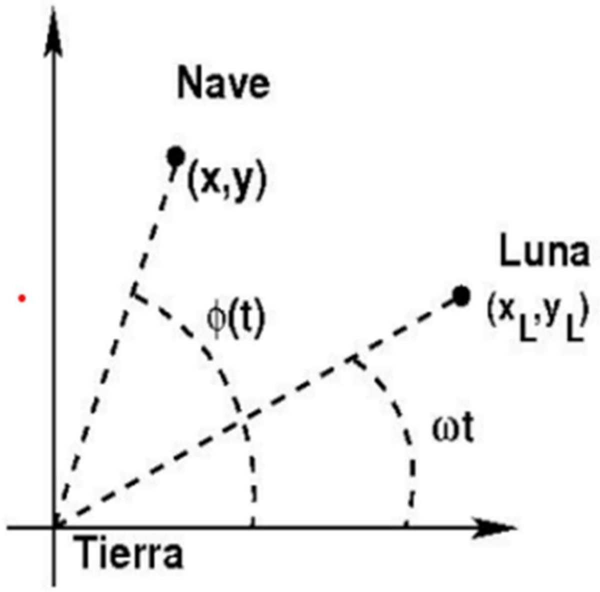
Viaje a la luna: La NASA requiere dos estudiantes del curso de métodos computacionales para realizar una pasantía en el departamento de objetos cercanos a la Tierra. Para elegir a los estudiantes se solicita una simulación sencilla del problema de tres cuerpos de una nave que pueda fotografiar el lado oculto de la Luna. Yo sugerí a mis estudiantes del curso de Métodos Computacionales II de la Universidad de los Andes como posibles candidatos; en quienes puedo depositar mi confianza.
Para presentar sus propuestas sugiero la siguiente estrategia:

a) **Vamos a suponer la Tierra inmóvil y la Luna siguiendo una órbita circular cuya frecuencia angular es $\boldsymbol{\omega = 2.6617 \times 10^{-6} s^{-1}}$. Esto evita integrar la ecuación de la Luna, la cuál es en realidad elíptica.**
b) **La simulación será realizada en el S.I. de unidades que resulta más conveniente en el caso del sistema Tierra-Luna. El paso de integración debe ser segundos de vuelo ($\boldsymbol{h \sim s}$), pero se debe graficar cada $\mathbf{1000}$ pasos usando animation dado que el viaje a la Luna dura días terrestres.**

$$\boldsymbol{G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}}, \quad \boldsymbol{m_T = 5.9736 \times 10^{24} kg}, \quad \boldsymbol{r_T = 6.3781 \times 10^{6} m}$$
$$\boldsymbol{m_L = 0.07349 \times 10^{24} kg}, \quad \boldsymbol{r_L = 1.7374 \times 10^{6} m}, \quad \boldsymbol{d = 3.844 \times 10^{8} m}$$



c) **Muestre usando la Figura [2.4] que la distancia Nave-Luna está dada por:**

$$\boldsymbol{r_L(r, \phi, t) = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\phi - \omega t)}}$$

La posición del cohete sería:

$$\vec{r} = r\cos(\phi)\,\hat{\imath} + r\sin(\phi)\,\hat{\jmath}$$

La posición de la luna sería:

$$\vec{r}_L = d\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + d\sin(\omega t)\,\hat{\jmath}$$

La distancia se define como la norma de la diferencia de las posiciones:

$$r_L = |\vec{r} - \vec{r}_L| = |r\cos(\phi)\,\hat{\imath} + r\sin(\phi)\,\hat{\jmath} - d\cos(\omega t)\,\hat{\imath} - d\sin(\omega t)\,\hat{\jmath}| =$$
$$= |(r\cos(\phi) - d\cos(\omega t))\hat{\imath} + (r\sin(\phi) - d\sin(\omega t))\hat{\jmath}| =$$
$$= \sqrt{(r\cos(\phi) - d\cos(\omega t))^2 + (r\sin(\phi) - d\sin(\omega t))^2} =$$
$$= \sqrt{r^2\cos^2(\phi) - 2rd\cos(\phi)\cos(\omega t) + d^2\cos^2(\omega t) + r^2\sin^2(\phi) - 2rd\sin(\phi)\sin(\omega t) + d^2\sin^2(\omega t)} =$$
$$= \sqrt{r^2(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) - 2rd(\cos(\phi)\cos(\omega t) + \sin(\phi)\sin(\omega t)) + d^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}$$

Y al usar identidades trigonométricas se concluye que:

$$r_L(r, \phi, t) = \sqrt{r^2 - 2rd\cos(\phi - \omega t) + d^2}$$

d) Usando esta distancia muestre que el Hamiltoniano de la nave está dado por:

$$\boldsymbol{H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}}$$

donde L (el lagrangiano del sistema) es la energía cinética menos la energía potencial de la nave en coordenadas polares.

La posición del cohete sería:

$$\vec{r} = r\cos(\phi)\,\hat{\imath} + r\sin(\phi)\,\hat{\jmath}$$

Entonces, la velocidad sería:

$$\dot{\vec{r}} = \left(\dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\,\dot{\phi}\right)\hat{\imath} + \left(\dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\,\dot{\phi}\right)\hat{\jmath}$$

Y la norma cuadrada de la velocidad sería:

$$\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 = \left|\left(\dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\,\dot{\phi}\right)\hat{\imath} + \left(\dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\,\dot{\phi}\right)\hat{\jmath}\right|^2 =$$

$$= \left(\dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\,\dot{\phi}\right)^2 + \left(\dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\,\dot{\phi}\right)^2 =$$

$$= \dot{r}^2\cos^2(\phi) - 2r\dot{r}\dot{\phi}\cos(\phi)\sin(\phi) + r^2\dot{\phi}^2\sin^2(\phi) + \dot{r}^2\sin^2(\phi) + 2r\dot{r}\dot{\phi}\sin(\phi)\cos(\phi) + r^2\dot{\phi}^2\cos^2(\phi) =$$

$$= \dot{r}^2(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) - 2r\dot{r}\dot{\phi}(\sin(\phi)\cos(\phi) - \cos(\phi)\sin(\phi)) + r^2\dot{\phi}^2(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi))$$

Usando identidades trigonométricas se tiene:

$$\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 = \dot{r}^2 - 2r\dot{r}\dot{\phi}(0) + r^2\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

La energía cinética de este sistema sería la energía cinética del :

$$K = \frac{m\left|\dot{\vec{r}}\right|^2}{2} = \frac{m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)}{2}$$

La energía potencial de este sistema es la suma de las energías potenciales gravitacionales de la tierra y la luna.

$$U = -G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}$$

Entonces, el lagrangiano de este sistema sería:

$$L = K - U = \frac{m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)}{2} + G\frac{mm_T}{r} + G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}$$

Se calculan los momentos generalizados:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\frac{m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)}{2} + \frac{mm_T}{r} + \frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) = \frac{2m\dot{r}}{2} = m\dot{r}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left(\frac{m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)}{2} + \frac{mm_T}{r} + \frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) = \frac{2mr^2\dot{\phi}}{2} = mr^2\dot{\phi}$$

Se calcula en hamiltoniano:

$$H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = (m\dot{r})\dot{r} + \left(mr^2\dot{\phi}\right)\dot{\phi} - \left(\frac{m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)}{2} + \frac{mm_T}{r} + \frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) =$$

$$= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)}{2} - \frac{mm_T}{r} - \frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\phi}^2}{2} - \frac{mm_T}{r} - \frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}$$

Se pone el hamiltoniano en función de los momentos:

$$H = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\phi}^2}{2} - \frac{mm_T}{r} - \frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} = \frac{m^2\dot{r}^2}{2m} + \frac{m^2r^4\dot{\phi}^2}{2mr^2} - \frac{mm_T}{r} - \frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} =$$

$$= \frac{(m\dot{r})^2}{2m} + \frac{\left(mr^2\dot{\phi}\right)^2}{2mr^2} - \frac{mm_T}{r} - \frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}$$

Muestre que las ecuaciones de Hamilton, que son las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \qquad \dot{p_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3} rd\sin(\phi - \omega t)$$

$$\dot{p_r} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3}[r - d\cos(\phi - \omega t)]$$

Note que las dos primeras ecuaciones se refieren al momento lineal y angular de la nave y las segundas a la fuerza. Adicionalmente, este sistema de ecuaciones diferenciales no tiene solución analítica al ser no lineales. Este tipo de sistemas son de gran estudio numérico para establecer órbitas más reales.

Las ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi}, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r}, \qquad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi}$$

Al calcular estas derivadas se tiene:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) = \frac{2p_r}{2m} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) = \frac{2p_\phi}{2mr^2} = \frac{p_\phi}{mr^2}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) = -\left(-\frac{2p_\phi^2}{2mr^3} + G\frac{mm_T}{r^2} + G\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^2}\frac{\partial r_L}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial r_L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{r^2 - 2rd\cos(\phi - \omega t) + d^2}\right) = \frac{2r - 2d\cos(\phi - \omega t)}{2\sqrt{r^2 - 2rd\cos(\phi - \omega t) + d^2}} = \frac{r - d\cos(\phi - \omega t)}{r_L(r,\phi,t)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - G\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^3}[r - d\cos(\phi - \omega t)]$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) = -\left(G\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^2}\frac{\partial r_L}{\partial \phi}\right)$$

$$\frac{\partial r_L}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sqrt{r^2 - 2rd\cos(\phi - \omega t) + d^2}\right) = \frac{-2rd(-\sin(\phi - \omega t))}{2\sqrt{r^2 - 2rd\cos(\phi - \omega t) + d^2}} = \frac{rd\sin(\phi - \omega t)}{r_L(r,\phi,t)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{p}_\phi = -G\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^3} rd\sin(\phi - \omega t)$$

e) Para reducir el error de redondeo se pueden definir nuevas variables normalizadas a la distancia lunar:

$$\tilde{r} = \frac{r}{d}, \qquad \phi, \qquad \widetilde{p_r} = \frac{p_r}{md}, \qquad \widetilde{p_\phi} = \frac{p_\phi}{md^2}$$

Muestre que el sistema se puede escribir como sigue:

$$\dot{\tilde{r}} = \widetilde{p_r}, \qquad \dot{\phi} = \frac{\widetilde{p_\phi}}{\tilde{r}^2}, \qquad \dot{\widetilde{p_r}} = \frac{\widetilde{p_\phi}^2}{\tilde{r}^3} - \Delta\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{r'^3}[\tilde{r} - \cos(\phi - \omega t)]\right\}, \qquad \dot{\widetilde{p_\phi}} = -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{r'^3}\sin(\phi - \omega t)$$

donde $\Delta := G\frac{m_T}{d^3}$, $\mu := \frac{m_L}{m_T}$, $r' := \sqrt{1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\cos(\phi - \omega t)}$

Veamos la primera ecuación de Hamilton:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \rightarrow \frac{\dot{r}}{d} = \frac{p_r}{md} \rightarrow \dot{\tilde{r}} = \widetilde{p_r}$$

Veamos la segunda ecuación de Hamilton:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \rightarrow \dot{\phi} = \frac{\left(\frac{p_\phi}{m}\right)}{r^2} \rightarrow \dot{\phi} = \frac{\left(\frac{p_\phi}{md^2}\right)}{\left(\frac{r^2}{d^2}\right)} \rightarrow \dot{\phi} = \frac{\widetilde{p_\phi}}{\tilde{r}^2}$$

Veamos la tercera ecuación de Hamilton:

$$\dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - G\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^3}[r - d\cos(\phi - \omega t)] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\dot{p}_r}{md} = \frac{p_\phi^2}{m^2dr^3} - G\frac{m_T}{dr^2} - G\frac{m_L}{d[r_L(r,\phi,t)]^3}[r - d\cos(\phi - \omega t)] \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{\widetilde{p_r}} = \frac{p_\phi^2}{m^2d^4\frac{r^3}{d^3}} - G\frac{m_T}{d^3\frac{r^2}{d^2}} - G\frac{m_T\frac{m_L}{m_T}}{d^3\left[\frac{\sqrt{r^2 - 2rd\cos(\phi - \omega t) + d^2}}{d}\right]^3}\frac{[r - d\cos(\phi - \omega t)]}{d} \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{\widetilde{p_r}} = \frac{\left(\frac{p_\phi}{md^2}\right)^2}{\left(\frac{r}{d}\right)^3} - \frac{\left(\frac{Gm_T}{d^3}\right)}{\left(\frac{r}{d}\right)^2} - \frac{\left(\frac{Gm_T}{d^3}\right)\left(\frac{m_L}{m_T}\right)}{\left[\sqrt{\frac{r^2}{d^2} - \frac{2r}{d}\cos(\phi - \omega t) + 1}\right]^3}\left[\frac{r}{d} - \cos(\phi - \omega t)\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{\widetilde{p_r}} = \frac{\widetilde{p_\phi}^2}{\tilde{r}^3} - \frac{\Delta}{\tilde{r}^2} - \frac{\Delta\mu}{\left[\sqrt{\tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\cos(\phi - \omega t) + 1}\right]^3}[\tilde{r} - \cos(\phi - \omega t)] \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{\widetilde{p_r}} = \frac{\widetilde{p_\phi}^2}{\tilde{r}^3} - \Delta\left\{\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu}{r'^3}[\tilde{r} - \cos(\phi - \omega t)]\right\}$$

Veamos la cuarta ecuación de Hamilton:

$$\dot{p}_\phi = -G\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^3}rd\sin(\phi - \omega t) \rightarrow \frac{\dot{p}_\phi}{md^2} = -G\frac{m_L}{d^2[r_L(r,\phi,t)]^3}rd\sin(\phi - \omega t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{\widetilde{p_\phi}} = -G\frac{m_T\frac{m_L}{m_T}}{d^3\left[\frac{\sqrt{r^2 - 2rd\cos(\phi - \omega t) + d^2}}{d}\right]^3}\frac{r}{d}\sin(\phi - \omega t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{\widetilde{p_\phi}} = -\frac{\left(\frac{Gm_T}{d^3}\right)\left(\frac{m_L}{m_T}\right)}{\left[\sqrt{\frac{r^2}{d^2} - 2\frac{r}{d}\cos(\phi - \omega t) + 1}\right]^3}\frac{r}{d}\sin(\phi - \omega t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{\widetilde{p_\phi}} = -\frac{\Delta\mu}{\left[\sqrt{\tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\cos(\phi - \omega t) + 1}\right]^3}\tilde{r}\sin(\phi - \omega t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{\widetilde{p_\phi}} = -\frac{\Delta\mu}{r'^3}\tilde{r}\sin(\phi - \omega t)$$

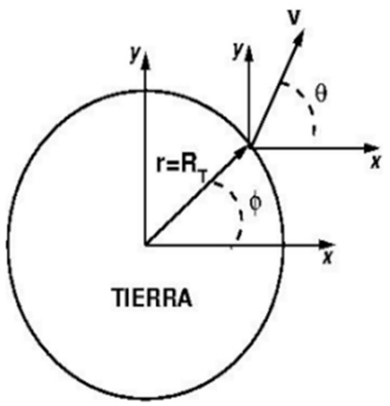


Figure 2.5: Diagrama de lanzamiento de la nave espacial desde la Tierra

f) **Resolver el sistema de ecuaciones usando el algoritmo Runge-Kutta 4 con las siguientes condiciones iniciales: El radio inicial es el radio terrestre $r = r_T$, ϕ es la latitud sobre el planeta, la velocidad inicial está dada por: $\vec{v} = [v\cos(\theta), v\sin(\theta)]$ no hay un método general para asignar v, θ, ϕ. La magnitud de la velocidad debe ser cercana la velocidad de escape de la Tierra para que la nave se pueda poner rumbo a la Luna [2.5]. Ustedes deben ajustar los ángulos para lograr fotografiar el lado oculto de la Luna; lanzando su misión cuando la Luna se encuentre en el Perigeo orbital $(y = 0)$ en el eje x.**

Finalmente, para asignar los momentos canónicos iniciales muestre lo siguiente:

$$\widetilde{p_r}^0 = \frac{p_r}{md} = \frac{1}{d}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{d}\left(\frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{dt}\right) = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{rd} = \widetilde{v_0}\cos(\theta-\phi)$$

$$\widetilde{p_\phi}^0 = \frac{p_\phi}{md^2} = \tilde{r}^2\frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\tilde{r}^2}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\tilde{r}^2}{r^2}(\dot{y}x-\dot{x}y) = \widetilde{r_0}\widetilde{v_0}\sin(\theta-\phi)$$

Note que estas expresiones son simplemente el momento lineal y angular iniciales por unidad de masa de la nave espacial.

La demostración ya está en el enunciado del punto. La simulación se encuentra en el archivo llamado "Punto 4 computacional".