Punto 2: teórico

a) ¿Se debería conservar el momento lineal en x?

Dado que las partículas se aplican entre sí fuerzas iguales en direcciones opuestas, y se está usando el método de Verlet, el cual es de orden 2, el momento angular debe conservarse tanto por la tercera ley de Newton, como por la buena aproximación que ofrece el algoritmo.

b) ¿Se debería conservar el momento lineal en y?

Por las mismas razones que en el punto anterior, el momento lineal en y también debe conservarse.

c) Teóricamente muestre que la fuerza de contacto es conservativa. Encuentre la energía potencial.

Una fuerza es conservativa si y solo si existe un potencial tal que su gradiente es la misma fuerza, pero negativa. Considérese esta función:

$$U(\vec{r_a}) = k\frac{(R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}|)^2}{2} \times \begin{cases} 1: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| > 0 \\ 0: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| < 0 \end{cases}$$

Esta función es continua y diferenciable en todo su dominio. Sabiendo que el gradiente de la norma de un vector es el vector unitario, se calcula el gradiente de esta función:

$$\vec{\nabla}U(\vec{r_a}) = \frac{k}{2}\vec{\nabla}(R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}|)^2 \times \begin{cases} 1: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| > 0 \\ 0: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| < 0 \end{cases} =$$

$$= \frac{k}{2} \times 2(R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}|) \times -\frac{\vec{r_a} - \vec{r_b}}{|\vec{r_a} - \vec{r_b}|} \times \begin{cases} 1: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| > 0 \\ 0: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| < 0 \end{cases} =$$

$$= -k(R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}|)\frac{\vec{r_a} - \vec{r_b}}{|\vec{r_a} - \vec{r_b}|} \times \begin{cases} 1: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| > 0 \\ 0: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| < 0 \end{cases}$$

Sin embargo, la fuerza se define como:

$$\vec{F} = k(R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}|)\frac{\widehat{\vec{r_a} - \vec{r_b}}}{|\vec{r_a} - \vec{r_b}|} \times \begin{cases} 1: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| > 0 \\ 0: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, se concluye que la fuerza de contacto sí es conservativa y que su potencial asociado es:

$$U(\vec{r_a}) = k\frac{(R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}|)^2}{2} \times \begin{cases} 1: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| > 0 \\ 0: R_a + R_b - |\vec{r_a} - \vec{r_b}| < 0 \end{cases}$$

d) ¿Se conserva la energía cinética?

No, porque en esta simulación hay fuerzas que pueden reducir la energía cinética de una partícula sin aumentar la energía cinética de otra necesariamente. En este caso, la energía se transforma en energía potencial.

e) ¿Qué significa que el potencial sea positivo?

Nada. Lo único importante de la energía potencial es la diferencia de energía potencial entre dos puntos. El hecho de que el potencial sea positivo o no solo es un convenio para facilitar los cálculos. De hecho, se le puede sumar una constante a la energía potencial para que esta sea negativa.

f) ¿Se conserva la energía mecánica? Explique a nivel físico y a nivel del método de Euler.

A nivel físico, la energía mecánica sí se conserva porque no hay fuerzas disipativas. Por lo tanto, la energía cinética solo puede convertirse en energía potencial y viceversa.

A nivel del método de Euler o del método de Verlet, la energía mecánica no se conserva ya que estos algoritmos no son perfectos y tienen un margen de error que podría provocar que la energía mecánica aparezca o desaparezca de repente.

g) ¿Se cumple el teorema del trabajo y la energía en su simulación?

Ya que el teorema del trabajo y la energía es equivalente a la ley de la conservación de la energía cuando todas las fuerzas son conservativas, se concluye que no se cumple este teorema.

h) ¿Se conserva el momento angular?

Sí porque la conservación del momento angular es una consecuencia directa de la conservación del momento lineal, que sí se cumple.

i) ¿Si este sistema que se mueve en 2D se extendiera a 3D, las partículas se mantendrían en el mismo plano de movimiento o se moverían en todo el volumen?

Si todas las posiciones y velocidades de las partículas tuvieran el componente en el eje z igual a cero, se moverían en el plano. De lo contrario, se podrían mover por todo el espacio.