Trabajo Práctico 4

PARTE B: Integrales de Superficie

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Cálculo de varias variables”de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.

Expresión de cálculo del área de una superficie dada en forma explícita, implícita y parametrizada

$$A(S) = \iint_S d\sigma = \iint_{Rxy} \sqrt{(-f_x)^2 + (-f_y)^2 + 1}\,dxdy = \iint_R \frac{\|\nabla\varphi\|}{|\nabla\varphi \cdot p|} dA = \iint_{Ruv} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv$$

Integral de superficie de un campo escalar

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_{Ruv} f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv$$

Integral de superficie de un campo vectorial

$$\iint_S \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{n}(x,y,z)d\sigma = \iint_{Ruv} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dudv$$

Parametrización de Superficies, áreas y planos tangentes a superficies parametrizadas

1. Ejercicios tomados de Geometría Analítica: repaso.

   Dadas las siguientes representaciones vectoriales paramétricas de superficies, identifique para cada caso de qué superficie cuádrica se trata, a partir de la eliminación de los parámetros que las describen.

   a) $\mathbf{r}(\beta, t) = (2t \operatorname{ch}\beta, 8t \operatorname{sh}\beta, t^2)$. Es decir:

   $$\begin{cases} x = 2t \operatorname{ch}\beta \\ y = 8t \operatorname{sh}\beta \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \geq 0; \beta \in \mathbb{R}.$$

   b) $\mathbf{r}(\alpha, \beta) = (5\cos\alpha \operatorname{sen}\beta, 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta, 9\cos\beta)$. Es decir:

   $$\begin{cases} x = 5\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \\ y = 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\ z = 9\cos\beta \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 2\pi],\ \beta \in [0, \pi].$$

   c) $\mathbf{r}(\alpha, t) = (4t\cos\alpha, 7t \operatorname{sen}\alpha, t^2)$. Es decir:

   $$\begin{cases} x = 4t\cos\alpha \\ y = 7t \operatorname{sen}\alpha \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \geq 0; \alpha \in [0, 2\pi].$$

2. Determine una parametrización para cada una de las siguientes superficies. (Hay más de una manera correcta de hacerlo.)

   a) Porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ tal que $z \leq 4$.

b) Porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ tal que $z \geq 0$.

c) Cono truncado: parte del cono $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 0$ y $z = 3$.

d) Región esférica: parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, entre los planos $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $z = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

e) Región esférica: parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (son dos partes, considere una vez cada una).

f) Banda cilíndrica circular: porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre los planos $x = 0$ y $x = 3$.

g) Plano inclinado dentro de un cilindro: porción del plano $x + y + z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

h) Plano inclinado dentro de un cilindro: porción del plano $x + y + z = 1$ dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 9$.

3. Dé una parametrización para la superficie que es la parte del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ que se encuentra entre el plano $z = 0$ y la curva cerrada C que está en el el semiespacio $z \geq 0$, dada por $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t, c(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, donde $c(t)$ es una función derivable en $[0, 2\pi]$.

4. Calcule el área de la superficie dada por:

   a) la porción del plano $y + 2z = 2$ dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 1$

   b) La porción de cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, entre los planos $z = 2$ y $z = 6$.

   c) La porción de paraboloide: $z = 2 - x^2 - y^2$, cortado por el cono $z\sqrt{x^2 + y^2}$. (La porción superior es acotada, considere esta porción.)

   d) La porción inferior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

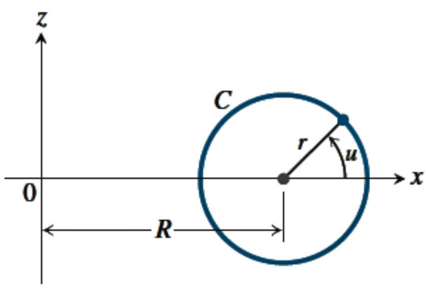
5. Encuentre una ecuación para el plano tangente al cilindro circular parametrizado por $\mathbf{r}(\theta, z) = (3\,\mathrm{sen}(2\theta), 6\,\mathrm{sen}^2\theta, z)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-10 \leq z \leq 10$, en el punto $P_0(3\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0)$ correspondiente a $(\theta, z) = (\frac{\pi}{3}, 0)$.

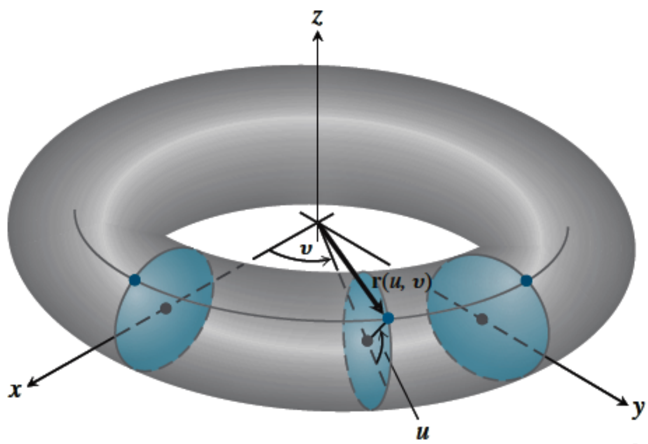
6. Encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie hemisférica parametrizada por $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (4\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, 4\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 4\cos\phi)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, en el punto $P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ correspondiente a $(\phi, \theta) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

7. *a*) Un *toro de revolución* (ver figura) se obtiene al hacer girar un círculo C en el plano xz alrededor del eje z en el espacio. Si C tiene un radio $r > 0$ y su centro es $(R, 0, 0)$, veifique que una parametrización del toro es

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\,\mathrm{sen}\, v, r\,\mathrm{sen}\, u),\ 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi.$$

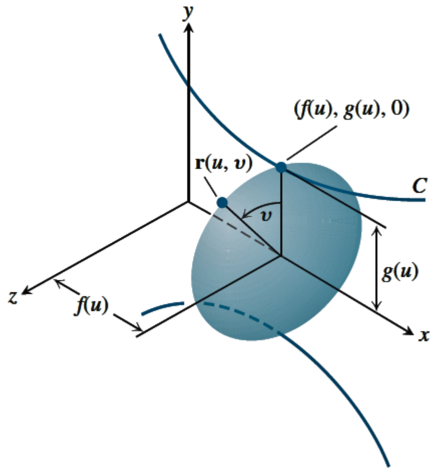
   b) Demuestre que el área de la superficie del toro es $A = 4\pi^2 Rr$.





8. Parametrización de una superficie de revolución: suponga que la curva C parametrizada por $\mathbf{r}(u) = (f(u), g(u))$ gira alrededor del eje x, donde $g(u) > 0$ para $a \leq u \leq b$.

   a) Demuestre que
   $$\mathbf{r}(u, v) = (f(u), g(u)\cos v, g(u)\,\mathrm{sen}\, v)$$
   es una parametrización de la superficie de revolución resultante, donde $0 \leq v \leq 2\pi$ es el ángulo formado por el vector que va desde $(f(u), 0, 0)$ hasta $\mathbf{r}(u, v)$ y el plano xy. Observe que $f(u)$ mide la distancia *a lo largo* del eje de revolución y $g(u)$ mide la distancia *al* eje de revolución.



   b) Encuentre una parametrización para la superficie obtenida al hacer girar la curva $x = y^2$, $y \leq 0$, alrededor del eje x.

9. *a*) Parametrización de un elipsoide: verifique que $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a\cos\theta\cos\phi, b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, c\,\mathrm{sen}\,\phi)$ es una parametrización del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Especifique los valores que deben tomar los parámetros.

   b) Escriba una integral para el área de la superficie del elipsoide, pero no la evalúe.

10. Calcule el área de la proción del paraboloide $x = 4 - y^2 - z^2$ cuya "sombra" (proyección) en plano yz es el anillo $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$.

Integrales de superficie de campos escalares y de campos vectoriales

11. Calcule la integral de la función f dada en la superficie S indicada:

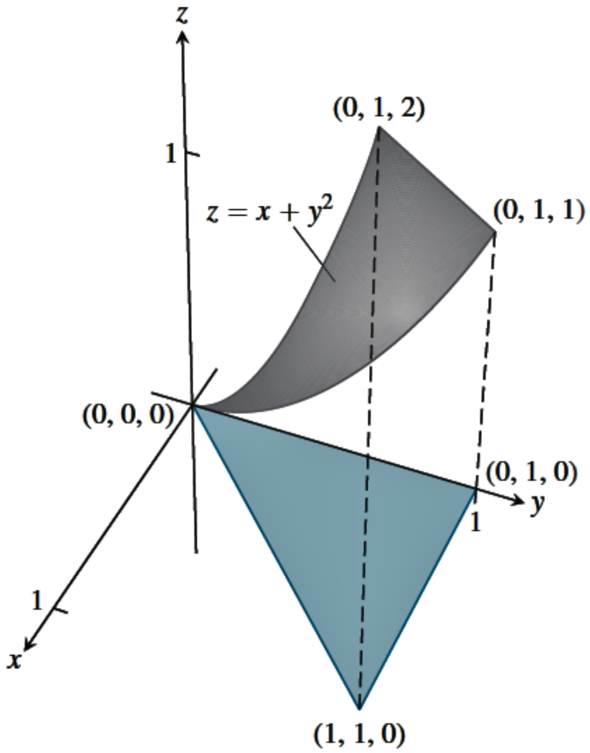
    a) $f(x, y, z) = x$ sobre $S : y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

    b) $f(x, y, z) = x^2$ sobre la esfera unitaria $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

    c) $f(x, y, z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$ sobre el domo parabólico $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \leq 0$.

    d) $f(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie del sólido rectangular cortado en el primer octante por los planos $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

    e) $f(x, y, z) = z - x$, sobre la porción de la gráfica de $z = x + y^2$ arriba del triángulo en el plano xy, con vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$ (véase la figura).



12. Utilice una parametrización para determinar el flujo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de la superficie S en la dirección dada.

   a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, x, -3z)$ a través de la superficie del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ cortado por los planos $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$, en la dirección que se aleja del eje x.

   b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ a través de la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el primer octante, en la dirección que se acerca al origen de coordenadas.

13. Encuentre las integrales de superficie de los campos vectoriales dados, a través de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ en el primer octante, en la dirección que se aleja del origen.

   a) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$.

   b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 1)$.

14. Determine el centroide de la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está en el primer octante.

Teorema de Stokes

15. Utilice el teorema de Stokes para calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C mediante la integral de superficie correspondiente.

   a) $\mathbf{F} = (x^2, 2x, z^2)$ y C: la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy, en sentido antihorario.

   b) $\mathbf{F} = (2y, 3x, -z^2)$ y C: la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano xy, en sentido antihorario.

16. Sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal exterior de la capa elíptica S dada por $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$, $z \geq 0$, y sea $\mathbf{F} = (y, x^2, (x^2 + y^4)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} e^{\sqrt{xyz}})$. Calcule el flujo del rotacional $\displaystyle\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$, utilizando el teorema de Stokes.

17. Calcule el flujo del rotacional a través de la superficie S en la dirección del vector unitario normal "hacia arriba" $\mathbf{n}$, $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ en cada caso:

    a) $\mathbf{F} = (2z, 3x, 5y)$ y S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j} + (4 - r^2)\mathbf{k}$, con $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

    b) $\mathbf{F} = (3y, 5 - 2x, z^2 - 2)$ y S: $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (\sqrt{3} \operatorname{sen} \phi \cos \theta,\ \sqrt{3} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,\ \sqrt{3} \cos \phi)$, con $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

18. Sea S el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con $0 \leq z \leq h$, junto con su tapa superior, $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = h$. Sea $\mathbf{F} = (-y, x, x^2)$. Utilice el teorema de Stokes para encontrar el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ hacia fuera a través de S.

19. Demuestre que $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$, es la misma para cualquier supercie orientada S que tiene como frontera la curva C, siempre que la orientación de S induzca la misma dirección positiva en C.

20. Sea $f(x, y, z)$ una función cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas. Pruebe que $\mathbf{rot\,grad}\, f = \mathbf{0}$, es decir, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

21. Utilice la identidad $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ y el teorema de Stokes para demostrar que las circulaciones de los siguientes campos alrededor de la frontera de cualquier superficie orientable suave en el espacio son cero.

    a) $\mathbf{F} = (2x, 2y, 2z)$.

    b) $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$.

    c) $\mathbf{F} = \nabla \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

    d) $\mathbf{F} = \nabla f$.

22. Demuestre que si $\mathbf{F} = (x, y, z)$, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

23. Demuestre que el rotacional de

$$\mathbf{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right)$$

es igual a cero, pero que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es diferente de cero si C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. (Note que el dominio de $\mathbf{F}$ no es simplemente conexo.)

Divergencia y Teorema de Gauss

24. Calcule la divergencia de los siguientes campos vectoriales:

    a) El campo giratorio $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.

    b) El campo radial $\mathbf{F} = (x, y)$.

    c) El campo gravitacional $\mathbf{F} = -GmM\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, con G, m y M, constantes.

25. Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\mathbf{F}$ hacia fuera de la superficie S frontera de D, siendo

a) $\mathbf{F} = (y - x, z - y, y - x)$ y D el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

b) $\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2 z)\mathbf{j} + (4x^2 y^3)\mathbf{k}$ y D la región acotada en el primer octante comprendida entre $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 3$.

26. *a*) Demuestre que si las derivadas paricales necesarias de los componentes del campo $\mathbf{G} = (M, N, P)$ son continuas, entonces $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G} = 0$.

    b) ¿Qué puede concluir acerca del flujo del campo $\nabla \times \mathbf{G}$ a través de una superficie cerrada? Justifique su respuesta.

27. Sean $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ campos vectoriales derivables y sean a y b constantes reales arbitrarias. Verifique las siguientes identidades.

    a) $\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$.

    b) $\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$.

    c) $\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$.

28. Sean $\mathbf{F}$ un campo vectorial diferenciable (sus componentes son diferenciables) y g una función escalar diferenciable definida en $\mathbb{R}^3$. Verifique las identidades:

    a) $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$.

    b) $\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$.

29. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyos componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden en $\mathbb{R}^3$ y sea D una región acotada por una superficie cerrada suave, S. Si $|\mathbf{F}| \leq 1$, ¿se puede acotar $\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$? Justifique su respuesta.

30. Demuestre que el flujo del campo vectorial de posición $\mathbf{F} = (x, y, z)$ hacia fuera, a través de una superficie cerrada suave S es el triple del volumen de la región encerrada por la superficie.

31. Sea $\mathbf{F} = (x, y, z)$ y suponga que una superficie S y una región sólida D satisfacen las hipótesis del teorema de la divergencia. Demuestre que el volumen de D está dado por la fórmula
$$\text{Volumen de D} = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

32. Entre todos los sólidos rectangulares definidos por las desigualdades $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq 1$, encuentre aquél para el cual el flujo total de $\mathbf{F} = (-x^2 - 4xy, -6yz, 12z)$ hacia fuera a través de las seis caras sea máximo. ¿Cuál es el flujo máximo?

33. Demuestre que el flujo hacia fuera de un campo vectorial constante $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ a través de cualquier superficie cerrada a la que se aplique el teorema de la divergencia es igual a cero.

34. Recordando que el Laplaciano de un campo escalar se define como la divergencia del gradiente del campo escalar, es decir: $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$, pruebe que si f es un campo escalar definido en $\mathbb{R}^3$, entonces
$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

35. Recordando que el Laplaciano de un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (M, N, P)$, se define como el campo vectorial de los Laplacianos de las componentes M, N y P, pruebe que el Laplaciano de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$ cumple:
$$\Delta \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$

36. Una función f es **armónica** en una región D en el espacio si satisface la **ecuación de Laplace**

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

en D.

a) Suponga que f es armónica en una región acotada D encerrada por una superficie suave S y que $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a S elegido. Demuestre que la integral de superficie sobre S de $\nabla f \cdot \mathbf{n}$ es igual a cero. (Observe que en este caso se está integrando la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{n}$.)

b) Demuestre que si f es armónica en D, entonces

$$\iint_S f\nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2\, dV.$$

Ejercicios tomados en exámenes

37. Los puntos de la parte del paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ que cumplen $z \leq 4$, forman una superficie. Determine el área de la misma.

38. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$.

a) Halle el rotacional de $\mathbf{F}$. Interprete.

b) Calcule la integral de superficie

$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

c) Indique si $\mathbf{F}$ es un campo conservativo o no. Justifique.

39. Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2+y)\mathbf{i}+(y^2+x)\mathbf{j}+ze^z\mathbf{k}$ para la trayectoria recta que va desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 0, 1)$. Indique si puede asegurar que el trabajo no cambiará si se considera cualquier trayectoria que una los mismos puntos.

40. Plantee una integral para calcular el área de la superficie que es la parte del paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ que se encuentra en el primer octante, entre los planos $z = 1$ y $z = 4$.

41. Plantee fórmulas para hallar el centro de masa de una capa delgada que es la parte superior de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 9$ cortada por el cono dado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, sabiendo que la densidad en cada punto es la función $\delta(x, y, z)$.

42. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ y sea S la superficie que es el disco inlcuido en el plano $y = 1$ con centro en el punto $(0, 1, 0)$ y radio 1, con orientación dada por el vector $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ en cada punto. Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

43. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$. Indique, justificando su respuesta, si $\mathbf{F}$ es o no conservativo en $\mathbb{R}^3$.

44. Considere el sólido formado por la parte del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 \leq 4$ que está comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$; sea el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, yz, zx^2)$.

a) Calcule el flujo hacia fuera a través de la superficie del sólido de $\mathbf{F}$. Haga un desarrollo detallado y trabaje con prolijidad. Justifique sus pasos.

b) Calcule el rotacional de F. Indique si se trata o no de un campo conservativo.

45. Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$, cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Indique para cada afirmación si es verdadera o falsa. Debe justificar todas sus respuestas.

   a) $\square$ Se puede asegurar que para todo punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se cumple $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

   b) $\square$ Si $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ para todo punto de $\mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$.

   c) $\square$ Sea D la región sólida que se encuentra dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y sea S la superficie frontera de D, con orientación hacia el origen de coordenadas en cada punto. Entonces $\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$.

   d) $\square$ La dirección de máximo crecimiento del campo escalar $\nabla \cdot \mathbf{F}$ en un punto (a, b, c) viene dada por el vector $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ evaluado en (a, b, c).

46. Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$, cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Indique para cada afirmación si es verdadera o falsa. Debe justificar todas sus respuestas.

   a) Se puede asegurar que para todo punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se cumple $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$. Justifique.

   b) Si $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ para todo punto de $\mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$.

   c) Si $\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$, entonces existe un campo escalar f definido en $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ en $\mathbb{R}^3$.

   d) Si $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$ y C es la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

   e) Si S es una superficie orientada, con vector normal unitario en cada punto $\mathbf{n}$, f es un campo escalar definido en todos los puntos de S y $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{n}$, entonces la integral de superficie de $\mathbf{F}$ a través de S cumple

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S f\, d\sigma.$$

   f) Si C es una curva suave por partes y S es una superficie orientada cuya frontera es la curva C, si las componentes de $\mathbf{F}$ tienen derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^3$, siempre se cumple que $\int_C \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$.

   g) Sea D la región del semiespacio $z \geq 0$ que se encuentra dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y sea S la superficie dada por $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, con orientación alejándose del origen. Entonces

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

   h) La dirección de máximo crecimiento del campo escalar $\nabla \cdot \mathbf{F}$ en un punto (a, b, c) viene dada por el vector $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ evaluado en (a, b, c).

47. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$.

   a) Halle el rotacional de $\mathbf{F}$. Interprete.

b) Calcule la integral de superficie

$$\iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

c) Indique si $\mathbf{F}$ es un campo conservativo o no. Justifique.

48. Enuncie el Teorema de Stokes.

49. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, x + z)$.

a) Calcule div $\mathbf{F}(1, 2, 3)$ e interprete.

b) Plantee dos fórmulas para calcular el flujo a lo largo de la curva C que viene dada por la representación paramétrica $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

c) Indique si $\mathbf{F}$ es o no conservativo, justificando su respuesta.

50. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

a) $\boxed{}$ Sea S la superficie que es la parte del paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ que está debajo del plano $z = 1$, orientada por un campo normal unitario tal que en cada punto de S el vector $\mathbf{n}$ apunta en la dirección alejándose del eje z. Entonces el flujo del campo vectorial dado por $\mathbf{G}(x, y, z) = (-x, -z^2, z - 1)$ a través de S (en la dirección de $\mathbf{n}$) se puede calcular resolviendo la integral

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt,$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, xz, xz^2)$ y $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \frac{1}{2} \operatorname{sen} t, 1)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

b) $\boxed{}$ Si f es un campo escalar diferenciable definido en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^2$, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales, entonces $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

c) $\boxed{}$ Si el campo vectorial $\mathbf{F}$ viene dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, el flujo hacia fuera a través de la esfera unitaria centrada en el origen es igual al triple del volumen de la esfera.

d) $\boxed{}$ Sea S la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, orientada por un campo normal unitario tal que en cada punto de S el vector $\mathbf{n}$ apunta en la dirección hacia del origen de coordenadas. Entonces el flujo del campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x, -z^2, z - 1)$ a través de S (en la dirección de $\mathbf{n}$) es 0.

e) $\boxed{}$ Una integral para hallar el área de la superficie S que es el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ es:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi \sqrt{c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + a^4 \cos^2 \varphi}\, dr\, d\theta.$$

f) $\boxed{}$ La abscisa del centro de masa de una placa delgada acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = 2y - y^2$, cuya densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y)$, se puede calcular como

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} x\, \delta(x, y)\, dx\, dy}{\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x}}^{+\sqrt{x}} \delta(x, y)\, dy\, dx}.$$

g) $\square$ Una función potencial de un campo vectorial $\mathbf{F}$, definido en una región D, es una función escalar f, definida en D, cuyo gradiente coincide con $\mathbf{F}$.

h) $\square$ Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en una región D, y C es una curva suave cerrada incluida en D, y la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C da 0, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo en D.

i) $\square$ Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo, gradiente de una función (potencial) f, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

j) $\square$ El flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de una superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, es $\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v))|r_u \times r_v|\, du\, dv$.

k) $\square$ Una fórmula para hallar el área de una superficie suave parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, viene dada por $\iint_D |r_u \times r_v|\, du\, dv$.

l) $\square$ Sea $\mathbf{F}$ un campo de fuerzas continuo sobre una región que contiene a una curva suave C, entonces el trabajo que realiza la fuerza a lo largo de la curva C es $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$.

m) $\square$ El teorema fundamental de las integrales de línea da una fórmula para calcular la integral de línea, a lo largo de una curva suave C, de un campo vectorial cualquiera $\mathbf{F}$.

n) $\square$ Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden en $\mathbb{R}^3$. Si $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$ es una forma diferencial exacta entonces $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

ñ) $\square$ Si f es un campo escalar diferenciable definido en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^2$, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales, entonces $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$.

Lista de ejercicios seleccionados: 1, 2acdf, 4, 5, 10, 11ad , 12, 15, 25, 33, 34