Demostrar la formula de combinaciones con repetición.

En este problema se entiende que hay opciones para elegir, objetos que hay que elegir y no se toma en cuenta el orden de las elecciones para contar las posibilidades.

Se puede pensar que si se elige un orden predefinido de tal manera que la regla solo permita una única forma de ordenar cualquier conjunto de elementos, el número total de estas formas ordenadas sería igual a el número total de combinaciones.

Construí un algoritmo que toma el conjunto de elementos que se pueden elegir y genera un posible arreglo que cumple ciertas reglas de orden con elementos. El algoritmo que está construido de tal manera que no existen dos formas diferentes de obtener el mismo arreglo y dos arreglos diferentes tienen elementos diferentes.

Este algoritmo se enuncia así:

1. Se transforma el conjunto de los elementos que se pueden elegir en un arreglo ordenado, eligiendo el orden de forma arbitraria.
2. Se crea un segundo arreglo que esté vacío.
3. Se pone un marcador sobre el primer elemento del primer arreglo.
4. Si el segundo arreglo tiene elementos, se termina el algoritmo.
5. Si el marcador está en el último elemento del primer arreglo, se agrega el último elemento del primer arreglo al segundo arreglo hasta completar elementos y se termina el algoritmo.
6. Se decide si agregar el elemento en el que está el marcador al segundo arreglo o mover el marcador al siguiente elemento del primer arreglo.
7. Se regresa al paso 4.

Nótese que, al utilizar este algoritmo, si se agrega un elemento posterior a otro elemento, ya no se puede agregar ese elemento anterior. Por otro lado, solo hay una manera de agregar dos elementos consecutivos, la cual es elegir agregar el elemento dos veces seguidas. Esto garantiza que no hay dos arreglos que puedan ser obtenidos por este algoritmo y tengan los mismos elementos, pero en diferente orden. Además, esto garantiza que no hay dos maneras de obtener el mismo arreglo.

Por otro lado, ya que sin importar qué decisiones se tomen, siempre se da la oportunidad de agregar cada elemento, y no se tienen restricciones de cuantas veces se pueda agregar ese elemento, se puede decir que, haciendo las elecciones adecuadas, se pueden obtener todas las combinaciones de elementos con este algoritmo.

Entonces este algoritmo permite calcular todas las combinaciones ya que no repite combinaciones, no hay dos formas de llegar a la misma combinación y se puede llegar a todas las combinaciones que se pueden hacer.

Entonces, en cada paso se puede decidir si agregar el elemento, lo cual elimina un espacio, o pasar al siguiente elemento, lo cual elimina una opción por lo que se puede decir que la totalidad de combinaciones es la suma de la totalidad de combinaciones con un espacio menos y la totalidad de combinaciones con una opción menos:

Al reemplazar la fórmula dada queda lo siguiente:

Y al simplificar queda:

Con este resultado positivo, solo hace falta ver que se cumpla en los casos base. Si , solo queda una posible respuesta, que es ese elemento repetido veces.

Por otro lado, si , la única posible respuesta es el conjunto vacío. Entonces:

Y como quedó demostrado para los casos base, se demostró la prueba por inducción.