MEMORIAS MATEMÁTICAS PARA LA COMPUTACIÓN

JUAN DAVID CASTAÑO VARGAS
CODIGO: 1007223922

MATEMATICAS PARA LA COMPUTACIÓN
MAESTRIA EN INGENIERIA DE SISTEMAS Y COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE PEREIRA
PEREIRA
2025

INTRODUCCIÓN

Este documento presenta una recopilación estructurada de los principales temas abordados en el curso de Matemáticas para la Computación, integrando tanto los desarrollos teóricos como sus aplicaciones prácticas en el campo de la programación. A lo largo de estas memorias se exploran conceptos fundamentales como los números complejos, el álgebra lineal, las ecuaciones en diferencia y la dinámica de sistemas, destacando su utilidad en la solución de problemas computacionales. Adicionalmente, se incorporan ejemplos implementados en Python y MathLab que permiten visualizar y aplicar los conceptos matemáticos en contextos reales, fortaleciendo así el vínculo entre la teoría matemática y su uso en el desarrollo de software, análisis de datos y modelado de sistemas.

MULTIPLICACIÓN DE UN COMPLEJO

El complejo $c = a + ib$.

$w = f(z) = cz$

$w = u + i\,v = (a + i\,b)(x + i\,y) = (ax - by) + i(bx + ay)$

$u = ax - by$

$v = bx + ay$; $\begin{pmatrix} u \\ \hline v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \hline y \end{pmatrix}$

POTENCIACIÓN, RADICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sea Z un número complejo, $Z = x + iy$, $Z = re^{io}$

$w = f(z) \quad z^2 = ?$

Si $Z = x + iy$, $Z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$

$w = f(2i) = z^3 = u + iv$, hallar u y v

Dado : $z = 2iz = 2iw = z3 = (2i)\ 3w = z$

$3 = (2i)$

Reescribimos la potencia$(2i)$

$3 = (2i)(2i)(2i)$

Multiplicamos en partes :

Primero : $(2i)(2i) = 4i\ 2 = 4(-1) = -4$

Luego : $(-4)(2i) = -8i$

Resultado final :

$w = -8i = 0 - 8i$

$u = 0, v = -8$

$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i + i\,2 \ = 1 + 2i + (-1)$

$= 0 + 2i = 2i = 1 + 2i + (-1)$
$= 0 + 2i = \ 2i$

Convertir $z = 1 + iz = 1 + i$ a forma polar

$r = | z | = \sqrt{1^2 + 1^2} \ = \sqrt{2}$
$\theta = \arg(1 + i) = \tan\ -1\ (1 / 1) = \pi / 4$

🔷 Paso 2: Aplicar la identidad de Moivre

La identidad de Moivre dice:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Aplicamos para $n = 2$:

$$z^2 = \left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right]^2 = (\sqrt{2})^2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$
$$= 2\,(0 + i \cdot 1) = \boxed{2i}$$

✅ Resultado final con identidad de Moivre:

$$(1 + i)^2 = \boxed{2i}$$

✅ Fórmula completa para las raíces n-ésimas de un número complejo

Sea un número complejo $z = re^{i\theta}$, donde:

- $r = |z|$ es el módulo
- $\theta = \arg(z)$ es el argumento (ángulo en radianes)

Entonces las n **raíces n-ésimas** de z son:

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad \text{para } k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

También puede escribirse en forma exponencial:

$$z^{1/n} = r^{1/n}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

✅ ¿Por qué aparece k en la fórmula de raíces complejas?

Cuando sacas la raíz de un número complejo, no obtienes **una sola solución** (como con los reales), sino n **soluciones distintas**. Estas soluciones están **uniformemente distribuidas en el plano complejo** formando un **polígono regular**.

Para obtener **todas las soluciones**, usamos:

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad \text{con } k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

🎯 ¿Qué representa k?

- k es un **índice que recorre todas las raíces posibles**.
- Cada valor de k genera una **raíz distinta**.
- El término $2k\pi$ suma vueltas completas al ángulo θ, y al dividir entre n, obtenemos los distintos ángulos de las raíces.

🎯 Ejemplo: Calcular $\sqrt[3]{-1}$

Sabemos que $-1 = e^{i\pi}$, entonces:

- $r = 1$
- $\theta = \pi$

Buscamos las 3 raíces cúbicas ($n = 3$):

$$z_k = 1^{1/3} \cdot e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

Entonces:

- $z_0 = e^{i\pi/3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_1 = e^{i\pi} = -1$
- $z_2 = e^{i5\pi/3} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Hallar $\sqrt{-1}$

Partimos de:

$$z = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

Queremos hallar:

$$\sqrt{z} = z^{1/2} = \left(1 \cdot e^{i\pi}\right)^{1/2} = 1^{1/2} \cdot e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2}$$

Pero hay **dos raíces**, así que usamos:

$$z_k = 1^{1/2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)}, \quad k = 0, 1$$

- Para $k = 0$:

$$z_0 = e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

- Para $k = 1$:

$$z_1 = e^{i(3\pi/2)} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

✅ Resultado final

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

Con forma polar:

$$\boxed{\sqrt{-1} = e^{i\pi/2}, \quad e^{i3\pi/2}}$$

🧮 Ecuación:

$$z^3 + 1 = 0$$

Esto es equivalente a:

$$z^3 = -1$$

Queremos encontrar **las 3 raíces cúbicas** de -1 en el **plano complejo**.

✅ Paso 1: Expresamos -1 en forma polar

Sabemos que:

$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

(ya que su módulo es 1 y su ángulo es π, porque está en el eje real negativo)

✅ Paso 2: Aplicamos fórmula de raíces n-ésimas

$$z_k = r^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

Donde:

- $r = 1$
- $\theta = \pi$
- $n = 3$

Entonces:

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)}$$

✅ Paso 3: Calculamos las raíces

🔹 $k = 0$

$$z_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

🔹 $k = 1$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{3\pi}{3}\right)} = e^{i\pi} = -1$$

🔹 $k = 2$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

🧾 Respuesta final:

Las **3 soluciones complejas** de $z^3 + 1 = 0$ son:

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_1 &= -1 \\ z_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}}$$

🧮 Ecuación:

$$z^4 + 1 = 0$$

Es decir:

$$z^4 = -1$$

Queremos encontrar las **4 raíces cuartas** de -1.

✅ Paso 1: Forma polar de -1

Sabemos que:

$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

Porque:

- Módulo $r = 1$
- Argumento $\theta = \pi$ (está en el eje real negativo)

✅ Paso 2: Fórmula general para raíces n-ésimas

Para una raíz n-ésima de un número complejo:

$$z_k = r^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

Aquí:

- $r = 1$
- $\theta = \pi$
- $n = 4$

Entonces:

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)}$$

✅ Paso 3: Calcular las 4 raíces

🔷 $k = 0$:

$$z_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

🔷 $k = 1$:

$$z_1 = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

🔷 $k = 2$:

$$z_2 = e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

🔷 $k = 3$:

$$z_3 = e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Resultado final:

Las **4 raíces complejas** de la ecuación $z^4 + 1 = 0$ son:

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}}$$

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

Sistemas de ecuaciones lineales,

$$
\begin{aligned}
ax + by &= c \\
dx + ey &= f \ldots \quad \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$[A] = \vec{v} = \vec{b}$$

$$[A]^{-1}[A]\vec{v} = [A]^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$[I]\vec{v} = [A]^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{v} = [A]^{-1}\vec{b}$$

Invertir una matriz 2x2

$$[M] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; ; \; [M][M]^{-1} = [I]$$

$$[M]^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \gamma & \mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \gamma & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del lado izquierdo, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\delta + b\mu \\ c\alpha + d\gamma & c\delta + d\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta igualdad de matrices, podemos establecer dos sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas cada uno:

Sistema de ecuaciones 1:

$$\begin{cases} a\alpha + b\gamma = 1 \\ c\alpha + d\gamma = 0 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones 2:

$$\begin{cases} a\delta + b\mu = 0 \\ c\delta + d\mu = 1 \end{cases}$$

Para resolver cada uno de estos sistemas utilizando la regla de Cramer, necesitamos calcular los determinantes.

Resolviendo el Sistema de ecuaciones 1:

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

El determinante para encontrar α es:

$$D_{1\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 1 \cdot d - b \cdot 0 = d$$

El determinante para encontrar γ es:

$$D_{1\gamma} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = a \cdot 0 - 1 \cdot c = -c$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$\alpha = \frac{D_{1\alpha}}{D_1} = \frac{d}{ad - bc}$$

$$\gamma = \frac{D_{1\gamma}}{D_1} = \frac{-c}{ad - bc}$$

Resolviendo el Sistema de ecuaciones 2:

El determinante de la matriz de coeficientes es el mismo:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

El determinante para encontrar δ es:

$$D_{2\delta} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} = 0 \cdot d - b \cdot 1 = -b$$

El determinante para encontrar μ es:

$$D_{2\mu} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 - 0 \cdot c = a$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$\delta = \frac{D_{2\delta}}{D_2} = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$\mu = \frac{D_{2\mu}}{D_2} = \frac{a}{ad - bc}$$

Por lo tanto, la matriz inversa $[M]^{-1}$ es:

$$[M]^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \gamma & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio invertir la matriz

$$[M] = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular el determinante de la matriz M:

El determinante de una matriz de 2x2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se calcula como $ad - bc$.

En nuestro caso:

$$\det(M) = (-1)(3) - (2)(0) = -3 - 0 = -3$$

Como el determinante es diferente de cero, la matriz M es invertible.

2. Encontrar la matriz adjunta de M:

La matriz adjunta de una matriz de 2x2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se obtiene intercambiando los elementos de la diagonal principal y cambiando el signo de los elementos fuera de la diagonal principal.

Para nuestra matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, la matriz adjunta (a veces denotada como $\text{adj}(M)$ o M^*) es:

$$\text{adj}(M) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Calcular la inversa de M:

La inversa de una matriz M se obtiene dividiendo su matriz adjunta por su determinante:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\mathrm{adj}(M)$$

Sustituyendo los valores que encontramos:

$$M^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando cada elemento de la matriz adjunta por $-\frac{1}{3}$:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{-3} & \frac{-2}{-3} \\ \frac{0}{-3} & \frac{-1}{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Podemos verificar este resultado multiplicando M por M^{-1}. El resultado debería ser la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

resumiendo...

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-1) + (2)(0) & (-1)(\frac{2}{3}) + (2)(\frac{1}{3}) \\ (0)(-1) + (3)(0) & (0)(\frac{2}{3}) + (3)(\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Ejercicio:

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la matriz por el vector de incógnitas, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (-1)x + (2)y = 1 \\ (0)x + (3)y = 3 \end{cases}$$

Simplificando este sistema, tenemos:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3y = 3 \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones fácilmente.

De la segunda ecuación, $3y = 3$, podemos despejar y:

$$y = \frac{3}{3} = 1$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones fácilmente.

De la segunda ecuación, $3y = 3$, podemos despejar y:

$$y = \frac{3}{3} = 1$$

Ahora que conocemos el valor de y, podemos sustituirlo en la primera ecuación, $-x + 2y = 1$:

$$-x + 2(1) = 1$$

$$-x + 2 = 1$$

$$-x = 1 - 2$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = 1$ e $y = 1$. Podemos escribir la solución como el vector:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

También podríamos haber resuelto este sistema utilizando la inversa de la matriz que calculamos anteriormente. Si tenemos $M\mathbf{v} = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{v} = M^{-1}\mathbf{b}$. En este caso, $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Recordemos que $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la matriz por el vector:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(1) + (\frac{2}{3})(3) \\ (0)(1) + (\frac{1}{3})(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalización de una Matriz

Una matriz cuadrada A de $n \times n$ se dice que es diagonalizable si existe una matriz invertible P de $n \times n$ tal que $P^{-1}AP = D$, donde D es una matriz diagonal de $n \times n$. La matriz D tendrá en su diagonal principal los autovalores de A, y las columnas de la matriz P serán los autovectores correspondientes a esos autovalores.

Teoría detrás de la Diagonalización:

1. Autovalores y Autovectores:
   - Autovalor λ, autovector v: $Av = \lambda v$
   - Ecuación equivalente: $(A - \lambda I)v = 0$
   - Ecuación característica: $\det(A - \lambda I) = 0$

2. Condiciones para la Diagonalización:
   - n autovectores linealmente independientes.

3. Construcción de las Matrices P y D:
   - $P = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$
   - $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$
   - Relación: $P^{-1}AP = D$ o $AP = PD$.

Transformación de Similitud o Similaridad

Transformación: $B = P^{-1}AP$
A es similar a B.

Propiedades de las Matrices Similares:

- Determinante: $\det(B) = \det(A)$.
- Traza: $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$.
- Polinomio característico: $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$.
- Mismos autovalores.

Importancia:

- Simplificación de cálculos: $A^k = PD^kP^{-1}$.

En resumen, diagonalización: $A = PDP^{-1}$.

Problema :

Dado $[A] = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; Hallar $[A]^2$

Para encontrar la matriz $[A]$ elevada al cuadrado, $[A]^2$, debemos multiplicar la matriz $[A]$ por sí misma:

$$[A]^2 = [A] \cdot [A]$$

Sustituyendo la matriz $[A]$ en la ecuación:

$$[A]^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La multiplicación de dos matrices de 2x2, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, se realiza elemento a elemento de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Aplicando esta regla a nuestra multiplicación de matrices:

$$[A]^2 = \begin{pmatrix} (-1) \times (-1) + (2) \times (0) & (-1) \times (2) + (2) \times (3) \\ (0) \times (-1) + (3) \times (0) & (0) \times (2) + (3) \times (3) \end{pmatrix}$$

Ahora, realizamos las operaciones aritméticas dentro de la matriz resultante:

$$[A]^2 = \begin{pmatrix} 1 + 0 & -2 + 6 \\ 0 + 0 & 0 + 9 \end{pmatrix}$$

Finalmente, simplificamos los elementos de la matriz para obtener $[A]^2$:

$$[A]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Resultado:

$$[A]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Problema :

Diagonalizar la matriz

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Encontrar los autovalores de M.

La ecuación característica es $\det(M - \lambda I) = 0$. Para $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{pmatrix}$$

El determinante es:

$$\det(M - \lambda I) = (-\lambda)(-3 - \lambda) - (1)(-2) = 3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Igualando a cero:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Factorizando:

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -2$$

Paso 2: Encontrar los autovectores correspondientes.

Para $\lambda_1 = -1$:

El sistema $(M - \lambda_1 I)v_1 = 0$ es:

$$\begin{pmatrix} -(-1) & 1 \\ -2 & -3 - (-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto lleva a la ecuación $x + y = 0$, así que $y = -x$. El autovector es:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(eligiendo $x = 1$)
Para $\lambda_2 = -2$:
El sistema $(M - \lambda_2 I)v_2 = 0$ es:

$$\begin{pmatrix} -(-2) & 1 \\ -2 & -3-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto lleva a la ecuación $2x + y = 0$, así que $y = -2x$. El autovector es:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(eligiendo $x = 1$)
Paso 3: Construir las matrices P y D.
La matriz de paso P tiene los autovectores como columnas:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonal D tiene los autovalores en la diagonal principal:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Verificar la diagonalización.

Calculamos P^{-1}. Para $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{ad\text{-}bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$$\det(P) = (1)(-2) - (1)(-1) = -2 + 1 = -1$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificamos $P^{-1}MP = D$:

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = D$$

Conclusión:
La matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ se diagonaliza como $M = PDP^{-1}$, donde:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Series de Tiempo, Ecuaciones en diferencia lineales

Series de Tiempo

Una serie de tiempo es una secuencia de datos observados en puntos sucesivos en el tiempo. Piensa en el precio diario de una acción, la temperatura horaria en una ciudad, o el número de ventas mensuales de un producto. Lo que las hace especiales es que el orden de los datos importa, y a menudo hay patrones o dependencias entre las observaciones en diferentes momentos.

¿Por qué son importantes las series de tiempo?

Pronóstico: Una de las aplicaciones más intuitivas es predecir valores futuros basándose en el comportamiento pasado. Por ejemplo, una empresa podría usar datos históricos de ventas para pronosticar la demanda futura y planificar la producción.
Análisis de Tendencias: Identificar si un valor está aumentando, disminuyendo o manteniéndose estable a lo largo del tiempo.
Detección de Estacionalidad: Reconocer patrones que se repiten en intervalos regulares (por ejemplo, ventas que aumentan cada diciembre).
Análisis de Intervención: Evaluar el impacto de un evento específico (como una nueva política económica) en una serie de tiempo.

Ecuaciones en Diferencia Lineales

Las ecuaciones en diferencia lineales son modelos matemáticos que describen cómo una variable cambia a lo largo del tiempo, donde el valor futuro de la variable depende linealmente de sus valores pasados y quizás de algunas otras variables. Son la contraparte discreta de las ecuaciones diferenciales, que se usan para el cambio continuo.

Una forma común de verlas es:

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \ldots + a_k Y_{t-k} + bX_t + c$$

Donde:

- Y_t es el valor de la variable en el tiempo t.
- Y_{t-1}, Y_{t-2}, etc., son los valores pasados de la variable.
- a_1, a_2, etc., b, c son coeficientes (constantes).
- X_t puede ser una variable externa que influye en Y_t.

¿Cómo se relacionan con las series de tiempo y por qué son útiles?

Las ecuaciones en diferencia son fundamentales para modelar series de tiempo. Muchos modelos populares de series de tiempo, como los modelos ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average), se basan en ecuaciones en diferencia. Permiten capturar la dinámica interna de una serie de tiempo.

Aplicaciones motivadoras:

Economía y Finanzas:

Modelado del Ciclo Económico: Las ecuaciones en diferencia pueden describir cómo el PIB, la inflación o el desempleo evolucionan, influenciados por sus propios valores pasados.
Valoración de Activos: Modelar el precio de las acciones o bonos, considerando cómo el precio de hoy podría depender del precio de ayer y de factores económicos.
Política Monetaria: Los bancos centrales usan modelos basados en ecuaciones en diferencia para entender el impacto de las tasas de interés en la economía.
Biología y Ecología:

Dinámica Poblacional: Modelar cómo cambia el tamaño de una población de animales o plantas a lo largo del tiempo, donde el número de individuos hoy depende del número de individuos en el pasado (por ejemplo, modelos de crecimiento logístico discreto).
Propagación de Enfermedades: Simular la evolución de una epidemia, donde el número de infectados en un momento dado depende del número de infectados y recuperados en momentos anteriores.

Ingeniería y Procesamiento de Señales:

Diseño de Filtros Digitales: Los filtros que procesan señales de audio o imagen (como los que quitan ruido o realzan ciertas frecuencias) a menudo se implementan con ecuaciones en diferencia.
Control de Sistemas: En robótica o sistemas de control industrial, se utilizan para modelar el comportamiento de un sistema discreto y diseñar controladores que lo estabilicen o lo lleven a un estado deseado.
Ciencias Sociales:

Difusión de Innovaciones: Modelar cómo una nueva idea o tecnología se propaga a través de una población a lo largo del tiempo.
Cambio de Opinión: Describir cómo las opiniones en un grupo social pueden evolucionar, influenciadas por las opiniones de los individuos en el pasado.

Planteamiento del Problema

Se desea modelar la evolución de una población Y (en millones de habitantes) a lo largo del tiempo, medido en años k. Se han obtenido los siguientes datos a través de una serie de censos:

k (años)	$Y(k)$ (millones)
0	20
1	30
2	35
3	45
4	50

El objetivo es establecer una expresión matemática (modelo) que permita determinar la población $Y(k)$ para cualquier tiempo $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Al analizar los datos, se observa un patrón recurrente específico: la población en un año dado parece estar relacionada con la población dos años antes. Específicamente, se ha identificado la siguiente relación:

$$Y(k) = Y(k-2) + 15$$

Esta relación sugiere que la población aumenta en 15 millones cada dos años. Procederemos a utilizar esta observación como la base de nuestro modelo de ecuación en diferencia lineal para encontrar una expresión explícita.

Resolución del Problema

Paso 1: Establecer la Ecuación en Diferencia y Condiciones Iniciales

El modelo propuesto es una ecuación en diferencia lineal:

$$Y(k) = Y(k-2) + 15$$

Para facilitar su resolución, la reorganizamos en la forma estándar:

$$Y(k) - Y(k-2) = 15 \text{ para } k \geq 2$$

De la tabla de datos, obtenemos las **condiciones iniciales** necesarias para una ecuación en diferencia de segundo orden (ya que $Y(k)$ depende de $Y(k-2)$):

$$Y(0) = 20$$

$$Y(1) = 30$$

Paso 2: Resolver la Parte Homogénea ($Y_h(k)$)

Consideramos la ecuación homogénea asociada, donde el término no constante es cero:

$$Y_h(k) - Y_h(k-2) = 0$$

Para encontrar la solución, formamos la **ecuación característica** asociada, reemplazando $Y_h(k)$ por r^k:

$$r^k - r^{k-2} = 0$$

Dividiendo por r^{k-2} (asumiendo $r \neq 0$, lo cual es válido para las raíces no triviales):

$$r^2 - 1 = 0$$

Factorizando la ecuación cuadrática:

$$(r-1)(r+1) = 0$$

Las **raíces características** son:

$$r_1 = 1 \text{ y } r_2 = -1$$

Dado que las raíces son reales y distintas, la **solución homogénea general** $Y_h(k)$ es una combinación lineal de las raíces elevadas a la potencia k:

$$Y_h(k) = C_1(r_1)^k + C_2(r_2)^k$$

$$Y_h(k) = C_1(1)^k + C_2(-1)^k$$

$$Y_h(k) = C_1 + C_2(-1)^k$$

Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que serán determinadas por las condiciones iniciales.

Paso 3: Encontrar una Solución Particular ($Y_p(k)$)

El término no homogéneo en nuestra ecuación $Y(k) - Y(k-2) = 15$ es una constante (15). Utilizaremos el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular.

Como la constante 15 es similar a $C_1 \cdot (1)^k$ y $r_1 = 1$ es una raíz de la ecuación característica, debemos multiplicar nuestra suposición por k. Por lo tanto, proponemos una **solución particular** de la forma:

$$Y_p(k) = Ak$$

Sustituimos esta propuesta en la ecuación en diferencia no homogénea $Y(k) - Y(k-2) = 15$:

$$Ak - A(k-2) = 15$$
$$Ak - Ak + 2A = 15$$
$$2A = 15$$

Despejando A:

$$A = \frac{15}{2} = 7.5$$

Así, la **solución particular** es:

$$Y_p(k) = 7.5k$$

Paso 4: Formar la Solución General

La **solución general** $Y(k)$ para la ecuación en diferencia no homogénea es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$Y(k) = Y_h(k) + Y_p(k)$$
$$Y(k) = C_1 + C_2(-1)^k + 7.5k$$

Paso 5: Usar las Condiciones Iniciales para Determinar las Constantes (C_1, C_2)

Ahora, utilizamos los valores de las condiciones iniciales, $Y(0) = 20$ y $Y(1) = 30$, para encontrar los valores específicos de C_1 y C_2.

Para $k = 0$, $Y(0) = 20$:

$$20 = C_1 + C_2(-1)^0 + 7.5(0)$$

$$20 = C_1 + C_2 \quad \text{(Ecuación 1)}$$

Para $k = 1$, $Y(1) = 30$:

$$30 = C_1 + C_2(-1)^1 + 7.5(1)$$
$$30 = C_1 - C_2 + 7.5$$

Restando 7.5 de ambos lados para simplificar:

$$22.5 = C_1 - C_2 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Ahora, resolvemos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

1. $C_1 + C_2 = 20$
2. $C_1 - C_2 = 22.5$

Sumando la Ecuación 1 y la Ecuación 2 para eliminar C_2:

$$(C_1 + C_2) + (C_1 - C_2) = 20 + 22.5$$
$$2C_1 = 42.5$$
$$C_1 = \frac{42.5}{2}$$
$$C_1 = 21.25$$

Sustituyendo el valor de $C_1 = 21.25$ en la Ecuación 1 ($C_1 + C_2 = 20$):

$$21.25 + C_2 = 20$$
$$C_2 = 20 - 21.25$$
$$C_2 = -1.25$$

Paso 6: Expresar la Solución Explícita Final

Sustituyendo los valores de $C_1 = 21.25$ y $C_2 = -1.25$ en la solución general $Y(k) = C_1 + C_2(-1)^k + 7.5k$, obtenemos la **expresión explícita** para la población $Y(k)$ en cualquier tiempo k:

$$Y(k) = 21.25 - 1.25(-1)^k + 7.5k$$

Ecuaciones No-Homogeneas

Una ecuación diferencial lineal no homogénea es aquella que no es igual a cero en el lado derecho. Es decir, tiene la forma general:

Para una ecuación lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes variables:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$

donde $r(x) \neq 0$.

La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea se compone de dos partes:

1. La solución de la ecuación homogénea asociada (y_h): Esta es la solución de la ecuación diferencial cuando el lado derecho es igual a cero:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

La forma de y_h depende de las raíces de la ecuación característica. Para ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes, las raíces de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$ determinan la forma de y_h:

Raíces reales distintas (λ_1, λ_2):

$$y_h(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

Raíces reales repetidas (λ):

$$y_h(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$$

Raíces complejas conjugadas ($\alpha \pm i\beta$):

$$y_h(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

2. Una solución particular (y_p): Esta es cualquier función que satisface la ecuación no homogénea. Hay varios métodos para encontrar y_p:

Método de Coeficientes Indeterminados: Se usa cuando $r(x)$ tiene una forma específica (polinomios, exponenciales, senos, cosenos o combinaciones de estos). Se "adivina" la forma de y_p con coeficientes indeterminados y luego se sustituye en la ecuación para encontrar esos coeficientes. Algunas formas comunes de y_p según $r(x)$ son:

$r(x)$	Forma de y_p (si no hay solapamiento con y_h)
$P_n(x)$ (polinomio de grado n)	$A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0$
Ce^{ax}	Ae^{ax}
$C\cos(bx)$ o $C\sin(bx)$	$A\cos(bx) + B\sin(bx)$
$P_n(x)e^{ax}$	$(A_n x^n + \ldots + A_0)e^{ax}$
$P_n(x)\cos(bx)$ o $P_n(x)\sin(bx)$	$(A_n x^n + \ldots + A_0)\cos(bx) + (B_n x^n + \ldots + B_0)\sin(bx)$

Si la forma "adivinada" de y_p se solapa con un término en y_h, se multiplica por x^s, donde s es la menor potencia de x que elimina el solapamiento.

Método de Variación de Parámetros: Es un método más general que se puede usar cuando el método de coeficientes indeterminados no es aplicable o $r(x)$ es más complejo. Para una ecuación de segundo orden $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$, si $y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, entonces y_p se busca de la forma:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

donde $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$ se encuentran resolviendo el sistema:

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = r(x)$$

A partir de esto, se puede obtener las fórmulas explícitas para $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$ usando el Wronskiano $W(y_1, y_2)$:

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)r(x)}{W(y_1,\ y_2)}$$

$$u_2'(x) = \frac{y_1(x)r(x)}{W(y_1,\ y_2)}$$

donde el Wronskiano es:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

Luego, $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se obtienen integrando $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$.

Finalmente, la solución general de la ecuación no homogénea es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$e^{ax}\cos(bx)$ o $e^{ax}\sin(bx)$	$Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Vamos a resolver los siguientes ejercicios, se utilizarán las técnicas para ecuaciones de diferencias lineales no homogéneas.

Ejercicio 1: Encuentra la solución general de la ecuación de diferencias
$u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = f(n)$ **para los diferentes casos de** $f(n)$**.**

Primero, encontramos la solución de la ecuación homogénea asociada:
$u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 0$

La ecuación característica es:
$r^2 - 5r + 6 = 0$
Factorizando:
$(r - 2)(r - 3) = 0$
Las raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$.

Por lo tanto, la solución homogénea es:
$u_h(n) = C_1(2)^n + C_2(3)^n$

Ahora, resolvemos para cada caso de $f(n)$:

(a) $f(n) = 2$

Proponemos una solución particular de la forma $u_p(n) = A$ (ya que $f(n)$ es una constante).
Sustituyendo en la ecuación no homogénea:
$A - 5A + 6A = 2$
$2A = 2$
$A = 1$

Así, la solución particular es $u_p(n) = 1$.
La solución general es:
$u_n = u_h(n) + u_p(n) = C_1(2)^n + C_2(3)^n + 1$

(b) $f(n) = n$

Proponemos una solución particular de la forma $u_p(n) = An + B$.
Sustituyendo en la ecuación no homogénea:

$(An + B) - 5(A(n - 1) + B) + 6(A(n - 2) + B) = n$
$An + B - 5An + 5A - 5B + 6An - 12A + 6B = n$
Agrupando términos con n y términos constantes:
$(A - 5A + 6A)n + (B + 5A - 5B - 12A + 6B) = n$
$2An + (-7A + 2B) = n$

Comparando coeficientes:
Para los términos con n: $2A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$
Para los términos constantes: $-7A + 2B = 0$
$-7\left(\frac{1}{2}\right) + 2B = 0$
$-\frac{7}{2} + 2B = 0$
$2B = \frac{7}{2}$
$B = \frac{7}{4}$

Así, la solución particular es $u_p(n) = \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}$.
La solución general es:
$u_n = u_h(n) + u_p(n) = C_1(2)^n + C_2(3)^n + \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}$

(c) $f(n) = 1 + n^2$

Proponemos una solución particular de la forma $u_p(n) = An^2 + Bn + C$.
Sustituyendo en la ecuación no homogénea:
$(An^2 + Bn + C) - 5(A(n - 1)^2 + B(n - 1) + C) + 6(A(n - 2)^2 + B(n - 2) + C) = 1 + n^2$
Expandiendo los términos:
$An^2 + Bn + C - 5(A(n^2 - 2n + 1) + Bn - B + C) + 6(A(n^2 - 4n + 4) + Bn - 2B + C) = 1 + n^2$

$An^2 + Bn + C - 5An^2 + 10An - 5A - 5Bn + 5B - 5C + 6An^2 - 24An + 24A + 6Bn - 12B + 6C$
$= 1 + n^2$

Agrupando términos por potencias de n:
Para n^2: $(A - 5A + 6A)n^2 = 2An^2$
Para n: $(B + 10A - 5B - 24A + 6B)n = (-14A + 2B)n$
Para las constantes: $(C - 5A + 5B - 5C + 24A - 12B + 6C) = (19A - 7B + 2C)$

Entonces:
$2An^2 + (-14A + 2B)n + (19A - 7B + 2C) = n^2 + 1$

Comparando coeficientes:

Para n^2: $2A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$

Para n: $-14A + 2B = 0$

$-14\left(\frac{1}{2}\right) + 2B = 0$

$-7 + 2B = 0 \Longrightarrow 2B = 7 \Longrightarrow B = \frac{7}{2}$

Para las constantes: $19A - 7B + 2C = 1$

$19\left(\frac{1}{2}\right) - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 2C = 1$

$\frac{19}{2} - \frac{49}{2} + 2C = 1$

$-\frac{30}{2} + 2C = 1$

$-15 + 2C = 1$

$2C = 16 \Longrightarrow C = 8$

Así, la solución particular es $u_p(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 8$.

La solución general es:

$u_n = u_h(n) + u_p(n) = C_1(2)^n + C_2(3)^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 8$

(d) $f(n) = 5^n$

Proponemos una solución particular de la forma $u_p(n) = A(5)^n$.

Sustituyendo en la ecuación no homogénea:

$A(5)^n - 5A(5)^{n-1} + 6A(5)^{n-2} = 5^n$

Dividimos por 5^{n-2}:

$A(5)^2 - 5A(5)^1 + 6A = 5^2$

$25A - 25A + 6A = 25$

$6A = 25 \Longrightarrow A = \frac{25}{6}$

Así, la solución particular es $u_p(n) = \frac{25}{6}(5)^n$.

La solución general es:

$u_n = u_h(n) + u_p(n) = C_1(2)^n + C_2(3)^n + \frac{25}{6}(5)^n$

(e) $f(n) = 2^n$

Observamos que 2^n es parte de la solución homogénea ($r_1 = 2$). Por lo tanto, debemos multiplicar la forma propuesta por n.

Proponemos una solución particular de la forma $u_p(n) = An(2)^n$.
Sustituyendo en la ecuación no homogénea:

$$An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$$

Dividimos por 2^{n-2}:

$$An(2)^2 - 5A(n-1)(2)^1 + 6A(n-2)(2)^0 = 2^2$$
$$4An - 10A(n-1) + 6A(n-2) = 4$$
$$4An - 10An + 10A + 6An - 12A = 4$$

Agrupando términos con An: $(4A - 10A + 6A)n = 0n$

Agrupando términos constantes: $(10A - 12A) = -2A$

Entonces:

$$0n - 2A = 4$$
$$-2A = 4 \Longrightarrow A = -2$$

Así, la solución particular es $u_p(n) = -2n(2)^n = -n2^{n+1}$.

La solución general es:

$$u_n = u_h(n) + u_p(n) = C_1(2)^n + C_2(3)^n - n2^{n+1}$$

Ejercicio 2: Encuentra la solución completa de $u_n - 7u_{n-1} + 12u_{n-2} = 2^n$ cuando $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$.

Primero, encontramos la solución de la ecuación homogénea asociada:

$$u_n - 7u_{n-1} + 12u_{n-2} = 0$$

La ecuación característica es:

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

Factorizando:

$$(r-3)(r-4) = 0$$

Las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 4$.

Por lo tanto, la solución homogénea es:

$$u_h(n) = C_1(3)^n + C_2(4)^n$$

Ahora, encontramos la solución particular para $f(n) = 2^n$.

Proponemos una solución particular de la forma $u_p(n) = A(2)^n$.

Sustituyendo en la ecuación no homogénea:

$$A(2)^n - 7A(2)^{n-1} + 12A(2)^{n-2} = 2^n$$

Dividimos por 2^{n-2}:

$$A(2)^2 - 7A(2)^1 + 12A(2)^0 = 2^2$$

$4A - 14A + 12A = 4$
$2A = 4 \Longrightarrow A = 2$

Así, la solución particular es $u_p(n) = 2(2)^n = 2^{n+1}$.
La solución general es:
$u_n = u_h(n) + u_p(n) = C_1(3)^n + C_2(4)^n + 2^{n+1}$

Ahora usamos las condiciones iniciales $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$ para encontrar C_1 y C_2:

Para $n = 1$:
$u_1 = C_1(3)^1 + C_2(4)^1 + 2^{1+1} = 1$
$3C_1 + 4C_2 + 4 = 1$
$3C_1 + 4C_2 = -3 \ (*)$

Para $n = 2$:
$u_2 = C_1(3)^2 + C_2(4)^2 + 2^{2+1} = 1$
$9C_1 + 16C_2 + 8 = 1$
$9C_1 + 16C_2 = -7 \ (**)$

Tenemos un sistema de ecuaciones lineales:
1. $3C_1 + 4C_2 = -3$
2. $9C_1 + 16C_2 = -7$

Multiplicamos la ecuación (1) por -3:
$-9C_1 - 12C_2 = 9$
Sumamos esta nueva ecuación a la ecuación (2):
$(-9C_1 - 12C_2) + (9C_1 + 16C_2) = 9 + (-7)$
$4C_2 = 2 \Longrightarrow C_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Sustituimos $C_2 = \frac{1}{2}$ en la ecuación (1):
$3C_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = -3$
$3C_1 + 2 = -3$
$3C_1 = -5 \Longrightarrow C_1 = -\frac{5}{3}$

Por lo tanto, la solución completa es:
$u_n = -\frac{5}{3}(3)^n + \frac{1}{2}(4)^n + 2^{n+1}$

Ejercicio 3: Encuentra la solución general de $u_n + 3u_{n-1} - 10u_{n-2} = 2^n$ **y determina la solución que satisface** $u_1 = 2, u_2 = 1$.

Primero, encontramos la solución de la ecuación homogénea asociada:

$$u_n + 3u_{n-1} - 10u_{n-2} = 0$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 3r - 10 = 0$$

Factorizando:

$$(r + 5)(r - 2) = 0$$

Las raíces son $r_1 = -5$ y $r_2 = 2$.

Por lo tanto, la solución homogénea es:

$$u_h(n) = C_1(-5)^n + C_2(2)^n$$

Ahora, encontramos la solución particular para $f(n) = 2^n$.

Observamos que 2^n es parte de la solución homogénea ($r_2 = 2$). Por lo tanto, debemos multiplicar la forma propuesta por n.

Proponemos una solución particular de la forma $u_p(n) = An(2)^n$.

Sustituyendo en la ecuación no homogénea:

$$An(2)^n + 3A(n-1)(2)^{n-1} - 10A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$$

Dividimos por 2^{n-2}:

$$An(2)^2 + 3A(n-1)(2)^1 - 10A(n-2)(2)^0 = 2^2$$

$$4An + 6A(n-1) - 10A(n-2) = 4$$

$$4An + 6An - 6A - 10An + 20A = 4$$

Agrupando términos con An: $(4A + 6A - 10A)n = 0n$

Agrupando términos constantes: $(-6A + 20A) = 14A$

Entonces:

$$0n + 14A = 4$$

$$14A = 4 \Longrightarrow A = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

Así, la solución particular es $u_p(n) = \frac{2}{7}n(2)^n = \frac{2}{7}n2^n$.

La solución general es:

$$u_n = u_h(n) + u_p(n) = C_1(-5)^n + C_2(2)^n + \frac{2}{7}n2^n$$

Ahora usamos las condiciones iniciales $u_1 = 2$ y $u_2 = 1$ para encontrar C_1 y C_2:

Para $n = 1$:

$$u_1 = C_1(-5)^1 + C_2(2)^1 + \frac{2}{7}(1)(2)^1 = 2$$

$$-5C_1 + 2C_2 + \frac{4}{7} = 2$$

$$-5C_1 + 2C_2 = 2 - \frac{4}{7} = \frac{14-4}{7} = \frac{10}{7} \quad (*)$$

Para $n = 2$:

$$u_2 = C_1(-5)^2 + C_2(2)^2 + \frac{2}{7}(2)(2)^2 = 1$$

$$25C_1 + 4C_2 + \frac{2}{7}(2)(4) = 1$$

$$25C_1 + 4C_2 + \frac{16}{7} = 1$$

$$25C_1 + 4C_2 = 1 - \frac{16}{7} = \frac{7-16}{7} = -\frac{9}{7} \quad (**)$$

Tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

1. $-5C_1 + 2C_2 = \frac{10}{7}$
2. $25C_1 + 4C_2 = -\frac{9}{7}$

Multiplicamos la ecuación (1) por -2:

$$10C_1 - 4C_2 = -\frac{20}{7}$$

Sumamos esta nueva ecuación a la ecuación (2):

$$(10C_1 - 4C_2) + (25C_1 + 4C_2) = -\frac{20}{7} + (-\frac{9}{7})$$

$$35C_1 = -\frac{29}{7} \Longrightarrow C_1 = -\frac{29}{7 \cdot 35} = -\frac{29}{245}$$

Sustituimos $C_1 = -\frac{29}{245}$ en la ecuación (1):

$$-5\left(-\frac{29}{245}\right) + 2C_2 = \frac{10}{7}$$

$$\frac{29}{49} + 2C_2 = \frac{10}{7}$$

$$2C_2 = \frac{10}{7} - \frac{29}{49} = \frac{70}{49} - \frac{29}{49} = \frac{41}{49}$$

$$C_2 = \frac{41}{98}$$

Por lo tanto, la solución que satisface las condiciones iniciales es:

$$u_n = -\frac{29}{245}(-5)^n + \frac{41}{98}(2)^n + \frac{2}{7}n2^n$$

Ecuaciones en diferencia logistica

*Mapa Logistico
*Ecuación Logistica

Ecuación Logística (Continuo)

La ecuación logística es un modelo matemático que describe el crecimiento de una población en un entorno con recursos limitados. Su forma diferencial es:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Donde:
* $P(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t.
* r es la tasa de crecimiento intrínseca de la población.
* K es la capacidad de carga del ambiente (el tamaño máximo de población que el ambiente puede soportar).

Ecuación en Diferencias Logística / Mapa Logístico (Discreto)

Cuando el crecimiento de la población se modela en pasos de tiempo discretos, utilizamos la ecuación en diferencias logística, también conocida como mapa logístico. Esta ecuación es un modelo simple no lineal que exhibe un comportamiento complejo, incluyendo el caos. Su forma más común es:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Donde:
* x_n representa la población en el tiempo n, normalizada a un valor entre 0 y 1 (es decir, $x_n = P_n / K$).
* r es un parámetro que controla el comportamiento del sistema, similar a la tasa de crecimiento. Usualmente, r toma valores en el intervalo $[0, 4]$.

Bifurcación

En el contexto del mapa logístico, una bifurcación es un cambio cualitativo en el comportamiento del sistema a medida que el parámetro r varía. A medida que r aumenta, el número de puntos de equilibrio estables (atractores) puede cambiar, dando lugar a un comportamiento más complejo.

* Para $0 < r \leq 1$, la población tiende a 0.

* Para $1 < r \leq 3$, la población tiende a un único valor estable (punto fijo).
* Para $3 < r \leq 3.449...$ (aproximadamente), la población comienza a oscilar entre dos valores. Este es el primer punto de bifurcación de duplicación de período.
* A medida que r sigue aumentando, ocurren más bifurcaciones de duplicación de período, con la población oscilando entre 4, 8, 16, etc., valores.

Pierre-François Verhulst (1804-1849)

Fue un matemático y demógrafo belga, mejor conocido por su trabajo fundamental en el **modelo de crecimiento logístico**. Sus contribuciones fueron cruciales para ir más allá del modelo de crecimiento exponencial simplista propuesto por Malthus, introduciendo una representación más realista de la dinámica poblacional al considerar las limitaciones ambientales.

La Génesis de la Ecuación Logística

Verhulst desarrolló la ecuación logística a mediados de la década de 1830, publicando sus hallazgos iniciales en 1838 y análisis más detallados en 1845 y 1847. Fue influenciado por el trabajo de Thomas Malthus, quien sugería un crecimiento poblacional ilimitado, y por Adolphe Quetelet, un astrónomo y estadístico belga que también reconoció la necesidad de un mecanismo para limitar el crecimiento poblacional.

La clave de la visión de Verhulst fue proponer que la tasa de crecimiento de una población no es constante, sino que disminuye a medida que la población se acerca a un tamaño máximo sostenible debido a los recursos limitados (lo que ahora llamamos **capacidad de carga**).

La Ecuación Logística

La forma continua de la ecuación **logística de Verhulst** se expresa como:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Donde:
* $P(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t.
* r es la **tasa de crecimiento intrínseca**, que representa la tasa máxima de crecimiento potencial cuando los recursos son abundantes.
* K es la **capacidad de carga**, que es el tamaño máximo de población que el ambiente puede sostener indefinidamente.

La ecuación describe una **curva en forma de S** (o curva sigmoide) para el crecimiento poblacional:
1. **Crecimiento Exponencial Inicial:** Cuando la población P es muy pequeña en comparación con K, el término $(1 - P / K)$ está cerca de 1, y el crecimiento es aproximadamente exponencial, similar al modelo de Malthus.
2. **Crecimiento Ralentizado:** A medida que P aumenta y se acerca a K, el término $(1 - P / K)$ disminuye, lo que provoca que la tasa de crecimiento se desacelere.
3. **Aproximación a la Capacidad de Carga:** Cuando P está muy cerca de K, el término $(1 - P / K)$ se acerca a 0, y la tasa de crecimiento poblacional disminuye, llegando finalmente a cero a medida que la población se estabiliza alrededor de K.

La Función Sigmoide (o Logística Estándar)

La función sigmoide más común y prototípica es la **función logística estándar.** Su ecuación es:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Donde:
* $f(x)$ es el valor de la función para una entrada x.
* e es la base del logaritmo natural (aproximadamente 2.71828).
* x es la variable independiente (la entrada a la función).

Características de la Curva Sigmoide

Esta función tiene las siguientes características clave:

* Rango de Salida: La salida de la función $f(x)$ siempre se encuentra entre 0 y 1.
  * A medida que $x \to -\infty$, $e^{-x} \to +\infty$, por lo tanto, $f(x) \to 0$.
  * A medida que $x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$, por lo tanto, $f(x) \to 1$.
* Punto Central: El punto donde la curva tiene su mayor pendiente (el "punto de inflexión") ocurre en $x = 0$, donde $f(0) = \frac{1}{1+e^{0}} = \frac{1}{1+1} = 0.5$.
* Forma de "S": La curva comienza plana cerca de 0, aumenta bruscamente en el centro y luego se aplana nuevamente cerca de 1.

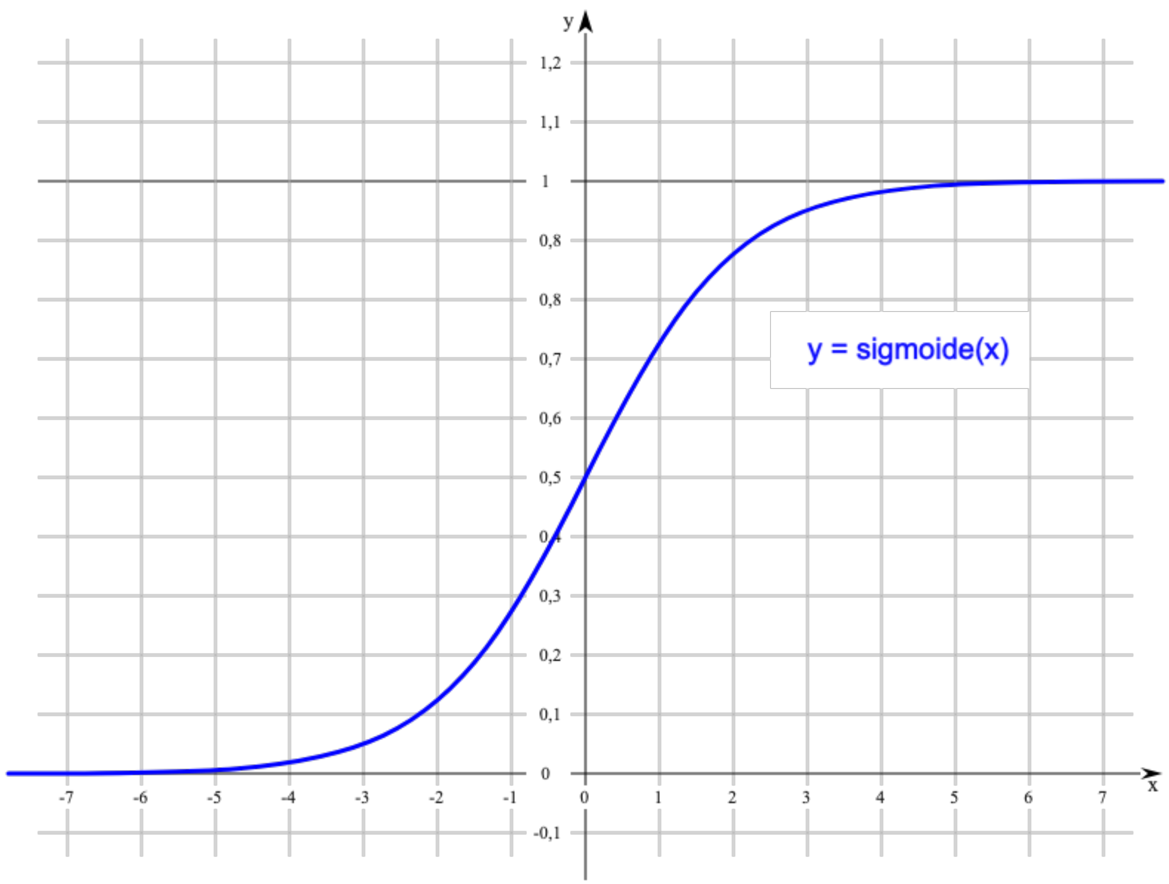
La Ecuación Sigmoide Generalizada

A menudo, la función sigmoide se generaliza para incluir parámetros que controlan su rango, la pendiente y el punto central, haciéndola más flexible para modelar datos reales:

$$f(x) = L + \frac{K - L}{1 + e^{-k(x - x_0)}}$$

Donde:
* L es el valor asintótico inferior (el mínimo al que tiende la función).
* K es el valor asintótico superior (el máximo al que tiende la función). En muchos contextos, si $L = 0$ y $K = 1$, se simplifica a la forma estándar.
* k es la **tasa de crecimiento** o la pendiente de la curva. Un valor k mayor hace que la curva sea más pronunciada.
* x_0 es el valor de x en el punto de inflexión (donde $f(x_0) = (L + K) / 2$).

Esta forma generalizada es la base de modelos como el **crecimiento logístico** (donde $P(t) = \frac{K}{1+e^{-r(t-t_0)}}$ es una reparametrización similar) y otras aplicaciones.

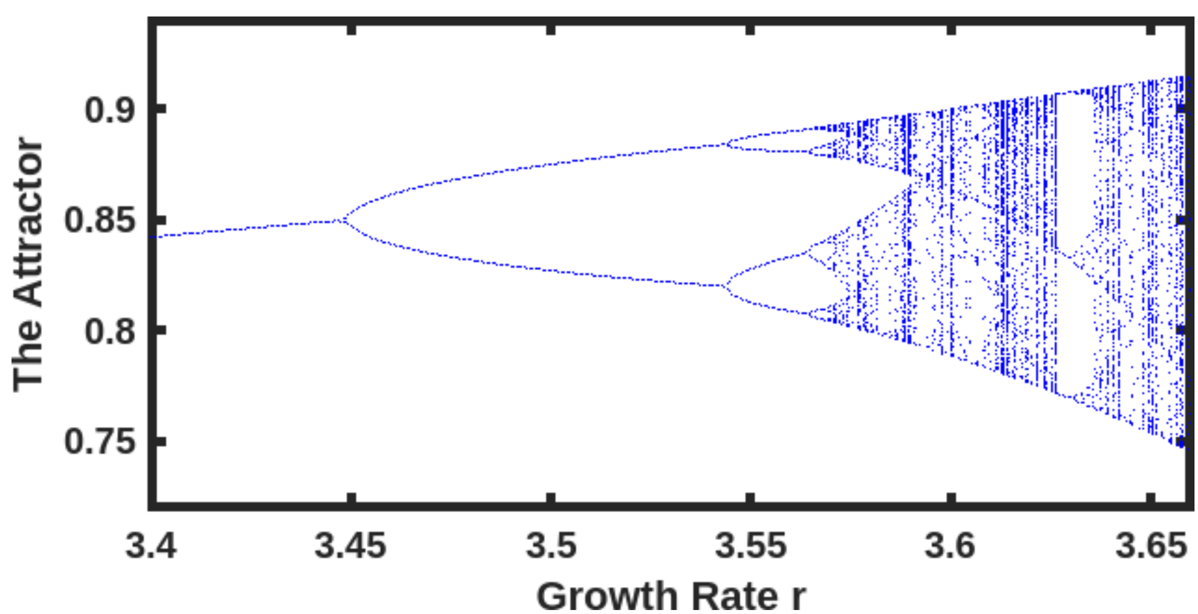


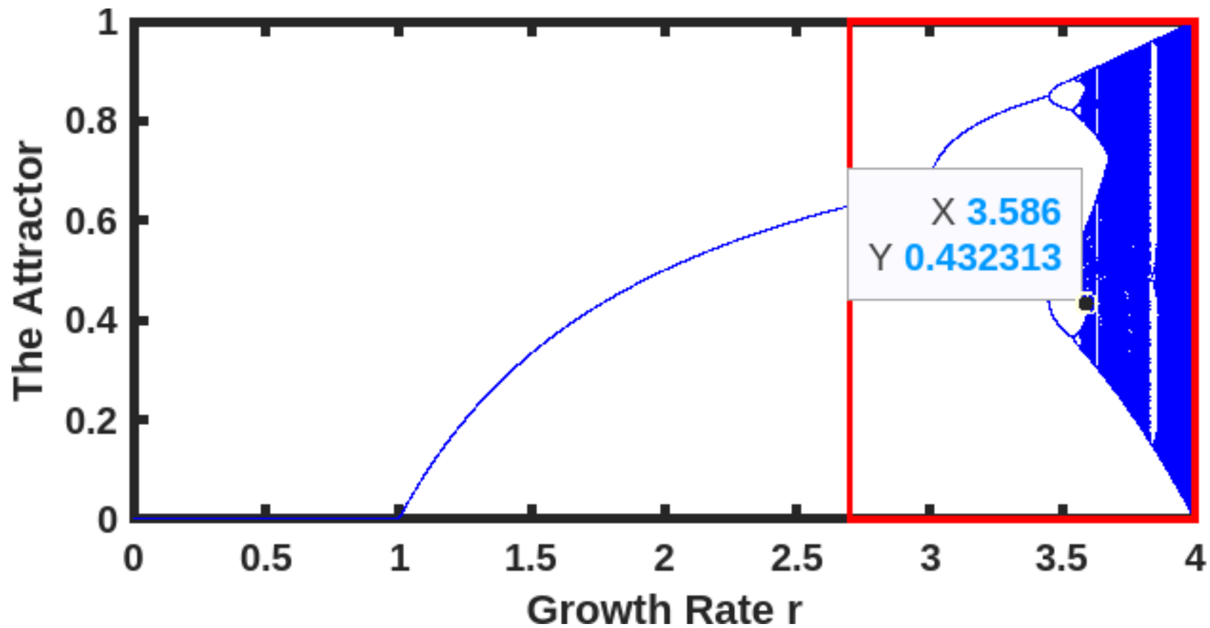
Aplicaciones Comunes de la Ecuación Sigmoide

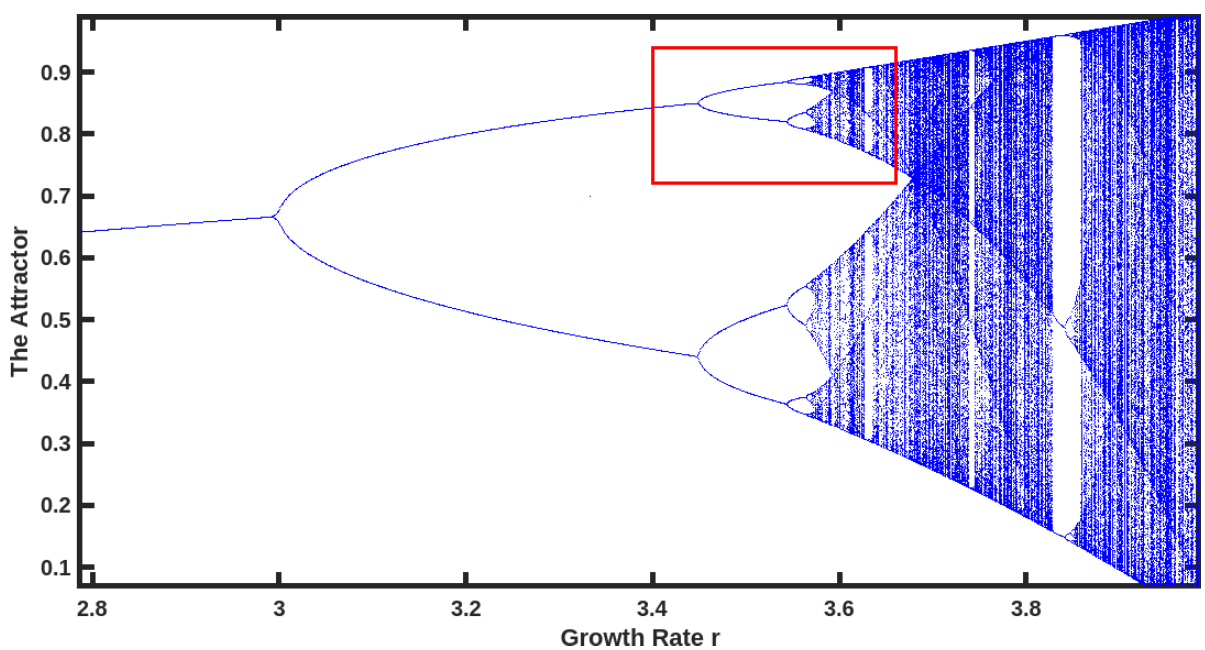
Las funciones sigmoides son cruciales en:

* Dinámica de Poblaciones: Como el **modelo de crecimiento logístico** de Verhulst, que describe el crecimiento de poblaciones con recursos limitados.
* Redes Neuronales Artificiales: Se utilizan como **funciones de activación** para introducir no linealidad en los modelos, permitiendo a las redes aprender patrones complejos. La salida de una neurona a menudo se pasa a través de una función sigmoide para escalar el resultado entre 0 y 1 (interpretado como probabilidad).
* Machine Learning: En la regresión logística, la función sigmoide se usa para mapear cualquier valor numérico a una probabilidad entre 0 y 1.
* Biología y Medicina: Para modelar la respuesta de organismos a dosis de medicamentos, el crecimiento de tumores, etc.
* Economía: Para describir la adopción de nuevas tecnologías o la difusión de innovaciones.

Mapas logisticos:







Entendimiento de manera programacional:

Bifurcación:

```matlab
    % Parámetros iniciales

r_min = 2.5; % Valor mínimo de r
r_max = 4;   % Valor máximo de r
num_r = 1000; % Número de valores de r
num_iter = 1000; % Número de iteraciones por r
last = 100; % Número de iteraciones finales para graficar

% Crear vector de valores de r
r_values = linspace(r_min, r_max, num_r);

% Inicializar vector para almacenar resultados
x = 0.5 * ones(1, num_r); % Condición inicial

% Crear figura
figure;
hold on;

% Iterar sobre valores de r
for i = 1:num_iter
    x = r_values .* x .* (1 - x); % Ecuación logística
    if i > (num_iter - last) % Graficar solo las últimas iteraciones
        plot(r_values, x, '.k', 'MarkerSize', 1);
    end
end

% Configuración de la gráfica
xlabel('r');
ylabel('x');
title('Mapa de bifurcaciones');
grid on;
```

Mapa Logístico:

```
N = 100;

x = 0.5;

rmin =2;
rmax = 4;

r = linspace(rmin, rmax, N);

x_vals = zeros(1, N);

for i = 1:N

x = r(i) * x * (1 - x);

x_vals(i) = x;
end

plot(1:N, x_vals);

r = 3.8;
% Set the initial value of x
x = 0.2;

num_iterations = 50;

x_values = zeros(1, num_iterations);
N_values = 1:num_iterations;

for i = 1:num_iterations
x = r*x*(1-x);
x_values(i) = x;
end

plot(N_values, x_values, 'o-');
xlabel('N');
ylabel('x_n');

N = 100;
```

```
x = 0.5;

rmin = 2;
rmax = 4;

r = linspace(rmin, rmax, N);

x_vals = zeros(1, N);

for i = 1:N

x = r(i) * x * (1 - x);

x_vals(i) = x;
end

plot(1:N, x_vals);

r = 3.8;

x = 0.2;

num_iterations = 50;

x_values = zeros(1, num_iterations);
N_values = 1:num_iterations;

for i = 1:num_iterations
x = r*x*(1-x);
x_values(i) = x;
end

plot(N_values, x_values, 'o-');
xlabel('N');
ylabel('x_n');
```

Valores propios de matris Matrices y diagonalizaciones

-Problema

1) encontrar los vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y diagonalizar la matriz

Paso 1: Encontrar los Autovalores (Eigenvalues)

Para encontrar los autovalores, necesitamos resolver la ecuación característica, que es $\det(A - \lambda I) = 0$, donde I es la matriz identidad y λ representa los autovalores.

La matriz dada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Primero, formamos la matriz $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos el determinante de esta matriz:

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} - 0\cdot(\ \dots\ ) + 0\cdot(\ \dots\ )$$

$$= (1-\lambda)[(3-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(-1)]$$

$$= (1-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1]$$

$$= (1-\lambda)[9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1]$$

$$= (1-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 8]$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los autovalores:

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$

Esto nos da dos partes para resolver:

1. $1 - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1$
2. $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

Para la ecuación cuadrática, podemos factorizarla:

$(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$
Esto nos da:
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 4$

Así, los autovalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$.

Paso 2: Encontrar los Autovectores (Eigenvectors) para cada Autovalor

Para cada autovalor λ, resolvemos la ecuación $(A - \lambda I)v = 0$, donde v es el autovector.

Caso 1: $\lambda_1 = 1$

Sustituimos $\lambda = 1$ en $A - \lambda I$:

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-1 & -1 \\ 1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:
$0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0$ (primera fila, trivial)
$2v_2 - v_3 = 0 \Longrightarrow v_3 = 2v_2$ (segunda fila)
$v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$ (tercera fila)

Sustituimos $v_3 = 2v_2$ en la tercera ecuación:
$v_1 - v_2 + 2(2v_2) = 0$
$v_1 - v_2 + 4v_2 = 0$
$v_1 + 3v_2 = 0 \Longrightarrow v_1 = -3v_2$

Sea $v_2 = t$. Entonces $v_1 = -3t$ y $v_3 = 2t$.
El autovector para $\lambda_1 = 1$ es $v_1 = \begin{pmatrix} -3t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Podemos elegir $t = 1$, entonces $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Caso 2: $\lambda_2 = 2$

Sustituimos $\lambda = 2$ en $A - \lambda I$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-2 & -1 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$-v_1 = 0 \Longrightarrow v_1 = 0$

$v_2 - v_3 = 0 \Longrightarrow v_2 = v_3$

$v_1 - v_2 + v_3 = 0$

Sustituimos $v_1 = 0$ en la tercera ecuación:

$0 - v_2 + v_3 = 0 \Longrightarrow v_2 = v_3$ (Consistente con la segunda ecuación)

Sea $v_3 = t$. Entonces $v_2 = t$ y $v_1 = 0$.

El autovector para $\lambda_2 = 2$ es $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Podemos elegir $t = 1$, entonces $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Caso 3: $\lambda_3 = 4$

Sustituimos $\lambda = 4$ en $A - \lambda I$:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 1-4 & 0 & 0 \\ 0 & 3-4 & -1 \\ 1 & -1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$-3v_1 = 0 \Longrightarrow v_1 = 0$

$-v_2 - v_3 = 0 \Longrightarrow v_3 = -v_2$

$v_1 - v_2 - v_3 = 0$

Sustituimos $v_1 = 0$ en la tercera ecuación:

$0 - v_2 - v_3 = 0 \Longrightarrow v_3 = -v_2$ (Consistente con la segunda ecuación)

Sea $v_2 = t$. Entonces $v_3 = -t$ y $v_1 = 0$.

El autovector para $\lambda_3 = 4$ es $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Podemos elegir $t = 1$, entonces $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Paso 3: Diagonalizar la Matriz

Una matriz A puede ser diagonalizada si existe una matriz invertible P tal que $D = P^{-1}AP$, donde D es una matriz diagonal.
La matriz P se forma con los autovectores como sus columnas, y la matriz diagonal D tiene los autovalores correspondientes en su diagonal.

La matriz P (matriz de autovectores) es:

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonal D (matriz de autovalores) es:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Para verificar, se podría calcular $P^{-1}AP$ y el resultado debería ser D.

Resumen de Autovectores:

* Para $\lambda_1 = 1$, el autovector es $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
* Para $\lambda_2 = 2$, el autovector es $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
* Para $\lambda_3 = 4$, el autovector es $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Diagonalización:
La matriz A se puede diagonalizar como $D = P^{-1}AP$, donde:

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

* Anexos códigos Python relacionados con la temática del curso:

Números Complejos

Los números complejos permiten representar fenómenos periódicos y rotacionales, esenciales en computación gráfica y procesamiento de señales.

```
import cmath

z = complex(1, 2)
w = complex(2, -1)
print("Suma:", z + w)
print("Producto:", z * w)
print("Polar:", cmath.polar(z))
```

Álgebra Lineal

Incluye resolución de sistemas de ecuaciones, inversión de matrices y diagonalización.

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 0, 0], [0, 3, -1], [1, -1, 3]])
valores, vectores = np.linalg.eig(A)
print("Autovalores:", valores)
print("Autovectores:", vectores)
```

Series de Tiempo y Ecuaciones en Diferencia

Modelan datos que evolucionan en el tiempo, como ventas, población o señales.

```
Y = [20, 30]
for k in range(2, 10):
    Y.append(Y[k-2] + 15)
print("Evolución poblacional:", Y)
```

```
from sympy import Function, rsolve, Eq, symbols

n = symbols('n', integer=True)
u = Function('u')
eq = Eq(u(n) - 5*u(n-1) + 6*u(n-2), 2)
sol = rsolve(eq, u(n), {u(0): 1, u(1): 2})
print("Solución general:", sol)
```

Ecuación Logística y Mapa Logístico

Modelo de crecimiento limitado usado en biología, economía y machine learning.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def logistica(r, x):
    return r * x * (1 - x)

x = 0.5
r = 3.5
valores = []
for i in range(100):
    x = logistica(r, x)
    valores.append(x)

plt.plot(valores)
plt.title("Mapa logístico (r=3.5)")
plt.show()
```

Conclusiones:

Los temas desarrollados a lo largo del curso constituyen una base sólida para el análisis y la comprensión de fenómenos matemáticos aplicados a la computación. El estudio de estructuras algebraicas, sistemas dinámicos y ecuaciones en diferencia no solo proporciona herramientas teóricas fundamentales, sino que también habilita el diseño y la implementación de soluciones computacionales eficientes. La integración de Python ó MathLab como lenguaje de apoyo permite validar modelos, simular comportamientos complejos y resolver problemas reales en áreas como la ingeniería, la economía, la biología computacional y la inteligencia artificial. Estas memorias demuestran cómo el pensamiento matemático, complementado con habilidades de programación, potencia el desarrollo de soluciones innovadoras y rigurosas en el ámbito de la computación.