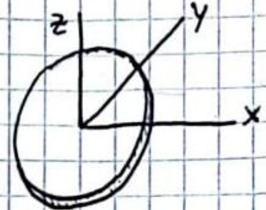
a) Demostrar que $I_o = \frac{1}{4}mr^2 + md^2$.

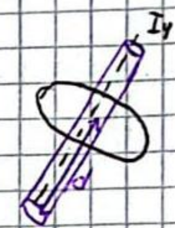
El momento de inercia de un disco esta dado por lo siguiente:



Donde $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$ porque ambos ejes son idénticos por simetría.

Ahora bien, el disco esta conectado a un eje de giro paralelo a su momento de inercia en y sin masa. Por ende, se puede usar el teorema de ejes paralelos donde:

$$I_{eje\ paralelo} = I_{cm} + md^2$$



$$I_o = I_y + md^2$$

$$\boxed{I_o = \frac{1}{4}mr^2 + md^2}$$

b) El momento de inercia I_z esta dado por la siguiente expresión:

$$I_z = I_x + I_y$$

Esto se sabe por el teorema de ejes perpendiculares, donde el momento de inercia sobre un eje perpendicular al plano es igual a la suma de los momentos de inercia sobre dos ejes perpendiculares a través del mismo cruce entre el objeto y el plano perpendicular.

$$I_z = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{4}mr^2$$

$$I_z = \frac{2mr^2}{4}$$

$$\boxed{I_z = \frac{1}{2}mr^2}$$

c) Por medio de el Lagrangiano del sistema:

$$L = \frac{1}{2}I_o(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgd\cos\theta$$

La ecuación de Euler-Lagrange es: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ Si aplicamos esta ecuación a cada una de nuestras coordenadas generalizadas (θ, ϕ, ψ) obtendremos lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$$

Para θ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{1}{\cancel{2}} I_0 \dot{\phi}^2 (\cancel{2}\sin\theta)\cos\theta + \frac{1}{\cancel{2}} I_z \left[\dot{\phi}^2 (\cancel{2}\cos\theta)(-\sin\theta) + \cancel{2}\dot{\phi}(-\sin\theta)\dot{\psi}\right] + mgd\sin\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I_0 \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - I_z \dot{\phi}\sin\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) + mgd\sin\theta$$

Ahora bien usando la ec. de Euler-Lagrange podemos escribir esto así:

$$I_0 \ddot{\theta} = I_0 \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - I_z \dot{\phi}\sin\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) + mgd\sin\theta$$

Haciendo distributiva y factorizando obtenemos:

$$\boxed{I_0 \ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta(I_0 - I_z) - \dot{\phi}\dot{\psi} I_z \sin\theta + mgd\sin\theta}$$

Para ϕ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0$$ Porque el lagrangiano no depende explícitamente de ϕ

Entonces: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = P_\phi = cte$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{\cancel{2}} I_0 (\cancel{2}\dot{\phi})\sin^2\theta + \frac{1}{\cancel{2}} I_z (\cancel{2}\dot{\phi}\cos^2\theta + \cancel{2}\cos\theta\dot{\psi}) = I_0\dot{\phi}\sin^2\theta + I_z\dot{\phi}\cos^2\theta + I_z\cos\theta\dot{\psi}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(I_0\sin^2\theta + I_z\cos^2\theta) + I_z\dot{\psi}\cos\theta = P_\phi}$$

Para ψ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 0$$ Porque el lagrangiano no depende explícitamente de ψ

Entonces: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = P_\psi = cte$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{\cancel{2}} I_z (\cancel{2}\dot{\phi}\cos\theta + \cancel{2}\dot{\psi}) = I_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = P_\psi}$$