Notación Asintótica

Contexto

- Matemáticamente: “crecimiento” de func.
  - Con su correspondiente def. formal
- Cantidades de operaciones
  - Para los problemas computables
- Función de tamaño de la entrada
  - “Monótonamente” crecientes
- Asintótica
  - Variable (entrada) “crece” arbitrariamente

Definición

Una función **t(n)** está **en el orden de f(n)** si existe una constante real positiva **c** y un umbral $\mathbf{u_0}$ tal que $t(n) \leq c.f(n)\ \forall\ n > u_0$

Notación: Conjuntos

N (incluye el 0)

$R^{\geq 0}$: $x \in R$, $x \geq 0$

R^{+}: $x \in R$, $x > 0$

Definición

Notación: Cuantificadores

$\exists$

$\exists^{\infty}$

$\forall^{\infty}$

$\forall$

Definición

Notación: Cuantificadores

$\exists$

$\exists^{\infty}$

$\forall^{\infty}$

$\forall$

$O(f(n)) = \{t: N \rightarrow R^{\geq 0} \mid (\exists\, c \in R^{+})\ (\forall^{\infty}\, n \in N)\ [t(n) \leq c\, f(n)]\ \}$

Definición

Notación: Cuantificadores

$\exists$

$\exists^{\infty}$

$\forall^{\infty}$

$\forall$

$O(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^{\geq 0} \;/\; (\exists\, c \in R^{+})\; (\forall^{\infty}\, n \in N)\; [t(n) \leq c\, f(n)]\, \}$

¿Podría ser $t:N \rightarrow R^{+}$?

Definición

$$\mathbf{O(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^{\geq 0} \,/\, (\exists\, c \in R^{+})\, (\forall^{\infty}\, n \in N)\, [t(n) \leq c\, f(n)]\, \}}$$

Otra definición:

$$\mathbf{O(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^{+} \,/\, \exists\, c \in R^{+}, n_0 \in N \text{ tq } t(n) \leq c\, f(n), n \geq n_0\}}$$

Definición

$$O(f(n)) = \{t: N \rightarrow R^{\geq 0} \,/\, (\exists\, c \in R^{+})\ (\forall^{\infty}\, n \in N)\ [t(n) \leq c\, f(n)]\ \}$$

Otra definición:

$$O(f(n)) = \{t: N \rightarrow R^{+} \,/\, \exists\, c \in R^{+},\ n_0 \in N \text{ tq } t(n) \leq c\, f(n),\ n \geq n_0\}$$

Es más "precisa“:

- R^{+} (cantidades de operaciones)
- “Reemplazando” $\forall^{\infty}$ por el “umbral”, es decir con las excepciones (a la cota del $\leq$) para los valores de n anteriores a n_0

Terminología

- Conjuntos ==> $\in$
- "está en el orden de" (conjuntos)
- "es"
- $n^2 = O(n^3)$ (one-way equality, podría relacionarse con el “es”)
- $f(n) = 2n^2 + O(n)$
- $2n^2 + O(n) = O(n^2)$

(cont.)...

Terminología

(cont.)...

- Se acepta que $t(n) \in O(f(n))$ sii $\exists\ c \in R^+$, $n_0 \in N$ tq $0 \leq t(n) \leq c\ f(n)$; $n \geq n_0$

Sin poner restricciones para $n < n_0$, donde t(n) y f(n) podrían dar valores negativos o no estar definidas, por ejemplo:

$O(n / \log n)$, $n = 0$ y $n = 1$ no están definidos

$t(n) = n^3 - 3n^2 - n - 8 \in O(n^3)$, aunque
$n \leq 3 \Longrightarrow t(n) < 0$

Definiciones

$$O(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^+ \,/\, \exists\, c \in R^+, n_0 \in N \text{ tq } t(n) \leq c\, f(n), n \geq n_0\}$$

$$\Omega(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^+ \,/\, \exists\, c \in R^+, n_0 \in N \text{ tq } t(n) \geq c\, f(n), n \geq n_0\}$$

Se suele mencionar que tanto $O(f(n))$ como $\Omega(f(n))$ son "ambiguas" o "excesivas" en cuanto a que se puede usar cualquier función como cota. Más precisión: $\Theta(f(n))$

Definiciones

$$\mathbf{O(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^+ \,/\, \exists\, c \in R^+,\, n_0 \in N \text{ tq } t(n) \leq c\, f(n),\, n \geq n_0\}}$$

$$\mathbf{\Omega(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^+ \,/\, \exists\, c \in R^+,\, n_0 \in N \text{ tq } t(n) \geq c\, f(n),\, n \geq n_0\}}$$

Se suele mencionar que tanto $O(f(n))$ como $\Omega(f(n))$ son "ambiguas" o "excesivas" en cuanto a que se puede usar cualquier función como cota. Más precisión: $\Theta(f(n))$

$$\mathbf{\Theta(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^+ \,/\, \exists\, c_1, c_2 \in R^+,\, n_0 \in N \text{ tq } c_1 f(n) \leq t(n) \leq c_2 f(n),\, n \geq n_0\}}$$

Propiedades

- $g(n) \in \Omega(f(n))$ sii $f(n) \in O(g(n))$ (Regla de Dualidad)
- $g(n) \in \Theta(f(n))$ sii $g(n) \in O(f(n))$ y $g(n) \in \Omega(f(n))$
- $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$

Propiedades

- $g(n) \in \Omega(f(n))$ sii $f(n) \in O(g(n))$ (Regla de Dualidad)
- $g(n) \in \Theta(f(n))$ sii $g(n) \in O(f(n))$ y $g(n) \in \Omega(f(n))$
- $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$

¿Cómo se demuestran? (definiciones de referencia)

Propiedades

- *Reflexividad* y *Transitividad* de la pertenencia a O(), Ω () y Θ()
- $f(n) \in O(f(n))$
- Si $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(h(n))$ ==> $f(n) \in O(h(n))$

¿Por qué "serían" ciertas?

¿Cómo demostrarlas?

Regla del Umbral

- El umbral n_0 de las definiciones de O(), Ω() y Θ() puede puede resultar útil pero nunca es necesario cuando se consideran funciones estrictamente positivas, es decir t, f: $N \to R^+$
- Regla del Umbral: f, t: $N \to R^+$,
  $t(n) \in O(f(n))$ <==> existe $c \in R^+$ tal que
  $t(n) \leq c\, f(n)$ para todo natural n

Regla del Umbral

- El umbral n_0 de las definiciones de O(), $\Omega()$ y $\Theta()$ puede puede resultar útil pero nunca es necesario cuando se consideran funciones estrictamente positivas, es decir t, f: $N \rightarrow R^+$
- Regla del Umbral: f, t: $N \rightarrow R^+$, $t(n) \in O(f(n))$ <==> existe $c \in R^+$ tal que $t(n) \leq c\, f(n)$ para todo natural n

$O(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^+ \,/\, \exists\, c1 \in R^+, n_0 \in N \text{ tq } t(n) \leq c1\, f(n), n \geq n_0\}$

Regla del Umbral

1) f, t: $N \rightarrow R^+$, $t(n) \in O(f(n))$ ==> existe $c \in R^+$ tal que $t(n) \leq c\, f(n)\ \forall\ n \in N$

$t(n) \in O(f(n))$ ==> $\exists\ c1 \in R^+, n_0 \in N$ tq $t(n) \leq c1\ f(n), n \geq n_0$ **(a)** xq

$O(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^+ / \exists\ c1 \in R^+, n_0 \in N \text{ tq } t(n) \leq c1\ f(n), n \geq n_0\}$

Deberíamos encontrar c tq $t(n) \leq c\ f(n)\ \forall\ n \in N$

Se puede definir $b = \text{máx}\{t(n) / f(n)\}$ con $0 \leq n < n_0$

==> $t(n)/f(n) \leq b$ ==> $t(n) \leq b\ f(n)$ $0 \leq n < n_0$ **(b)**

Teniendo en cuenta **(a)** y **(b)** se define c = max(b, c1) y valdría

$c \in R^+$ tal que $t(n) \leq c\ f(n)\ \forall\ n \in N$

Faltaría probar la recíproca, <==

Regla del Umbral

$t(n) \in O(f(n))$ <==> existe $c \in R^+$ tal que $t(n) \leq c\ f(n)$ para todo natural n

2) Existe $c \in R^+$ tal que $t(n) \leq c\ f(n)\ \forall\ n \in N$ ==> $t(n) \in O(f(n))$

Esta demostración puede considerarse trivial por definición de O(f(n))

$$O(f(n)) = \{t:N \rightarrow R^+ \ /\ \exists\ c1 \in R^+,\ n_0 \in N \text{ tq } t(n) \leq c1\ f(n),\ n \geq n_0\}$$

De 1) y 2) se tiene demostrada la Regla del Umbral

Regla del Máximo

$f, g: N \to R^+$, $O(f(n) + g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$

Idea de la demostración: se usará que

$$f(n) + g(n) = \min(f(n), g(n)) + \max(f(n), g(n))$$

$0 \le \min(f(n), g(n)) \le \max(f(n), g(n))$

sumando $\max(f(n), g(n))$ a todos los términos

$\max(f(n), g(n)) \le \min(f(n), g(n)) \le \max(f(n), g(n))$

$$\max(f(n), g(n)) \le f(n) + g(n) \le 2 \max(f(n), g(n))$$

Cont.

Regla del Máximo

$f, g: N \rightarrow R^{+}$, $O(f(n) + g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$

Cont.

$$\max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \leq 2 \max(f(n), g(n))$$

- $t(n) \in O(f(n) + g(n)) \Longrightarrow t(n) \in O(\max(f(n), g(n))$
- $t(n) \in O(\max(f(n), g(n)) \Longrightarrow t(n) \in O(f(n) + g(n))$

Regla del Máximo

$f, g: N \rightarrow R^+$, $O(f(n) + g(n)) = O(max(f(n), g(n)))$

Cont.

$$max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \leq 2\ max(f(n), g(n))$$

- $t(n) \in O(f(n) + g(n)) \implies t(n) \in O(max(f(n), g(n))$
- $t(n) \in O(max(f(n), g(n)) \implies t(n) \in O(f(n) + g(n))$

Regla del Máximo

$f, g: N \rightarrow R^+$, $O(f(n) + g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$

Cont.

$$\max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \leq 2 \max(f(n), g(n))$$

- $t(n) \in O(f(n) + g(n)) \Longrightarrow t(n) \in O(\max(f(n), g(n))$
- $t(n) \in O(\max(f(n), g(n)) \Longrightarrow t(n) \in O(f(n) + g(n))$

Regla del Máximo

- Vale para Θ
- Vale para suma de cualquier cantidad de func.
- Tener en cuenta que vale solo para funciones $f: N \rightarrow R^+$, porque sino

  $\Theta(n) = \Theta(n + n^2 - n^2) = \Theta(\max(n, n^2, -n^2)) =$

  $= \Theta(n^2)$ Erróneo...

Regla del Máximo

- Vale para Θ
- Vale para suma de cualquier cantidad de func.
- Tener en cuenta que vale solo para funciones $f: N \rightarrow R^+$, porque sino

$\Theta(n) = \Theta(n + n^2 - n^2) = \Theta(\max(n, n^2, -n^2)) =$

$= \Theta(n^2)$

Error

Regla del Máximo

- Vale para Θ
- Vale para suma de cualquier cantidad de func.
- Tener en cuenta que vale solo para funciones $f: N \rightarrow R^+$, porque sino

$$\Theta(n) = \Theta(n + n^2 - n^2) = \Theta(\max(n, n^2, -n^2)) =$$
$$= \Theta(n^2)$$

Error

Error, $-n^2$ no es $N \rightarrow R^+$

Regla del Límite

- La idea de la notación **asintótica** tiene relación con la idea de crecimiento arbitrario de la E/ y del *comportamiento* de las funciones *en el límite*, de allí que se puede relacionar la notación asintótica con los límites

  1) lim f(n) / g(n) $\in R^+$ ==> f(n) $\in$ O(g(n)) y g(n) $\in$ O(f(n))
  n $\rightarrow$ inf.
  2) lim f(n) / g(n) = 0 ==> f(n) $\in$ O(g(n)) y g(n) $\notin$ O(f(n))
  n $\rightarrow$ inf.
  3) lim f(n) / g(n) $\rightarrow \infty$ ==> f(n) $\notin$ O(g(n)) y g(n) $\in$ O(f(n))
  n $\rightarrow$ inf.

Regla del Límite

- Considerando los tres conjuntos definidos para la notación asintótica

1) $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) \in R^{+} \implies f(n) \in \Theta(g(n))$

2) $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) = 0 \implies f(n) \in O(g(n))$ y $f(n) \notin \Theta(g(n))$

3) $\lim_{n \to \text{inf.}} f(n) / g(n) \to \infty \implies f(n) \in \Omega(g(n))$ y $f(n) \notin \Theta(g(n))$