



Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Estadística

Estadística Bayesiana

Caso de estudio 2

**Autores**

Juan David Duitama Correa

*jduitama@unal.edu.co*

Daniel Hoyos Mateus

*dhoyosm@unal.edu.co*

**Docente**

Juan Camilo Sosa Martínez

Bogotá, mayo de 2023

---

## Caso de estudio 2

### Distribución de los ingresos en Colombia

El Universo de la encuesta está conformado por la población civil no institucional, residente en todo el territorio nacional; va dirigida a todos los hogares encontrados en la vivienda. La encuesta utiliza informante directo para las personas de 18 años y más, y para aquellas de 10 a 17 años que trabajen o estén buscando trabajo. Para los demás se acepta informante idóneo (persona del hogar mayor de 18 años, que a falta del informante directo pueda responder correctamente las preguntas). No se acepta información de empleados del servicio doméstico, pensionistas, vecinos o menores, excepto cuando el menor de edad es el jefe del hogar o cónyuge.

El objetivo de este trabajo es construir un modelo multinivel completamente Bayesiano, tomando como datos de entrenamiento el **ingreso total** (**ingtot**; ingreso total por persona que resulta de sumar cada una de las fuentes de ingresos tanto observadas como imputadas), con el fin de modelar los ingresos por **dominio** (**dominio**; cada una de las 24 a.M., otras cabeceras y resto), y establecer un ranking junto con una segmentación de los mismos. Por lo tanto, se toma como variable de agrupamiento el dominio, y como variable respuesta el ingreso total.

#### M<sub>1</sub>: Modelo Normal

**Distribución muestral:**

$$y_{i,j} \mid \theta, \sigma^2 \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2),$$

para  $i = 1, \dots, n_j$  y  $j = 1, \dots, m$ , donde  $y_{i,j}$  es la variable respuesta del individuo  $i$  en el grupo  $j$  y  $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$  denota la distribución Normal con media  $\theta$  y varianza  $\sigma^2$ .

**Distribución previa:**

$$\theta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \gamma_0^2), \quad \sigma^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right),$$

donde  $\mu_0, \gamma_0^2, \nu_0, \sigma_0^2$  son los hiperparámetros del modelo y  $\text{GI}(\alpha, \beta)$  denota la distribución Gamma-Inversa con media  $\frac{\beta}{\alpha-1}$ , para  $\alpha > 1$ , y varianza  $\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ , para  $\alpha > 2$ .

Nota: este modelo se encuentra desarrollado en <https://rpubs.com/jstats1702/944440>.

#### M<sub>2</sub>: Modelo Normal con medias específicas

**Distribución muestral:**

$$y_{i,j} \mid \theta_j, \sigma^2 \sim \mathcal{N}(\theta_j, \sigma^2).$$

**Distribución previa:**

$$\theta_j \mid \mu, \tau^2 \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2), \quad \mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \gamma_0^2), \quad \tau^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right), \quad \sigma^2 \sim \text{GI}\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{2}\right),$$

donde  $\mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \nu_0, \sigma_0^2$  son los hiperparámetros del modelo.

Nota: este modelo se encuentra desarrollado en <https://rpubs.com/jstats1702/950834>.

#### M<sub>3</sub>: Modelo Normal con medias y varianzas específicas

**Distribución muestral:**

$$y_{i,j} \mid \theta_j, \sigma_j^2 \sim \mathcal{N}(\theta_j, \sigma_j^2).$$

**Distribución previa:**

$$\begin{aligned} \theta_j &\mid \mu, \tau^2 \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2), & \mu &\sim \mathcal{N}(\mu_0, \gamma_0^2), & \tau^2 &\sim \text{GI}\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right), \\ \sigma_j^2 &\sim \text{GI}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu \sigma^2}{2}\right), & \nu &\sim \text{Constante}, & \sigma^2 &\sim \text{G}\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right), \end{aligned}$$

donde  $\mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \nu, \alpha_0, \beta_0$  son los hiperparámetros del modelo y  $G(\alpha, \beta)$  denota la distribución Gamma con media  $\frac{\alpha}{\beta}$  y varianza  $\frac{\alpha}{\beta^2}$ .

Nota: este modelo se encuentra desarrollado en <https://rpubs.com/jstats1702/954522>. ¡Cuidado! La parametrización de la previa de  $\sigma^2$  es  $G\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right)$  en lugar de  $G(\alpha_0, \beta_0)$ .

## M<sub>4</sub>: Modelo t

**Distribución muestral:**

$$y_{i,j} \mid \theta, \sigma^2 \mathbf{t}_\kappa(\theta, \sigma^2),$$

donde  $\mathbf{t}_\kappa(\theta, \sigma^2)$  denota la distribución t con  $\kappa$  grados de libertad con media  $\theta$ , para  $\kappa > 1$ , y varianza  $\frac{\kappa}{\kappa-2} \sigma^2$ , para  $\kappa > 2$ .

La variable aleatoria  $X$  tiene distribución t con parámetros  $\kappa \in \mathbb{N}$ ,  $-\infty < \theta < \infty$ ,  $\sigma^2 > 0$ , i.e.,  $X \mid \kappa, \theta, \sigma^2 \sim \mathbf{t}_\kappa(\theta, \sigma^2)$ , si su función de densidad de probabilidad es

$$p(x \mid \kappa, \theta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa \sigma^2}} \frac{\Gamma((\kappa+1)/2)}{\Gamma(\kappa/2)} \left(1 + \frac{(x-\theta)^2}{\kappa \sigma^2}\right)^{-(\kappa+1)/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Si  $X \mid \kappa, \theta, \sigma^2 \sim \mathbf{t}_\kappa(\theta, \sigma^2)$ , entonces  $E(X) = \theta$ , para  $\kappa > 1$ , y  $\text{Var}(X) = \frac{\kappa}{\kappa-2} \sigma^2$ , para  $\kappa > 2$ .

Esta distribución es útil para modelar *outliers* y se encuentra implementada en el paquete `metRology` de R (ver <https://rdrr.io/cran/metRology/man/dt.scaled.html>).

Para ajustar este modelo de manera directa utilizando el muestreador de Gibbs, se debe tener en cuenta que la distribución muestral  $y_{i,j} \mid \theta, \sigma^2 \mathbf{t}_\kappa(\theta, \sigma^2)$  es equivalente a la distribución jerárquica dada por

$$y_{i,j} \mid \theta, \varsigma_{i,j}^2 \mathbf{N}(\theta, \varsigma_{i,j}^2), \quad \varsigma_{i,j}^2 \mid \sigma^2 \mathbf{GI}\left(\frac{\kappa}{2}, \frac{\kappa \sigma^2}{2}\right),$$

donde las variables  $\varsigma_{i,j}^2$  son cantidades auxiliares (desconocidas) cuyo objetivo es facilitar la implementación del muestreador de Gibbs.

La inclusión de las variables  $\varsigma_{i,j}^2$  en el modelo permite que todas las distribuciones condicionales completas de las cantidades desconocidas (incluyendo las mismas variables auxiliares) tengan forma probabilística conocida. En ?, pp. 293-294 hay una discusión detallada al respecto. Si no se consideran las variables  $\varsigma_{i,j}^2$  en el modelo, la implementación del muestreador de Gibbs requeriría de otros métodos numéricos más sofisticados como el algoritmo de Metropolis-Hastings o el algoritmo de Monte Carlo Hamiltoniano, dado que la distribuciones condicionales completas tanto de  $\theta$  como  $\sigma^2$  no tendrían forma probabilística conocida.

Esta misma consideración acerca de las variables auxiliares se debe tener en cuenta para la implementación computacional de los modelos 5 y 6.

**Distribución previa:**

$$\theta \sim \mathbf{N}(\mu_0, \gamma_0^2), \quad \sigma^2 \sim G\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right), \quad \kappa \sim \text{Constante},$$

donde  $\mu_0, \gamma_0^2, \alpha_0, \beta_0, \kappa$  son los hiperparámetros del modelo.

Nota: el muestreador de Gibbs para ajustar este modelo tiene tres pasos fundamentales, a saber, muestrear  $\theta$ , muestrear  $\sigma^2$  y muestrear cada  $\varsigma_{i,j}^2$ , de las distribuciones condicionales completas correspondientes, dados los valores más recientes de los demás parámetros. Aunque sí es imperativo muestrear las variables  $\varsigma_{i,j}^2$ , no es necesario almacenarlas porque no son objeto de inferencia. Además, la verosimilitud se puede calcular utilizando la función `dt.scaled` del paquete `metRology`.

## M<sub>5</sub>: Modelo t con medias específicas

**Distribución muestral:**

$$y_{i,j} \mid \theta_j, \sigma^2 \mathbf{t}_\kappa(\theta_j, \sigma^2).$$

**Distribución previa:**

$$\begin{aligned}\theta_j &| \mu, \tau^2 \mathbf{N}(\mu, \tau^2), & \mu &\sim \mathbf{N}(\mu_0, \gamma_0^2), & \tau^2 &\sim \text{Gl}\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right), \\ \sigma^2 &\sim \text{G}\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right), & \kappa &\sim \text{Constante},\end{aligned}$$

donde  $\mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \alpha_0, \beta_0, \kappa$  son los hiperparámetros del modelo.

## M<sub>6</sub>: Modelo t con medias y varianzas específicas

**Distribución muestral:**

$$y_{i,j} | \theta_j, \sigma_j^2 \mathbf{t}_\kappa(\theta_j, \sigma_j^2).$$

**Distribución previa:**

$$\begin{aligned}\theta_j &| \mu, \tau^2 \mathbf{N}(\mu, \tau^2), & \mu &\sim \mathbf{N}(\mu_0, \gamma_0^2), & \tau^2 &\sim \text{Gl}\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{\eta_0 \tau_0^2}{2}\right), \\ \sigma_j^2 &\sim \text{G}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right), & \alpha &\sim \text{Constante}, & \beta &\sim \text{G}\left(\frac{a_\beta}{2}, \frac{b_\beta}{2}\right), \\ & & \kappa &\sim \text{Constante},\end{aligned}$$

donde  $\mu_0, \gamma_0^2, \eta_0, \tau_0^2, \alpha, a_\beta, b_\beta, \kappa$  son los hiperparámetros del modelo.

## Desarrollo metodológico

En todos los casos, se utiliza la siguiente convención:

- $n$  : número total de personas en la muestra.
- $m$  : número de dominios.
- $n_j$  : número de personas en el dominio  $j$ .
- $y_{i,j}$  : ingreso total en **escala logarítmica** de la persona  $i$  en el dominio  $j$ .

Los modelos presentados anteriormente se ajustan por medio de muestreadores de Gibbs con  $B = 11000$  iteraciones. Las primeras 1000 iteraciones del algoritmo constituyen el periodo de calentamiento del algoritmo, de manera que no se tienen en cuenta para realizar las inferencias. Para tal fin se emplean distribuciones previas empíricas difusas definidas por los siguientes hiperparámetros:

- M<sub>1</sub>:  $\mu_0 = 13,495, \gamma_0^2 = 11,382, \nu_0 = 1, \sigma_0^2 = 1,182$ .
- M<sub>2</sub>:  $\mu_0 = 13,495, \gamma_0^2 = 11,382, \eta_0 = 1, \tau_0^2 = 1,182, \nu_0 = 1, \sigma_0^2 = 1,182$ .
- M<sub>3</sub>:  $\mu_0 = 13,495, \gamma_0^2 = 11,382, \eta_0 = 1, \tau_0^2 = 1,182, \nu = 1, \alpha_0 = 1, \beta_0 = 0,846$ .
- M<sub>4</sub>:  $\mu_0 = 13,495, \gamma_0^2 = 11,382, \alpha_0 = 1, \beta_0 = 0,846, \kappa = 3$ .
- M<sub>5</sub>:  $\mu_0 = 13,495, \gamma_0^2 = 11,382, \eta_0 = 1, \tau_0^2 = 1,182, \alpha_0 = 1, \beta_0 = 0,846, \kappa = 3$ .
- M<sub>6</sub>:  $\mu_0 = 13,495, \gamma_0^2 = 11,382, \eta_0 = 1, \tau_0^2 = 1,182, \alpha = 1, a_\beta = 1, b_\beta = 1,182, \kappa = 3$ .

Los hiperparámetros se establecieron teniendo en cuenta que la media muestral es  $\bar{y} = 13,495$ , la varianza muestral es  $s_y^2 = 1,182$  y el inverso de la varianza muestral es  $1/s_y^2 = 0,846$ .

## Preguntas

1. Hacer el DAG de  $M_6$  incluyendo las variables auxiliares

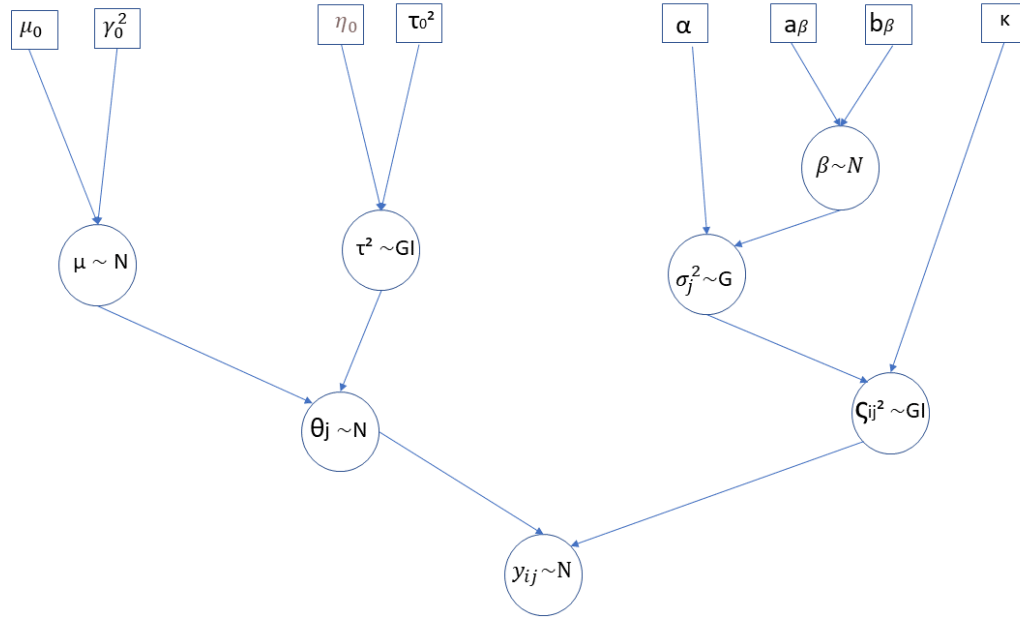


Figura 1: Representación gráfica del modelo 6

2. Graficar la cadena de la log-verosimilitud de cada  $M_k$ , para  $k = 1, \dots, 6$ . Incluir un anexo con las distribuciones condicionales completas de cada modelo (no incluir la demostración, solo cada distribución con sus respectivos parámetros).

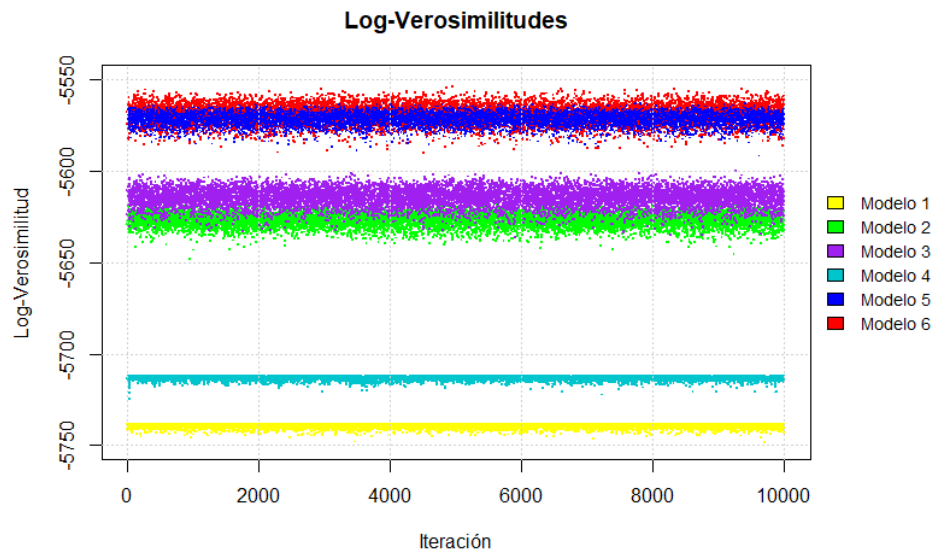


Figura 2: Logverosimilitudes de los 6 modelos

El gráfico muestra la mejoría con los modelos  $t$  a comparación de los normales, sin importar las variaciones que estos tengan en la cantidad de parámetros. Además, los modelos con solo medias específicas tienen logverosimilitudes similares a los modelos con medias y varianzas específicas, lo que puede indicar preferencia por los modelos homoscedásticos por parsimonia.

3. Calcular el DIC y el  $p_{DIC}$  de cada  $M_k$ , para  $k = 1, \dots, 6$ . Presentar los resultados tabularmente. Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras).

Criterio	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6
DIC	11480.93	11279.08	11276.71	11428.56	11168.13	11169.96
$p_{DIC}$	2	26	48	2	25	32

Los modelos  $t$  tuvieron valores de DIC menores en comparación con sus símiles de modelos normales, los modelos con menor DIC reportado fueron el 5 y 6, modelos  $t$  con medias específicas y, medias y varianzas específicas respectivamente, en cuanto al número efectivo de parámetros, la mayoría de modelos tienen una cantidad similar a los parámetros que posee, a excepción del último modelo, este cuenta con solo 32 de los 53 que originalmente posee. Teniendo en cuenta los dos criterios, el modelo que mejor desempeño tiene es el modelo 5, puesto que tiene el mejor DIC y, por parsimonia, usa menos parámetros para representar la situación que los modelos 3 y 6.

4. Calcular los ppp's para Bogotá asociados con la media, la mediana, la desviación estándar, el coeficiente de variación, el rango y el rango intercuartílico usando  $M_6$ . Presentar los resultados tabularmente. Interpretar los resultados obtenidos (máximo 100 palabras).

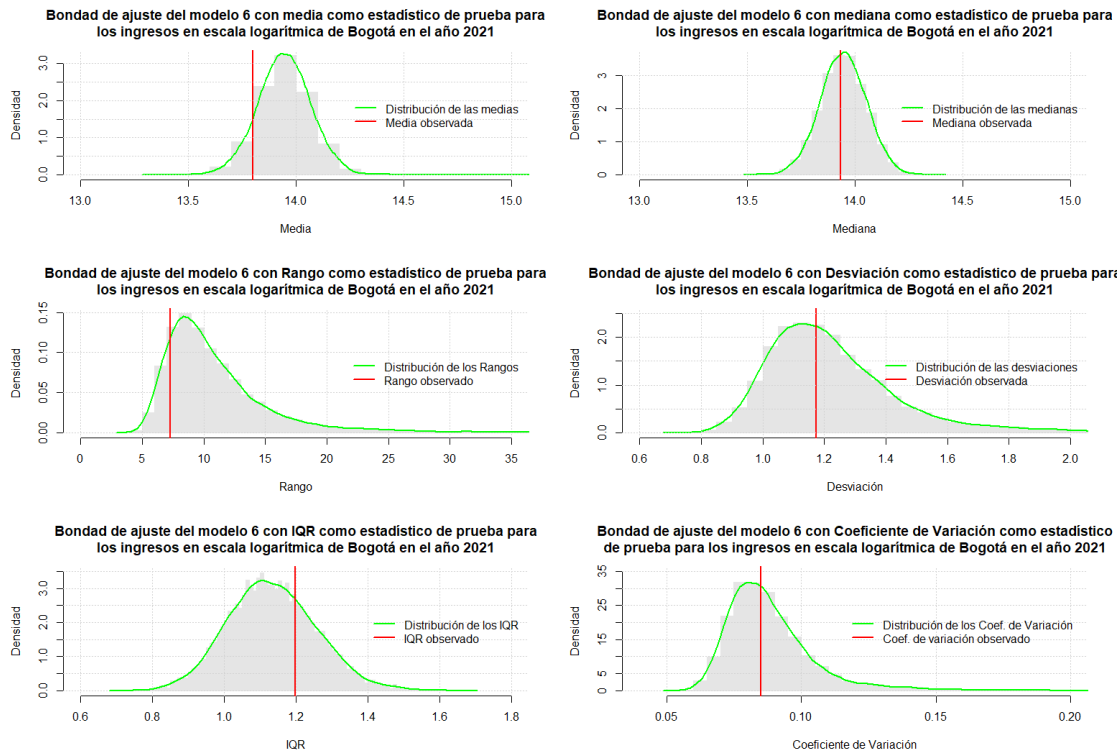


Figura 3: Bondad de ajuste del modelo 6 utilizando distintos estadísticos de prueba

Estadístico	Media	Mediana	Desviación	Coeficiente de variación	Rango	IQR
ppp	0.89	0.54	0.53	0.50	0.85	0.29

La bondad de ajuste del modelo 6 en la población bogotana cuenta con resultados interesantes, es común ver modelos capaces de representar de manera efectiva la media de la población y no hacerlo con medidas de dispersión, en este caso ocurre lo contrario; el p valor predictivo posterior de la desviación y el coeficiente de variación son muy cercanos a 0.5, por lo que el modelo replica la dispersión de una manera efectiva, en cambio la media cuenta con uno de aproximadamente 0.9. No obstante, las medidas de dispersión asociadas a los estadísticos de posición como el rango y el rango intercuartílico no poseen buenos ppp. En los anteriores tres gráficos del lado derecho se puede observar como el modelo 6 representa eficazmente la mediana, la desviación estándar y el coeficiente de variación.

5. Hacer un ranking Bayesiano de los dominios basado en los efectos promedio de  $M_6$ . Hacer una visualización que incluya simultáneamente las estimaciones puntuales y los intervalos de credibilidad al 95 %. Interpretar los resultados obtenidos.

Notemos que 13.830 corresponde a un SMLMV de 2022 en escala logarítmica.

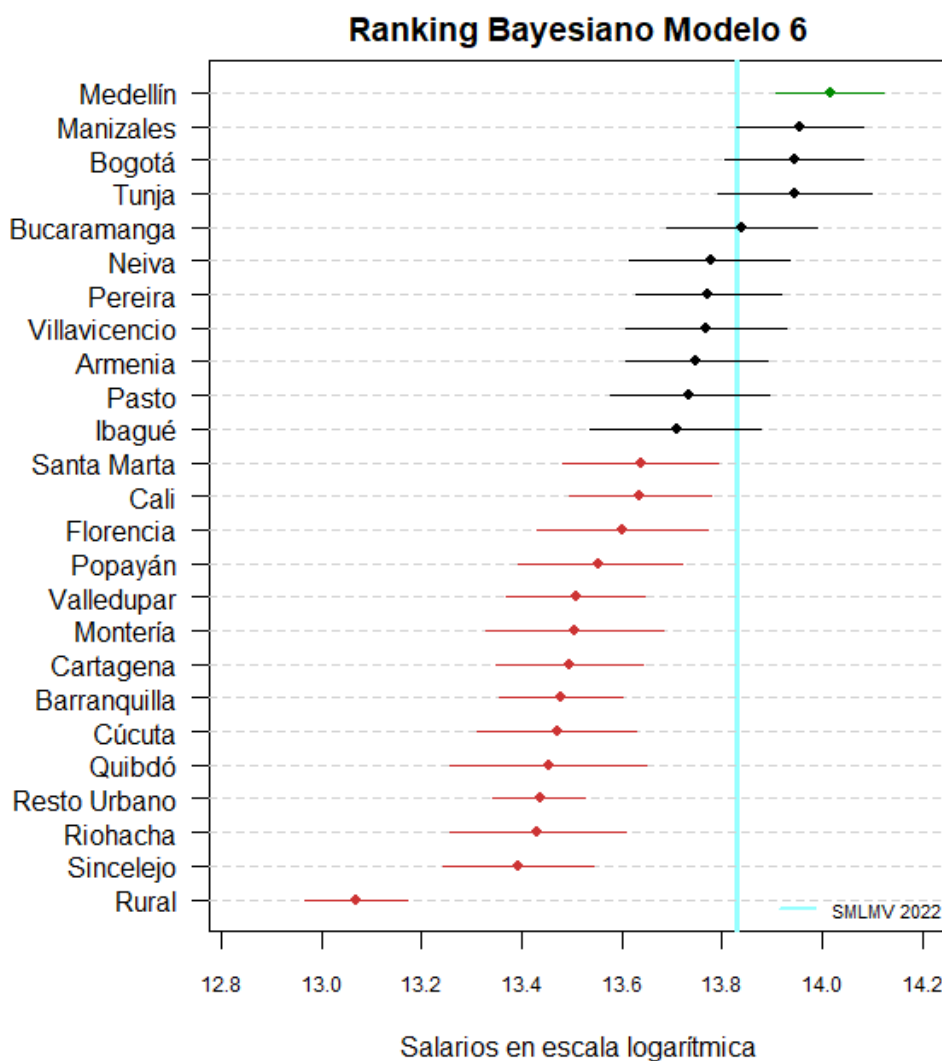


Figura 4: Ranking de los dominios con base en los efectos promedio

En la gráfica se puede observar a Medellín como la única ciudad del país cuyos ingresos promedio en el año 2021 fueron significativamente más altos al SMLMV del 2022, mientras que Manizales, Bogotá y Tunja, a pesar de que

no difieren demasiado en sus promedios con respecto al SMLMV del 2022, tienen un mejor comportamiento que el resto de las ciudades, puesto que la estimación puntual supera la línea azul. A pesar de ser la capital del país y la ciudad más poblada, Bogotá es la tercera en clasificación de los promedios del salario mínimo en el 2021. De las 25 ciudades del estudio, 14 tienen un promedio significativamente menor que el SMLMV del 2022.

6. Estimar puntualmente la media, la desviación estándar y el coeficiente de variación de los ingresos para el Top 5 del ranking usando  $M_6$ . Reportar los resultados tabularmente. Interpretar los resultados obtenidos.

Ciudad	Media	Desviación estándar	Coeficiente de variación
Medellín	1223465	3.51	8.97 %
Manizales	1149723	3.41	8.80 %
Bogotá	1139356	3.63	9.25 %
Tunja	1136863	3.51	9.02 %
Bucaramanga	1024756	3.59	9.24 %

De las primeras cinco ciudades estudiadas, se observa que Medellín es la que posee el promedio de ingresos más alto, las siguientes tres ciudades tienen un promedio muy similar; el coeficiente de variación que es mayor es el de la ciudad de Bogotá, es decir, es la ciudad que tiene una mayor dispersión con respecto a su media, coincidiendo, además, con el hecho de ser la capital del país. En contraste, Manizales tiene el menor coeficiente de variación, es el conjunto de datos con la menor varianza y con la menor dispersión con respecto a su media, ésta ciudad, tiene alrededor de 450.000 habitantes.

7. Conformar un arreglo que contenga las estimaciones puntuales de los efectos promedio y las desviaciones estándar de todos los dominios usando  $M_6$ . Usando este arreglo como insumo, segmentar los dominios por medio de agrupación jerárquica con cuatro grupos. Presentar los resultados visualmente. Interpretar los resultados obtenidos.

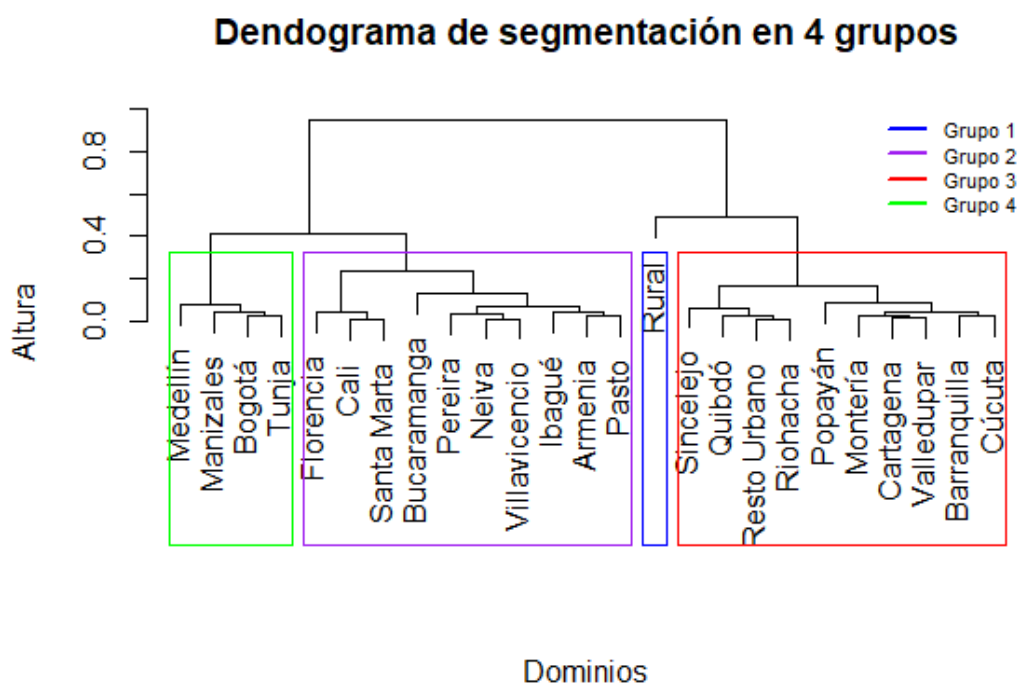


Figura 5: Segmentación jerárquica de los dominios en 4 grupos.



---

La segmentación realizada por medio de clustering por k medias, utilizando como métrica la distancia euclidiana arrojó como resultado los anteriores grupos, los dos grupos destacados son el 1 y 4, puesto que el número 4 contiene a 4 de las 5 ciudades de las 5 primeras ciudades del ranking anterior, Medellín, Manizales, Bogotá y Tunja. Por otro lado el grupo número 1 solo incluyó a las ciudades rurales, esto evidenciado también en el ranking, ya que tanto la estimación puntual como el intervalo de credibilidad del efecto promedio del salario en escala logarítmica son significativamente menores que las demás estimaciones.

# ANEXOS

## 1. Distribuciones condicionales completas de los seis modelos

Nota:  $\Sigma\Sigma = \Sigma_{j=1}^m \Sigma_{i=1}^{n_j}$

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6
$\theta$	$N\left(\frac{\frac{\mu_0}{\tau_0} + \frac{\mu_0^g}{\tau_0^g}}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}, \frac{1}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}\right)$			$N\left(\frac{\Sigma\Sigma \frac{\mu_{ij}}{\zeta_{ij}} + \frac{\mu_0^g}{\tau_0^g}}{\Sigma\Sigma \frac{\tau_0}{\zeta_{ij}} + \frac{\tau_0}{\tau_0^g}}, \frac{1}{\Sigma\Sigma \frac{\tau_0}{\zeta_{ij}} + \frac{\tau_0}{\tau_0^g}}\right)$		
$\theta_j$		$N\left(\frac{\frac{\mu_j}{\tau_j} + \frac{\mu_j^g}{\tau_j^g}}{\frac{\tau_j}{\tau_j} + \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2}}, \frac{1}{\frac{\tau_j}{\tau_j} + \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2}}\right)$	$N\left(\frac{\frac{\mu_j}{\tau_j} + \frac{\mu_j^g}{\tau_j^g}}{\frac{\tau_j}{\tau_j} + \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2}}, \frac{1}{\frac{\tau_j}{\tau_j} + \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2}}\right)$		$N\left(\frac{\Sigma_{i=1}^{n_j} \frac{\mu_{ij}}{\zeta_{ij}} + \frac{\mu_j^g}{\tau_j^g}}{\Sigma_{i=1}^{n_j} \frac{\tau_0}{\zeta_{ij}} + \frac{\tau_j}{\tau_j^g}}, \frac{1}{\Sigma_{i=1}^{n_j} \frac{\tau_0}{\zeta_{ij}} + \frac{\tau_j}{\tau_j^g}}\right)$	$N\left(\frac{\Sigma_{i=1}^{n_j} \frac{\mu_{ij}}{\zeta_{ij}} + \frac{\mu_j^g}{\tau_j^g}}{\Sigma_{i=1}^{n_j} \frac{\tau_0}{\zeta_{ij}} + \frac{\tau_j}{\tau_j^g}}, \frac{1}{\Sigma_{i=1}^{n_j} \frac{\tau_0}{\zeta_{ij}} + \frac{\tau_j}{\tau_j^g}}\right)$
$\sigma^2$	$GI\left(\frac{\nu_0\sigma_0^2+n\sigma_0^2(\theta)}{2}, \frac{\nu_0\sigma_0^2+n\sigma_0^2(\theta)}{2}\right)$	$GI\left(\frac{\nu_0+\Sigma_{i=1}^{n_j} n}{2}, \frac{\nu_0\sigma_0^2+\Sigma\Sigma(y_{ij}-\theta_j)^2}{\nu_0+1n}\right)$	$G\left(\alpha_0 + \frac{m\nu}{2}, \beta_0, \frac{\nu\Sigma_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_j^2}}{2}\right)$	$G\left(\frac{n\kappa+\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0+\kappa\Sigma(\frac{1}{\zeta_{ij}^2})}{2}\right)$	$G\left(\frac{n\kappa+\alpha_0}{2}, \frac{\beta_0+\kappa\Sigma\Sigma \frac{1}{\zeta_{ij}^2}}{2}\right)$	
$\sigma_j^2$			$GI\left(\frac{\nu+\tau_j}{2}, \frac{\nu\sigma^2+\Sigma(y_{ij}-\theta_j)^2}{2}\right)$			$GI\left(\frac{\kappa\tau_j+\alpha}{2}, \frac{\beta+\kappa\Sigma_{i=1}^{n_j} \frac{1}{\zeta_{ij}^2}}{2}\right)$
$\mu$		$N\left(\frac{\frac{\mu_0}{\tau_0} + \frac{m\mu^g}{\tau_0^g}}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}, \frac{1}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}\right)$	$N\left(\frac{\frac{\mu_0}{\tau_0} + \frac{m\mu^g}{\tau_0^g}}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}, \frac{1}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}\right)$		$N\left(\frac{\frac{m\mu^g}{\tau_0^g} + \frac{\mu_0^g}{\tau_0^g}}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}, \frac{1}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}\right)$	$N\left(\frac{\frac{m\mu^g}{\tau_0^g} + \frac{\mu_0^g}{\tau_0^g}}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}, \frac{1}{\frac{\tau_0}{\tau_0} + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}}\right)$
$\tau^2$		$GI\left(\frac{\eta_0+m}{2}, \frac{\eta_0\sigma_0^2+\Sigma(\theta_j-\mu)^2}{2}\right)$	$GI\left(\frac{\eta_0+m}{2}, \frac{\eta_0\sigma_0^2+\Sigma(\theta_j-\mu)^2}{2}\right)$		$GI\left(\frac{m+\eta_0}{2}, \frac{\nu_0\tau_0^2+\Sigma_{j=1}^m(\theta_j-\mu)^2}{2}\right)$	$GI\left(\frac{m+\eta_0}{2}, \frac{\eta_0\tau_0^2+\Sigma_{j=1}^m(\theta_j-\mu)^2}{2}\right)$
$\zeta_{ij}^2$				$GI\left(\frac{\kappa+1}{2}, \frac{\kappa\sigma^2+(y_{ij}-\theta)^2}{2}\right)$	$GI\left(\frac{\kappa+1}{2}, \frac{\kappa\sigma^2+(y_{ij}-\theta)^2}{2}\right)$	$GI\left(\frac{\kappa+1}{2}, \frac{\kappa\sigma^2+(y_{ij}-\theta)^2}{2}\right)$
$\beta$						$G\left(\frac{m\alpha+a_\beta}{2}, \frac{b_\beta+\Sigma_{j=1}^m \sigma_j^2}{2}\right)$