Muestre que el operador $D^4 f$ está dado por:

$$D^4 f(x_j) \cong \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

Lo primero que hay que hacer es aclarar las definiciones de todos los términos:

$$x_0 = 0, \qquad x_i = ih, \qquad D^4 f(x) = f''''(x)$$

Para facilitar los cálculos, se va a asumir lo siguiente:

$$x_j = x$$

Y se puede deducir que:

$$x_{j+1} = x + h, \qquad x_{j+2} = x + 2h, \qquad x_{j-1} = x - h, \qquad x_{j+2} = x - 2h$$

Ahora se puede usar la serie de Taylor para aproximar la función:

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(y)(y-a)^n}{n!} \right)$$

Para cualquier a *en la que todas las derivadas estén definidas.*
Reemplazando y *por* $x+h$ *y* a *por* x *tomando los primeros términos de la serie de Taylor se tiene:*

$$f(x+h) = \frac{f^{(0)}(x)(h)^0}{0!} + \frac{f^{(1)}(x)(h)^1}{1!} + \frac{f^{(2)}(x)(h)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x)(h)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)(h)^4}{4!} + \frac{f^{(5)}(x)(h)^5}{5!} + \cdots$$

Y simplificando la expresión se tiene:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + \frac{f'''(x)h^3}{6} + \frac{f''''(x)h^4}{24} + \frac{f'''''(x)h^5}{120} + \frac{f''''''(x)h^6}{720} + \cdots$$

En cambio, si se reemplaza y *por* $x-h$ *se tiene:*

$$f(x-h) = \frac{f^{(0)}(x)(-h)^0}{0!} + \frac{f^{(1)}(x)(-h)^1}{1!} + \frac{f^{(2)}(x)(-h)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x)(-h)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)(-h)^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} - \frac{f'''(x)h^3}{6} + \frac{f''''(x)h^4}{24} - \frac{f'''''(x)h^5}{120} + \frac{f''''''(x)h^6}{720} + \cdots$$

Si sumamos estas dos expresiones nos queda lo siguiente:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f''''(x)h^4}{12} + \frac{f''''''(x)h^6}{360} + \cdots$$

Y despejando $f''(x)h^2$ *se tiene:*

$$f''(x)h^2 = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - \frac{f''''(x)h^4}{12} - \frac{f''''''(x)h^6}{360} + \cdots$$

Ahora, si se reemplaza y *por* $x+2h$ *se tiene:*

$$f(x+2h) = \frac{f^{(0)}(x)(2h)^0}{0!} + \frac{f^{(1)}(x)(2h)^1}{1!} + \frac{f^{(2)}(x)(2h)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x)(2h)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)(2h)^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2f'(x)h + 2f''(x)h^2 + \frac{4f'''(x)h^3}{3} + \frac{2f''''(x)h^4}{3} + \frac{4f'''''(x)h^5}{15} + \frac{4f''''''(x)h^6}{45} + \cdots$$

Y lo mismo, si se reemplaza y *por* $x-2h$ *se tiene:*

$$f(x-2h) = \frac{f^{(0)}(x)(-2h)^0}{0!} + \frac{f^{(1)}(x)(-2h)^1}{1!} + \frac{f^{(2)}(x)(-2h)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x)(-2h)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)(-2h)^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2f'(x)h + 2f''(x)h^2 - \frac{4f'''(x)h^3}{3} + \frac{2f''''(x)h^4}{3} - \frac{4f'''''(x)h^5}{15} + \frac{4f''''''(x)h^6}{45} + \cdots$$

Si sumamos estas dos expresiones nos queda lo siguiente:

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4f''(x)h^2 + \frac{4f''''(x)h^4}{3} + \frac{4f''''''(x)h^6}{45} + \cdots$$

Ahora, se puede sustituir la ecuación marcada en rojo, quedando:

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4\left(f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - \frac{f''''(x)h^4}{12} - \frac{f''''''(x)h^6}{360} + \cdots \right) + \frac{4f''''(x)h^4}{3} + \frac{4f''''''(x)h^6}{45} + \cdots$$

Que se simplifica de la siguiente manera:

$$f(x+2h)+f(x-2h)=4f(x+h)+4f(x-h)-6f(x)+f''''(x)h^4+\frac{7f''''''(x)h^6}{90}+\cdots$$

Ahora se puede despejar $f''''(x)$:

$$f''''(x)=\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}-\left(\frac{7f''''''(x)h^2}{90}+\cdots\right)$$

El término $\frac{7f''''''(x)h^2}{90}$ es de orden 2, por lo que se hace muy pequeño cuando h es pequeño. Los términos comprimidos en el $+\cdots$ son de orden 4 o más, por lo que serían aún más pequeños. Por lo tanto, los términos en el paréntesis son despreciables, quedando así:

$$f''''(x)\cong\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}$$

Para este operador ¿Cuál es el orden de la aproximación?

El orden es 2 porque el exponente del término de menor orden es 2:

$$O(h^2)$$