninguno
006	off	on	on	off	limonada
005	off	on	off	on	ninguno
004	off	on	off	off	ninguno
003	off	off	on	on	ninguno
002	off	off	on	off	ninguno
001	off	off	off	on	ninguno
000	off	off	off	off	ninguno

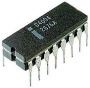
Caso de aplicación (3)

#D	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$
015	1	1	1	1	0
014	1	1	1	0	1
013	1	1	0	1	0
012	1	1	0	0	0
011	1	0	1	1	0
010	1	0	1	0	1
009	1	0	0	1	0
008	1	0	0	0	0
007	0	1	1	1	0
006	0	1	1	0	1
005	0	1	0	1	0
004	0	1	0	0	0
003	0	0	1	1	0
002	0	0	1	0	0
001	0	0	0	1	0
000	0	0	0	0	0

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_3x_4' + x_2x_3x_4'$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_3 x_4' + x_2 x_3 x_4'$$

La función tiene tres variables y los circuitos tienen pines múltiplos de 2!



SOLUCIÓN

Normalizar mediante la transformación de las funciones booleanas en FND y FNC.

La FNDP y FNCP de una función $f(x,y,z)$ se pueden calcular a partir de la tabla de verdad de la función.

x	y	z	$f(x,y,z)$	Minitérminos	Maxitérminos
1	1	1	0	xyz	$x'+y'+z'$
1	1	0	1	xyz'	$x'+y'+z$
1	0	1	1	$xy'z$	$x'+y+z'$
1	0	0	1	$xy'z'$	$x'+y+z$
0	1	1	0	$x'yz$	$x+y'+z'$
0	1	0	0	$x'yz'$	$x+y'+z$
0	0	1	0	$x'y'z$	$x+y+z'$
0	0	0	0	$x'y'z'$	$x+y+z$

$$FND(f(x,y,z)) = xyz' + xy'z + xy'z'$$

$$FNC(f(x,y,z)) = (x'+y'+z')\cdot(x+y'+z')\cdot(x+y'+z)\cdot(x+y+z')\cdot(x+y+z)$$

¿Cuál es la función en forma normal conjuntiva principal para implementar el ejemplo de la máquina expendedora de gaseosas?

Lema

Sea F una fórmula en FNC y G una fórmula en FND. Entonces $\neg F$ es equivalente a una fórmula en FND y $\neg G$ es equivalente a una fórmula en FNC.

Propiedades de la FNC y FND

Demostración:
Si F se encuentra en FNC, entonces para literales $L_{i,j}$ F es la siguiente fórmula:

$$\mathrm{F} = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m} L_{i,j} \right)$$

La negación de esta fórmula es la siguiente:

$$\neg F = \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m} L_{i,j} \right)$$

Esto es equivalente a:

$$\neg F = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m} \neg L_{i,j} \right)$$

Propiedades de la FNC y FND

Teorema

Cada fórmula F es equivalente a alguna fórmula F_1 en FNC y alguna fórmula F_2 en FND.

Relación entre tabla de verdad y formas normales

p	q	$f(p,q)$	$F = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	$G = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V

p	q	$f(p,q)$	$\neg F = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$	$\neg G = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

Algoritmo para calcular la FNC

- **Paso 1:** reemplazar todas las subfórmulas de la forma $F \to G$ por $(\neg F \vee G)$ y todas las subfórmulas de la forma $F \leftrightarrow G$ por $(\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$.

- **Paso 2:** resolver todas las dobles negaciones y aplicar las reglas de DeMorgan siempre que sea posible. Reemplazar $\neg\neg G$ por G, $\neg(G \wedge H)$ por $(\neg G \vee \neg H)$ y $\neg(G \vee H)$ por $(\neg G \wedge \neg H)$.

- **Paso 3:** aplicar la regla de distributividad para $\vee$ siempre que sea posible. Es decir, reemplace todas las subfórmulas de la forma $(G \vee (H \wedge K))$ o $((H \wedge K) \vee G)$ por $((G \vee H) \wedge (G \vee K))$.

Ejemplo

Tranformar a FNC la siguiente fórmula $F = (A \vee B) \rightarrow (\neg B \wedge A)$

Paso 1: utilizar la equivalencia lógica $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$F = \neg(A \vee B) \vee (\neg B \wedge A)$

Paso 2: aplicar leyes de doble negación y DeMorgan
$F = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge A)$ **(FND)**

Paso 3: aplicar ley distributiva:
$F = ((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg B) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \vee A) \equiv$
$(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee A)$
$\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg B \wedge T \wedge (\neg B \vee A)$
$\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg B \wedge (\neg B \vee A)$Ley de absorción
$F = (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee A)$ **(FNC)**

Fórmulas Horn

Definición

Una fórmula F es una fórmula de Horn si está en FNC y cada disyunción contiene como máximo un literal positivo. La conjunción de dos fórmulas de Horn es nuevamente una fórmula de Horn. Esto no es cierto para las disyunciones.

Ejemplo:

$$A \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D)$$

Si una fórmula básica de Horn contiene literales tanto positivos como negativos, entonces se puede escribir como una implicación que involucre solo literales positivos:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \ldots \vee \neg r \vee s) \equiv \neg(p \wedge q \wedge \ldots \wedge r) \vee s \equiv (p \wedge q \wedge \ldots \wedge r) \rightarrow s$$

Fórmulas Horn

Definición

Una fórmula de Horn básica es una fórmula de Horn que no usa $\wedge$. Por ejemplo, $(\neg A \vee \neg B \vee C)$, A y $(\neg B \vee \neg D)$ son fórmulas básicas de Horn. Cada fórmula de Horn es una conjunción de fórmulas básicas de Horn.

Hay tres tipos de fórmulas básicas de Horn:

1. Las que no contienen un literal positivo, por ejemplo $(\neg B \vee \neg D)$.
2. Las que no contienen literales negativos, por ejemplo A.
3. Las que contienen tanto un literal positivo como un literal negativo, ejemplo $(\neg A \vee \neg B \vee C)$.

Fórmulas Horn

Cada fórmula de Horn se puede escribir como una conjunción de implicaciones.

1. Si una fórmula básica contiene literales positivos y negativos entonces se puede escribir como una implicación que incluya sólo literales positivos. Ejemplo: $(\neg A \vee \neg B \vee C) \equiv \neg(A \wedge B) \vee C \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$.
2. Si una fórmula básica de Horn no contiene un literal positivo, entonces se puede escribir como una implicación que implica una contradicción ($\perp$). Ejemplo: $(\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \wedge B) \equiv \neg(A \wedge B) \vee F \equiv (A \wedge B) \rightarrow F$. De lo contrario, si una fórmula básica de Horn no contiene literales negativos, entonces es una fórmula atómica.
3. La fórmula atómica A es equivalente a $F \vee A \equiv \neg(T) \vee A \equiv T \rightarrow A$, donde T es una tautología. De esta manera, cada fórmula básica de Horn se puede escribir como una implicación y cada fórmula de Horn se puede escribir como una conjunción de implicaciones.

Ejemplo

La fómula de Horn $A \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D)$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$(T \rightarrow A) \wedge ((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D) \wedge ((C \wedge D) \rightarrow F)$$

Satisfacibilidad de una fórmula de Horn

Definition

La satisfacibilidad en el contexto de las fórmulas de Horn se refiere a la posibilidad de encontrar una asignación de valores de verdad (verdadero o falso) a las variables en una fórmula de Horn de tal manera que la fórmula completa sea verdadera. Dado que las fórmulas de Horn son un subconjunto específico de las fórmulas en la Forma Normal Conjuntiva (FNC), donde cada cláusula tiene a lo sumo un literal positivo, su satisfacibilidad tiene características únicas que permiten una verificación eficiente.

Algoritmo de Propagación de Unidades

El algoritmo de propagación de unidades se basa en dos pasos repetitivos:

- Identificar un literal unitario: un literal que es el único no satisfecho en una cláusula. En el contexto de las fórmulas de Horn, esto sería el único literal positivo en una cláusula que aún no ha sido asignado como verdadero pero que debe serlo para satisfacer la cláusula.
- Propagar este valor de verdad: asignar el valor necesario al literal unitario identificado para satisfacer la cláusula. Esto puede llevar a que otros literales se conviertan en unitarios en cláusulas restantes, lo cual repetimos hasta que no queden más literales unitarios o hasta que la fórmula sea insatisfacible.

Algoritmo de Propagación de Unidades

Recordar que:

- La satisfacibilidad se refiere a la capacidad de asignar valores de verdad a las variables de una fórmula lógica de manera que la fórmula sea verdadera.
- En las fórmulas de Horn, esto implica encontrar asignaciones para que todas las cláusulas de Horn se satisfagan.

Considere la siguiente fórmula de Horn, que queremos verificar si es satisfacible:

$$\boxed{(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge \neg p \wedge (q \vee \neg r) \wedge \neg q}$$

Algoritmo de Propagación de Unidades

$$(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge \neg p \wedge (q \vee \neg r) \wedge \neg q$$

- La segunda cláusula es una cláusula unitaria,$\neg p$, lo que significa que p debe ser falso para satisfacer esta cláusula. Asignación actual: $p = \text{falso}$.

- Con $p = \text{falso}$, la primera cláusula se reduce a $(\neg q \vee \neg r)$ porque p ya no es relevante para su satisfacción.

- La cuarta cláusula, $\neg q$, es otra cláusula unitaria, indicando que q debe ser falso. Asignación actual: $p = \text{falso}, q = \text{falso}$.

Algoritmo de Propagación de Unidades

$$(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge \neg p \wedge (q \vee \neg r) \wedge \neg q$$

- Con $q = \text{falso}$, la tercera cláusula se reduce a $q \vee \neg r$, que ya está satisfecha negativamente por $q = \text{falso}$, así que nos quedamos con $\neg r$ como relevante. Esto nos lleva a considerar $r = \text{falso}$ para satisfacer la cláusula compuesta por q y r donde q ya es falso. Asignación final: $p = \text{falso}, q = \text{falso}, r = \text{falso}$.

- Dado que todas las cláusulas pueden ser satisfechas con estas asignaciones de valores de verdad, concluimos que la fórmula original es **satisfacible**.

Fin

$\boxed{5}$_home_lwittgenstein_Dropbox_data