

Cálculo del coeficiente de transmisión en capas ópticas delgadas no lineales

J. D. Mazo-Vásquez^{a,*}

^aInstituto de Física, Universidad de Antioquia UdeA, Calle 70 No. 52-21, Medellín, Colombia

ARTICLE INFO

Keywords:

No linealidad tipo Kerr
Coeficiente de transmisión
Cómputo en paralelo
Solitones ópticos

Resumen

En este trabajo se calcula el coeficiente de transmisión para una capa no lineal tipo Kerr cuando una onda monocromática incide sobre esta. Dicho coeficiente se calcula como función de la frecuencia de la onda incidente y del parámetro que determina la no linealidad del sistema. Los cálculos numéricos se realizaron a través de herramientas de cómputo en paralelo, y se analizó el tiempo requerido para la ejecución de los procesos, mostrando así la considerable disminución del tiempo de cómputo. El comportamiento no lineal se manifiesta en la multiestabilidad del coeficiente de transmisión, la cual aumenta al incrementar la frecuencia de la onda incidente, además, al alcanzar el estado de transmisión máxima, se logra la formación de solitones ópticos que se propagan a lo largo del medio sin sufrir efectos de dispersión.

1. Introducción

Los fenómenos no lineales han sido ampliamente investigados en la mayoría de los campos de la física. Desde la introducción del concepto de solitón [1], muchos trabajos han sido publicados tratando de entender una variedad de fenómenos. En cuanto a la propagación de ondas electromagnéticas, rayos de luz de alta intensidad pueden inducir cambios locales en el índice de refracción de los medios, lo cual genera paquetes de onda que se propagan sin deformación, conocidas como *solitones ópticos* [2]. Sin embargo, los efectos no lineales pueden resultar como consecuencia de cambios en la orientación de las moléculas a lo largo de la dirección de propagación de las ondas electromagnéticas, efectos térmicos, cambios temporales del índice de refracción, entre otros mecanismos [3].

De particular interés resultan ser las excitaciones de solitones en materiales construidos con capas dado que, si la geometría y el índice de refracción se escogen apropiadamente, el sistema se comporta como una guía de onda, de manera que la luz se propaga por el medio sin difracción y manteniendo una alta intensidad. Por otro lado, en esta clase de materiales se ha observado transiciones de estados de alta transmisión a baja, y viceversa. [4, 5, 6, 7]. Este efecto, denominado *fenómeno de transición de transmisión*, emerge como una potencial aplicación a nivel experimental para la elaboración de diferentes dispositivos como transistores para procesamiento de datos [8], o diodos construidos a partir de heteroestructuras [9].

El objetivo de este trabajo es obtener el coeficiente de transmisión como función de los parámetros del sistema a partir de la solución analítica para el campo electromagnético dentro de un medio no lineal tipo Kerr. Para esto se hace uso del paquete *Multiprocessing* para Python, con el propósito de investigar los tiempos de ejecución necesarios para realizar la tarea. Este documento se estructura de la siguiente

manera: en la sección 2 se describe la solución analítica para el campo dentro del medio y el método computacional empleado, posteriormente en la sección 3 se muestran y discuten los resultados obtenidos al realizar la simulación. Finalmente, en la sección 4 se presentan las conclusiones.

2. Marco teórico y descripción del método

Consideramos una capa de material isotrópico y no dispersivo de espesor d , el cual tiene permitividad eléctrica ϵ y permeabilidad magnética μ , ambos parámetros reales. Esta capa está rodeada por un medio no dispersivo de permitividad eléctrica ϵ_0 y permeabilidad magnética μ_0 desde la cual incide una onda electromagnética con frecuencia ω haciendo un ángulo θ con respecto a la normal de incidencia. Suponiendo que esta onda está linealmente polarizada en la configuración transversal eléctrica (TE), es decir que el campo eléctrico es paralelo a la superficie de incidencia, tal como se muestra en la figura 1. El campo eléctrico de la onda está dado por $\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}(z)e^{i(qy - \omega t)}\vec{e}_x$ donde \vec{e}_x es el vector unitario a lo largo de la dirección x y $q = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sin(\theta)$ es la proyección del vector de onda \vec{k} a lo largo de la dirección y , de acuerdo a la ley de Snell. La amplitud del campo eléctrico satisface la ecuación diferencial [10]

$$-\frac{d}{dz}\frac{1}{\bar{\mu}(z)}\frac{d}{dz}\mathcal{E}(z) = \left[\frac{\omega^2}{c^2}\bar{\epsilon}(z) - \frac{\omega^2}{c^2\bar{\mu}(z)}\sin^2(\theta)\right]\mathcal{E}(z), \quad (1)$$

donde se definieron $\bar{\epsilon}(z)$ y $\bar{\mu}(z)$ como la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética dependientes de la posición, respectivamente. En el medio circundante, donde ambos $\bar{\epsilon}(z) = \epsilon_0$ y $\bar{\mu}(z) = \mu_0$ son constantes, la solución a la ecuación (1) puede ser escrita como ondas planas, $\mathcal{E}(z) = E_i[e^{iQ_0z} + re^{-iQ_0z}]$ para $z < 0$ y $\mathcal{E}(z) = E_t e^{iQ_0(z-d)}$ para $z > d$, donde E_i es la amplitud del campo eléctrico incidente, $Q_0 = \frac{\omega}{c}p_0$, $p_0 = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\cos(\theta)$, r y t definen respectivamente los coeficientes de reflexión ($R = rr^*$) y transmisión ($T = tt^*$).

Consideremos el caso cuando la capa exhibe un comportamiento no lineal tipo Kerr, es decir que la permitividad

*Correo electrónico

juan.mazov@udea.edu.co (J.D. Mazo-Vásquez)

ORCID(s): 0000-0002-8561-6036 (J.D. Mazo-Vásquez)

eléctrica es una función cuadrática de la amplitud del campo eléctrico: $\epsilon(z) = \epsilon + \alpha |\mathcal{E}(z)|^2$, donde ϵ es la constante dieléctrica sin campo aplicado y α es el coeficiente dieléctrico no lineal [11]. De acuerdo al signo de α , el comportamiento lineal se clasifica como auto-enfocante ($\alpha > 0$) y auto-desenfocante ($\alpha < 0$), mientras que el caso $\alpha = 0$ define el régimen lineal. Por simplicidad se ha tomado $\alpha, \epsilon_0, \mu_0, \epsilon$ y μ como parámetros independientes de la frecuencia.

Como se menciona en la referencia [12], las soluciones a la ecuación (1), que son físicamente admisibles para obtener $T = 1$, existen siempre y cuando la potencia de no linealidad, definida como $a = \alpha |E_i|^2$, sea mayor o igual que un valor bien definido ξ dado por

$$\xi = \frac{\eta^2 - p^2}{\eta}, \quad (2)$$

donde $p^2 = \epsilon\mu - \epsilon_0\mu_0 \sin^2(\theta)$ y $\eta = p_0\mu/\mu_0$. Si $a < \xi$, las soluciones a la ecuación (1) son funciones continuas de la posición a lo largo de todo el medio, y si $a = \xi$ se obtiene un modo de propagación con $T = 1$ sin importar la frecuencia de la onda incidente [12]. Para propósitos computacionales se utilizó $\epsilon_0 = \mu_0 = 1.0$, $\epsilon = 10.0$, $\mu = 1.036$ y $d = 5\text{mm}$. Bajo estas consideraciones $\xi < 0$ y, por tanto, la región definida por $a > \xi$ incluye una porción donde $a < 0$ (no linealidad auto-desenfocante), $a = 0$ (régimen lineal) y $a > 0$ (no linealidad auto-enfocante). En términos de la variable adimensional $\zeta = \frac{\omega}{c}z$, considerando $\mathcal{E}(\zeta) = E_i f e^{i\phi}$, con f, ϕ funciones reales de ζ , las soluciones a la ecuación (1) para el cuadrado de la amplitud del campo eléctrico $F(\zeta) = f^2(\zeta) = |\mathcal{E}(\zeta)/E_i|^2$ están dadas por

$$F(\zeta) = \frac{F_1 + \sigma F_2 \text{cn}^2[\kappa_d(\zeta - \zeta_d), m_d]}{1 + \sigma \text{cn}^2[\kappa_d(\zeta - \zeta_d), m_d]}, \quad (3)$$

para $\xi < a < 0$

$$F(\zeta) = F_d \left[\frac{\eta^2}{p^2} + \left(1 - \frac{\eta^2}{p^2} \right) \cos^2[p(\zeta - \zeta_d)] \right], \quad (4)$$

para $a = 0$ y

$$F(\zeta) = F_2 + (F_d - F_2) \text{cn}^2[\kappa_f(\zeta - \zeta_d), m_f], \quad (5)$$

para $a > 0$, donde

$$F_1 = -\frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{2p^2}{a\mu} + F_d \right)^2 + \frac{8\eta^2}{a\mu} F_d} + \frac{2p^2}{a\mu} + F_d \right], \quad (6)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{2p^2}{a\mu} + F_d \right)^2 + \frac{8\eta^2}{a\mu} F_d} - \frac{2p^2}{a\mu} - F_d \right], \quad (7)$$

$$F_3 = F_d, \quad (8)$$

y $\text{cn}(x, m)$ es la función coseno elíptico, $\sigma = \frac{F_d - F_1}{F_2 - F_d}$, $m_d = \frac{F_d - F_1}{F_2 - F_1}$, $m_f = \frac{F_d - F_2}{F_d - F_1}$, $\kappa_d = \sqrt{\frac{|a|\mu}{2} (F_2 - F_1)}$, $\kappa_f =$

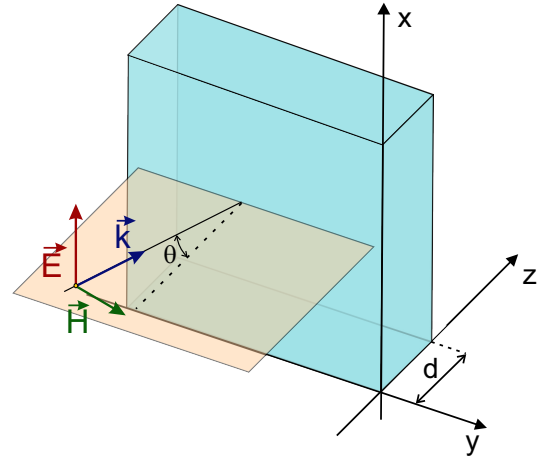


Figura 1: Vista pictórica de la capa de espesor d y los vectores de campo electromagnético. Se observa que el plano de incidencia contiene al vector de onda \vec{k} y a la normal de incidencia.

$\sqrt{\frac{a\mu}{2} (F_d - F_1)}$ y $\zeta_d = \frac{\omega}{c}d$. Se puede observar que las ecuaciones (3), (4) y (5) son funciones paramétricas del coeficiente de transmisión $T = |\mathcal{E}(\zeta_d)/E_i|^2 = F_d$. Garantizando que se satisfacen las condiciones de frontera en las fronteras de la capa se obtiene la ecuación trascendente

$$4\eta^2 - F_d \left[3\eta^2 + p^2 + \frac{a\mu}{2} F_d \right] + F_0 \left[p^2 - \eta^2 + \frac{a\mu}{2} F_0 \right] = 0, \quad (9)$$

En el régimen no lineal, la ecuación (9) permite obtener la potencia de no linealidad para un valor dado del coeficiente de transmisión $F_d = T$ tal que se satisfacen las condiciones de frontera $R + T = 1$. El proceso consiste en fijar un valor para T ($0 < T \leq 1$), y resolver la ecuación (9) para la potencia de no linealidad a , considerando para F_0 los posibles casos para la solución de la ecuación (1). La ecuación (9) permite también obtener el valor de T para valores dados de la frecuencia de la onda incidente mientras que se mantiene constante la potencia de no linealidad.

Usando el método descrito anteriormente y empleando la librería *Multiprocessing* de Python [13] para realizar cómputos en paralelo, se puede obtener las soluciones a la ecuación trascendente (9). El algoritmo, descrito en el esquema de la figura 2, consiste en dividir el rango de valores de la potencia de no linealidad $\alpha |E_i|^2$ (o frecuencia ω) de acuerdo al número de núcleos del procesador. Inicialmente se define la función que retorna el valor del lado izquierdo de la ecuación (9), la cual recibe un valor para T y para $\alpha |E_i|^2$ o ω , dependiendo de lo que se planea calcular. Posteriormente, se define una función que realiza el método de bisección para encontrar las raíces de la ecuación trascendente, y esta función es asignada con diferentes rangos a los diferentes núcleos. Las soluciones a la ecuación (9) se van almacenando en diferentes colas, las cuales, luego de haber culminado el proceso, se leen para lograr escribir los datos en un archivo.

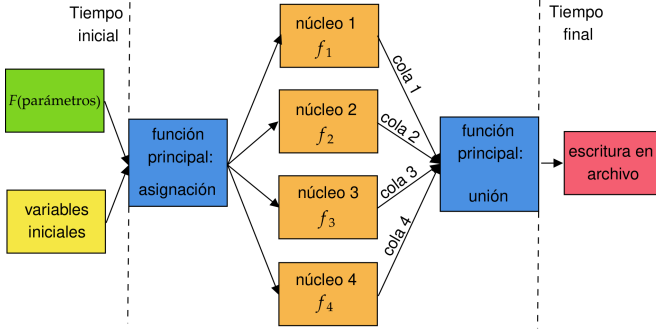


Figura 2: Representación esquemática del código para el cálculo del coeficiente de transmisión.

3. Resultados y discusión

A partir de la ecuación (9) se calculó el coeficiente de transmisión como función de la potencia de no linealidad ($\alpha|E_i|^2$) para los valores de frecuencia que conducen a $T = 1$, de acuerdo a la solución en el régimen lineal (véase ecuación (4)), concretamente

$$\omega_N = \frac{N\pi c}{pd}. \quad (10)$$

En la figura 4 se ilustran los resultados obtenidos para $N = 2, 6, 10$ en el rango $[\xi, 10]$. Los cálculos se realizaron con $\theta = \pi/6$. Se observa que hay un aumento de los posibles valores de transmisión para un valor de $\alpha|E_i|^2$ dado, a medida que la frecuencia de la onda incidente se hace mayor. Este fenómeno de transición de transmisión es el reportado por las referencias [4, 7]. El comportamiento multiestable, característico de los medios con no linealidad cuadrática [14], también se verifica en la figura 4, en la cual se presenta el coeficiente de transmisión como función de la frecuencia de la onda incidente para los valores $\alpha|E_i|^2 = 3, 6, 9$ de la potencia de no linealidad. Cuando $T = 1$ se logra la formación de solitones ópticos en el medio, los cuales se propagan en el medio sin dispersión.

Se analizó el tiempo de ejecución necesario para obtener los resultados presentados en las figuras 3 y 4, teniendo en cuenta que dicho tiempo se estima a partir de la asignación de las tareas a cada núcleo del procesador y finaliza cuando las tareas de cada uno terminan y se obtiene la cola proveniente de cada proceso, es decir que no se tiene en cuenta el tiempo que se requiere para escribir en archivos de texto. Los resultados se presentan en la figura 5: para el cálculo de T como función de $\alpha|E_i|^2$ (figura 3) se compararon los tiempos requeridos para las frecuencias dadas por $N = 2, 6, 10, 14, 18$ y 20 , mientras que para T como función de ω (figura 4) se compararon los tiempos dados por las potencias de no linealidad $\alpha|E_i|^2 = 3, 6, 9, 12, 15$ y 18 . El porcentaje de tiempo de ejecución en paralelo respecto al tiempo sin paralelización para cada uno de los cálculos se presenta en los cuadros 1 y 2. En el caso de la figura 5a, el uso de 2, 3 y 4 núcleos redujo el tiempo de ejecución en promedio a un 71.73 %, 45.55 %, y 35.18 % respectivamente, mientras que

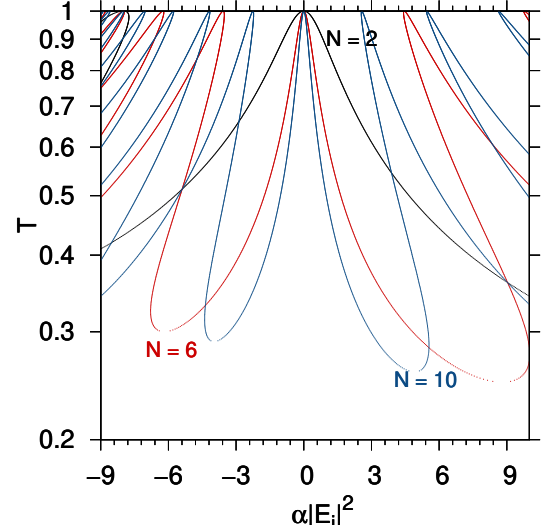


Figura 3: Coeficiente de transmisión en la configuración TE como función de la potencia de no linealidad para $N = 2, 6, 10$ (véase ecuación (10)). Los cálculos se realizaron con $d = 5$ mm, $\theta = \pi/6$, $\epsilon = 10.0$, $\mu = 1.036$ y $\epsilon_0 = \mu_0 = 1.0$.

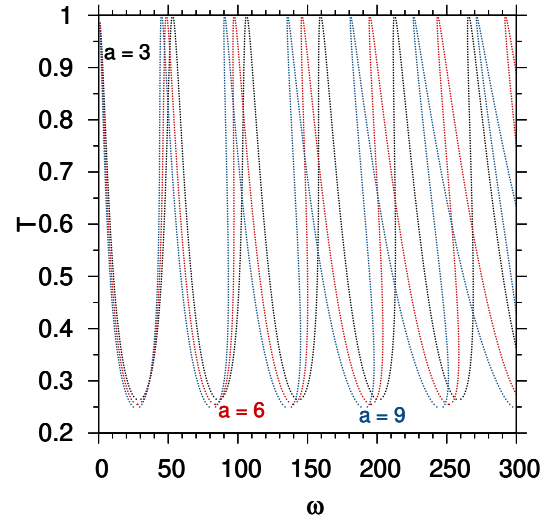


Figura 4: Coeficiente de transmisión en la configuración TE como función de la frecuencia de la onda incidente para valores de la potencia de no linealidad $\alpha|E_i|^2 = 3, 6, 9$. Los cálculos se realizaron con $d = 5$ mm, $\theta = \pi/6$, $\epsilon = 10.0$, $\mu = 1.036$ y $\epsilon_0 = \mu_0 = 1.0$.

para la figura 5b se redujo en 45.37 %, 35.08 % y 23.16 % respectivamente.

Las reducciones de tiempo no son exactamente proporcionales respecto al número de núcleos del procesador que se utilizan para realizar los cálculos, es decir que con 2 núcleos no se reduce el tiempo a la mitad, con 3 a un tercio, etc. La razón de esto es que, dependiendo de la manera en que se asignen las tareas para cada procesador, es decir, los rangos en los cuales se buscan las soluciones a la ecuación

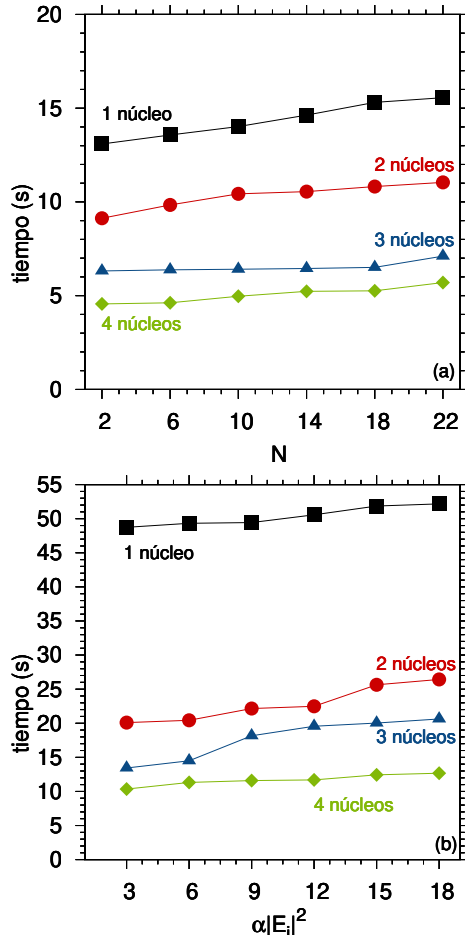


Figura 5: Tiempos de cálculo requeridos para obtener el coeficiente de transmisión (a) como función de la potencia de no linealidad y (b) como función de la frecuencia de la onda incidente (véanse figuras 3 y 4).

Número de núcleos N	2	3	4
2	69.74	48.28	34.84
6	72.51	47.01	34.04
10	74.39	45.72	35.44
14	72.11	44.08	35.75
18	70.67	42.52	34.36
22	70.95	45.69	36.63

Cuadro 1

Porcentaje del tiempo de cómputo en paralelo respecto al tiempo sin paralelización, para los resultados presentados en al figura 5a.

trascendente, dicha ecuación tendrá más o menos soluciones y por tanto se deben realizar más o menos iteraciones.

4. Conclusiones

A partir de las soluciones analíticas para la propagación de ondas electromagnéticas en una capa delgada con no linealidad tipo Kerr, se obtuvo el coeficiente de transmisión

Número de núcleos $\alpha E_i ^2$	2	3	4
3	41.12	27.57	21.23
6	41.42	29.38	22.95
9	44.83	36.74	23.44
12	45.36	38.68	23.11
15	49.44	38.62	23.97
18	50.66	39.54	24.28

Cuadro 2

Porcentaje del tiempo de cómputo en paralelo respecto al tiempo sin paralelización, para los resultados presentados en al figura 5b.

como función del parámetro de no linealidad del medio y de la frecuencia de la onda incidente. Las condiciones de frontera en las interfaces del medio permiten obtener una relación entre los coeficientes de transmisión y reflexión. A través de métodos de cómputo en paralelo se obtuvieron resultados numéricos para el coeficiente de transmisión. Se encontró que el tiempo de cómputo necesario para realizar los procesos disminuye al utilizar más núcleos del procesador. Los tiempos de cálculo dependerán esencialmente de la división de los intervalos en los cuales se quieren encontrar soluciones a la ecuación que definida por las condiciones de frontera. El algoritmo empleado se podría escalar a problemas computacionales que requieran más tiempo de cálculo.

Adicionalmente, los resultados obtenidos para el coeficiente de transmisión dan cuenta de los efectos de multiestabilidad del sistema y de la posibilidad de formación de solitones ópticos que pueden propagarse en el medio sin deformarse. Estos efectos podrían utilizarse para la construcción de sistemas multicapas con distintos propósitos o el diseño de dispositivos de transmisión de señales.

Referencias

- [1] A. Scott, F. Chu, and D. McLaughlin, *Proceedings of the IEEE* **10**, 61, 1443 (1973).
- [2] G. I. Stegeman and M. Segev, *Science* **286**, 1518 (1999).
- [3] S. H. Guang, *Nonlinear Optics and Photonics* (Oxford University Press, 2015).
- [4] W. Chen and D. L. Mills, *Phys. Rev. B* **35**, 524 (1987).
- [5] W. Chen and D. L. Mills, *Phys. Rev. B* **36**, 6269 (1987).
- [6] K. M. Leung, *Phys. Rev. B* **39**, 3590 (1989).
- [7] T. Peschel, P. Dannberg, U. Langbein, and F. Lederer, *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 29 (1988).
- [8] W. Nie, *Advanced Materials* **5**, 520 (1993).
- [9] M. D. Tocci, M. J. Bloemer, M. Scalora, J. P. Dowling, and C. M. Bowden, *Appl. Phys. Lett.* **66**, 2324 (1995).
- [10] S. B. Cavalcanti, P. A. Brandão, A. Bruno-Alfonso, and L. E. Oliveira, *Opt. Lett.* **39**, 178 (2014).
- [11] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, 2008).
- [12] L. M. Hincapié-Zuluaga, J. D. Mazo-Vásquez, C. A. Betancur-Silvera, and E. Reyes-Gómez, *EPL* **134**, 54002 (2021).
- [13] "Multiprocessing — process-based parallelism," Python Software Foundation. Last updated on Oct 25, 2021.
- [14] H. M. Gibbs, S. L. McCall, and T. N. C. Venkatesan, *Optics News* **5**, 6 (1979).