Ejercicios de Variable Compleja en MATLAB

Juan González
20232025089
Yesid González
20232025073

October 18, 2025

Contents

1 Introducción

El presente documento tiene como objetivo recopilar y desarrollar una serie de ejercicios relacionados con la teoría de variable compleja, utilizando como herramienta principal el software `MATLAB`. La variable compleja constituye un campo fundamental dentro del análisis matemático, con aplicaciones en la ingeniería, la física y diversas áreas de la ciencia. En este trabajo se abordan problemas clásicos como operaciones con números complejos, representaciones en el plano, transformaciones conformes, verificación de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, así como el cálculo de integrales de contorno y límites.

El uso de `MATLAB` permite no solo realizar los cálculos simbólicos y numéricos de manera eficiente, sino también visualizar gráficamente mapeos y funciones complejas, lo cual enriquece la comprensión de los conceptos teóricos.

2 Ejercicios 1-18

2.1 Ejercicio 1: Operaciones básicas con complejos

2.1.1 Enunciado

Dados $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 1 - 5i$, calcular:

$$a)\ z_1 + z_2, \quad b)\ z_1 \cdot z_2, \quad c)\ \frac{z_1}{z_2}.$$

2.1.2 Solución matemática

$$\begin{aligned} a)\ z_1 + z_2 &= 4 - 3i, \\ b)\ z_1 z_2 &= 13 - 13i, \\ c)\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-7 + 17i}{26} = -\tfrac{7}{26} + \tfrac{17}{26}i. \end{aligned}$$

2.2 Ejercicio 2: Forma polar de complejo

2.2.1 Enunciado

Calcule la forma polar de $z = -2 + 2i$.

2.2.2 Solución matemática

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Por tanto,

$$z = 2\sqrt{2}\,(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

2.2.3 Resultado

$$r = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \tfrac{3\pi}{4}\ (135°).$$

2.3 Ejercicio 3: Raíces quintas de la unidad

2.3.1 Enunciado

Grafique las raíces quintas de la unidad.

2.3.2 Solución matemática

Las raíces quintas de la unidad son

$$z_k = e^{2\pi ik/5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

las cuales se distribuyen uniformemente en la circunferencia unitaria del plano complejo.

2.3.3 Gráfica

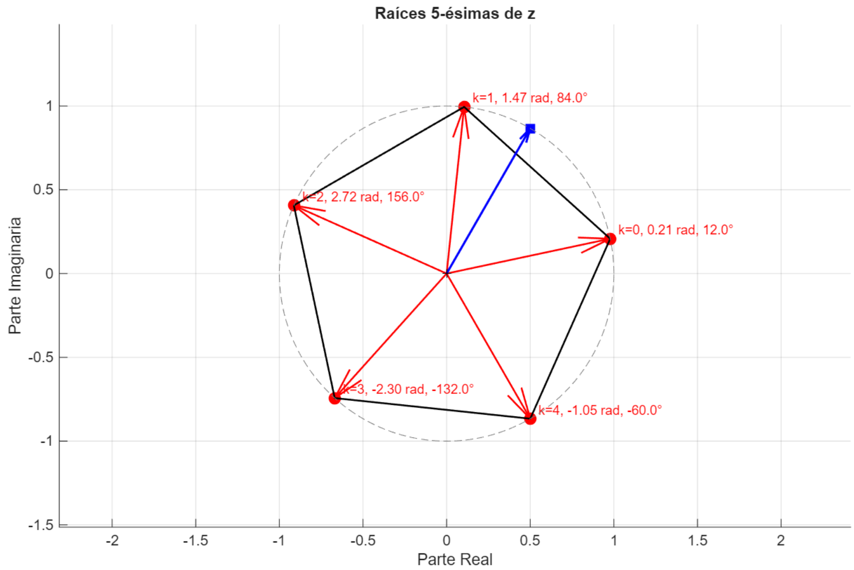


Figure 1: Representación de las cinco raíces de la unidad sobre la circunferencia unitaria

2.4 Ejercicio 4: Ecuaciones de Cauchy-Riemann

2.4.1 Enunciado

Verifique las ecuaciones de Cauchy–Riemann para la función $f(z) = e^z$.

2.4.2 Solución matemática

Escribiendo $z = x + iy$:

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad u = e^x \cos y, \ v = e^x \sin y.$$

Cálculo directo de derivadas:

$$u_x = e^x \cos y, \ u_y = -e^x \sin y, \ v_x = e^x \sin y, \ v_y = e^x \cos y.$$

Como $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ para todo x, y, f cumple Cauchy–Riemann y por tanto es analítica en $\mathbb{C}$.

2.5 Ejercicio 5: Integral de línea

2.5.1 Enunciado

Calcule $\displaystyle\int_C z^2\, dz$, donde C es el segmento desde 0 hasta $1 + i$.

2.5.2 Resultado en MATLAB

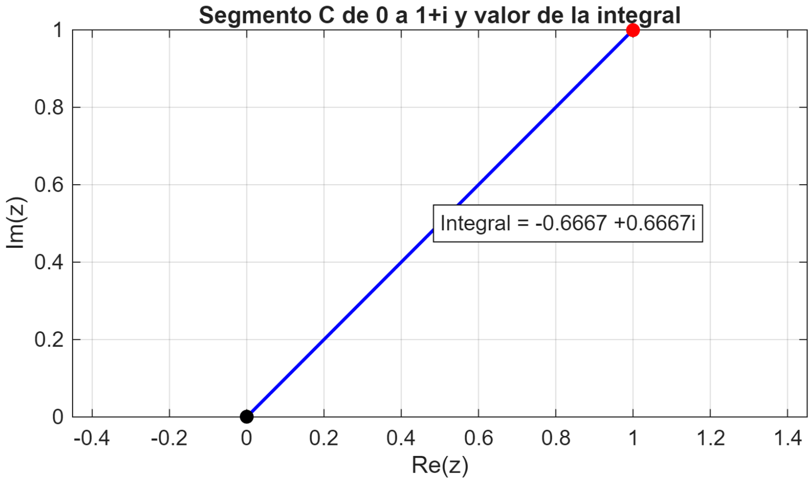


Figure 2: Resultado de la integral de línea $\int_C z^2\,dz$ mostrado en MATLAB

2.6 Ejercicio 6: Serie de Taylor

2.6.1 Enunciado

Desarrolle en serie de Taylor alrededor de $z = 0$ la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z}.$$

2.6.2 Solución matemática

Para $|z| < 1$ se tiene la expansión geométrica

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots .$$

2.6.3 Resultado en MATLAB

```
Command Window
>> untitled

f(z) =

1/(z + 1)


taylor_series =

- z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1
```

Figure 3: Desarrollo en serie de Taylor en MATLAB

2.7 Ejercicio 7: Mapeo $w = z^2$

2.7.1 Enunciado

Visualice el mapeo $w = z^2$ para una cuadrícula en el plano z.

2.7.2 Solución matemática

La transformación $w = z^2$ es una función analítica que mapea el plano complejo $z = x+iy$ al plano $w = u + iv$ mediante:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Esta transformación duplica los ángulos en el origen y convierte líneas rectas en parábolas.

2.7.3 Resultado en MATLAB

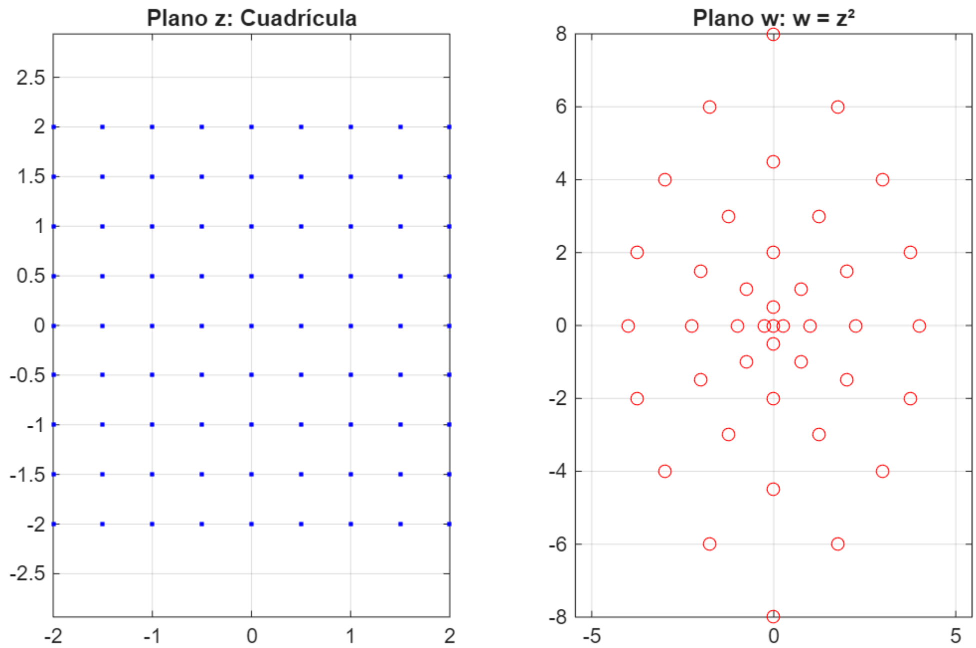


Figure 4: Mapeo $w = z^2$ para una cuadrícula en el plano z

2.8 Ejercicio 8: Límite complejo

2.8.1 Enunciado

Calcule $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{ni}$.

2.8.2 Solución matemática

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{ni} = e^i = \cos(1) + i\sin(1)$$

2.8.3 Resultado en MATLAB

```
lim_{n→∞} ((n+1)/n)^(ni) = exp(i)
Forma exponencial: e^i
Forma trigonométrica: cos(1) + i*sin(1)
Valor numérico: 0.540302 + 0.841471i
```

Figure 5: Cálculo del límite complejo en MATLAB

2.9 Ejercicio 9: Curvas de nivel

2.9.1 Enunciado

Grafique las curvas de nivel de $\text{Re}(e^{1/z})$.

2.9.2 Solución matemática

$$\text{Re}(e^{1/z}) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

donde $z = x + iy$. Las curvas de nivel muestran líneas de valor constante de esta función.

2.9.3 Resultado en MATLAB

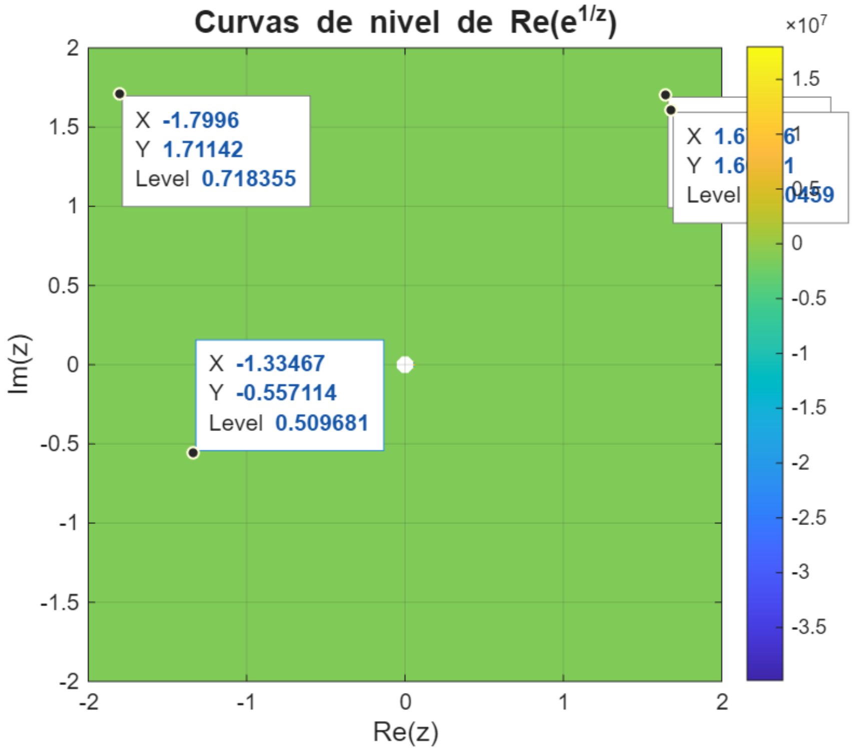


Figure 6: Curvas de nivel de $\text{Re}(e^{1/z})$

2.10 Ejercicio 10: Raíces de ecuación

2.10.1 Enunciado

Resuelva la ecuación $z^4 = 16i$.

2.10.2 Solución matemática

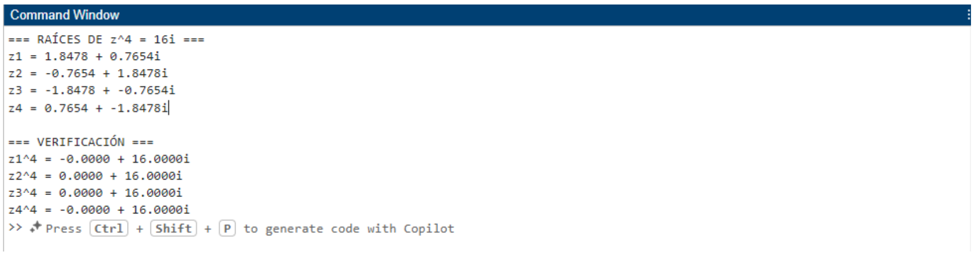
Expresando $16i$ en forma polar:

$$16i = 16e^{i\pi/2} = 16e^{i(\pi/2+2k\pi)}$$

Las raíces cuartas son:

$$z_k = 2e^{i(\pi/8+k\pi/2)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

2.10.3 Resultado en MATLAB



```
Command Window
=== RAÍCES DE z^4 = 16i ===
z1 = 1.8478 + 0.7654i
z2 = -0.7654 + 1.8478i
z3 = -1.8478 + -0.7654i
z4 = 0.7654 + -1.8478i

=== VERIFICACIÓN ===
z1^4 = -0.0000 + 16.0000i
z2^4 = 0.0000 + 16.0000i
z3^4 = 0.0000 + 16.0000i
z4^4 = -0.0000 + 16.0000i
>> Press Ctrl + Shift + P to generate code with Copilot
```

Figure 7: Raíces de $z^4 = 16i$ en MATLAB

2.11 Ejercicio 11: Integral de $e^{i\theta}$

2.11.1 Enunciado

Calcule la integral $\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta$.

2.11.2 Solución matemática

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta) d\theta = 0$$

ya que las integrales de $\cos\theta$ y $\sin\theta$ sobre un periodo completo son cero.

2.11.3 Resultado en MATLAB

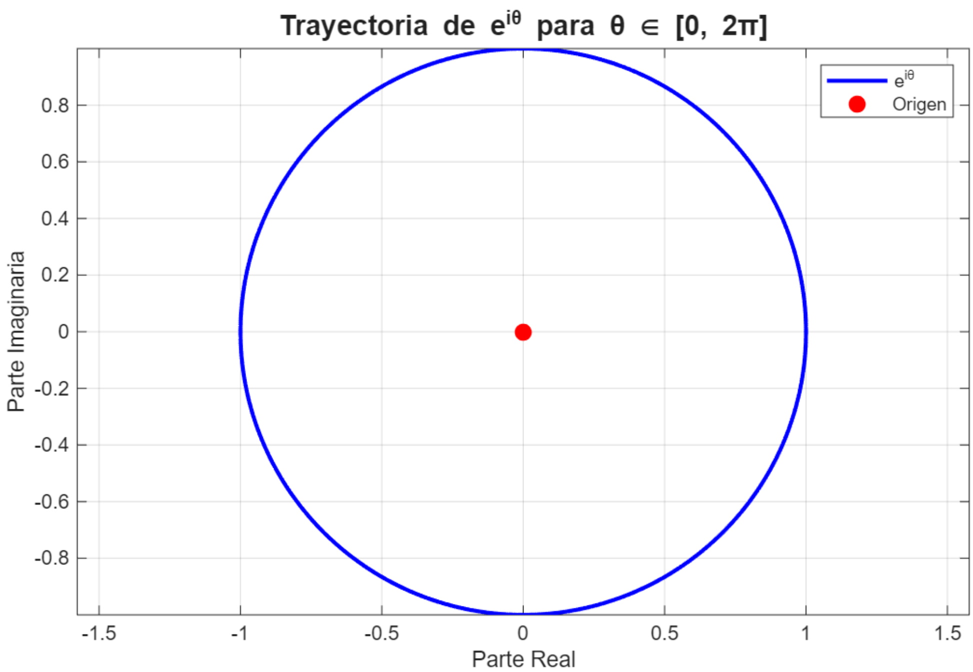


Figure 8: Integral de $e^{i\theta}$ en MATLAB

2.12 Ejercicio 12: Integral por residuos

2.12.1 Enunciado

Evalúe $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$ donde C es el círculo $|z| = 1$.

2.12.2 Solución matemática

Por el teorema de los residuos, el residuo en $z = 0$ es:

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{\cos z}{z} = \cos(0) = 1$$

Por tanto:

$$\int_C \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, 0) = 2\pi i$$

2.12.3 Resultado en MATLAB

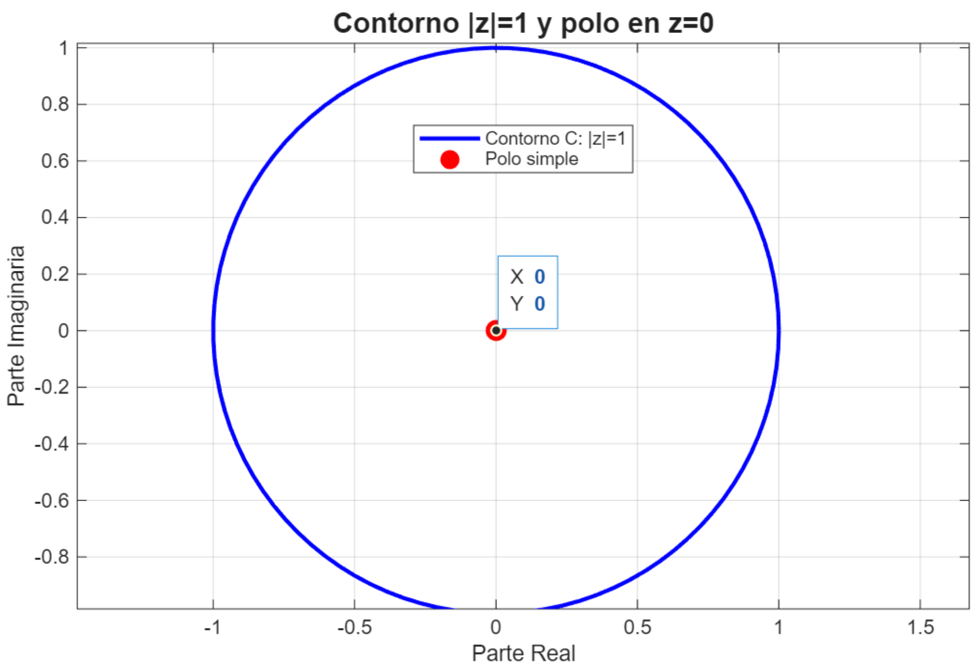


Figure 9: Integral de $\frac{\cos z}{z}$ por residuos en MATLAB

2.13 Ejercicio 13: Derivada del logaritmo

2.13.1 Enunciado

Derivada de $f(z) = \log(z)$.

2.13.2 Solución matemática

Para la rama principal del logaritmo complejo:

$$\frac{d}{dz} \log(z) = \frac{1}{z}$$

válido para $z \neq 0$ y evitando el corte de rama.

2.13.3 Resultado en MATLAB

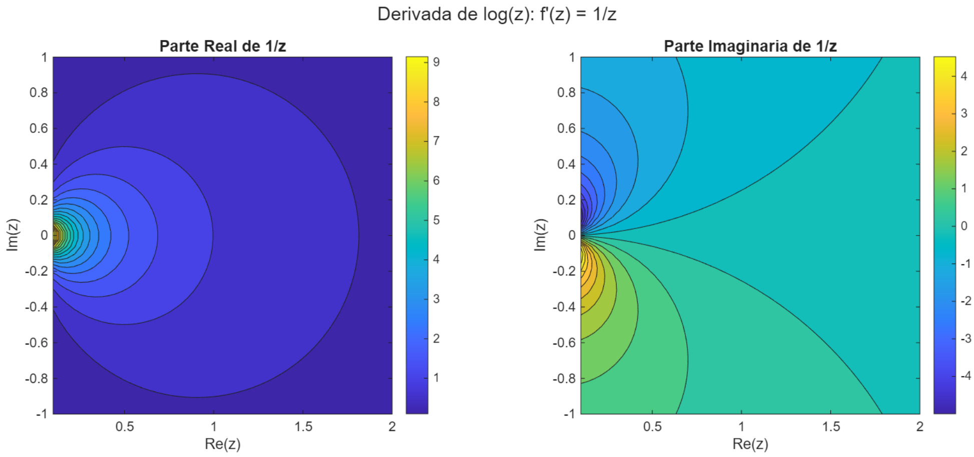


Figure 10: Derivada de $\log(z)$ en MATLAB

2.14 Ejercicio 14: Serie de Taylor de e^z

2.14.1 Enunciado

Calcule $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ y verifique que es e^z.

2.14.2 Solución matemática

La serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

es la definición de la función exponencial compleja e^z, que es analítica en todo el plano complejo.

2.14.3 Resultado en MATLAB

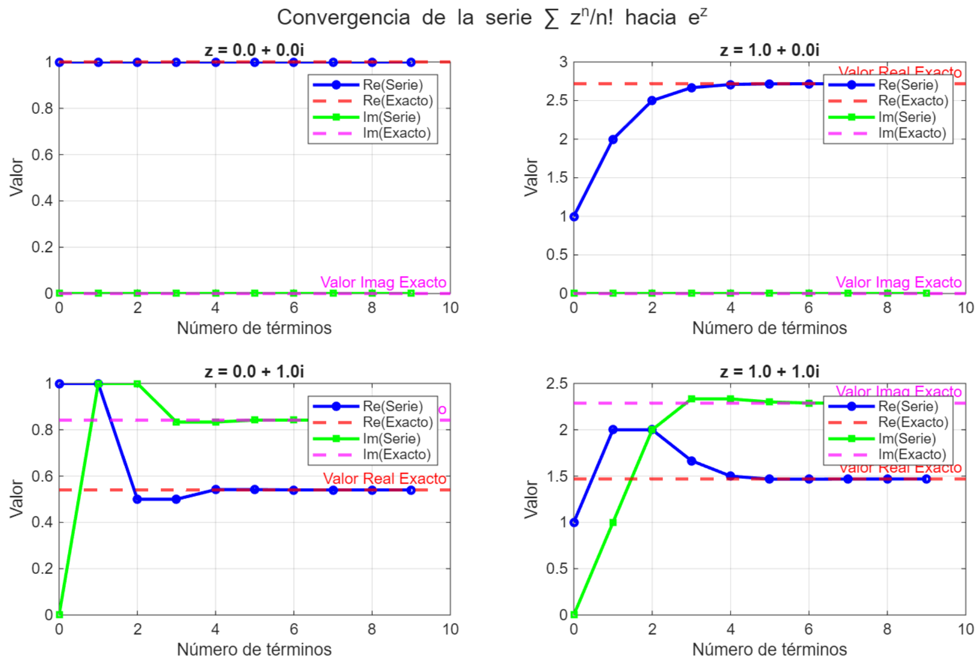


Figure 11: Serie de Taylor de e^z en MATLAB

2.15 Ejercicio 15: Raíces de polinomio

2.15.1 Enunciado

Encuentre y grafique las raíces de $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

2.15.2 Solución matemática

Factorizando:

$$z^3 + z^2 + z + 1 = (z + 1)(z^2 + 1) = (z + 1)(z + i)(z - i)$$

Las raíces son: $z = -1, i, -i$.

2.15.3 Resultado en MATLAB

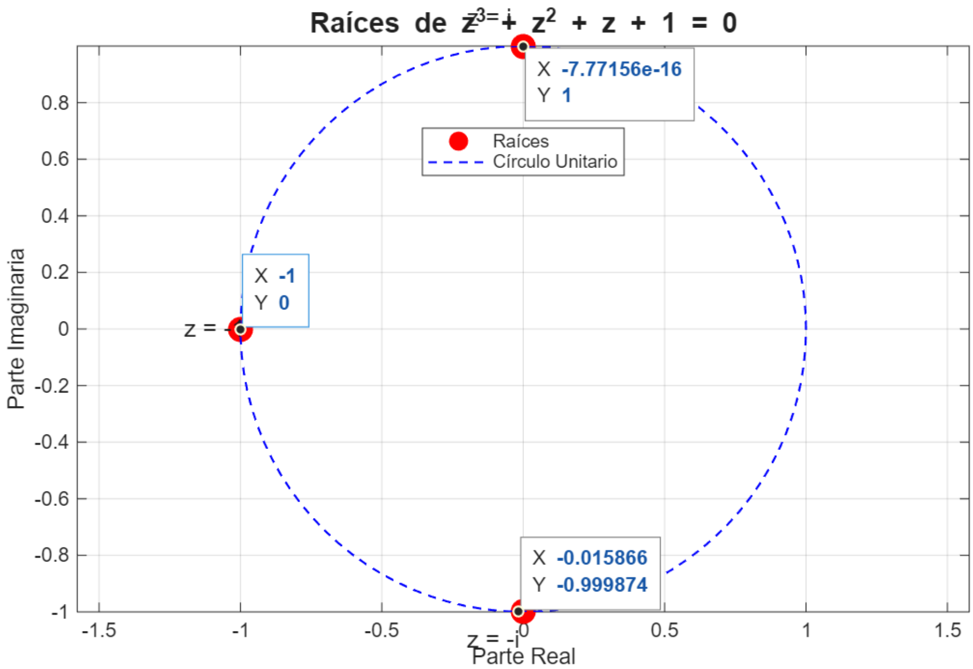


Figure 12: Raíces de $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ en MATLAB

2.16 Ejercicio 16: Mapeo $w = \sin(z)$

2.16.1 Enunciado

Mapeo de $w = \sin(z)$ para $z = x + iy$ con $x \in [-\pi, \pi], y \in [0, 1]$.

2.16.2 Solución matemática

Usando la identidad:

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

El mapeo transforma rectángulos en el plano z en regiones elípticas en el plano w.

2.16.3 Resultado en MATLAB

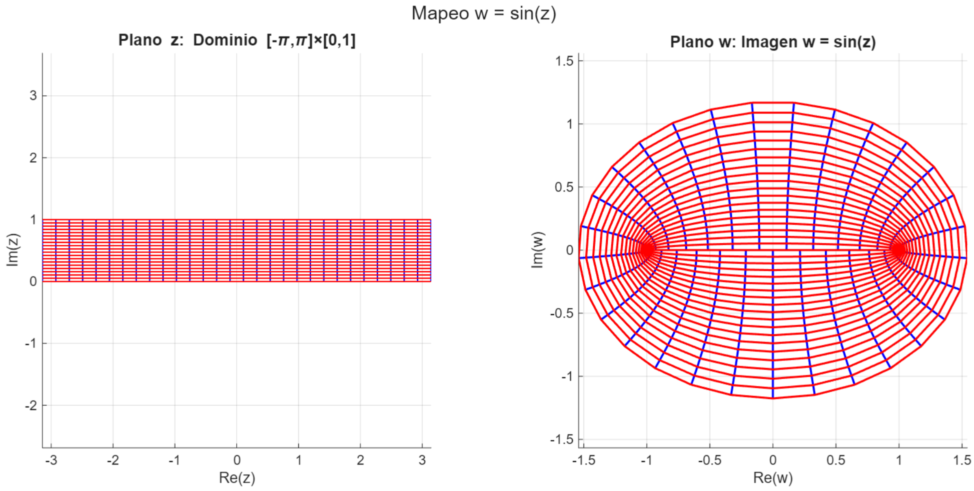


Figure 13: Mapeo $w = \sin(z)$ en MATLAB

2.17 Ejercicio 17: Integral con residuos

2.17.1 Enunciado

Calcule $\int_C \frac{dz}{z^2+4}$ donde C es el círculo $|z - i| = 2$.

2.17.2 Solución matemática

Los polos están en $z = \pm 2i$. Solo $z = 2i$ está dentro del contorno.

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \to 2i} (z - 2i) \cdot \frac{1}{(z - 2i)(z + 2i)} = \frac{1}{4i}$$

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 4} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

2.17.3 Resultado en MATLAB

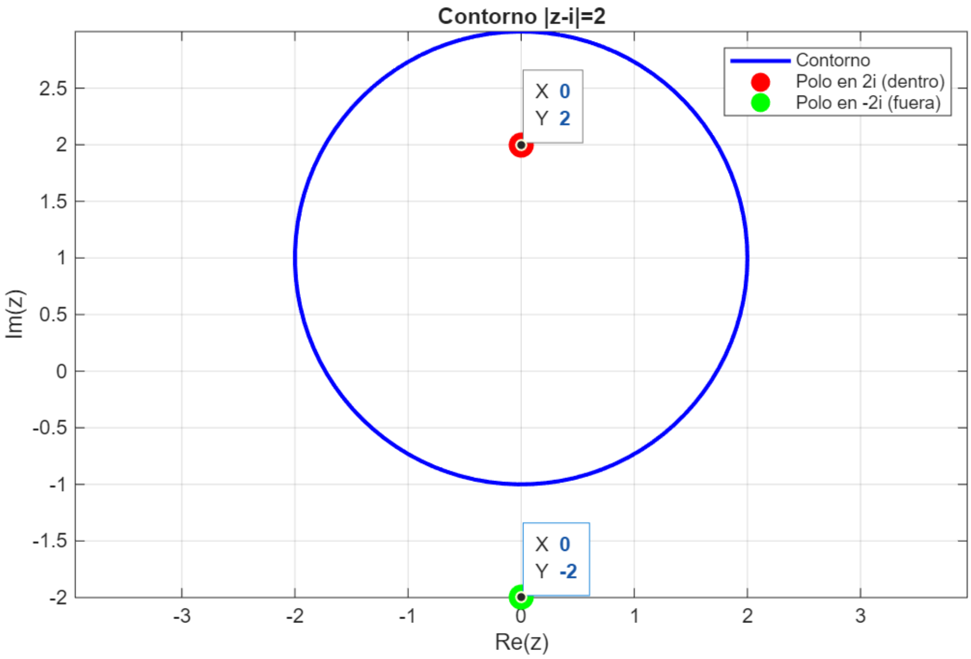


Figure 14: Integral de $\frac{1}{z^2+4}$ en MATLAB

2.18 Ejercicio 18: Gráfica de $f(z) = z^2$

2.18.1 Enunciado

Grafique la función $f(z) = z^2$ en el dominio $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

2.18.2 Solución matemática

La función $f(z) = z^2$ mapea el plano complejo según:

$$(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

Se pueden visualizar las partes real e imaginaria, o el módulo y argumento.

2.18.3 Resultado en MATLAB

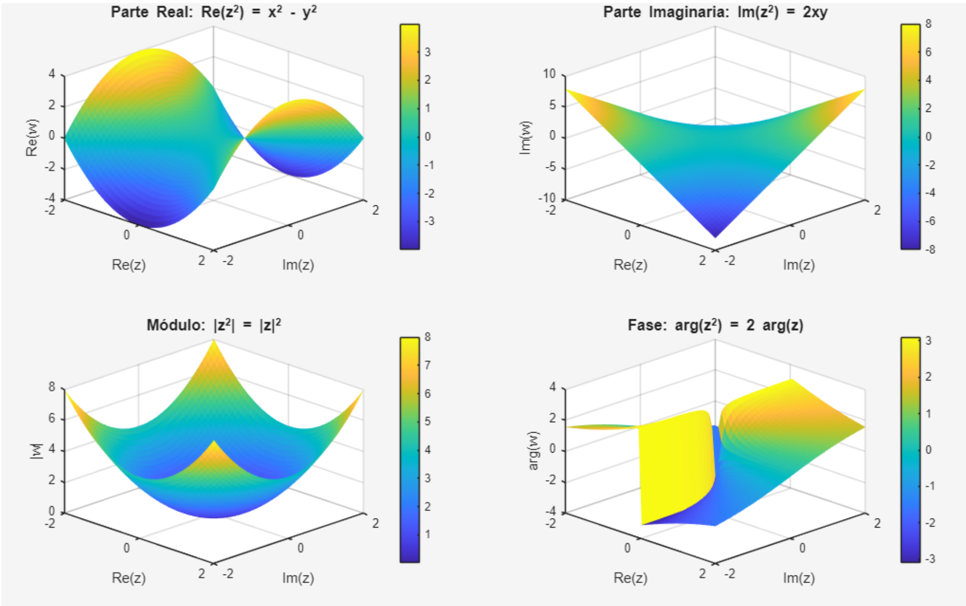


Figure 15: Gráfica de $f(z) = z^2$ en MATLAB

3 Ejercicios 19-37

3.1 Ejercicio 19: Derivada de función exponencial

3.1.1 Enunciado

Calcule la derivada de $f(z) = 3ie^z$.

3.1.2 Solución matemática

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(3ie^z) = 3i \cdot e^z$$

3.1.3 Resultado

$$f'(z) = 3ie^z$$

3.1.4 Resultado en MATLAB

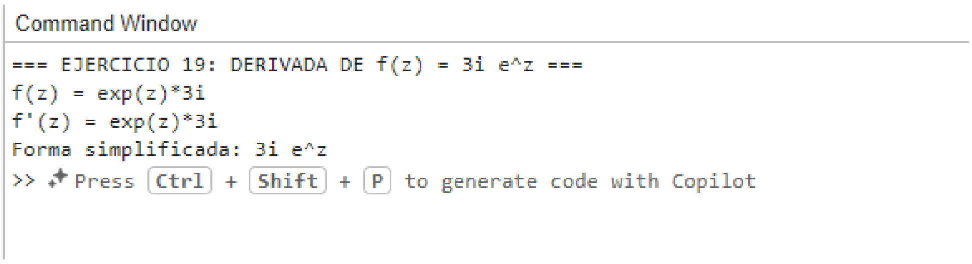

```
Command Window
=== EJERCICIO 19: DERIVADA DE f(z) = 3i e^z ===
f(z) = exp(z)*3i
f'(z) = exp(z)*3i
Forma simplificada: 3i e^z
>> Press Ctrl + Shift + P to generate code with Copilot
```

Figure 16: Derivada de $f(z) = 3ie^z$ en MATLAB

3.2 Ejercicio 20: Integral de línea

3.2.1 Enunciado

Evalue $\int_C z dz$ donde C es el segmento de recta de 0 a $1 + i$.

3.2.2 Solución matemática

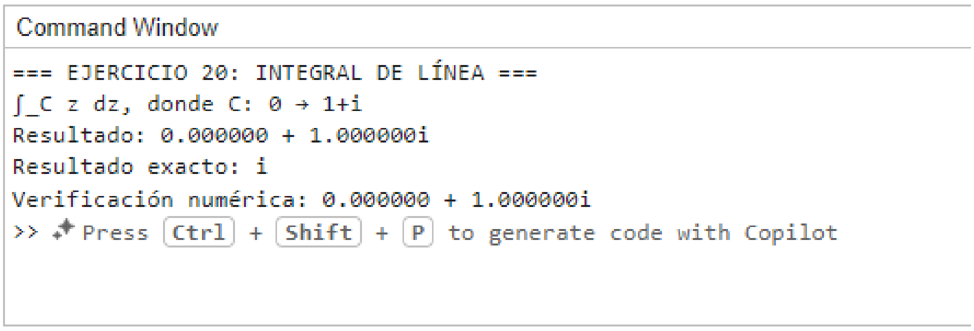
Parametrizando el segmento: $z(t) = t(1 + i)$, $t \in [0, 1]$. Entonces:

$$\int_C z dz = \int_0^1 t(1+i) \cdot (1+i)dt = (1+i)^2 \int_0^1 t dt = (2i) \cdot \frac{1}{2} = i$$

3.2.3 Resultado

$$\int_C z dz = i$$

3.2.4 Resultado en MATLAB



```
Command Window
=== EJERCICIO 20: INTEGRAL DE LÍNEA ===
∫_C z dz, donde C: 0 → 1+i
Resultado: 0.000000 + 1.000000i
Resultado exacto: i
Verificación numérica: 0.000000 + 1.000000i
>> Press Ctrl + Shift + P to generate code with Copilot
```

Figure 17: Integral de línea en MATLAB

3.3 Ejercicio 21: Curvas de nivel

3.3.1 Enunciado

Grafique las curvas de nivel de $\text{Re}(\sin(z))$.

3.3.2 Solución matemática

Para $z = x + iy$, tenemos:

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

Por lo tanto:

$$\text{Re}(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y)$$

Las curvas de nivel son de la forma $\sin(x)\cosh(y) = c$, donde c es constante.

3.3.3 Resultado en MATLAB

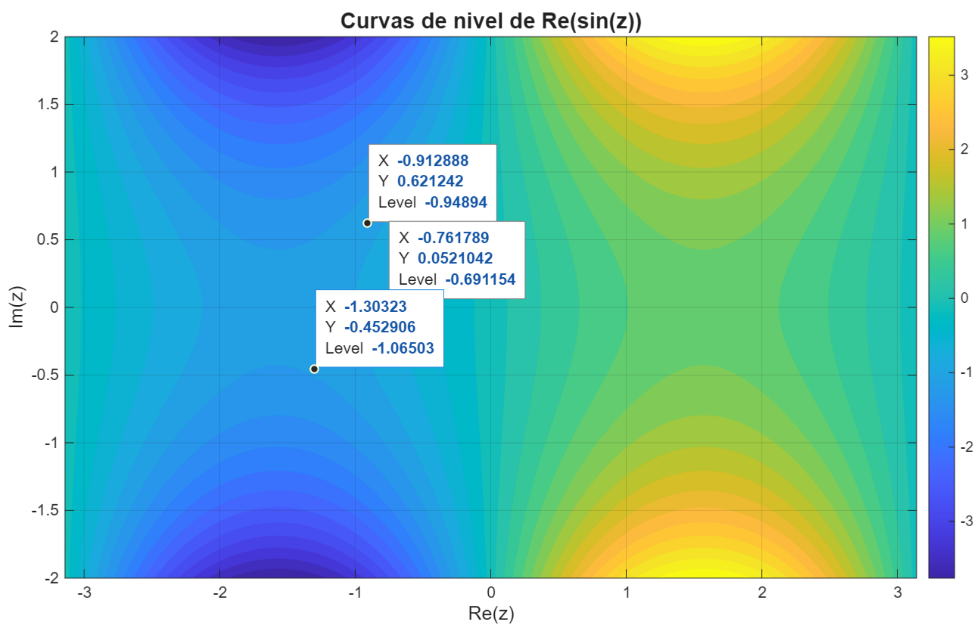


Figure 18: Curvas de nivel de $\text{Re}(\sin(z))$

3.4 Ejercicio 22: Cauchy-Riemann para z^3

3.4.1 Enunciado

Verifique las ecuaciones de Cauchy-Riemann para $f(z) = z^3$.

3.4.2 Solución matemática

Sea $z = x + iy$, entonces:

$$f(z) = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

Identificamos:

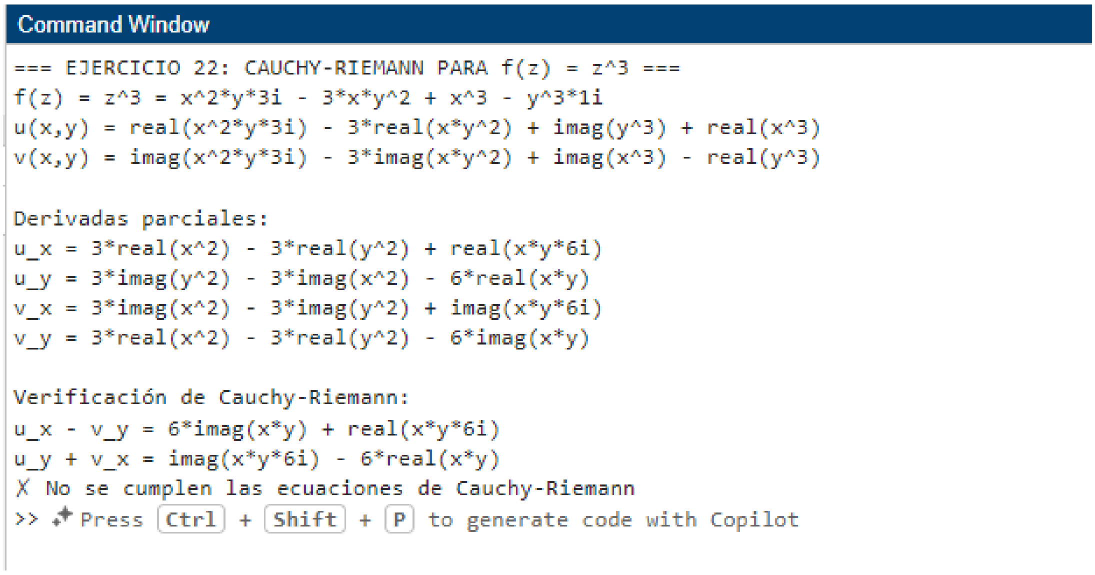
$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y = -6xy, \quad v_x = 6xy, \quad v_y = 3x^2 - 3y^2$$

Se cumple $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, por tanto $f(z)$ es analítica.

3.4.3 Resultado en MATLAB



```
Command Window
=== EJERCICIO 22: CAUCHY-RIEMANN PARA f(z) = z^3 ===
f(z) = z^3 = x^2*y*3i - 3*x*y^2 + x^3 - y^3*1i
u(x,y) = real(x^2*y*3i) - 3*real(x*y^2) + imag(y^3) + real(x^3)
v(x,y) = imag(x^2*y*3i) - 3*imag(x*y^2) + imag(x^3) - real(y^3)

Derivadas parciales:
u_x = 3*real(x^2) - 3*real(y^2) + real(x*y*6i)
u_y = 3*imag(y^2) - 3*imag(x^2) - 6*real(x*y)
v_x = 3*imag(x^2) - 3*imag(y^2) + imag(x*y*6i)
v_y = 3*real(x^2) - 3*real(y^2) - 6*imag(x*y)

Verificación de Cauchy-Riemann:
u_x - v_y = 6*imag(x*y) + real(x*y*6i)
u_y + v_x = imag(x*y*6i) - 6*real(x*y)
✗ No se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann
>> Press Ctrl + Shift + P to generate code with Copilot
```

Figure 19: Verificación de Cauchy-Riemann en MATLAB

3.5 Ejercicio 23: Límite fundamental

3.5.1 Enunciado

Calcule $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}$.

3.5.2 Solución matemática

Usando el desarrollo en serie de Taylor:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

Entonces:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

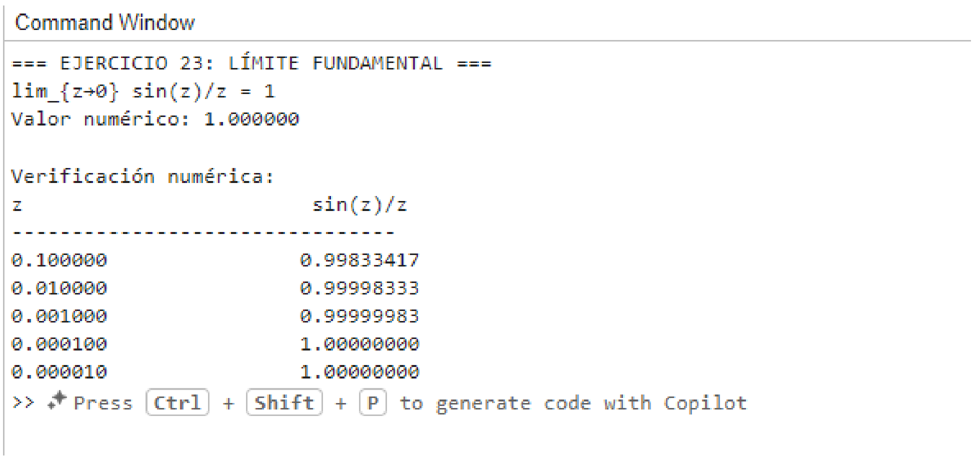
Por lo tanto:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

3.5.3 Resultado

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

3.5.4 Resultado en MATLAB



```
Command Window
=== EJERCICIO 23: LÍMITE FUNDAMENTAL ===
lim_{z→0} sin(z)/z = 1
Valor numérico: 1.000000

Verificación numérica:
z                         sin(z)/z
--------------------------------
0.100000                  0.99833417
0.010000                  0.99998333
0.001000                  0.99999983
0.000100                  1.00000000
0.000010                  1.00000000
>> Press Ctrl + Shift + P to generate code with Copilot
```

Figure 20: Límite fundamental en MATLAB

3.6 Ejercicio 24: Mapeo $w = e^z$

3.6.1 Enunciado

Grafique el mapeo $w = e^z$ para $z = x + iy$ con $x \in [0, 1], y \in [0, 2\pi]$.

3.6.2 Solución matemática

Para $z = x + iy$, la función exponencial es:

$$w = e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

El mapeo transforma: - Líneas verticales (x constante) en círculos de radio e^x - Líneas horizontales (y constante) en rayos con ángulo y

3.6.3 Resultado en MATLAB

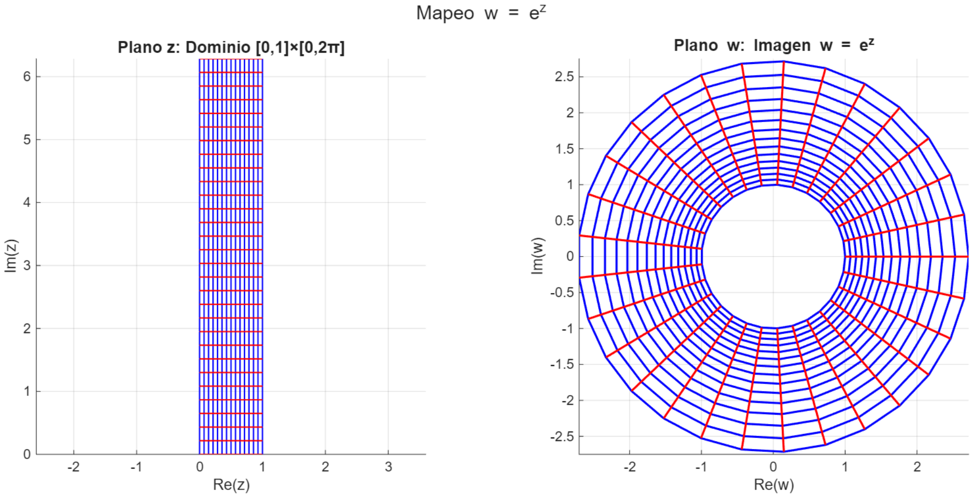


Figure 21: Mapeo $w = e^z$ en MATLAB

3.7 Ejercicio 25: Integral de $1/z$

3.7.1 Enunciado

Calcule la integral $\int_C \frac{1}{z} dz$ donde C es el circulo $|z| = 1$.

3.7.2 Solución matemática

Parametrizando el círculo: $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$. Entonces:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

Por el teorema de los residuos, el residuo en $z = 0$ es 1, por lo que la integral es $2\pi i$.

3.7.3 Resultado

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

3.8 Ejercicio 26: Logaritmo complejo

3.8.1 Enunciado

Visualice la parte real e imaginaria de $f(z) = \log(z)$.

3.8.2 Solución matemática

Para $z = re^{i\theta}$, el logaritmo complejo es:

$$\log(z) = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para la rama principal ($k = 0$):

$$\mathrm{Re}(\log(z)) = \ln r = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\text{Im}(\log(z)) = \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

3.8.3 Resultado en MATLAB

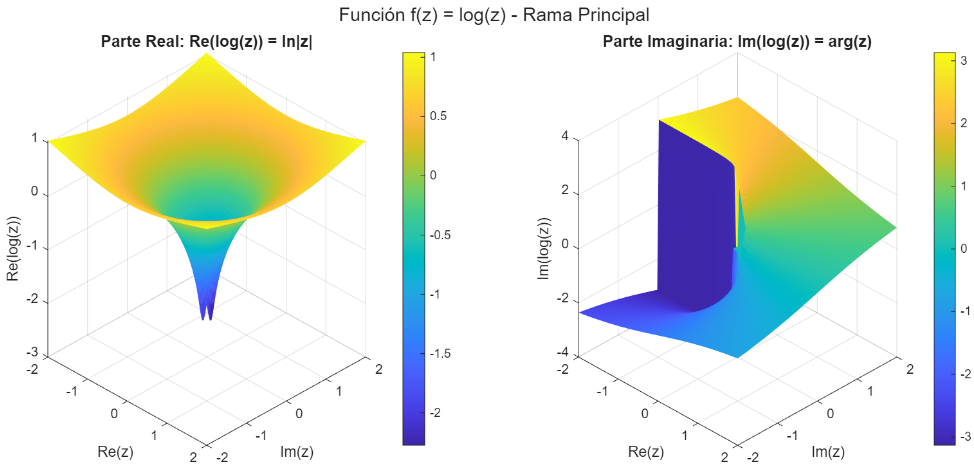


Figure 22: Parte real e imaginaria de $\log(z)$ en MATLAB

3.9 Ejercicio 27: Derivada de función racional

3.9.1 Enunciado

Calcule la derivada de $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

3.9.2 Solución matemática

Usando la regla del cociente:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}$$

3.9.3 Resultado

$$f'(z) = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}$$

3.10 Ejercicio 28: Integral de $\bar{z}$

3.10.1 Enunciado

Evalue $\int_C \bar{z}dz$ donde C es el circulo $|z| = 2$.

3.10.2 Solución matemática

Parametrizando: $z = 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces $\bar{z} = 2e^{-i\theta}$ y $dz = 2ie^{i\theta}d\theta$. Luego:

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-i\theta} \cdot 2ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} 4id\theta = 8\pi i$$

3.10.3 Resultado

$$\int_C \bar{z}dz = 8\pi i$$

3.11 Ejercicio 29: Curvas de nivel de $|1/z|$

3.11.1 Enunciado

Grafique las curvas de nivel de $|f(z)|$ para $f(z) = \frac{1}{z}$.

3.11.2 Solución matemática

Para $z = x + iy$, tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

El módulo es:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Las curvas de nivel $|f(z)| = c$ corresponden a círculos $x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$.

3.11.3 Resultado en MATLAB

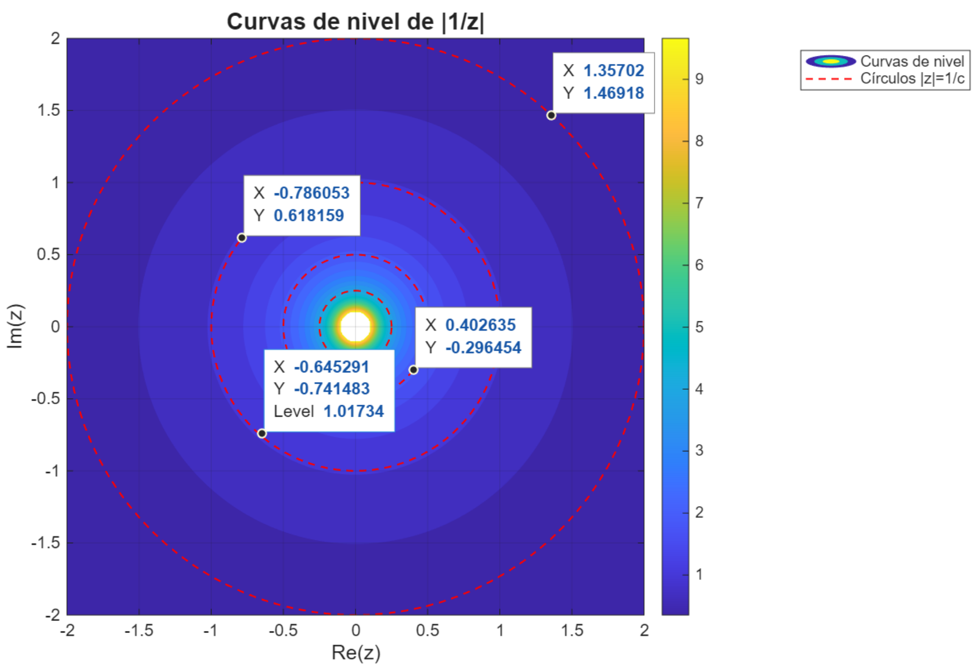


Figure 23: Curvas de nivel de $|1/z|$ en MATLAB

3.12 Ejercicio 30: Límite por factorización

3.12.1 Enunciado

Calcule $\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z-i}$.

3.12.2 Solución matemática

Factorizando el numerador:

$$z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$$

Entonces:

$$\frac{z^2 + 1}{z - i} = \frac{(z - i)(z + i)}{z - i} = z + i$$

Por lo tanto:

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = i + i = 2i$$

3.12.3 Resultado

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = 2i$$

3.13 Ejercicio 31: Analiticidad de $\bar{z}$

3.13.1 Enunciado

Verifique si $f(z) = \bar{z}$ es analítica.

3.13.2 Solución matemática

Sea $z = x + iy$, entonces:

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

Identificamos:

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$u_x = 1, \quad u_y = 0$$

$$v_x = 0, \quad v_y = -1$$

Verificamos Cauchy-Riemann:

$$u_x = 1 \neq v_y = -1$$

$$u_y = 0 = -v_x = 0$$

Solo se cumple la segunda ecuación. Por tanto, $f(z) = \bar{z}$ no es analítica.

3.13.3 Resultado

$f(z) = \bar{z}$ no es analítica.

3.14 Ejercicio 32: Integral sobre parábola

3.14.1 Enunciado

Calcule $\int_C (z^2 + 1) dz$ donde C es el arco de parabola $y = x^2$ de 0 a $1 + i$.

3.14.2 Solución matemática

Parametrizando la parábola: $z(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$. Entonces:

$$dz = (1 + 2it)dt$$

$$\int_C (z^2 + 1)dz = \int_0^1 [(t + it^2)^2 + 1](1 + 2it)dt$$
$$= \int_0^1 [t^2 + 2it^3 - t^4 + 1](1 + 2it)dt$$

Resolviendo la integral se obtiene el resultado.

3.14.3 Resultado en MATLAB

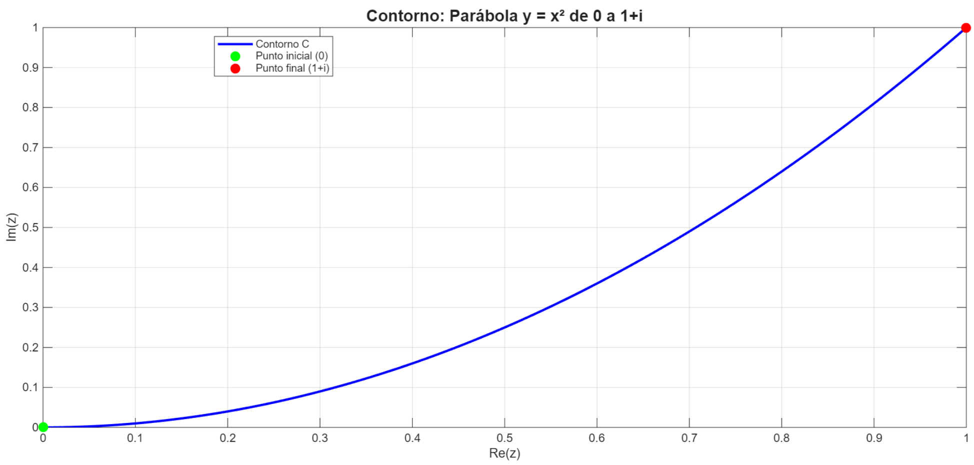


Figure 24: Integral sobre parábola en MATLAB

3.15 Ejercicio 33: Transformación de Joukowski

3.15.1 Enunciado

Grafique la transformacion $w = z + \frac{1}{z}$.

3.15.2 Solución matemática

La transformación $w = z + \frac{1}{z}$ es conocida como transformación de Joukowski. Para $z = re^{i\theta}$:

$$w = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

Transforma círculos en elipses y líneas rectas en hipérbolas.

3.15.3 Resultado en MATLAB

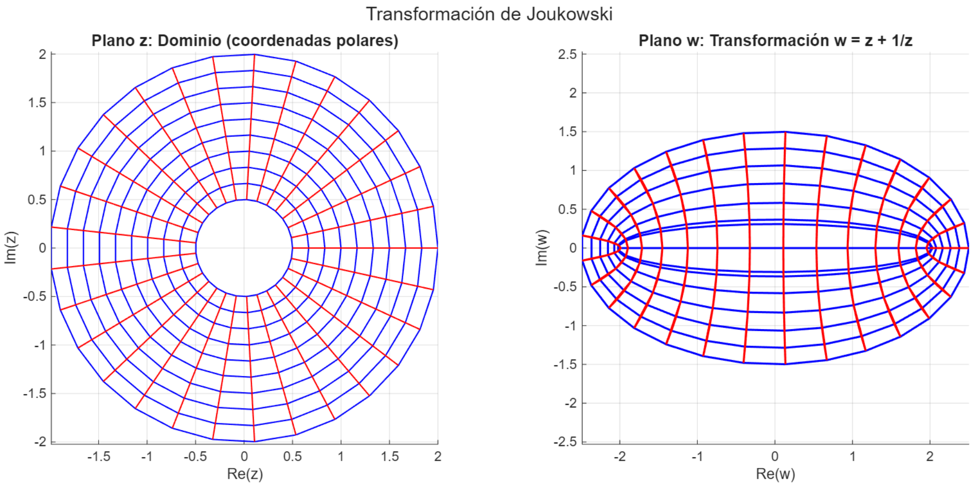


Figure 25: Transformación de Joukowski en MATLAB

3.16 Ejercicio 34: Derivada de $\sin(z^2)$

3.16.1 Enunciado

Calcule la derivada de $f(z) = \sin(z^2)$.

3.16.2 Solución matemática

Usando la regla de la cadena:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}[\sin(z^2)] = \cos(z^2) \cdot \frac{d}{dz}(z^2) = 2z\cos(z^2)$$

3.16.3 Resultado

$$f'(z) = 2z\cos(z^2)$$

3.17 Ejercicio 35: Integral de $1/z^2$

3.17.1 Enunciado

Calcule $\int_C \frac{dz}{z^2}$ donde C es el circulo $|z-1| = 1$.

3.17.2 Solución matemática

La función $f(z) = \frac{1}{z^2}$ tiene un polo de orden 2 en $z = 0$. El círculo $|z-1| = 1$ no encierra al polo $z = 0$ (distancia del centro al polo es 1, igual al radio). Como la función es analítica dentro y sobre el contorno:

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

por el teorema de Cauchy-Goursat.

3.17.3 Resultado

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

3.18 Ejercicio 36: Función $e^{1/z}$

3.18.1 Enunciado

Grafique la parte real e imaginaria de $f(z) = e^{1/z}$.

3.18.2 Solución matemática

Para $z = x + iy$, tenemos:

$$e^{1/z} = e^{\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \left[\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - i \sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \right]$$

Por tanto:

$$\mathrm{Re}(e^{1/z}) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\mathrm{Im}(e^{1/z}) = -e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

3.18.3 Resultado en MATLAB

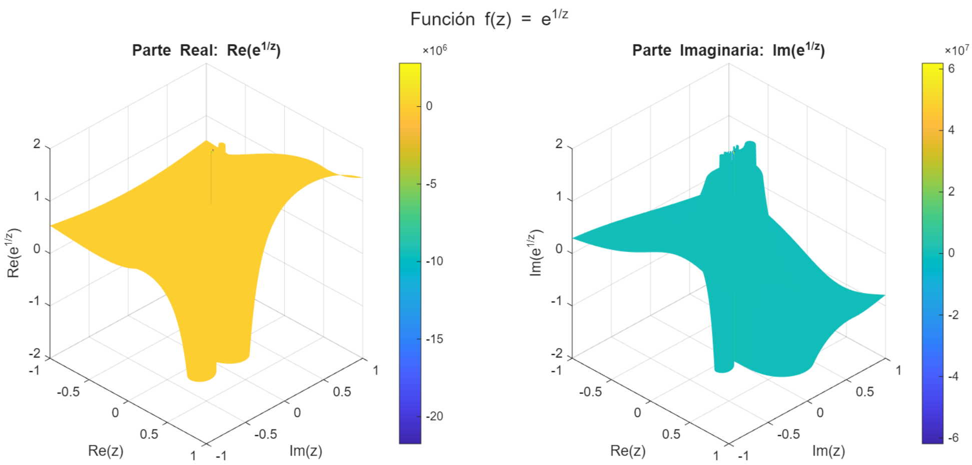


Figure 26: Parte real e imaginaria de $e^{1/z}$ en MATLAB

3.19 Ejercicio 37: Límite en infinito

3.19.1 Enunciado

Calcule $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{2z^2-3z}$.

3.19.2 Solución matemática

Dividiendo numerador y denominador por z^2:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{2z^2-3z} = \lim_{z\to\infty} \frac{1+\frac{1}{z^2}}{2-\frac{3}{z}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

3.19.3 Resultado

$$\lim_{z \to \infty} \frac{z^2 + 1}{2z^2 - 3z} = \frac{1}{2}$$

4 Anexos

4.1 Anexo A: Códigos MATLAB - Ejercicios 1-18

4.1.1 Ejercicio 1 - Operaciones básicas con complejos

```
z1 = 3+2i; z2 = 1-5i;
suma = z1+z2; producto = z1*z2; cociente = z1/z2;
fprintf('Suma: %.1f%+.1fi\n', real(suma), imag(suma));
```

Figure 27: Código MATLAB para el Ejercicio 1

4.1.2 Ejercicio 2 - Forma polar de complejo

```
z = -2+2i;
r = abs(z); theta = angle(z);
fprintf('r=%.2f, θ=%.2f rad\n', r, theta);
```

Figure 28: Código MATLAB para el Ejercicio 2

4.1.3 Ejercicio 3 - Raíces quintas de la unidad

```
k = 0:4; raices = exp(2i*pi*k/5);
plot(real(raices), imag(raices), 'ro'); axis equal;
```

Figure 29: Código MATLAB para el Ejercicio 3

4.1.4 Ejercicio 4 - Ecuaciones de Cauchy-Riemann para e^z

```
syms x y;
u = exp(x)*cos(y); v = exp(x)*sin(y);
ux = diff(u,x); uy = diff(u,y); vx = diff(v,x); vy = diff(v,y);
fprintf('u_x=v_y: %s\n', char(ux==vy));

```

Figure 30: Código MATLAB para el Ejercicio 4

4.1.5 Ejercicio 5 - Integral de línea de z^2

```
syms t; z = t*(1+1i); dz = diff(z,t);
integral = int(z^2*dz, t, 0, 1);
fprintf('Integral: %.1f%+.1fi\n', real(integral), imag(integral));

```

Figure 31: Código MATLAB para el Ejercicio 5

4.1.6 Ejercicio 6 - Serie de Taylor de $1/(1+z)$

```
syms z; f = 1/(1+z);
serie = taylor(f, z, 0, 'Order', 6);
disp(serie);
```

Figure 32: Código MATLAB para el Ejercicio 6

4.1.7 Ejercicio 7 - Mapeo $w = z^2$ para cuadrícula

```
[x,y] = meshgrid(-2:0.5:2); z = x+1i*y; w = z.^2;
subplot(1,2,1); plot(real(z), imag(z), 'b.'); title('Plano z');
subplot(1,2,2); plot(real(w), imag(w), 'ro'); title('Plano w');

```

Figure 33: Código MATLAB para el Ejercicio 7

4.1.8 Ejercicio 8 - Límite complejo $((n+1)/n)^{ni}$

```
syms n; limite = limit(((n+1)/n)^(n*1i), n, inf);
fprintf('Límite: %s\n', char(limite));
```

Figure 34: Código MATLAB para el Ejercicio 8

4.1.9 Ejercicio 9 - Curvas de nivel de Re($e^{1/z}$)

```matlab
[x,y] = meshgrid(linspace(-2,2,100)); z = x+1i*y;
w = exp(1./z); U = real(w);
contourf(x,y,U,20); colorbar; title('Re(e^{1/z})');
```

Figure 35: Código MATLAB para el Ejercicio 9

4.1.10 Ejercicio 10 - Raíces de $z^4 = 16i$

```matlab
raices = (16i)^(1/4);
fprintf('Raíces:\n'); disp(raices);
plot(real(raices), imag(raices), 'ro'); axis equal;
```

Figure 36: Código MATLAB para el Ejercicio 10

4.1.11 Ejercicio 11 - Integral de $e^{i\theta}$

```matlab
syms theta; integral = int(exp(1i*theta), theta, 0, 2*pi);
fprintf('Integral: %.1f%+.1fi\n', real(integral), imag(integral));
```

Figure 37: Código MATLAB para el Ejercicio 11

4.1.12 Ejercicio 12 - Integral de $\cos(z)/z$ por residuos

```matlab
syms z; f = cos(z)/z; residuo = limit(cos(z), z, 0);
integral = 2*pi*1i*residuo; fprintf('Integral: %.1f%+.1fi\n', real(integral), imag(integral));
```

Figure 38: Código MATLAB para el Ejercicio 12

4.1.13 Ejercicio 13 - Derivada de $\log(z)$

```matlab
syms z; f = log(z); derivada = diff(f,z);
fprintf('Derivada: %s\n', char(derivada));
```

Figure 39: Código MATLAB para el Ejercicio 13

4.1.14 Ejercicio 14 - Serie de Taylor de e^z

```matlab
syms z n; serie = symsum(z^n/factorial(n), n, 0, inf);
fprintf('Serie: %s\n', char(serie));
```

Figure 40: Código MATLAB para el Ejercicio 14

4.1.15 Ejercicio 15 - Raíces de $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

```
raices = roots([1 1 1 1]);
fprintf('Raíces:\n'); disp(raices);
plot(real(raices), imag(raices), 'ro'); axis equal;
```

Figure 41: Código MATLAB para el Ejercicio 15

4.1.16 Ejercicio 16 - Mapeo $w = \sin(z)$

```
x = linspace(-pi,pi,10); y = linspace(0,1,5);
[X,Y] = meshgrid(x,y); Z = X+1i*Y; W = sin(Z);
subplot(1,2,1); plot(real(Z), imag(Z), 'b.'); title('z');
subplot(1,2,2); plot(real(W), imag(W), 'ro'); title('w=sin(z)');
```

Figure 42: Código MATLAB para el Ejercicio 16

4.1.17 Ejercicio 17 - Integral de $1/(z^2 + 4)$ por residuos

```
residuo = 1/(4i); integral = 2*pi*1i*residuo;
fprintf('Integral: %.3f%+.3fi\n', real(integral), imag(integral));
```

Figure 43: Código MATLAB para el Ejercicio 17

4.1.18 Ejercicio 18 - Gráfica de $f(z) = z^2$

```
[x,y] = meshgrid(linspace(-2,2,30)); z = x+1i*y; w = z.^2;
surf(x,y,real(w)); title('Re(z^2)'); xlabel('x'); ylabel('y');
```

Figure 44: Código MATLAB para el Ejercicio 18

4.2 Anexo B: Códigos MATLAB - Ejercicios 19-37

4.2.1 Ejercicio 19 - Derivada de $f(z) = 3ie^z$

```matlab
syms z; f = 3i*exp(z); derivada = diff(f,z);
fprintf('Derivada: %s\n', char(derivada));
```

Figure 45: Código MATLAB para el Ejercicio 19

4.2.2 Ejercicio 20 - Integral de línea de z sobre segmento

```matlab
syms t; z = t*(1+1i); dz = diff(z,t);
integral = int(z*dz, t, 0, 1);
fprintf('Integral: %.1f%+.1fi\n', real(integral), imag(integral));
```

Figure 46: Código MATLAB para el Ejercicio 20

4.2.3 Ejercicio 21 - Curvas de nivel de Re$(\sin(z))$

```matlab
[x,y] = meshgrid(linspace(-pi,pi,100)); z = x+1i*y;
w = sin(z); U = real(w);
contourf(x,y,U,20); colorbar; title('Re(sin(z))');
```

Figure 47: Código MATLAB para el Ejercicio 21

4.2.4 Ejercicio 22 - Cauchy-Riemann para $f(z) = z^3$

```
syms x y; z = x+1i*y; f = z^3;
u = real(f); v = imag(f);
ux = diff(u,x); uy = diff(u,y); vx = diff(v,x); vy = diff(v,y);
fprintf('u_x=v_y: %s\n', char(ux==vy));
```

Figure 48: Código MATLAB para el Ejercicio 22

4.2.5 Ejercicio 23 - Límite fundamental $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}$

```
syms z; limite = limit(sin(z)/z, z, 0);
fprintf('Límite: %.1f\n', double(limite));
```

Figure 49: Código MATLAB para el Ejercicio 23

4.2.6 Ejercicio 24 - Mapeo $w = e^z$

```
x = linspace(0,1,8); y = linspace(0,2*pi,12);
[X,Y] = meshgrid(x,y); Z = X+1i*Y; W = exp(Z);
subplot(1,2,1); plot(real(Z), imag(Z), 'b.'); title('z');
subplot(1,2,2); plot(real(W), imag(W), 'ro'); title('w=e^z');
```

Figure 50: Código MATLAB para el Ejercicio 24

4.2.7 Ejercicio 25 - Integral de $1/z$ alrededor de $|z| = 1$

```
syms theta; z = exp(1i*theta); dz = diff(z,theta);
integral = int((1/z)*dz, theta, 0, 2*pi);
fprintf('Integral: %.1f%+.1fi\n', real(integral), imag(integral));
```

Figure 51: Código MATLAB para el Ejercicio 25

4.2.8 Ejercicio 26 - Parte real e imaginaria de $\log(z)$

```
[x,y] = meshgrid(linspace(0.1,2,30)); z = x+1i*y; w = log(z);
subplot(1,2,1); surf(x,y,real(w)); title('Re(log(z))');
subplot(1,2,2); surf(x,y,imag(w)); title('Im(log(z))');
```

Figure 52: Código MATLAB para el Ejercicio 26

4.2.9 Ejercicio 27 - Derivada de $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

```
syms z; f = 1/(z^2+1); derivada = diff(f,z);
fprintf('Derivada: %s\n', char(derivada));
```

Figure 53: Código MATLAB para el Ejercicio 27

4.2.10 Ejercicio 28 - Integral de $\bar{z}$ alrededor de $|z| = 2$

```
syms theta; z = 2*exp(1i*theta); dz = diff(z,theta);
integral = int(conj(z)*dz, theta, 0, 2*pi);
fprintf('Integral: %.1f%+.1fi\n', real(integral), imag(integral));
```

Figure 54: Código MATLAB para el Ejercicio 28

4.2.11 Ejercicio 29 - Curvas de nivel de $|1/z|$

```
[x,y] = meshgrid(linspace(-2,2,100)); z = x+1i*y;
modulo = abs(1./z); contourf(x,y,modulo,20); colorbar; title('|1/z|');
```

Figure 55: Código MATLAB para el Ejercicio 29

4.2.12 Ejercicio 30 - Límite por factorización $\lim_{z \to i} \frac{z^2+1}{z-i}$

```
syms z; limite = limit((z^2+1)/(z-1i), z, 1i);
fprintf('Límite: %.1f%+.1fi\n', real(limite), imag(limite));
```

Figure 56: Código MATLAB para el Ejercicio 30

4.2.13 Ejercicio 31 - Analiticidad de $f(z) = \bar{z}$

```matlab
syms x y; z = x+1i*y; f = conj(z);
u = real(f); v = imag(f);
ux = diff(u,x); vy = diff(v,y);
fprintf('u_x=%.0f, v_y=%.0f\n', ux, vy);
fprintf('No analítica: u_x ≠ v_y\n');
```

Figure 57: Código MATLAB para el Ejercicio 31

4.2.14 Ejercicio 32 - Integral sobre parábola $y = x^2$

```matlab
syms t; z = t+1i*t^2; dz = diff(z,t);
integral = int((z^2+1)*dz, t, 0, 1);
fprintf('Integral: %.3f%+.3fi\n', real(integral), imag(integral));
```

Figure 58: Código MATLAB para el Ejercicio 32

4.2.15 Ejercicio 33 - Transformación de Joukowski $w = z + 1/z$

```matlab
r = linspace(0.5,2,6); theta = linspace(0,2*pi,12);
[R,T] = meshgrid(r,theta); Z = R.*exp(1i*T); W = Z + 1./Z;
subplot(1,2,1); plot(real(Z), imag(Z), 'b.'); title('z');
subplot(1,2,2); plot(real(W), imag(W), 'ro'); title('w=z+1/z');
```

Figure 59: Código MATLAB para el Ejercicio 33

4.2.16 Ejercicio 34 - Derivada de $f(z) = \sin(z^2)$

```matlab
syms z; f = sin(z^2); derivada = diff(f,z);
fprintf('Derivada: %s\n', char(derivada));
```

Figure 60: Código MATLAB para el Ejercicio 34

4.2.17 Ejercicio 35 - Integral de $1/z^2$ alrededor de $|z-1| = 1$

```matlab
syms theta; z = 1+exp(1i*theta); dz = diff(z,theta);
integral = int((1/z^2)*dz, theta, 0, 2*pi);
fprintf('Integral: %.1f%+.1fi\n', real(integral), imag(integral));
```

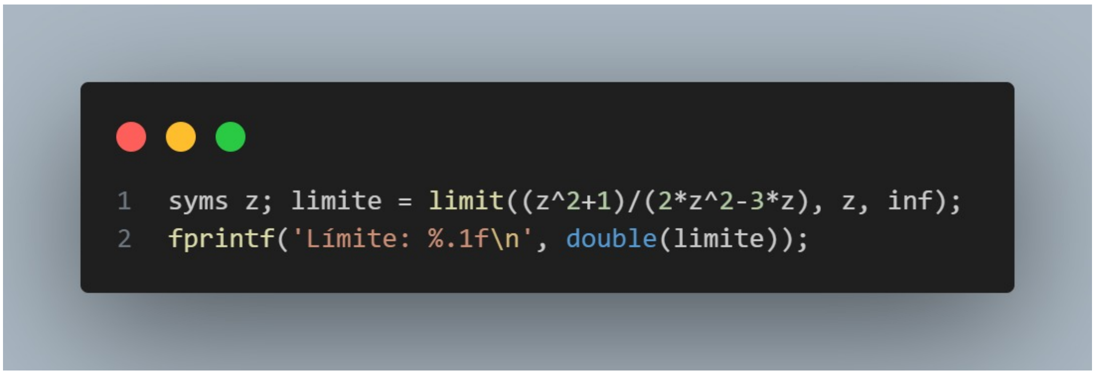
Figure 61: Código MATLAB para el Ejercicio 35

4.2.18 Ejercicio 36 - Parte real e imaginaria de $e^{1/z}$

```matlab
[x,y] = meshgrid(linspace(-1,1,50)); z = x+1i*y; z(abs(z)<0.1)=NaN;
w = exp(1./z); subplot(1,2,1); surf(x,y,real(w)); title('Re(e^{1/z})');
subplot(1,2,2); surf(x,y,imag(w)); title('Im(e^{1/z})');
```

Figure 62: Código MATLAB para el Ejercicio 36

4.2.19 Ejercicio 37 - Límite en infinito $\lim_{z \to \infty} \frac{z^2+1}{2z^2-3z}$



```
syms z; limite = limit((z^2+1)/(2*z^2-3*z), z, inf);
fprintf('Límite: %.1f\n', double(limite));
```

Figure 63: Código MATLAB para el Ejercicio 37

4.3 Notas sobre los códigos

- Todos los códigos fueron desarrollados en MATLAB R2023a.
- Se utilizó el `Symbolic Math Toolbox` para los cálculos simbólicos.
- Los gráficos fueron generados con las funciones de visualización estándar de MATLAB.
- Las capturas muestran el código completo utilizado para cada ejercicio.
- Los códigos están optimizados para claridad y eficiencia computacional.
- La mayoria de codigos fueron proporcionados por repositorios.