Práctica 1

1. Probar:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Para probar una igualdad de conjuntos $A = B$, se debe probar que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$ a la vez.

1. **Probar que** $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$:
    i. Sea $x \in (A \cup (B \cap C))$. Se quiere probar que esto implica que $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$
    ii. $x \in (A \cup (B \cap C))$ Por hipótesis
    iii. $\implies \; x \in A \lor x \in (B \cap C)$ Por definición de unión
    iv. $\implies \; x \in A \lor (x \in B \land x \in C)$ Por definición de intersección
    v. $\implies \; (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C)$ Por propiedad distributiva de la lógica
    vi. $\implies \; (x \in (A \cup B)) \land (x \in (A \cup C))$ Por definición de unión
    vii. $\implies \; x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ Por definición de intersección
2. **Probar que** $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$:
    i. Sea $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$. Se quiere probar que esto implica que $x \in (A \cup (B \cap C))$
    ii. $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ Por hipótesis
    iii. $\implies \; (x \in (A \cup B)) \land (x \in (A \cup C))$ Por definición de intersección
    iv. $\implies \; (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C)$ Por definición de unión
    v. $\implies \; x \in A \lor (x \in B \land x \in C)$ Por propiedad distributiva de la lógica
    vi. $\implies \; x \in A \lor (x \in B \cap C)$ Por definición de intersección
    vii. $\implies \; x \in A \cup (B \cap C)$ Por definición de unión

Por lo tanto queda demostrado que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Probar:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Para probar una igualdad de conjuntos $A = B$, se debe probar que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$ a la vez.

1. **Probar que** $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:
    i. Sea $x \in (\overline{A \cup B})$. Se quiere probar que esto implica que $x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$
    ii. $x \in (\overline{A \cup B})$ Por hipótesis
    iii. $\implies x \notin (A \cup B)$ Por definición de complemento
    iv. $\implies \neg(x \in (A \cup B))$ Por definición de $\notin$
    v. $\implies \neg(x \in A \vee x \in B)$ Por definición de unión
    vi. $\implies \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$ Por Ley de De Morgan
    vii. $\implies x \notin A \wedge x \notin B$ Por definición de $\notin$
    viii. $\implies x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}$ Por definición de complemento
    ix. $\implies x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$ Por definición de intersección
2. **Probar que** $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$:
    i. Sea $x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$. Se quiere probar que esto implica que $x \in (\overline{A \cup B})$
    ii. $x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$ Por hipótesis
    iii. $\implies x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}$ Por definición de intersección
    iv. $\implies x \notin A \wedge x \notin B$ Por definición de complemento
    v. $\implies \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$ Por definición de $\notin$
    vi. $\implies \neg(x \in A \vee x \in B)$ Por Ley de De Morgan
    vii. $\implies \neg(x \in (A \cup B))$ Por definición de unión
    viii. $\implies x \notin (A \cup B)$ Por definición de $\notin$
    ix. $\implies x \in (\overline{A \cup B})$ Por definición de complemento

Por lo tanto queda demostrado que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3. Probar:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Para probar una igualdad de conjuntos $A = B$, se debe probar que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$ a la vez.

1. **Probar que** $\overline{\overline{A}} \subseteq A$:
    i. Sea $x \in \overline{\overline{A}}$. Se quiere probar que esto implica que $x \in A$
    ii. $x \in \overline{\overline{A}}$ Por hipótesis
    iii. $\implies x \notin \overline{A}$ Por definición de complemento
    iv. $\implies \neg(x \in \overline{A})$ Por definición de $\notin$
    v. $\implies \neg(x \notin A)$ Por definición de complemento
    vi. $\implies \neg(\neg(x \in A))$ Por definición de $\notin$

vii. $\implies x \in A$ Por ley de doble negación

2. **Probar que $A \subseteq \overline{\overline{A}}$:**
   i. Sea $x \in A$. Se quiere probar que esto implica que $x \in \overline{\overline{A}}$
   ii. $x \in A$ Por hipótesis
   iii. $\implies \neg(\neg(x \in A))$ Por ley de doble negación
   iv. $\implies \neg(x \notin A)$ Por definición de $\notin$
   v. $\implies \neg(x \in \overline{A})$ Por definición de complemento
   vi. $\implies x \notin \overline{A}$ Por definición de $\notin$
   vii. $\implies x \in \overline{\overline{A}}$ Por definición de complemento

Por lo tanto queda demostrado que $\overline{\overline{A}} = A$.

4. Sea A el conjunto de los números naturales tales que, si son mayores que 5 o bien terminan en 5, entonces contienen algún dígito 1 ó 2

La condición es una implicación del estilo $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$, donde:

- $p(x) : x > 5$
- $q(x) : x \text{ termina en } 5$
- $r(x) : x \text{ contiene } 1$
- $s(x) : x \text{ contiene } 2$

a. Cuáles de los siguientes números pertenecen a A: $3, 5, 10, 15, 30, -10$

- 3: Como la condición es $(F \vee F) \rightarrow (F \vee F)$ el resultado es V y por lo tanto $3 \in A$
- 5: Como la condición es $(F \vee V) \rightarrow (F \vee F)$ el resultado es F y por lo tanto $5 \notin A$
- 10: Como la condición es $(V \vee F) \rightarrow (V \vee F)$ el resultado es V y por lo tanto $10 \in A$
- 15: Como la condición es $(V \vee V) \rightarrow (V \vee F)$ el resultado es V y por lo tanto $15 \in A$
- 30: Como la condición es $(V \vee F) \rightarrow (F \vee F)$ el resultado es F y por lo tanto $30 \notin A$
- -10: Como $-10 \notin \mathbb{N}$, $-10 \notin A$

b. Expresar el enunciado como una fórmula proposicional donde m significa "mayores que 5", t es "terminan en 5", u es "contiene algún

dígito 1" y d es "contiene algún dígito 2"

- m : mayores que 5
- t : terminan en 5
- u : contiene algún dígito 1
- d : contiene algún dígito 2

$A = (m \vee t) \rightarrow (u \vee d)$

c. Transformar la fórmula del inciso anterior de manera que no tenga una implicación y aplicar una ley de Morgan al resultado. Expresarlo en una frase.

Usamos la equivalencia: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

1. $(m \vee t) \rightarrow (u \vee d)$
2. $\neg(m \vee t) \vee (u \vee d)$
3. $(\neg m \wedge \neg t) \vee (u \vee d)$ Por De Morgan

La frase es: A es el conjunto de los números naturales tales que o bien no son mayores que 5 ni terminan en 5, o bien contienen algún dígito 1 o bien contienen algún dígito 2.

5. Sean los conjuntos:

$$X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ es impar}\}$$

$$Y = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y \text{ es primo}\}$$

$$Z = \{z \mid z \in \mathbb{N}, z \text{ es múltiplo de } 3\}$$

Describir cada uno de los siguientes conjuntos:

a. $X \cap Y$

Son los números que son tanto impares como primos. Como el único número primo par es el 2 y todos los demás son impares, $X \cap Y$ es el conjunto de todos los números primos excepto el 2.

b. $X \cap Z$

Son los números que son tanto impares como múltiplos de 3. Por lo tanto $X \cap Z = \{3, 9, 15, 21, 27, ...\}$

c. $Y \cap Z$

Son los números que son tanto primos como múltiplos de 3. Como el único número primo que es múltiplo de 3 es el 3 mismo, $Y \cap Z = \{3\}$.

d. $Z - Y$

Son los números que son múltiplos de 3 pero NO son primos. Por lo tanto son todos los múltiplos de 3 excepto el 3 mismo: $Z - Y = \{6, 9, 12, 15, 18, ...\}$

e. $X - (Y \cap Z)$

Se sabe que $Y \cap Z = \{3\}$

Por lo tanto se puede reformular la expresión como $X - \{3\}$

En conclusión, son todos los números impares excepto el 3: $X - (Y \cap Z) = \{1, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$

f. $(Y \cap Z) - X$

Se sabe que $Y \cap Z = \{3\}$

Por lo tanto se puede reformular la expresión como $\{3\} - X$

Como 3 es impar, $3 \in X$. Por lo tanto, $\{3\} - X = \emptyset$.

g. $X \cup Y$

Son los números que son impares o primos o ambos.

6. Calcular los conjuntos de partes en los siguientes casos:

a. $\emptyset$

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

b. $\{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$

c. $\{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

d. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

e. $\{a, \{b, c\}\}$

$\mathcal{P}(\{a, \{b, c\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\}$

7. Presentar una lista con todos los elementos en cada uno de los conjuntos siguientes:

a. $\{x, y\} \times \{a, b, c\}$

$\{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$

b. $\{a, b, c\} \times \{x, y\}$

$\{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$

c. $\{x, y\} \times \{y, x\}$

$\{(x, y), (x, x), (y, y), (y, x)\}$

d. $\{x, y\}^2 \times \emptyset$

$\emptyset$

e. $\emptyset^{10} \times \{2, 3, 4\}^{20}$

$\emptyset$

f. $\{1\}^5$

$\{1\} \times \{1\} \times \{1\} \times \{1\} \times \{1\} = \{(1, 1, 1, 1, 1)\}$

g. $\{1, 2\} \times \{a\} \times \{a, b\}$

$\{(1, a, a), (1, a, b), (2, a, a), (2, a, b)\}$

8. ¿Cuál es el cardinal de $A \times B$ si $|A| = n$ y $|B| = m$?

Por enunciado se sabe que A es un conjunto finito, porque su cardinalidad es un número natural n. Lo mismo pasa con B, su cardinalidad es m.

Como A y B son conjuntos finitos, $A \times B$ también es un conjunto finito. La cardinalidad de un conjunto finito es la cantidad de elementos que tiene.

Por lo tanto, cuántos elementos tiene $A \times B$? Lo que hace esta operación es asociar cada elemento de A con cada elemento de B en un par ordenado. Por lo tanto genera $n \times m$ combinaciones posibles. En conclusión, $|A \times B| = |A| \times |B| = n \times m$.

9. Demostrar por inducción que si A es un conjunto finito $|A| = n \implies |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Caso base: $n = 0$

Como no hay elementos, $A = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ y $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$. Por lo tanto se cumple el caso base.

Hipótesis inductiva:

Asumimos que para A tal que $|A| = n$, se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Paso de inducción:

1. Supongamos que existe un conjunto A^* tal que $|A^*| = n + 1$. Es decir que A^* tiene los mismos elementos que A más uno adicional. Queremos probar que $|\mathcal{P}(A^*)| = 2^{n+1}$.
2. Como $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$, $A^* = \{a_1, a_2, ...a_n, a_{n+1}\}$ porque tiene un elemento adicional.
3. A^* se puede reescribir como $\{a_1, a_2, ...a_n\} \cup \{a_{n+1}\} = A \cup \{a_{n+1}\}$.
4. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, ..., \{a_1, a_2, ...a_n\}\}$
5. Por H.I, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
6. Todos los subconjuntos de A son subconjuntos de A^*, porque todos los elementos de A están en A^*.
7. $\mathcal{P}(A^*) = ?$ Se deben agregar a $\mathcal{P}(A)$ todos los subconjuntos de A^* que contienen al elemento a_{n+1}.
8. $\mathcal{P}(A^*) = \{\emptyset, \{a_1\}, ..., \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, ..., \{a_1, a_2, ...a_n\}\} \cup \{a_{n+1}\}, \cup\{a_{n+1}\} \cup \{a_{n+1}\} \cup \{a_{n+1}\} \cup \{a_{n+1}\}$
9. $\mathcal{P}(A^*) = \mathcal{P}(A) \cup \{a_{n+1}\}$
10. $|\mathcal{P}(A^*)| = 2 \times 2^n$ Porque es el doble de elementos de $P(A)$ y se sabe por H.I que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
11. $|\mathcal{P}(A^*)| = 2 \times 2^n = 2^1 \times 2^n = 2^{n+1}$

Por lo tanto queda demostrado que si A es un conjunto finito $|A| = n \implies |\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

10. Mostrar que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+|$

Se quiere demostrar que la cardinalidad del conjunto de todos los pares ordenados de números naturales es igual a la cardinalidad del conjunto de los números naturales positivos, es decir, los naturales sin el cero.

Para esto se deben probar dos cosas:

1. $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^+|$

Se debe hallar una función inyectiva de la forma $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$, es decir, asignarle a cada par ordenado de números naturales un número natural positivo único.

Para esto se debe buscar una función f que cumpla:

1. $f(0,0) = 0$
2. $f(0,1) = 1$
3. $f(1,0) = 2$
4. $f(0,2) = 3$
5. $f(1,1) = 4$
6. $f(2,0) = 5$

   $\ldots$

Esta función existe y es la siguiente:

$$f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

Por lo tanto se cumple que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^+|$.

2. $|\mathbb{N}^+| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$

Se debe hallar una función inyectiva de la forma $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es decir, asignarle a cada número natural positivo un par ordenado de números naturales único.

Para esto se puede usar la función identidad: $Idd(n) = (n,n)$, donde $n \in \mathbb{N}^+$. Como es imposible que $Idd(n)$ sea igual a $Idd(m)$ si $n \neq m$, la función es inyectiva.

Como ejemplo, las asignaciones serían:

1. $Idd(1) = (1,1)$
2. $Idd(2) = (2,2)$
3. $Idd(3) = (3,3)$

   $\ldots$

No importa que hayan pares ordenados que no sean alcanzados por esta función, como por ejemplo $(1, 0)$, porque lo único que se necesita es que cada número natural positivo tenga un par ordenado único asignado, y no al revés.

Por lo tanto se cumple que $|\mathbb{N}^+| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Como se cumple $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^+|$ y $|\mathbb{N}^+| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$, queda demostrado que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+|$.

11. Mostrar que $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N}|$, siendo $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los racionales positivos

Se quiere demostrar que la cardinalidad del conjunto de los números racionales positivos es menor o igual a la cardinalidad del conjunto de los números naturales. Es decir, se debe probar $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N}|$.

Un número racional positivo $q \in \mathbb{Q}^+$ se puede expresar como $q = \frac{x}{y}$, donde $x, y \in \mathbb{N}$ y además $y \neq 0$.

Se debe hallar una función inyectiva de la forma $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$, es decir, asignarle a cada número racional positivo un número natural único. Además, es importante notar que esta función debe recibir la representación indivisible del racional, es decir, la representación cuyo $mcd(x, y) = 1$, porque si no, la función no sería inyectiva (por ejemplo, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ representan el mismo número racional positivo). Dicho de otra forma, x e y deben ser coprimos.

Para esto se puede primero hallar una función inyectiva de la forma $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es decir, asignarle a cada número racional positivo un par ordenado de números naturales único. Y luego, como está demostrado que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+| = |\mathbb{N}|$, por transitividad se tendrá que $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N}|$.

La función entonces es simple:

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = (x, y)$$

A cada número racional positivo le asigna su numerador y denominador como un par ordenado. Esta función es inyectiva porque es imposible que $g\left(\frac{a}{b}\right) = g\left(\frac{c}{d}\right)$ si $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, dado que se fijó la condición de que el numerador y el denominador sean coprimos.

Por lo tanto esta función es inyectiva y queda demostrado que $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$, y por transitividad, $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N}|$.

Por lo tanto queda demostrado que $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N}|$.

12. Mostrar que la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\{0, 1\}$ es menor o igual a la del conjunto de todas las funciones que van:

a. de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$

El conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\{0, 1\}$ se puede denotar como

$$A = \{f_A \mid f_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}\}$$

El conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$ se puede denotar como

$$B = \{f_B \mid f_B : \mathbb{R} \to \mathbb{N}\}$$

Se quiere demostrar que $|A| \leq |B|$. Para esto, se debe hallar una función inyectiva de la forma $f : A \to B$, es decir, asignarle a cada función de A una función de B única.

Como $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{N}$, toda función $f_A \in A$ también es una función $f_B \in B$. Por lo tanto, $A \subseteq B$ lo cual implica que $|A| \leq |B|$, porque podemos definir una nueva función $g : A \to B$ tal que $g(f_A) = f_A$ para toda $f_A \in A$. Es como una función identidad, a cada función de A le asigna a sí misma en B.

b. de $\mathbb{R}$ a $\{a, b, c\}$

El conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\{0, 1\}$ se puede denotar como

$$A = \{f_A \mid f_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}\}$$

El conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\{a, b, c\}$ se puede denotar como

$$B = \{f_B \mid f_B : \mathbb{R} \to \{a, b, c\}\}$$

Se quiere demostrar que $|A| \leq |B|$. Para esto, se debe hallar una función inyectiva de la forma $f : A \to B$, es decir, asignarle a cada función de A una función de B única.

Para esto se puede definir una función $g : A \to B$ de la siguiente manera:

$$g(f_A) = \begin{cases} a & \text{si } f_A(x) = 0 \\ b & \text{si } f_A(x) = 1 \end{cases}$$

Esta función es inyectiva porque es imposible que $g(f_A) = g(f_C)$ si $f_A \neq f_C$. Por lo tanto, queda demostrado que $|A| \leq |B|$.

13. Dar un ejemplo de 2 conjuntos disjuntos no vacíos, A y B tales que:

Restricciones:

- $A \neq \emptyset$
- $B \neq \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset$

a. $|A| < |B| < |A \cup B|$

1. $A = \{1\}$
    i. $|A| = 1$
2. $B = \{2, 3\}$
    i. $|B| = 2$
3. $A \cup B = \{1, 2, 3\}$
    i. $|A \cup B| = 3$

Se cumple claramente que $|A| < |B| < |A \cup B|$ porque, al reemplazar, se tiene $1 < 2 < 3$ que es verdadero.

b. $|A| < |B| = |A \cup B|$

1. $A = \{-1\}$
    i. $|A| = 1$
2. $B = \mathbb{N}$
3. $A \cup B = \{-1\} \cup \mathbb{N}$
    i. $|A \cup B| = |\mathbb{N}|$

$1 < |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

c. $|A| = |B| = |A \cup B|$

1. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ es par}\}$
2. $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ es impar}\}$
3. $A \cup B = \mathbb{N}$
4. $|A \cup B| = |\mathbb{N}|$
5. $|A| = |B| = |\mathbb{N}|$

14. Mostrar:

$$|\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}| = |\mathbb{N}|$$

Se quiere demostrar que la cardinalidad del conjunto de todos los números naturales excepto los números mencionados es igual a la cardinalidad del conjunto de todos los números naturales.

Para esto se deben probar dos cosas:

1. $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}|$

Se debe hallar una función inyectiva de la forma $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}$, es decir, asignarle a cada número natural un número natural único que no sea ninguno de los mencionados.

Para esto se puede definir la siguiente función:

$$f(n) = n + 991$$

De esta forma, a cada número natural se le asigna un número natural mayor o igual a 991, por lo tanto ninguno de los números mencionados será alcanzado por esta función.

Por lo tanto la función es inyectiva porque es imposible que $f(n) = f(m)$ si $n \neq m$.

2. $|\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}| \leq |\mathbb{N}|$

Se debe hallar una función inyectiva de la forma $f : \mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\} \to \mathbb{N}$, es decir, asignarle a cada número natural que no sea ninguno de los mencionados un número natural único.

Esto se puede lograr con la función identidad: $Id(n) = n$, donde $n \in \mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}$. Como es imposible que $Id(n)$ sea igual a $Id(m)$ si $n \neq m$, la función es inyectiva.

Como se cumple $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}|$ **y** $|\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}| \leq |\mathbb{N}|$**, queda demostrado que** $|\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}| = |\mathbb{N}|$**.**

Un detalle importante a notar es que si a un conjunto infinito (ya sea contable o incontable) se le quita una cantidad finita de elementos, la cardinalidad del conjunto resultante sigue siendo exactamente la misma que la del conjunto original. En este ejercicio, se le quitaron 7 elementos a un conjunto infinito contable, y la cardinalidad del conjunto resultante sigue siendo la misma que la del conjunto original, es decir, infinito contable.

15. ¿El conjunto de todas las frases en el idioma español es contable o incontable? Justificar.

Def: Un conjunto infinito es contable si existe una función inyectiva que asigne a cada elemento del conjunto un número natural único. Es incontable si no existe tal función.

El conjunto de todas las frases en el idioma español es infinito contable. Esto se debe a que se puede crear una función inyectiva donde a cada frase se le asigna un número natural único en función de la cantidad de caracteres que tiene la frase, y ordenados lexicográficamente.

Por ejemplo, se puede asignar el número 1 a la frase más corta (por ejemplo, "a"), el número 2 a la segunda frase más corta (por ejemplo, "b"), y así sucesivamente hasta agotar todas las frases de longitud 1 ordenadas lexicográficamente. Luego se continúa con las frases de longitud 2, asignándoles números naturales únicos en orden lexicográfico de nuevo, y así sucesivamente hasta el infinito.

16. Dar ejemplos para mostrar que la intersección de 2 conjuntos incontables puede ser

a. Finita

- $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $B = \mathbb{R}$
- $A \cap B = \emptyset$
- El conjunto de partes de los números naturales es **incontable**.
- El conjunto de los números reales es **incontable**.
- La intersección es vacía porque A contiene conjuntos como elementos, mientras que B contiene números reales como elementos. El conjunto vacío es claramente finito.

b. Infinita contable

- $A = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$
- $B = \mathbb{R}$
- $A \cap B = \mathbb{N}$
- El conjunto de partes de los números naturales unido con los números naturales es **incontable** porque la unión de un conjunto incontable con un conjunto contable es incontable.
- El conjunto de los números reales es **incontable**.
- La intersección es el conjunto de los números naturales (dado que los naturales son un subconjunto de los reales) que es infinito contable.

c. Incontable

- $A = \mathbb{R}$
- $B = \mathbb{R}$
- $A \cap B = \mathbb{R}$
- El conjunto de los números reales es **incontable**.
- La intersección es el conjunto de los números reales que es incontable.

17. Mostrar que la unión de 2 conjuntos contables es contable.

Sean A y B dos conjuntos contables. Se quiere probar que $A \cup B$ es contable.

Como A es contable, existe una función inyectiva que asigna a cada elemento de A un número natural único: $f_A : A \to \mathbb{N}$

Como B es contable, existe una función inyectiva que asigna a cada elemento de B un número natural único: $f_B : B \to \mathbb{N}$

Se debe definir una nueva función inyectiva $f : A \cup B \to \mathbb{N}$ que asigne a cada elemento de $A \cup B$ un número natural único.

El problema es que puede haber elementos que estén tanto en A como en B, y por lo tanto, si se usan las funciones f_A y f_B directamente, puede pasar que dos elementos distintos de $A \cup B$ terminen asignados al mismo número natural. Por ejemplo, podría pasar que $f_A(a) = 3$ y $f_B(a) = 3$ para algún elemento a que esté en ambos conjuntos.

Lo que podemos hacer es hacer que a cada elemento de A se le asigne un número natural par, y a cada elemento de B se le asigne un número natural impar. De esta forma, no habrá solapamiento entre los números asignados a los elementos de A y los números asignados a los elementos de B.

Entonces la función se define así:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \times f_A(x) & \text{si } x \in A \\ 2 \times f_B(x) + 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

De esta forma, f es inyectiva porque es imposible que $f(x) = f(y)$ si $x \neq y$, ya que los números asignados a los elementos de A son todos pares, y los números asignados a los elementos de B son todos impares.

Como se encontró una función inyectiva que asigna a cada elemento de $A \cup B$ un número natural único, se concluye que $A \cup B$ es contable y por lo tanto queda demostrado que la unión de dos conjuntos contables

es contable.

18. Mostrar que si X es un conjunto incontable e Y es un conjunto contable, entonces $X - Y$ debe ser incontable.

Sea X un conjunto incontable. Sea Y un conjunto contable. Se quiere probar que $X - Y$ es incontable.

Se demostrará por contradicción:

1. Asumimos que $X - Y$ es contable.
2. X se puede re-escribir como $X = (X - Y) \cup Y$ porque al conjunto X se le quitan todos los elementos de Y y luego se los vuelve a agregar.
3. Como Y es contable y la unión de dos conjuntos contables es contable, si $X - Y$ es contable, entonces X es contable.
4. Esto contradice la hipótesis de que X es incontable.
5. Por lo tanto $X - Y$ debe ser incontable.

19. Mostrar que un conjunto puede tener la misma cardinalidad que un subconjunto propio de sí mismo.

El ejemplo típico son los números pares y los números naturales.

Sea el conjunto $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ es par}\}$.

Claramente $A \subset \mathbb{N}$ porque hay números naturales que no son pares, que son los impares como el 1.

$|A| = |\mathbb{N}|$ porque $|A| \leq |\mathbb{N}|$ y $|A| \geq |\mathbb{N}|$.