Proyecto Final

Fecha de entrega: Diciembre 11 de 2023 antes de las 8am.

Debe entregar un informe que incluya:

1. Una introducción del problema.
2. Respuestas a las preguntas teóricas.
3. Resultados de las simulaciones.
4. Discusión de los resultados y conclusiones.
5. Anexo con código y todos los detalles de implementación (valores de tamaño de las muestras, número de iteraciones, valores de parámetros, etc.).

Puede usar todas las funciones disponibles en el lenguaje que desee.

Este problema presenta las definiciones y propiedades básicas de una cadena de Markov en tiempo discreto con **finitos estados**.

Parte I

Definición 1. *Una cadena de Markov con valores en el conjunto S, distribución inicial $a \in \mathbb{R}_+^{|S|}$ y matriz de transición $\mathbf{P} = (p_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{|S|\times|S|}$, es una sucesión de variables aleatorias $\{X_n, n \geq 0\}$ con valores en S y definidas en el mismo espacio de probabilidad tales que*

- $P(X_0 = i) = a_i$ *para todo* $i \in S$
- $P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$ *para todo* $i, j, i_0, \ldots, i_{n-1} \in S$ *tales que* $P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0$.

Note que tanto las entradas de a como de cada fila de $\mathbf{P}$ suman 1. Una forma de simular (y construir) una cadena de Markov a partir una de sucesión de variables aleatorias $\{U_n, n \geq 0\}$ i.i.d con distribución uniforme $(0, 1)$ es la siguiente:

I. Defina la función $g(u) = \sum_{i=1}^{|S|} i \mathbf{1}_{(\sum_{k=1}^{i-1} a_k, \sum_{k=1}^{i} a_k]}(u)$.

II. Defina $X_0 = g(U_0)$.

III. Defina la función $f(i, u) = \sum_{i=1}^{|S|} j \mathbf{1}_{(\sum_{k=1}^{j-1} p_{ik}, \sum_{k=1}^{j} p_{ik}]}(u)$.

IV. Para $n \geq 0$, defina $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$.

1. Escriba un programa que simule una cadena de Markov a partir del vector a y la matriz de transición $\mathbf{P}$.

Las siguientes son las propiedades básicas de una cadena de Markov.

2. Muestre que una cadena de Markov satisface que

$$P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = a_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

para todo $i_0, \ldots, i_n$. Considere también el caso en el que alguno de los $p_{i_k j_{k+1}} = 0$.

3. Muestre que

$$P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+m} = j_m | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_1 = j_1, \ldots, X_m = j_m | X_0 = i)$$

siempre que $P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0$.

4. Muestre que para todo $n \geq 1$

$$P(X_n = j | X_0 = i) = p_{ij}^{(n)},$$

donde $\mathbf{P}^n = (p_{ij}^{(n)})$.

Parte II

Definición 2. *Una* ***medida invariante*** *para una matriz de transición P es una medida no-negativa ν sobre el espacio de estados S tal que*

$$\nu P = \nu.$$

Notemos que si ν es una medida invariante, cualquier múltiplo no-negativo de ν también lo es. Si ν es una medida de probabilidad, es decir, sus entradas suman 1, decimos que es una ***distribución estacionaria*** *y la denotamos como π.*

5. Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ cadena de Markov con on matriz de transición P y distribución inicial π, con π distribución estacionaria. Muestre que para todo $n \geq 1$ y todo estado j se tiene que

$$P(X_n = j) = \pi(j).$$

Definición 3. *Decimos que una cadena de Markov con matriz de transición P es reversible si existe una distribución μ sobre S tal que satisfaga las llamadas ecuaciones de balance detallado, esto es, para todo $i, j \in S$ se tiene que*

$$\mu(i) p_{ij} = \mu(j) p_{ji}.$$

6. Muestre que si P es reversible con μ que satisface las ecuaciones de balance detallado, entonces μ es distribución estacionaria.

Definición 4. *Una cadena de Markov es irreducible si para todo $i, j \in S$ existe un n tal que $P(X_n = j | X_0 = i) > 0$.*

Teorema 5. *Dada una cadena de Markov irreducible, existe una única distribución estacionaria.*

7. Sea Ψ una matriz de transición irreducible y π una distribución sobre S. Defina una nueva matriz P dada por

$$p_{ij} = \begin{cases} \psi_{ij}\left(\dfrac{\pi(j)\psi_{ji}}{\pi(i)\psi_{ij}} \wedge 1\right) & \text{si } j \neq i \\ 1 - \sum\limits_{k\neq i} \psi_{ik}\left(\dfrac{\pi(k)\psi_{ki}}{\pi(i)\psi_{ik}} \wedge 1\right) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

   Muestre que π es la única distribución estacionaria de P.

Supongamos que tenemos un grafo $G = (V, E)$, y consideremos $S = \{-1, 1\}^V$, todas las configuraciones de 1 y -1 en los vértices G, denotamos cada elemento de S como σ. Supongamos que tenemos una función $f : S \to \mathbb{R}$ que queremos maximizar (esta función depende de las aristas del grafo). Así, dado $\lambda \geq 1$ definimos la distribución

$$\pi(\sigma) = \frac{\lambda^{f(\sigma)}}{Z(\lambda)},$$

donde $Z(\lambda)$ es la constante de normalización, la cual no es necesario conocerla. Sea Ψ una matriz de transición con estados S dada por

$$\psi_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} \dfrac{1}{|V|} & \text{si } \sigma \text{ y } \sigma' \text{ coinciden en todos los vértices de } V \text{ menos } 1 \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Se puede mostrar que si consideramos la cadena de Markov dada por la matriz P definida arriba, entonces, independiente de la distribución inicial de la cadena, para todo $\sigma \in S$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = \sigma) = \pi(\sigma).$$

Considere el problema de MAX-CUT descrito en el video: `https://www.youtube.com/watch?v=aFVnWq3RHYU` para definir la función f.

8. Dados diferentes valores de λ, simule la cadena de Markov correspondiente a la matriz P y déjela correr por los tiempos que estime necesarios para acercarse lo más posible a la configuración que alcanza el máximo. Para esto use el grafo dado en esta libreria: `http://bqp.cs.uni-bonn.de/library/html/g05_60.0.html` (puede considerar otros ejemplo más grandes también).

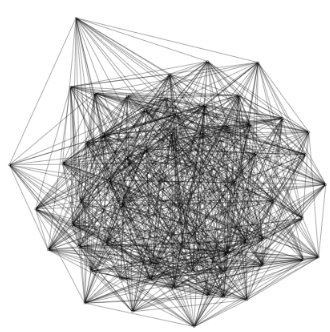

Figura 1: Grafo de 60 nodos y 885 aristas.

Mauricio Junca