INFORME
LABORATORIO NUMERO 5

Por:
Juan David Gomez Quiñones
Mateo Orozco Arevalo

Desarrollado Como Resultado Del Laboratorio Número 5 del Curso
De Computación Científica Dictado por Dr. Hernán Darío Vargas
Pontificia Universidad Javeriana Cali

Resumen:

Mediante el presente documento se presentan los resultados del laboratorio número 5 del curso de computación científica. Para este laboratorio se solicitaron 6 algoritmos para la implementación de los métodos clásicos para resolver PVIs , los cuales son los métodos de Euler,Taylor,Runge-Kutta (con orden 2 y 4) y multipaso (con orden de 2 y 4). Adicionalmente, se solicito la implementación de 2 algoritmos para resolver el metodo de dieferencias finitas y elementos finitos (colocación) para resolver PVFs. En este informe se presentan y sustentan los códigos desarrollados en el lenguaje Python para la solución de este laboratorio, también se realiza un análisis de la metodología y la lógica aplicada para el desarrollo de cada algoritmo y se presentan varios ejemplos del funcionamiento de los algoritmos junto a su debida explicación.

Abstract:

Through this document, the results of laboratory number 5 of the scientific computing course are presented. For this laboratory, 8 algorithms were requested for the implementation of the classical methods to solve PVIs, which are the Euler, Taylor, Runge-Kutta (with order 2 and 4) and multistep (with order of 2 and 4) methods. Additionally, the implementation of 2 algorithms was requested to solve the finite difference and finite element (placement) method to solve PVFs. This report presents and supports the codes developed in the Python language for the solution of this laboratory, an analysis of the methodology and logic applied for the development of each algorithm is also carried out and several examples of the operation of the algorithms are presented together to its due explanation.

INTRODUCCIÓN:

Una ecuación diferencial ordinaria (también conocidas como “EDO”) es una ecuación diferencial que relaciona una función desconocida de una variable independiente con sus derivadas. Es decir, que a diferencia de las ecuaciones diferenciales parciales que involucran derivadas parciales de varias variables, se usa una sola variable independiente y una o mas de sus derivadas respecto de dicha variable.

Una EDO no tiene una solución única, si no que existe todo un conjunto infinito de funciones que satisfacen la EDO, para encontrar una solución en concreto se debe especificar el valor denotado por un y_0 en algún punto $t_{0,}$, por lo que se requiere conocer: $y(t_0) = y_0$. A lo que se le conoce como problema de valor inicial y lo que se busca es una función y(t) que describa el estado de un sistema como función de tiempo.

SOLUCIONES NUMÉRICAS ODEs:

Una solución numérica de una ODEs es conjunto de valores aproximados a la solución verdadera evaluados en un conjunto discreto de datos. Los valores de la solución aproximada se generan en función de los incrementos de tiempo. Por lo que, los métodos numéricos que se utilizan para resolver ODEs se les conoce como métodos de variable discreta.

Para este laboratorio se implementaron 8 algoritmos como implementación de 8 métodos de soluciones numéricas de ODEs los cuales son:

MÉTODO DE EULER:

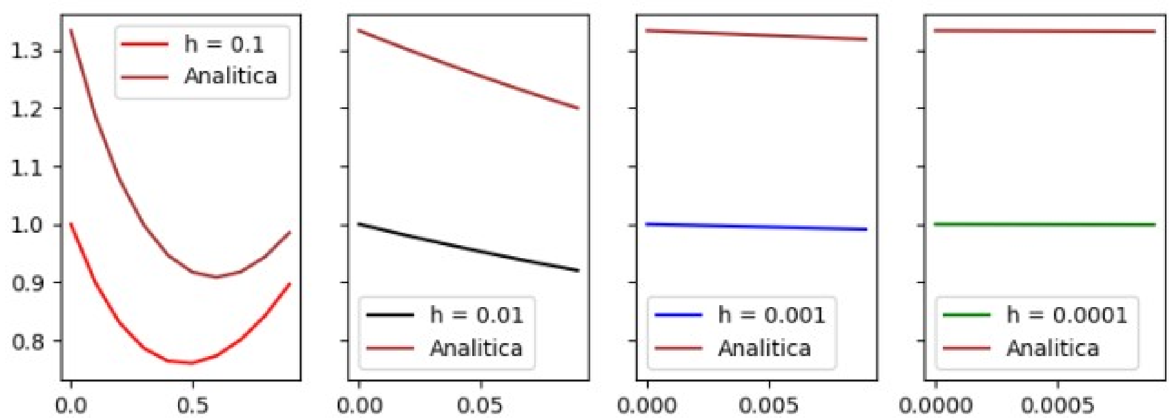
Este método se optiene de la expansion en series de Taylor. elimina los términos de segundo orden y superior para obtener los valores de la solución aproximada, la cual se calcula en base a la siguiente formula

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h_k.$$

donde $f(t_k,y_k)$ es equivalente a la primera derivada de la ecuación diferencia $y'(t) = f(t,y)$.

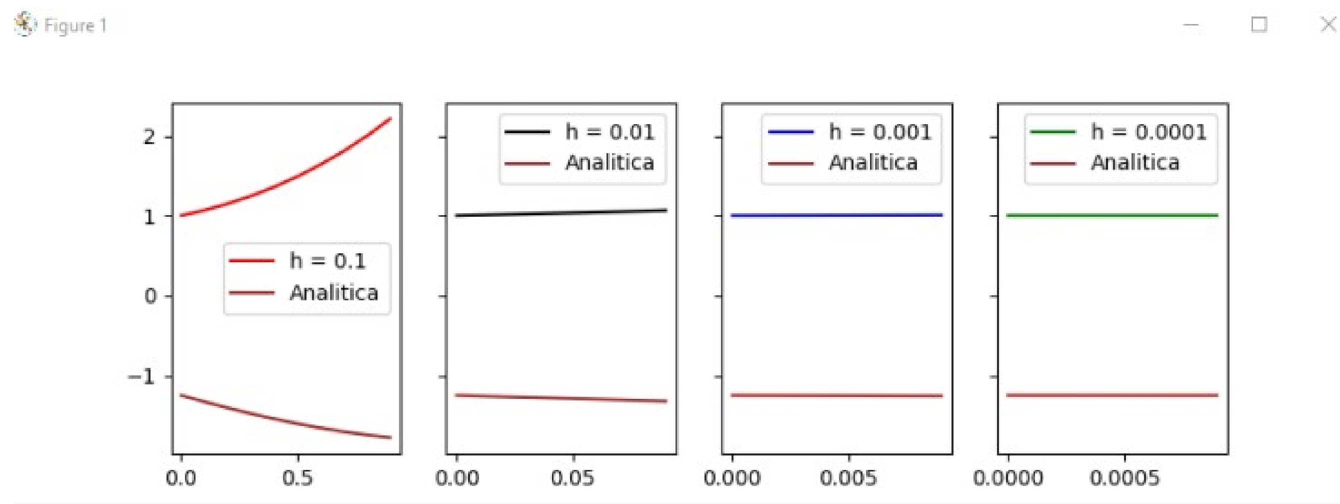
PRUEBAS:

Función 1: e^x - 2y




```
C:\Users\MATEO\Desktop\Universidad\Octavo\Cientifica\Laboratorio 5>py Euler.py
Error 2:  0.1868019935349266
```

Función 2: (3x + 2y) / 3




```
C:\Users\MATEO\Desktop\Universidad\Octavo\Cientifica\Laboratorio 5>py Euler.py
Error 2:  1.9171818863424928
```

MÉTODO DE TAYLOR:

Este método es similar al método de euler, sin embargo este método toma mas términos de la serie de Taylor. Para el método implementado en este laboratorio se usa un termino de mas, el resultado de este metodo esta dado por la siguiente formula:

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h_k + \frac{y_k''}{2} h_k^2$$

PRUEBAS:

Para este método tuvimos problemas con la segunda derivado, no se pudieron realizar pruebas.

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA:

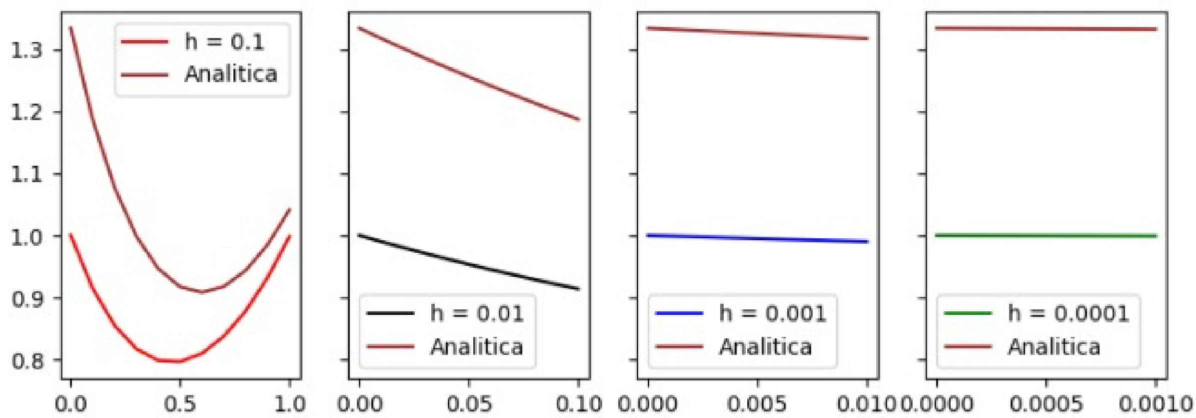
Son metodos similares al metodo de Taylor, pero estos no requieren la computación de derivadas de orden superior. Si no que se simula el efecto de las derivadas evaluando f varias veces entre t_k y t_{k+1}. Para este laboratorio se usaron los métodos de runge-kutta de orden 2 (usando dos k) y de orden 4 (usando 4 k).

Metodo de Runge-Kutta de orden 2: $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

Metodo de Runge-Kutta de orden 4: $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

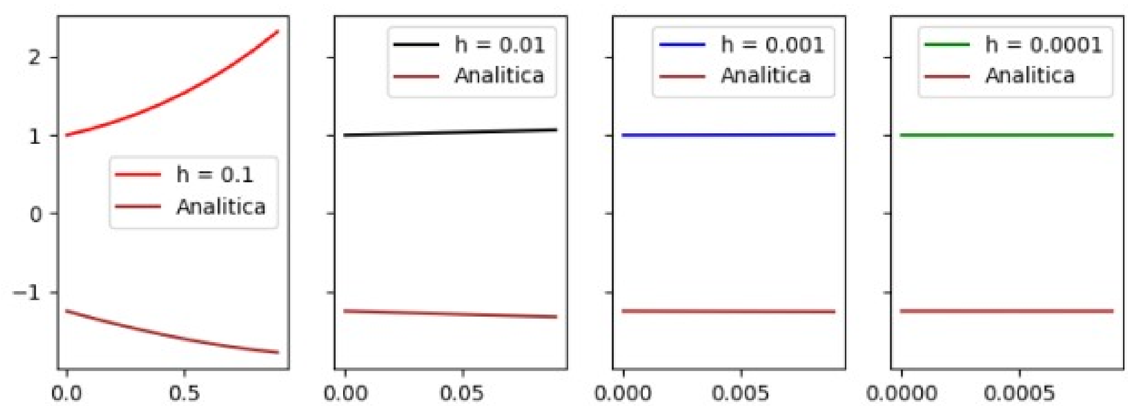
PRUEBAS:

Orden 2 con la diferencial 1: e^x - 2y




```
C:\Users\MATEO\Desktop\Universidad\Octavo\Cientifica\Laboratorio 5>py RungeKutta.py
Error Total:  0.21292047738186182
Tiempo: 0.0009968280792236328
```

Orden 4 con la diferencial 2: (3x + 2y) / 3




```
C:\Users\MATEO\Desktop\Universidad\Octavo\Cientifica\Laboratorio 5>py RungeKutta.py
Error Total:  1.8299901657787112
```

MÉTODO MULTI-PASO:

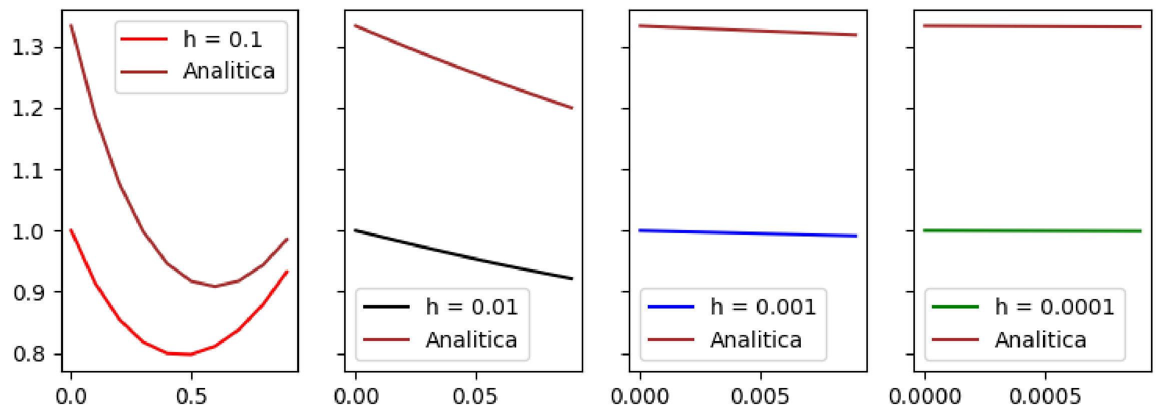
Este método usa información en mas de un punto previo para estimar la solución en el siguiente punto. Al igual que con el método de Runge-Kutta, para este laboratorio se realizaron algoritmos para los métodos multi-paso de orden 2 y de orden 4, los cuales se definen bajo las siguientes formulas:

Método multi-paso de orden 2: $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\left(3y'_k - y'_{k-1}\right) h$

Método multi-paso de orden 4: $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{24}\left(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}\right) h$

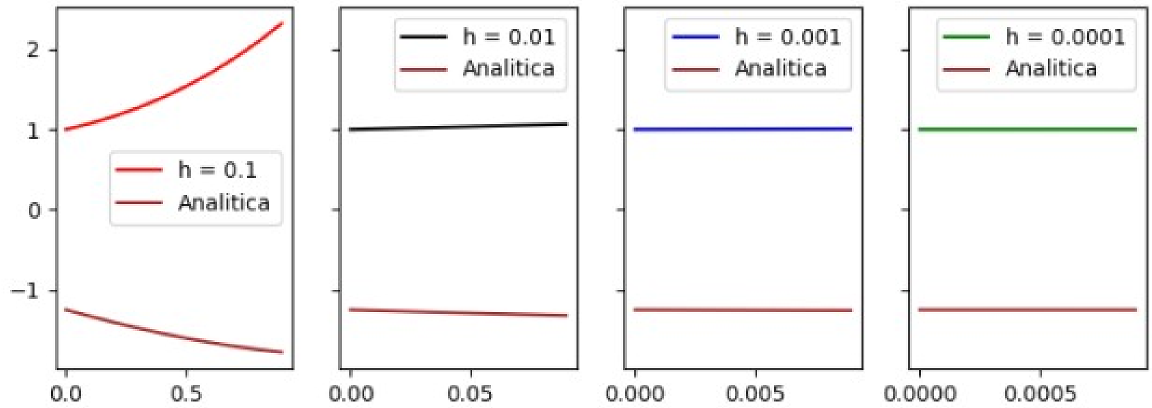
PRUEBAS:

Orden 2 con la diferencial 1: e^x - 2y




```
C:\Users\MATEO\Desktop\Universidad\Octavo\Cientifica\Laboratorio 5>py Multipaso.py
Error Total:  0.21664414202605708
```

Orden 4 con la diferencial 2:(3x + 2y) / 3




```
C:\Users\MATEO\Desktop\Universidad\Octavo\Cientifica\Laboratorio 5>py Multipaso.py
Error Total:  1.8299896601224426
```

PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA:

un problema de valor de frontera (PVF) para una ecuación diferencial ordinaria (EDO) especifica mas de un punto en el cual la solución o sus derivadas deben tener valores dados. Para hallar la solución particular, deben existir tantas condiciones como el orden de la ODE.

Para este laboratorio se implementaron dos métodos, método de diferencias finitas y elementos finitos

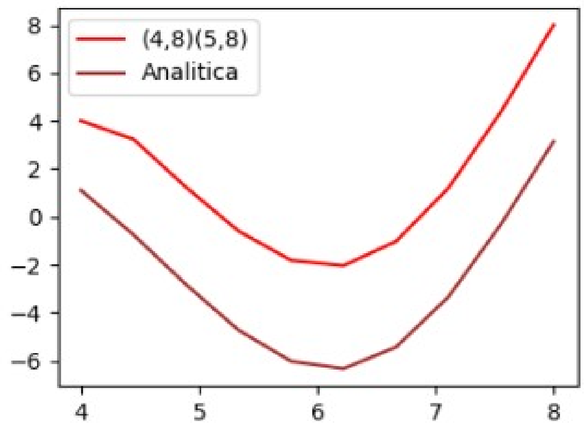
MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITA:

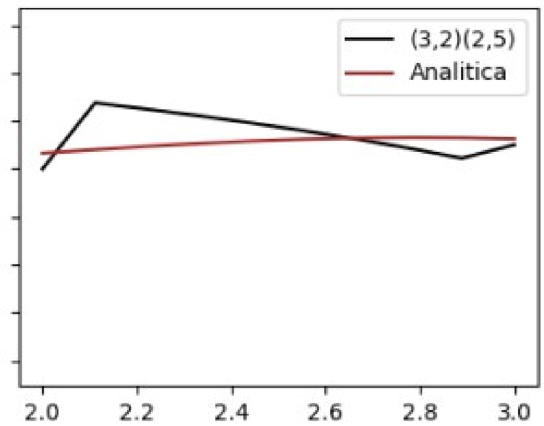
Este método convierte los PVF en sistemas de ecuaciones algebraicas, remplazando algunas derivadas por aproximaciones con diferencias finitas.

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 f(t_i, y_i, \frac{y_{i+1} - t_{i-1}}{2h}) = 0.$$

PRUEBAS

funcion: x*cos(x)






```
C:\Users\MATEO\Desktop\Universidad\Octavo\Cientifica\Laboratorio 5>py DiferenciasFinitas.py
Error Total:  1.7424322312921374
Tiempo: 0.002992868423461914
```

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS:

Este método aproxima la solución de un PVF a una combinación lineal de funciones base φi, tipicamente monomios. La approximation de este odometer tiene la forma de :

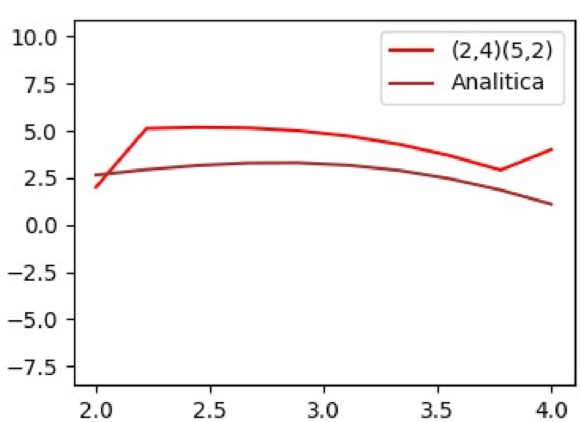
$$y(t) \approx u(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi_i(t)$$

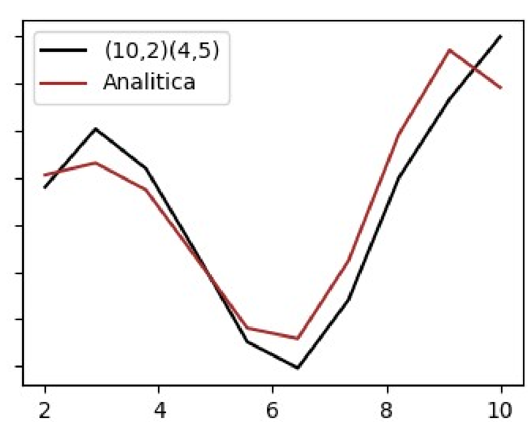
Donde los coeficientes x_i están determinados mediante la imposición de requerimientos del residuo, que se define como la diferencia entre el lado izquierdo y derecho de ODE.

PRUEBAS:

función*: x*cos(x)*

Con dos intervalos diferentes:






```
C:\Users\MATEO\Desktop\Universidad\Octavo\Cientifica\Laboratorio 5>py ElementosFinitos.py
Error Total:  0.24097933888089312
```

CONCLUSIONES:

Para concluir podemos ver que dentro del calculo de los métodos clásicos para resolver PVIs,el método que tiene mayor exactitud es el método de Runge-Kutta ya que este es el que tiene menor error total, como es de esperarse, entre mas alto sea el orden, mas exacto va a ser el resultado, por lo que como tal el método mas exacto entre los métodos clásicos solicitados es el de Runge-Kutta con orden 4, ademas entre mas pequeño sea el valor de h mas cercano sera el resultado al resultado analitico. Para la solución de PVFs el algoritmo con mayor exactitud es el algoritmo de elementos finitos.

REFERENCIAS:

[1] Calculadora de ecuaciones diferenciales ordinarias que se uso para el calculo analítico de la primera educación diferencial:3y' - 2y = 3x - Calculadora de ecuaciones diferenciales ordinarias - Symbolab

[2] Calculadora de ecuaciones diferenciales ordinarias que se uso para el calculo analítico de la segunda educación diferencial:y' +2y=e^x - Calculadora de ecuaciones diferenciales ordinarias - Symbolab