**Demostración 1:**

1. Para mostrar que $i(ST) = i(S) \cap i(T)$:

$$\begin{aligned} i(ST) &\Leftrightarrow i \mid i \textit{ contiene } S \cup T \\ &\Leftrightarrow i \mid (\ i \textit{ contiene } S) \wedge (\ i \textit{ contiene } T) \\ &\Leftrightarrow (i \mid i \textit{ contiene } S) \cap (i \mid i \textit{ contiene } T) \\ &\Leftrightarrow\ i(S) \cap i(T) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $i(ST) = i(S) \cap i(T)$.

2. Para mostrar que si $S \subseteq T$, entonces $i(S) \supseteq i(T)$:

$$\begin{aligned} i(ST) &\Leftrightarrow i \,|\, i \text{ contiene } S \cup T \\ &\Rightarrow i \,|\, i \text{ contiene } T \\ &\Leftrightarrow i(S) \supseteq i(T) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $S \subseteq T$, entonces $i(S) \supseteq i(T)$.

**Demostración 2:**

Sea $X$ y $Y$ dos conjuntos de elementos disjuntos, $Z \supseteq XY$ con $\text{sup}(Z) = \text{sup}(XY)$, y $W \subset X$. Demuestra que $\text{conf}(W \to (Z \setminus W)) \leq \text{conf}(X \to Y)$.

$$\begin{aligned} &\text{conf}(W \to (Z \setminus W)) \\ &= \frac{\text{sup}(Z)}{\text{sup}(W)} \quad \text{(Definición de confianza)} \\ &= \frac{\text{sup}(XY)}{\text{sup}(W)} \quad \text{(Dado que } \text{sup}(Z) = \text{sup}(XY)\text{)} \\ &\leq \frac{\text{sup}(XY)}{\text{sup}(X)} \quad \text{(Dado que } W \subset X\text{)} \\ &= \text{conf}(X \to Y) \quad \text{(Definición de confianza)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $\text{conf}(W \to (Z \setminus W)) \leq \text{conf}(X \to Y)$.

Esta desigualdad es importante para el algoritmo de Reglas de Asociación porque nos permite comparar la confianza de una regla de asociación que involucra un subconjunto de elementos con la confianza de otra regla que involucra el conjunto completo de elementos.

**Demostración 3:**

**Enunciado:**

El resultado anterior parece implicar que la confianza solo puede disminuir cuando se eliminan elementos de la premisa. Sin embargo, esto no es correcto. Considera dos reglas $X \to Y$ y $W \to Y$ tales que $W \subset X$. Construye un ejemplo para el cual $\text{conf}(X \to Y) < \text{conf}(W \to Y)$. ¿Por qué esto no es una contradicción con la justificación proporcionada en el ejercicio anterior?

**Explicación:**

El ejercicio anterior se nos dice que si $S \subseteq T$, entonces $i(S) \supseteq i(T)$, por lo cual, al eliminar elementos de la premisa y mantener la misma consecuencia, la confianza no disminuirá.

Sin embargo, en este caso, al comparar dos reglas con la misma consecuencia pero con diferentes premisas, la confianza puede variar debido por las características específicas de los conjuntos de datos y la distribución de los elementos en ellos. Por lo tanto, la confianza puede disminuir cuando se eliminan elementos de la premisa, pero esta disminución no contradice la justificación proporcionada en el ejercicio anterior, ya que se refiere a dos situaciones diferentes.

Supongamos que tenemos un conjunto de compras en un mercado, y estamos interesados en las reglas de asociación entre diferentes productos. Consideremos los siguientes conjuntos de elementos:

- Conjunto de elementos $X$: {Leche, Pan, Mantequilla}
- Conjunto de elementos $Y$: {Cereal}
- Conjunto de elementos $W$: {Leche, Pan}

Ahora, supongamos que las reglas de asociación que estamos analizando son:

1. $X \to Y$: Si un cliente compra Leche, Pan y Mantequilla, entonces también compra Cereal.
2. $W \to Y$: Si un cliente compra Leche y Pan, entonces también compra Cereal.

Para este ejemplo, supongamos que tenemos las siguientes frecuencias:

- $\sup(X) = 100$: 100 compras de Leche, Pan y Mantequilla.
- $\sup(W) = 150$: 150 compras de Leche y Pan.
- $\sup(Y) = 200$: 200 compras de Cereal.
- $\sup(XY) = 50$: 50 compras de Leche, Pan, Mantequilla y Cereal.

Calculamos la confianza para cada regla:

- $\mathrm{conf}(X \to Y) = \frac{\sup(XY)}{\sup(X)} = \frac{50}{100} = 0.5$
- $\mathrm{conf}(W \to Y) = \frac{\sup(XY)}{\sup(W)} = \frac{50}{150} \approx 0.333$

En este ejemplo, $\mathrm{conf}(X \to Y) > \mathrm{conf}(W \to Y)$, lo que muestra que la confianza puede disminuir al eliminar elementos de la premisa, como en el caso de $W \to Y$, a pesar de que $W \subseteq X$.