Estabilidad II: Para el algoritmo de Verlet:

1. **Muestre que el error del método esté descrito por:**

$$\boldsymbol{\epsilon_{n+1} - (2 + h^2 a_n')\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0}, \qquad \boldsymbol{a_n' = \frac{\partial a_n}{\partial x}}$$

Usando la serie de Taylor se concluye que:

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + x''(t)\frac{h^2}{2} + x'''(t)\frac{h^3}{6} + x''''(t)\frac{h^4}{24} + \cdots$$

Al usar las cantidades físicas correspondientes se tiene:

$$x(t+h) = x(t) + v(t)h + a(t)\frac{h^2}{2} + a'(t)\frac{h^3}{6} + a''(t)\frac{h^4}{24} + \cdots$$

Si se cambia el signo de h *se tiene:*

$$x(t-h) = x(t) - v(t)h + a(t)\frac{h^2}{2} - a'(t)\frac{h^3}{6} + a''(t)\frac{h^4}{24} + \cdots$$

Y si se suman las dos ecuaciones anteriores se tiene:

$$x(t+h) + x(t-h) = 2x(t) + a(t)h^2 + a''(t)\frac{h^4}{12} + \cdots$$

Si se ignora el término de la cuarta potencia, se asume que la aceleración depende de la posición y se trata este sistema como una sucesión se tiene:

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n + a(x_n)h^2 + O(h^4)$$

Si se asume que cada término tiene un error asociado se tiene:

$$x_{n+1} + \epsilon_{n+1} + x_{n-1} + \epsilon_{n-1} = 2x_n + \epsilon_n + a(x_n + \epsilon_n)h^2$$

Si se linealiza el error de la aceleración se tiene:

$$x_{n+1} + \epsilon_{n+1} + x_{n-1} + \epsilon_{n-1} = 2(x_n + \epsilon_n) + (a(x_n) + a'(x_n)\epsilon_n)h^2$$

Al reagrupar los términos se tiene:

$$(x_{n+1} + x_{n-1}) + (\epsilon_{n+1} + \epsilon_{n-1}) = (2x_n + a(x_n)h^2) + (2\epsilon_n + a'(x_n)\epsilon_n h^2)$$

Aquí aparece la ecuación que se halló sin considerar el error. Si se resta esto se tiene:

$$\epsilon_{n+1} + \epsilon_{n-1} = (2 + a'(x_n)h^2)\epsilon_n$$

Y al pasar al otro lado a restar se tiene:

$$\epsilon_{n+1} - (2 + a'(x_n)h^2)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0$$

2. **Para el caso de un oscilador armónico clásico muestre que:**

$$\boldsymbol{\epsilon_{n+1} - 2(1-R)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0}$$

donde $\boldsymbol{2R = h^2\omega^2}$

La aceleración en el momento armónico simple es:

$$a = -\omega^2 x$$

Y su derivada con respecto a x *es:*

$$a' = -\omega^2$$

Al reemplazar esto en la ecuación del error se tiene:

$$\epsilon_{n+1} - (2 - \omega^2 h^2)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0$$

Al reemplazar R *se tiene:*

$$\epsilon_{n+1} - (2 - 2R)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0$$

Y al factorizar el 2 *se tiene:*

$$\epsilon_{n+1} - 2(1-R)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0$$

3. **Usando la suposición de función potencia $\boldsymbol{\epsilon_n = \epsilon_0\lambda^n}$, muestre que las raíces son:**

$$\boldsymbol{\lambda_\pm = 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R}}$$

Al reemplazar los errores por las funciones exponenciales se tiene:

$$\epsilon_0\lambda^{n+1} - 2(1-R)\epsilon_0\lambda^n + \epsilon_0\lambda^{n-1} = 0$$

Se divide a ambos lados por $\epsilon_0\lambda^{n-1}$*:*

$$\lambda^2 - 2(1-R)\lambda + 1 = 0$$

Se pasa el 1 *a restar:*

$$\lambda^2 - 2(1-R)\lambda = -1$$

Se suma $(1-R)^2$ *a ambos lados:*

$$\lambda^2 - 2(1-R)\lambda + (1-R)^2 = (1-R)^2 - 1$$

Se simplifica:

$$\left(\lambda - (1-R)\right)^2 = R^2 - 2R$$

Y se despeja λ*:*

$$\lambda - (1-R) = \pm\sqrt{R^2-2R} \to \lambda = 1 - R \pm \sqrt{R^2-2R}$$

4. **El valor de la estabilidad se obtiene para $\left|\boldsymbol{\lambda_{\pm}}\right| = \mathbf{1}$, Muestre que el paso de integración debe cumplir:**

$$\boldsymbol{h \leq \frac{2}{\omega}}$$

Veamos dónde se cumple la condición en el intervalo $(0,2)$*:*

$$R < 2 \to R - 2 < 0 \to R^2 - 2R < 0 \to$$

$$\to \pm\sqrt{R^2-2R} = \pm i\sqrt{2R-R^2} = \pm i\sqrt{1-1+2R-R^2} = \pm i\sqrt{1-(1-2R+R^2)} = \pm i\sqrt{1-(1-R)^2} \to$$

$$\to |\lambda| = \left|(1-R) \pm i\sqrt{1-(1-R)^2}\right| = \sqrt{(1-R)^2 + \left(\sqrt{1-(1-R)^2}\right)^2} = \sqrt{(1-R)^2 + 1 - (1-R)^2} = 1$$

Lo que implica que es estable en todo el intervalo. Ahora, veamos dónde se cumple la condición en el intervalo $(2,\infty)$*. Nótese que, en este intervalo, ya que* R *es mayor que* 2*, la función es estrictamente negativa. Entonces, el valor de esta función multivaluada cuya norma es mayor es:*

$$\lambda = 1 - R - \sqrt{R^2-2R}$$

$$|\lambda| = \left|1 - R - \sqrt{R^2-2R}\right| \leq 1 \to 1 - R - \sqrt{R^2-2R} \geq -1 \to 2 - R \geq \sqrt{R^2-2R} \to$$

$$\to (2-R)^2 \geq R^2 - 2R \to 4 - 4R + R^2 \geq R^2 - 2R \to 4 - 2R \geq 0 \to 4 \geq 2R \to 2 \geq R$$

Pero ningún elemento del intervalo cumple esta condición. Entonces la condición de estabilidad es:

$$R \leq 2 \to 2R \leq 4 \to \omega^2h^2 \leq 4 \to \sqrt{\omega^2h^2} \leq \sqrt{4} \to \omega h \leq 2 \to h \leq \frac{2}{\omega}$$

5. **Implemente una rutina sencilla del método de Verlet para el oscilador armónico y muestre en una animación el comportamiento en la región estable y en la región inestable. Use $\boldsymbol{x(0) = 1}$, $\boldsymbol{x(0) = 1}$ y $\boldsymbol{\omega = \pi}$. Itere el tiempo suficiente para evidenciar el comportamiento de la estabilidad.**

Este punto se realiza en otro archivo llamado "Punto2 computacional".