

INFORME LABORATORIO NUMERO 4

Por:
Juan David Gomez Quiñones

Desarrollado Como Resultado Del Laboratorio Número 4 del Curso
De Computación Científica Dictado por Dr. Hernán Darío Vargas
Pontificia Universidad Javeriana Cali

Resumen:

Mediante el presente documento se presentan los resultados del laboratorio número 4 del curso de computación científica. Para este laboratorio se solicitaron 3 códigos para la implementación de diferencias finitas, mediante el método hacia delante, el método hacia atrás y mediante el método centrado. Adicionalmente, se solicitó la codificación de 3 algoritmos para la implementación del cálculo de integrales compuestas, mediante el método del rectángulo, el método de Simpson y el método del trapecioide. En este informe se presentan y sustentan los códigos desarrollados en el lenguaje Python para la solución de este laboratorio, también se realiza un análisis de la metodología y la lógica aplicada para el desarrollo de cada algoritmo y se presentan varios ejemplos del funcionamiento de los algoritmos junto a su debida explicación.

Abstract:

This document presents the results of laboratory number 4 of the scientific computing course. For this laboratory, 3 codes were requested for the implementation of finite differences, using the forward method, the backward method and the centered method. In addition, the coding of 3 algorithms is requested for the implementation of the calculation of compound integrals, by means of the rectangle method, the Simpson method and the trapezoid method. This report presents and supports the codes developed in the Python language for the solution of this laboratory, an analysis of the methodology and logic applied for the development of each algorithm is also carried out and several examples of the operation of the algorithms are presented together an explanation its due.

INTRODUCCION:

Existen diferentes técnicas tanto para calcular derivadas aproximadas como integrales aproximadas. Para el cálculo de derivadas finitas aproximadas se usan la derivación numérica y para el cálculo de integral definida en un rango a, b tal que $a < b$, se utiliza la integración numérica. En este laboratorio se trabajaron tres técnicas de la derivación numérica las cuales son la derivación mediante el método hacia delante, la derivación mediante el método hacia atrás y la derivación mediante el método centrado. También se trabajaron tres técnicas de la integración numéricas, los cuales son, mediante el método rectangular, mediante el método de Simpson y mediante el método del trapecioide. A continuación se presentan los resultados obtenidos de el laboratorio.

DERIVACIÓN NUMÉRICA:

La idea principal para cada método es calcular un resultado aproximado a la derivada de una función $f(x)$ donde se define un valor h (entre menor sea el h mas preciso sera el resultado en cuanto a la derivada analítica) y con estos valores se evaluá la formula indicada para el método correspondiente.

Método hacia delante:
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Método hacia atrás:
$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Método centrado:
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Los métodos hacia delante y hacia atrás tienen una precisión de orden 1, mediante que el método centrado tienen una precisión de orden 2 y su formula nace de la resta de la segunda serie de la primera.

Pruebas:

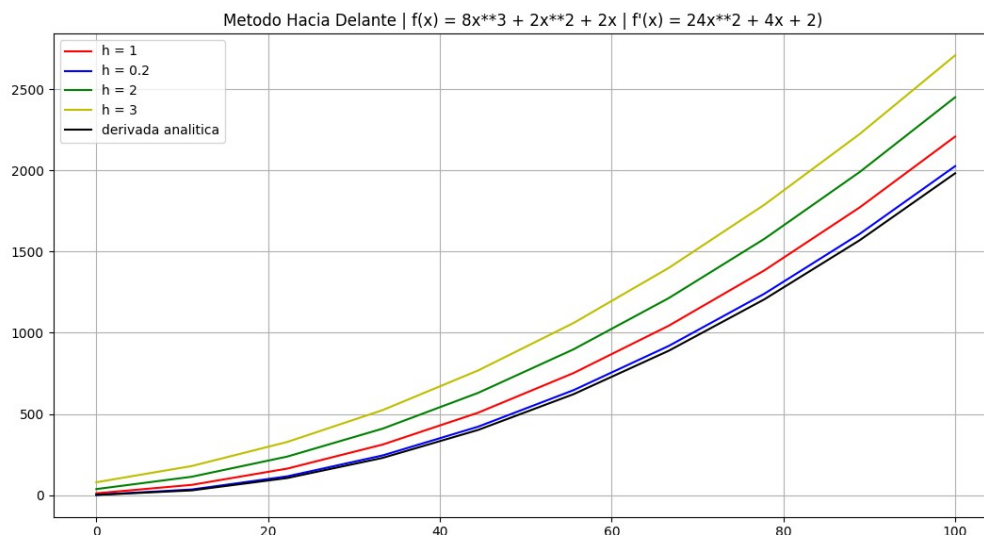
Para probar los algoritmos desarrollados se realizaron pruebas con 3 funciones de diferente complejidad y con 4 valores de h distintos.

1. Funcion1: $8x^3+2x^2+2x$
2. Función 2: $5\sin(x)$
3. Función 3: $\ln(x^5 + 100)$

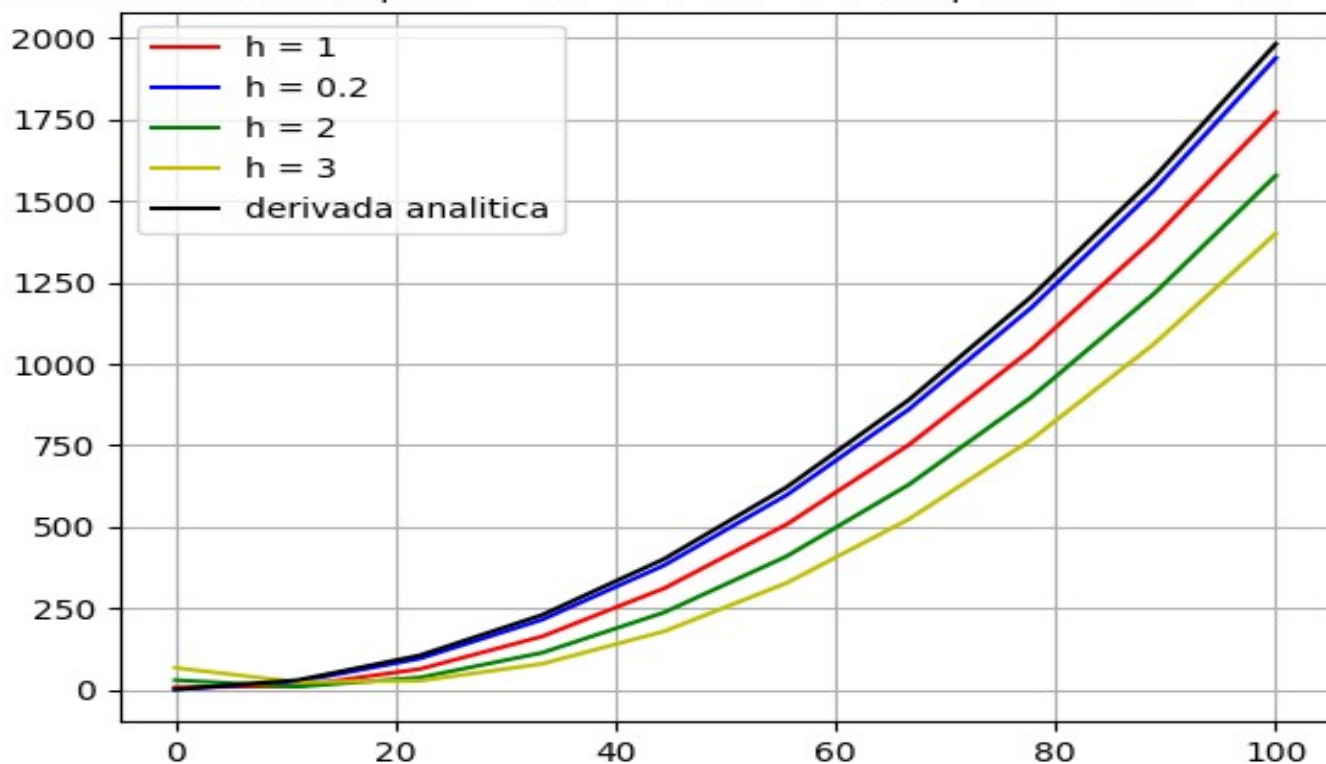
A continuación se presentan las pruebas realizadas, donde para cada método se evaluaron las 3 funciones con 4 valores diferentes para H (0,2 , 1 , 2 y 3).

De las pruebas se puede resaltar que entre mas cercano a 0 sea el valor del H mas preciso va a ser el resultado (mas cercano al resultado analítico de la derivada) ademas de entre todos los métodos el método mas preciso es el método centrado. Los métodos hacia delante y hacia atrás son simétricos, con un h mas alto los valores tienden a estar arriba del resultado analítico si se usa el método hacia adelante, mientras que si se usa el método hacia atrás los valores tenderán a estar por debajo del resultado analítico.

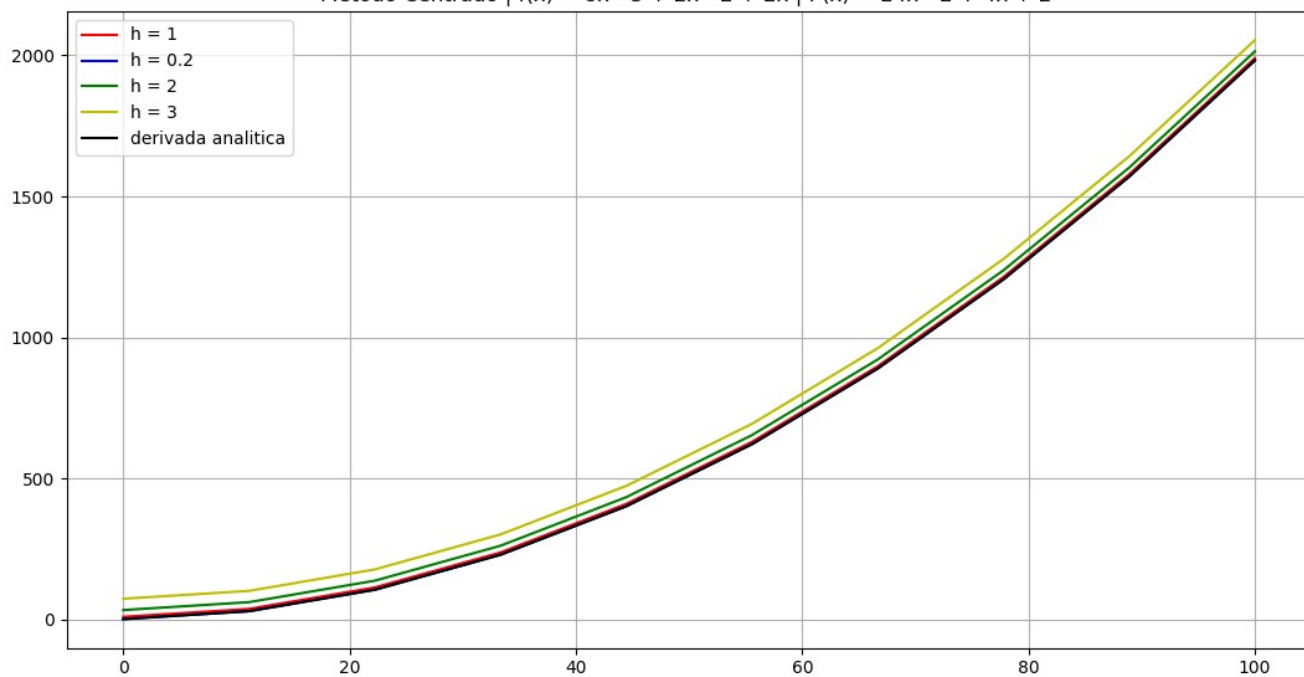
Para La Funcion1:



Metodo Hacia Atras | $f(x) = 8x^3 + 2x^2 + 2x$ | $f'(x) = 24x^2 + 4x + 2$



Metodo Centrado | $f(x) = 8x^3 + 2x^2 + 2x$ | $f'(x) = 24x^2 + 4x + 2$



Metodo Hacia Delante:

```
-----  
con x = 5, h = 0.2  
  el resultado con el metodo es: 646.7200000000003 con un erro de 24.720000000000255  
  tiempo de ejecucion: 1.7404556274414062e-05  
-----  
con x = 5, h = 1  
  el resultado con el metodo es: 752.0 con un erro de 130.0  
  tiempo de ejecucion: 7.867813110351562e-06  
-----  
con x = 5, h = 2  
  el resultado con el metodo es: 898.0 con un erro de 276.0  
  tiempo de ejecucion: 6.67572021484375e-06  
-----  
con x = 5, h = 3  
  el resultado con el metodo es: 1060.0 con un erro de 438.0  
  tiempo de ejecucion: 6.198883056640625e-06  
-----
```

Metodo Hacia Atras:

```
-----  
con x = 5, h = 0.2  
  el resultado con el metodo es: 597.9200000000003 con un erro de 24.0799999999997  
  tiempo de ejecucion: 3.147125244140625e-05  
-----  
con x = 5, h = 1  
  el resultado con el metodo es: 508.0 con un erro de 114.0  
  tiempo de ejecucion: 8.344650268554688e-06  
-----  
con x = 5, h = 2  
  el resultado con el metodo es: 410.0 con un erro de 212.0  
  tiempo de ejecucion: 6.67572021484375e-06  
-----  
con x = 5, h = 3  
  el resultado con el metodo es: 328.0 con un erro de 294.0  
  tiempo de ejecucion: 3.814697265625e-06  
-----
```

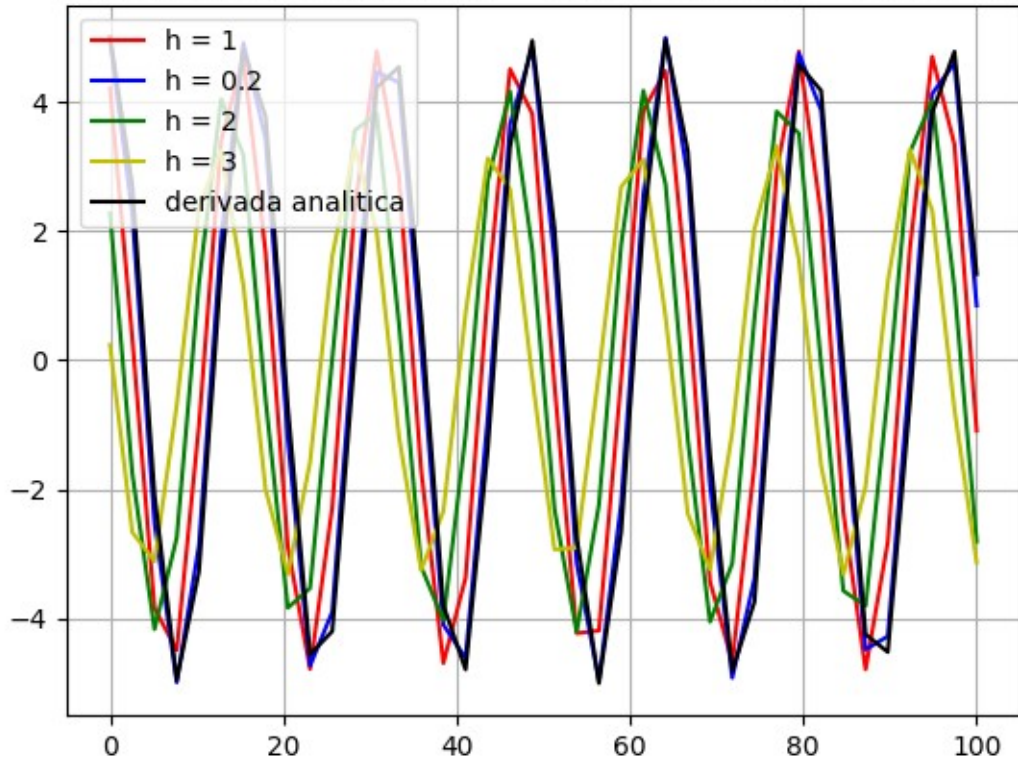
Metodo Centrado:

```
-----  
con x = 5, h = 0.2  
  el resultado con el metodo es: 622.3200000000003 con un erro de 0.3200000000002774  
  tiempo de ejecucion: 1.8835067749023438e-05  
-----  
con x = 5, h = 1  
  el resultado con el metodo es: 630.0 con un erro de 8.0  
  tiempo de ejecucion: 6.198883056640625e-06  
-----  
con x = 5, h = 2  
  el resultado con el metodo es: 654.0 con un erro de 32.0  
  tiempo de ejecucion: 5.4836273193359375e-06  
-----  
con x = 5, h = 3  
  el resultado con el metodo es: 694.0 con un erro de 72.0  
  tiempo de ejecucion: 4.291534423828125e-06  
-----
```

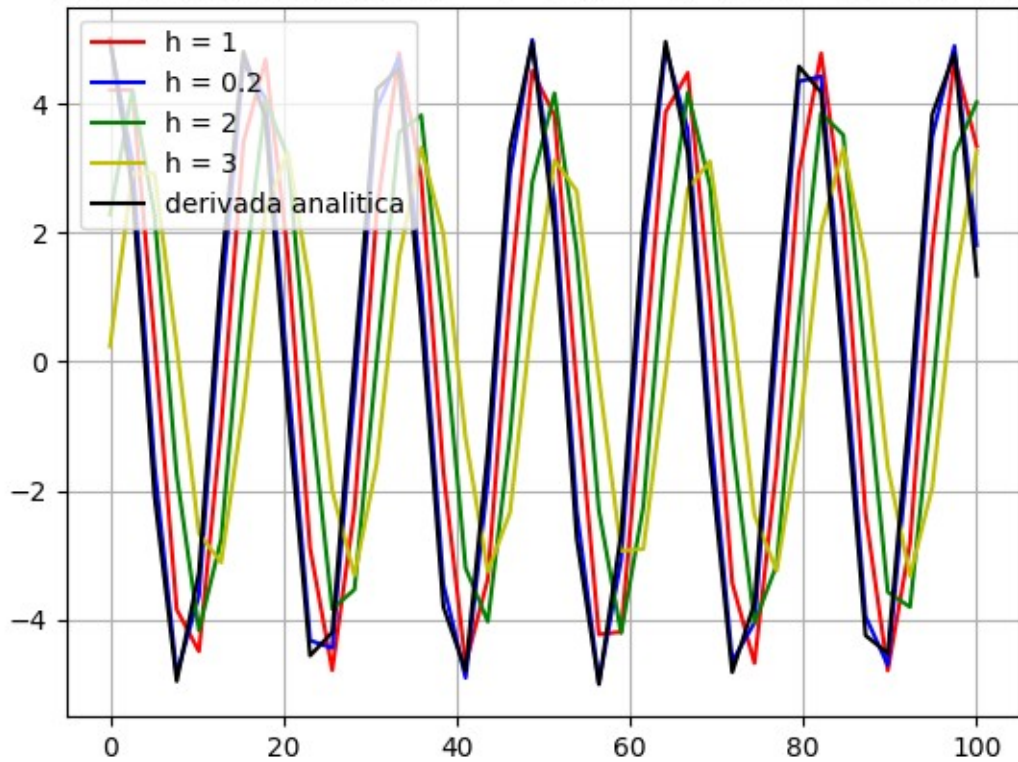
Nota: El error es aparentemente grande pero en realidad es la función que crece muy rápido, la exactitud de los métodos se puede entender mas fácilmente revisando las graficas

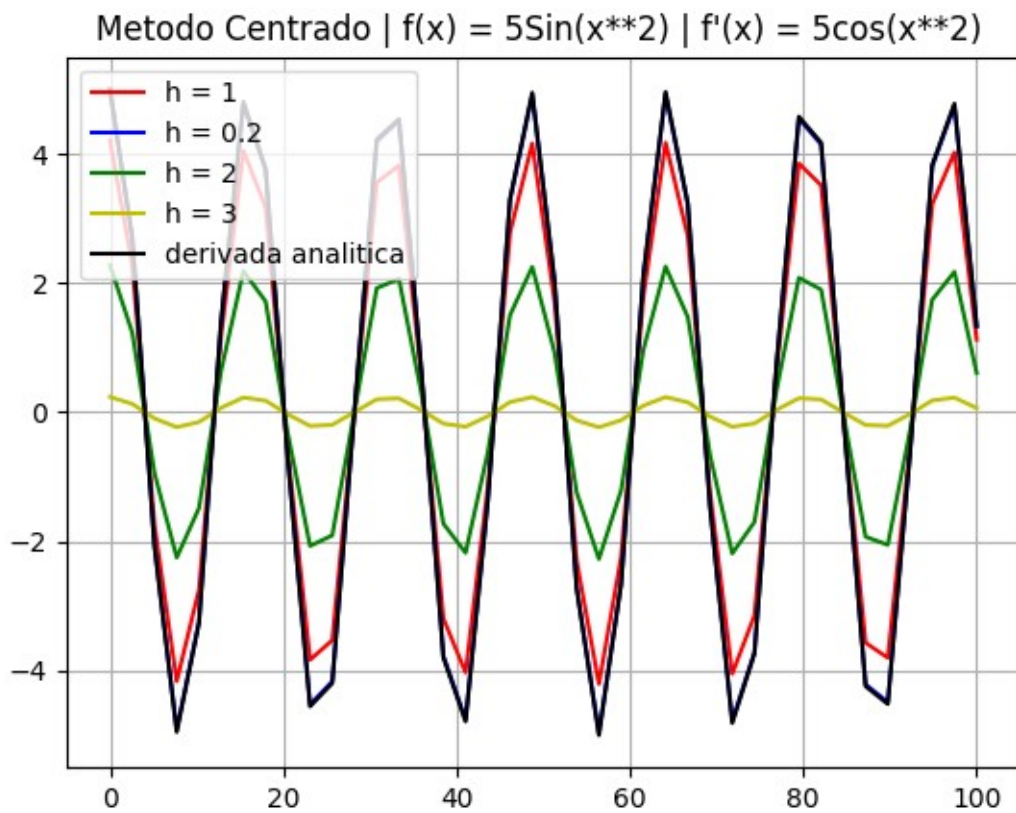
Para La Funcion 2:

Metodo Hacia Delante | $f(x) = 5\sin(x^2)$ | $f'(x) = 5\cos(x^2)$



Metodo Hacia Atras | $f(x) = 5 * \sin(x^2)$ | $f'(x) = 5\cos(x^2)$





Calculo de error y tiempo:

Metodo Hacia Delante:

```
-----
con x = 5, h = 0.2
  el resultado con el metodo es: 1.8867404735746351 con un erro de 0.46842954625850397
  tiempo de ejecucion: 2.6226043701171875e-05
-----
con x = 5, h = 1
  el resultado con el metodo es: 3.397543882321063 con un erro de 1.979232955004932
  tiempo de ejecucion: 3.337860107421875e-06
-----
con x = 5, h = 2
  el resultado con el metodo es: 4.039777183454818 con un erro de 2.621466256138687
  tiempo de ejecucion: 2.384185791015625e-06
-----
con x = 5, h = 3
  el resultado con el metodo es: 3.2471375354775334 con un erro de 1.8288266081614022
  tiempo de ejecucion: 2.6226043701171875e-06
-----
```

```

Metodo Hacia Atras:
-----
con x = 5, h = 0.2
  el resultado con el metodo es: 0.9310083543175551 con un erro de 0.48730257299857604
  tiempo de ejecucion: 2.8848648071289062e-05
-----
con x = 5, h = 1
  el resultado con el metodo es: -1.0106088967760511 con un erro de 2.4289198240921825
  tiempo de ejecucion: 4.0531158447265625e-06
-----
con x = 5, h = 2
  el resultado con el metodo es: -2.750110706807514 con un erro de 4.1684216341236455
  tiempo de ejecucion: 2.6226043701171875e-06
-----
con x = 5, h = 3
  el resultado con el metodo es: -3.1137028358147005 con un erro de 4.5320137631308315
  tiempo de ejecucion: 1.9073486328125e-06
-----

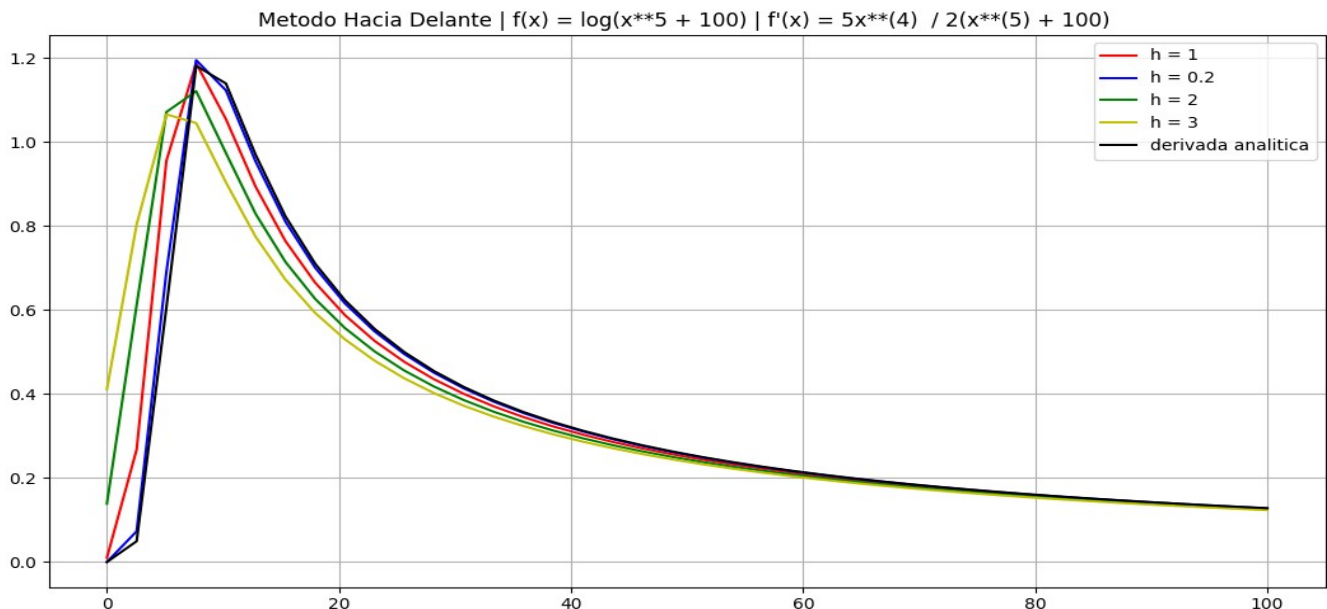
```

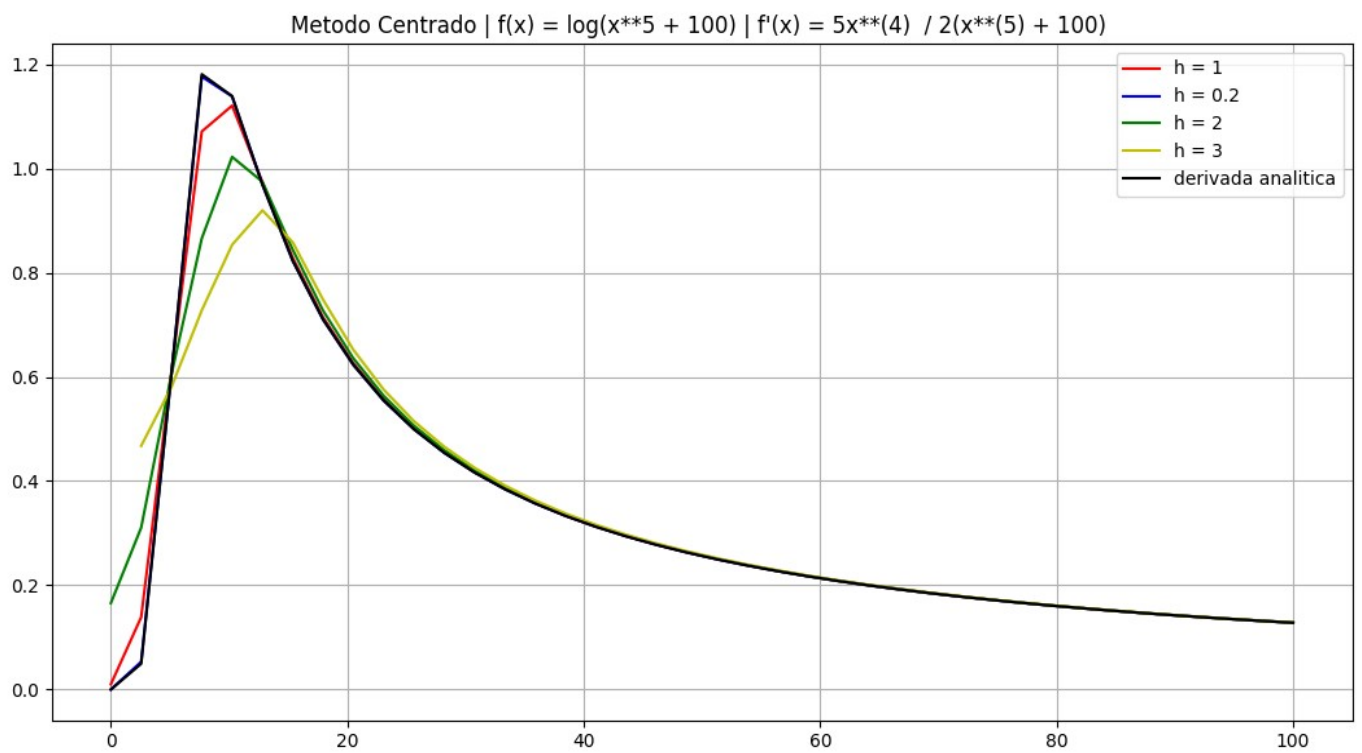
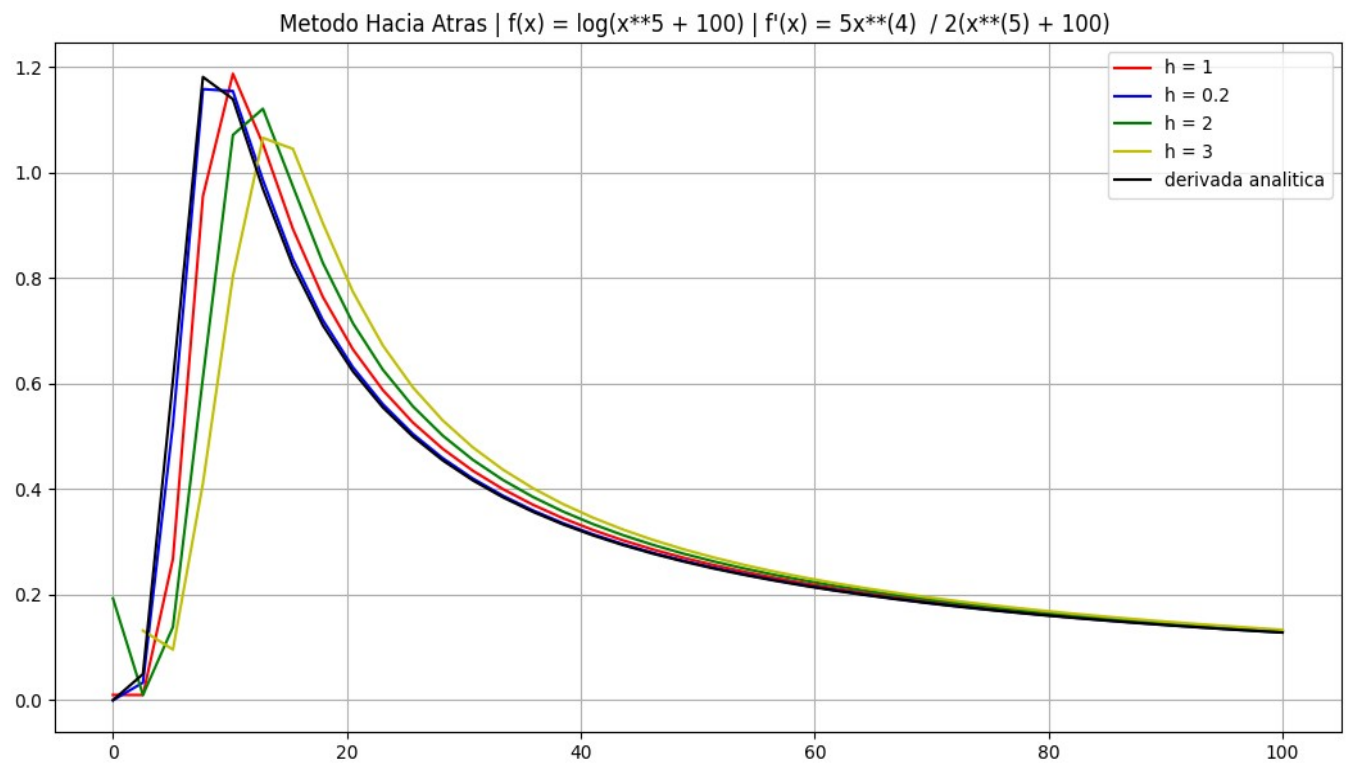
```

Metodo Centrado:
-----
con x = 5, h = 0.2
  el resultado con el metodo es: 1.4088744139460951 con un erro de 0.009436513370036037
  tiempo de ejecucion: 2.7179718017578125e-05
-----
con x = 5, h = 1
  el resultado con el metodo es: 1.193467492772506 con un erro de 0.2248434345436252
  tiempo de ejecucion: 5.0067901611328125e-06
-----
con x = 5, h = 2
  el resultado con el metodo es: 0.6448332383236524 con un erro de 0.7734776889924788
  tiempo de ejecucion: 2.86102294921875e-06
-----
con x = 5, h = 3
  el resultado con el metodo es: 0.06671734983141671 con un erro de 1.3515935774847145
  tiempo de ejecucion: 2.6226043701171875e-06
-----

```

Para La Función 3:





Calculo de error y tiempo:

Metodo Hacia Delante:

```
-----  
con x = 5, h = 0.3  
  el resultado con el metodo es: 0.9449223813632261 con un erro de 0.0240698666987893  
  tiempo de ejecucion: 5.555152893066406e-05  
-----  
con x = 5, h = 1  
  el resultado con el metodo es: 0.8928872105291443 con un erro de 0.07610503753287112  
  tiempo de ejecucion: 2.2172927856445312e-05  
-----  
con x = 5, h = 2  
  el resultado con el metodo es: 0.8283973935535469 con un erro de 0.14059485450846854  
  tiempo de ejecucion: 1.811981201171875e-05  
-----  
con x = 5, h = 3  
  el resultado con el metodo es: 0.773855529940402 con un erro de 0.19513671812161348  
  tiempo de ejecucion: 1.7404556274414062e-05  
-----
```

Metodo Hacia Atras:

```
-----  
con x = 5, h = 0.2  
  el resultado con el metodo es: 0.985566636954931 con un erro de 0.016574388892915515  
  tiempo de ejecucion: 6.413459777832031e-05  
-----  
con x = 5, h = 1  
  el resultado con el metodo es: 1.0540391987762359 con un erro de 0.08504695071422042  
  tiempo de ejecucion: 1.3828277587890625e-05  
-----  
con x = 5, h = 2  
  el resultado con el metodo es: 1.1204788910319663 con un erro de 0.15148664296995085  
  tiempo de ejecucion: 1.049041748046875e-05  
-----  
con x = 5, h = 3  
  el resultado con el metodo es: 1.065295435547834 con un erro de 0.09630318748581845  
  tiempo de ejecucion: 9.298324584960938e-06  
-----
```

Metodo Centrado:

```
-----  
con x = 5, h = 0.2  
  el resultado con el metodo es: 0.9691998811331604 con un erro de 0.00020763307114490814  
  tiempo de ejecucion: 7.05718994140625e-05  
-----  
con x = 5, h = 1  
  el resultado con el metodo es: 0.9734632046526901 con un erro de 0.004470956590674646  
  tiempo de ejecucion: 3.0994415283203125e-05  
-----  
con x = 5, h = 2  
  el resultado con el metodo es: 0.9744381422927566 con un erro de 0.005445894230741155  
  tiempo de ejecucion: 2.2172927856445312e-05  
-----  
con x = 5, h = 3  
  el resultado con el metodo es: 0.9195754827441179 con un erro de 0.049416765317897515  
  tiempo de ejecucion: 1.8596649169921875e-05  
-----
```

INTEGRACIÓN NUMÉRICA:

La idea es lograr calcular un resultado aproximado de la integral de una función $f(x)$ definida en un rango $[a,b]$ tal que $a < b$. El método de integración es un método compuesto, lo que significa que se divide la integral en n intervalos, tal que $n > 0$ y se realiza la integral definida para cada intervalo y después se suma el resultado de cada intervalo. Entre mas intervalos se usen (entre mas grande el valor de n) entonces se va a tener una mayor precisión en la integral (respecto a la integral analítica). Con estos valores de $f(x)$, a , b y n , se evalúa la formula de cada método para obtener el resultado de la integral.

Formula método del rectángulo:

$$I(f) = M_c(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$



Formula método de Simpson:

$$I(f) = S_c(f) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right].$$

Formula método del trapezoide:

$$I(f) = T_c(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Pruebas:

Para probar los algoritmos desarrollados se realizaron pruebas con 3 funciones de diferente complejidad y con 4 valores de h distintos.

4. Funcion1: $8x^3+2x^2+2x$

5. Función 2: $5\sin(x)$

6. Función 3: $\ln(x^5 + 100)$

A continuación se presentan las pruebas realizadas, donde para cada método se evaluaron las 3 funciones con 4 valores diferentes para n (20, 60 , 120 y 300).

Para La Función 1:

Metodo Rectangular:

```
-----  
con x = 5, n = 20  
  el resultado con el metodo es: 3.100443750000003 con un erro de 0.5662229166666637  
  tiempo de ejecucion: 5.1975250244140625e-05  
-----  
con x = 5, n = 60  
  el resultado con el metodo es: 3.470479243827177 con un erro de 0.1961874228394893  
  tiempo de ejecucion: 9.751319885253906e-05  
-----  
con x = 5, n = 120  
  el resultado con el metodo es: 3.6665856481481356 con un erro de 8.101851853092867e-05  
  tiempo de ejecucion: 0.000179290771484375  
-----  
con x = 5, n = 300  
  el resultado con el metodo es: 3.666537037036586 con un erro de 1.2962963007900896e-05  
  tiempo de ejecucion: 0.0004646778106689453  
-----
```

Metodo simpson:

```
-----  
con x = 5, n = 20  
  el resultado con el metodo es: 3.103095833333336 con un erro de 0.5635708333333307  
  tiempo de ejecucion: 7.2479248046875e-05  
-----  
con x = 5, n = 60  
  el resultado con el metodo es: 3.4707933641975472 con un erro de 0.19587330246911927  
  tiempo de ejecucion: 0.00022339820861816406  
-----  
con x = 5, n = 120  
  el resultado con el metodo es: 3.666666666666536 con un erro de 1.2878587085651816e-14  
  tiempo de ejecucion: 0.0003483295440673828  
-----  
con x = 5, n = 300  
  el resultado con el metodo es: 3.666666666666217 con un erro de 4.4853010194856324e-14  
  tiempo de ejecucion: 0.0008816719055175781  
-----
```

Metodo Trapezoide:

```
-----  
con x = 5, n = 20  
  el resultado con el metodo es: 3.108400000000003 con un erro de 0.5582666666666634  
  tiempo de ejecucion: 5.53131103515625e-05  
-----  
con x = 5, n = 60  
  el resultado con el metodo es: 3.4714216049382873 con un erro de 0.1952450617283792  
  tiempo de ejecucion: 8.749961853027344e-05  
-----  
con x = 5, n = 120  
  el resultado con el metodo es: 3.6668287037036906 con un erro de 0.00016203703702410976  
  tiempo de ejecucion: 0.00015974044799804688  
-----  
con x = 5, n = 300  
  el resultado con el metodo es: 3.6666925925925455 con un erro de 2.5925925879022316e-05  
  tiempo de ejecucion: 0.000408172607421875  
-----
```

Para La Función 2:

Metodo Rectangular:

```
-----  
con x = 5, n = 20  
  el resultado con el metodo es: 2.0918024419591363 con un erro de 0.20668602870016484  
  tiempo de ejecucion: 5.0067901611328125e-05  
-----  
con x = 5, n = 60  
  el resultado con el metodo es: 2.228770132073059 con un erro de 0.0697183385862421  
  tiempo de ejecucion: 3.147125244140625e-05  
-----  
con x = 5, n = 120  
  el resultado con el metodo es: 2.2984951213917233 con un erro de 6.650732422119887e-06  
  tiempo de ejecucion: 5.5789947509765625e-05  
-----  
con x = 5, n = 300  
  el resultado con el metodo es: 2.298489534774662 con un erro de 1.0641153607160447e-06  
  tiempo de ejecucion: 0.00013399124145507812  
-----
```

Metodo simpson:

```
-----  
con x = 5, n = 20  
  el resultado con el metodo es: 2.0915845572199507 con un erro de 0.20690391343935044  
  tiempo de ejecucion: 6.389617919921875e-05  
-----  
con x = 5, n = 60  
  el resultado con el metodo es: 2.2287443362717387 con un erro de 0.06974413438756244  
  tiempo de ejecucion: 7.390975952148438e-05  
-----  
con x = 5, n = 120  
  el resultado con el metodo es: 2.2984884706631457 con un erro de 3.844480289671992e-12  
  tiempo de ejecucion: 0.00014591217041015625  
-----  
con x = 5, n = 300  
  el resultado con el metodo es: 2.2984884706593838 con un erro de 8.260059303211165e-14  
  tiempo de ejecucion: 0.0003561973571777344  
-----
```

Metodo Trapezoide:

```
-----  
con x = 5, n = 20  
  el resultado con el metodo es: 2.091148787741578 con un erro de 0.20733968291772298  
  tiempo de ejecucion: 5.555152893066406e-05  
-----  
con x = 5, n = 60  
  el resultado con el metodo es: 2.2286927446690967 con un erro de 0.06979572599020445  
  tiempo de ejecucion: 7.319450378417969e-05  
-----  
con x = 5, n = 120  
  el resultado con el metodo es: 2.2984751692059926 con un erro de 1.330145330857846e-05  
  tiempo de ejecucion: 0.0001537799835205078  
-----  
con x = 5, n = 300  
  el resultado con el metodo es: 2.2984863424288258 con un erro de 2.128230475406667e-06  
  tiempo de ejecucion: 0.0003032684326171875  
-----
```

Para La Función 3:

Metodo Rectangular:

```
-----  
con x = 5, n = 20  
  el resultado con el metodo es: 4.376130047793356 con un erro de 0.2307022801266445  
  tiempo de ejecucion: 0.00012946128845214844  
-----  
con x = 5, n = 60  
  el resultado con el metodo es: 4.529919843129476 con un erro de 0.07691248479052426  
  tiempo de ejecucion: 0.0002536773681640625  
-----  
con x = 5, n = 120  
  el resultado con el metodo es: 4.606832184675076 con un erro de 1.432449243665701e-07  
  tiempo de ejecucion: 0.00043845176696777344  
-----  
con x = 5, n = 300  
  el resultado con el metodo es: 4.606832304996371 con un erro de 2.292362921707536e-08  
  tiempo de ejecucion: 0.0011112689971923828  
-----
```

Metodo simpson:

```
-----  
con x = 5, n = 20  
  el resultado con el metodo es: 4.37613425463553 con un erro de 0.23069807328447034  
  tiempo de ejecucion: 0.0003657341003417969  
-----  
con x = 5, n = 60  
  el resultado con el metodo es: 4.529920379240665 con un erro de 0.07691194867933504  
  tiempo de ejecucion: 0.0006008148193359375  
-----  
con x = 5, n = 120  
  el resultado con el metodo es: 4.606832327916206 con un erro de 3.794298208958935e-12  
  tiempo de ejecucion: 0.0011680126190185547  
-----  
con x = 5, n = 300  
  el resultado con el metodo es: 4.60683232791527 con un erro de 4.730438263322867e-12  
  tiempo de ejecucion: 0.0026733875274658203  
-----
```

Metodo Trapezoide:

```
-----  
con x = 5, n = 20  
  el resultado con el metodo es: 4.376142668319883 con un erro de 0.23068965960011756  
  tiempo de ejecucion: 0.00017499923706054688  
-----  
con x = 5, n = 60  
  el resultado con el metodo es: 4.529921451463044 con un erro de 0.0769108764569566  
  tiempo de ejecucion: 0.0004687309265136719  
-----  
con x = 5, n = 120  
  el resultado con el metodo es: 4.6068326143984555 con un erro de 2.864784551803723e-07  
  tiempo de ejecucion: 0.0006468296051025391  
-----  
con x = 5, n = 300  
  el resultado con el metodo es: 4.606832373753072 con un erro de 4.583307156025285e-08  
  tiempo de ejecucion: 0.001917123794555664  
-----
```


De las pruebas se puede resaltar que entre los tres métodos el mas preciso es el método de Simpson, ademas entre mas crezcas el n mucho menor sera el error y por lo tanto ser mas preciso el resultado (mas cercano al resultado de la integral por medio del método analítico), sin embargo entre mayor valor se el n .

CONCLUSIONES:

Para concluir podemos ver que la Derivación numérica y la Integración numérica son métodos que sirven para el calculo de derivadas e integrales de una forma diferente al método analítico convencional, sin embargo deben manejar valores de h cercanos a 0 o valores de n altos (dependiendo si se busca derivar o integrar). Dentro de la derivación numérica el método mas preciso es el del método centrado. Dentro de la integración numérica el método mas preciso es el método de Simpson. La diferencia del tiempo de ejecución entre los métodos (tanto dentro de la derivación como la integración) es muy poco, sin embargo los métodos que consumen mas tiempo tienden a ser el método centrado para derivación y el método de Simpson. Sin embargo para los métodos de integración, lo que realmente afecta de forma significativa el tiempo de ejecución es el tamaño del n , ya que los métodos de integración al ser compuestos son una sumatoria, y a nivel del algoritmo una sumatoria se calcula por medio de un ciclo “for” que se repite n veces, por lo tanto entre mayor sea el n , mayor sera la ejecución del ciclo “for” por lo tanto se demorara mas.

REFERENCIAS:

- [1] Calculadora de Integrales que se uso para calcular las integrales analíticas para poder realizar las pruebas: [Integral definida - Calculadora \(desmos.com\)](https://www.desmos.com/calculator/4v8v8v8v8v)
- [2] Calculadora de derivadas que se uso para calcular las integrales analíticas para poder realizar las pruebas: [Calculadora de Derivadas • ¡Con pasos! \(calculadora-de-derivadas.com\)](https://calculadora-de-derivadas.com/)