ÁLGEBRA LINEAL

Juan Diego Barrado Daganzo e Iker Muñoz Martínez[1]
1º de Carrera

20 de junio de 2022

[1] Últimas versiones en https://github.com/JuanDiegoBarrado/AlgebraLineal

ENTEROS

Es el conjunto no vacío dotado con dos operaciones de modo que:

$$Anillo \rightarrow (R, +, \cdot) \text{ donde } +, \cdot : R \times R \rightarrow R$$

Propiedades de conjuntos

Grupo

Un conjunto R, con una operación, que cumple las siguientes propiedades se llama GRUPO:

1. Asociativa respecto de la suma: $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$
2. Elemento Neutro de la suma: $\exists a : \forall r \in R \Rightarrow a + r = r + a = r$
3. Elemento Opuesto de la suma: $\forall a \in R : \exists - a \in R : a + (-a) = -a + a = 0$

Si además cumple la propiedad conmutativa se llama GRUPO CONMUTATIVO o GRUPO ABELIANO.

4. Conmutativa: $a + b = b + a : \forall a, b \in R$

Anillo

Se dice que un conjunto R forma un ANILLO cuando posee dos operaciones y cumple:

5. R forma un grupo abeliano
6. Asociativa respecto del producto: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
7. Distributiva: $a \cdot (b + c) = ab + ac$

Si además el anillo cumple la propiedad 9 de las posteriores, se dice que es un anillo unitario. Denotamos por R^x a las unidades del anillo unitario (elementos inversibles, es decir aquellos que multiplicados por otro elemento me dan el elemento neutro del producto).

Cuerpo

Se dice que un conjunto R, con dos operaciones, forma un CUERPO cuando cumple las siguientes condiciones:

8. R forma un anillo
9. Elemento neutro del producto: $\exists a \in R : \forall r \in R : r \cdot a = a \cdot r = r$
10. Elemento inverso: $\forall a \in R : a \neq$ elemento neutro $\exists a^{-1} \in R : a \cdot a^{-1} =$ elemento inverso

Por último, si se cumple la propiedad conmutativa del producto el cuerpo se denomina CUERPO CONMUTATIVO:

$$\forall a, b \in R : ab = ba$$

Algoritmo de la división de Euclides

Este es un algoritmo empleado en la búsqueda del m.c.d. de dos números cualquiera. Para ello definimos primero dos lemas:

Lema 1

Si a, b, c, r son números enteros no nulos tales que $a = cb + r$ se tiene que el $mcd(a, b) = mcd(b, r)$

Demostración:

$$\text{Sea } p = mcd(a, b) \text{ y } q = mcd(b, r)$$

Como $p|a$ y $p|b$:

$$a = bc + r \Leftrightarrow \lambda p = \mu pc + r \Leftrightarrow r = (\lambda - \mu c)p \Rightarrow p|r \Rightarrow p \leq q = mcd(b, r)$$

Del mismo modo como $q|b$ y $q|r$:

$$a = bc + r = \phi qc + \omega q = (\phi c + \omega)q \Rightarrow q|a \Rightarrow q \leq p = mcd(a, b)$$

Como $q \leq p$ y $p \leq q$: $p = q$

Lema 2 Si a y b son dos enteros no nulos tal que $b|a$ entonces $mcd(a, b) = |b|$

Habiendo dado ambos lemas ya se puede proceder a enunciar el algoritmo de Euclides:

$$\text{Sean } a, b \in \mathbb{Z} \wedge a, b \neq 0$$

El algoritmo de la división implica:

$$\exists c_0, r_1 : a = bc_0 + r_1$$

Si $r_1 = 0$, por el Lema 2 $mcd(a, b) = |b|$, en caso contrario:

$$r_1 \neq 0 \Rightarrow mcd(a, b) = mcd(b, r)$$

Tomando como nuevos $a = b$ y $b = r$ volvemos al inicio del algoritmo comenzando de nuevo el razonamiento hasta llegar al caso $r_i = 0$

Teorema de Bezout

$$mcd(a,b) = 1 \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} : 1 = ua + vb$$

Es decir que si a y b son primos, existen dos números que satisfacen la igualdad.

Corolario:

$$mcd(a,b) = d \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} : d = ua + vb$$

Teorema (Eucides)

Para comprender este teorema definimos el concepto de número primo y número irreducible:

$$p \text{ es primo si } p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$$

$$p \text{ es irreducible si } p = ab \Rightarrow a = \pm 1 \vee b = \pm 1$$

El teorema dice respecto de lo anterior que todo número que cumple las dos cumple al menos una de ellas y de ello se desprende que:

$$p \text{ primo} \Leftrightarrow p \text{ irreducible}$$

Demostración:

- $\Rightarrow$
  $$p = ab \Rightarrow p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$$
  Supongamos que $p \mid a$, entonces $a = p \cdot a'$ y sustituimos eso en el inicio:
  $$p = ab = p \cdot a' \cdot b \Rightarrow 1 = a'b \Rightarrow b = \pm 1 \text{ porque solo el producto de 1s da 1s en } \mathbb{Z}$$
  Habiendo supuesto que $p \mid b$ hubiese resultado en que $a = \pm 1$ de forma análoga.
- $\Leftarrow$ Suponemos que $p \mid ab$ pero $p \nmid a \wedge p \nmid b$:
  $$mcd(p,a) = \pm 1 \overset{Bezout}{\Rightarrow} 1 = \lambda p + \mu a \Rightarrow b = b\lambda p + b\mu a \Rightarrow b\lambda p + \mu \omega p = (\lambda b + \mu \omega)p \Rightarrow p \mid b \ \#$$

Teorema Fundamental de la Aritmética

Si $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0, \pm 1$ entonces:

$$\exists p_1, p_2, \cdots, p_t \text{ primos} : n = p_1 \cdot \cdots \cdot p_t$$

$$\text{Si } n = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_t \text{ primos} \Rightarrow s = t : p_i = q_i$$

Demostración:

- Comenzamos probando la primera proposición, la existencia:
  Sea $S = \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 0, \pm 1 \wedge n \neq p_1 \cdot \cdots \cdot p_t\}$, demostramos por reducción al absurdo que $S = \emptyset$
  $$S \neq 0 \Rightarrow \exists n \in S : n > 0 \wedge n \neq \pm 1 \text{ que sea mínimo}$$
  De esto se deduce que n no es primo porque si lo fuese sería el producto de un único primo, esto conlleva que no es irreducible por el teorema demostrado anteriormente por lo que $n = ab : ab \neq \pm 1$ puesto que se supone que $a, b > 0$ y $\neq 0$ y $a, b \geq 2$, esto implica que $0 < a$ y que $b < n$, lo que implica que $a, b \notin S$ por lo que $a = p_1 \cdot \cdots \cdot p_n$ y $b = q_1 \cdot \cdots \cdot q_s$, como $n = ab$, este se puede expresar como producto de primos $\#$.

- Probamos ahora la unicidad Por inducción sobre t:
  1. Probamos los casos base: $t = 1 \Rightarrow p_1 = q_1$
  2. Demostrados los casos $n \leq t-1$, demostramos que:

     $p_1{\cdot}p_2{\cdot}{\cdot}{\cdot}{\cdot}p_t = q_1{\cdot}q_2{\cdot}{\cdot}{\cdot}{\cdot}q_s \Rightarrow p_1 \mid q_1{\cdot}{\cdot}{\cdot}{\cdot}q_n \Rightarrow p_1 \mid q_i \Rightarrow q_1 = p_1{\cdot}k \Rightarrow k = 1$ por ser primos

     Sustituyendo en la expresión inicial:

     $$p_1 \cdot \cdots \cdot p_t = p_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_s \Rightarrow p_2 \cdot \cdots \cdot p_t = q_2 \cdot \cdots \cdot q_s$$

     En el primer lado de la igualdad hay $t-1$ factores y en el lado derecho $s-2$, con lo cual:

     $$r - 1 = s - 1 \overset{H.I:}{\Rightarrow} r = s$$

Teorema de la existencia de infinitos primos

Supongamos que existen una cantidad finita de primos:

$$S = \{p \in \mathbb{Z} : p \text{ primo}\} = \{p_1, p_2, \cdots, p_t : p_i \text{ primos}\}$$

Ahora escojamos el número $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_t + 1 \neq 0 \neq \pm 1$, por el Teorema Fundamental de la Aritmética: $n = q_1 \cdot \cdots \cdot q_s \Rightarrow q_i \mid n$ y como $q_i \in S$, entonces $q_i \mid p_i \Rightarrow q_i = p_i$, además como $q_i \mid n$ y $p_i \mid p_1 \cdot \cdots \cdot p_t$ entonces $q_i \mid n - p_1 \cdot \cdots \cdot p_t \Rightarrow q_1 = p_1 \mid 1$ #.

CONGRUENCIAS ENTRE ENTEROS

Sean $a, b \in \mathbb{Z}, m > 0$:

$$a \equiv b \text{ (mod m) si } m|a-b$$

También se escribe $a \equiv_m b$

Ej.:

$$24 \equiv_m 18 \Rightarrow m|24 - 18 = 6 \Rightarrow m = 2 \wedge m = 3$$

Proposición

Una congruencia entre enteros es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los números enteros.

Demostración:

- Reflexiva: $a \equiv_m a \Rightarrow m|0 \Rightarrow m = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{Z}^+$
- Simétrica: $a \equiv_m b \Rightarrow b \equiv_m a$ porque $a \equiv_m b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|-(a-b) \Rightarrow m|b-a \Rightarrow b \equiv_m a$
- Transitiva: $a \equiv_m b \wedge b \equiv_m c \Rightarrow a \equiv_m c$ porque $m|a-b \wedge m|b-c \Rightarrow m|a-b+b-c \Rightarrow m|a-c \Rightarrow a \equiv_m c$

Una relación de equivalencia permite establecer una partición del conjunto en el que se aplica y los subconjuntos que se forman tras la partición del conjunto inicial se llaman CLASES y son disjuntos entre sí ($\bigcap_{i \in I} A_i = 0$)

Por el algoritmo de la división:

$$a = bc + r \Rightarrow a - r = bc \Rightarrow c|a - r \Rightarrow a \equiv_c r$$

Particiones de conjuntos infinitos

En cierto modo lo que dice también la relación de congruencia es que a dividido entre el módulo m y b dividido entre el módulo m tienen como resultado el mismo resto.

De este modo, si realizamos una partición de los números enteros en 3 subgrupos obtendremos 3 grupos distintos gracias a las congruencias de módulo 3, los que tienen de resto 0, los de resto 1 y los de resto 2.

Para expresar estos subconjuntos generados a partir de las relaciones de congruencia expresamos:

$$[a]_m = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv_m a\}$$

Esto quiere decir, que $[a]_m$ (expresado como la clase de a módulo m) es el conjunto formado por todos los números b que son congruentes con a en ese módulo, o dicho de otra manera, como los elementos de su misma partición para ese módulo m.

De este hecho se desprenden las siguientes propiedades:

1. Hay m particiones distintas: $[0]_m, [1]_m, \cdots, [m-1]_m$y SON DISJUNTAS

   Esto es así puesto que las demás son las mismas pero con un representante "a" distinto.

2. $\forall b \in \mathbb{Z} : \exists a : 0 \leq a \leq m-1 : b \in [a]_m$

   Lo que indica que para cualquier número existe una partición

Demostración 1.:

Escogemos dos clases cuales quiera del total:

$$0 \leq a \leq b \leq m-1$$

Supongamos que hay un elemento en ambas

$$c \in [a]_m \wedge c \in [b]_m \Rightarrow c \equiv_m a \wedge c \equiv_m b \Rightarrow a \equiv_m b \Rightarrow a - b = \lambda m, \lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |a-b| = |\lambda| m \Rightarrow 0 \leq m \leq |a-b| = |\lambda| m$$

Pero esto entra en contradicción con la hipótesis inicial de $0 \leq a \leq b \leq m-1$, por lo que el razonamiento incorrecto es que un elemento puede estar en dos clases simultáneamente, luego son DISJUNTOS.

Demostración 2.: Por el algoritmo de la división:

$$\forall b \in \mathbb{Z} : \exists m, a \in \mathbb{Z} : b = qm + a : q, a \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq a < m$$

Luego:

$$b \equiv_m a \Rightarrow b \in [a]_m$$

Para denotar en cuantos subconjuntos hemos dividido el conjunto inicial se hace de la siguiente manera, por ejemplo:

$$\mathbb{Z}_m = \{[a]_m : a \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_m, [1]_m, \cdots, [m-1]_m\}$$

Lema

$$a \equiv_m a' \wedge b \equiv_m b' \Rightarrow \begin{cases} a + b \equiv_m a' + b' \\ ab \equiv_m a'b' \end{cases}$$

Demostración:

$a+b \equiv_m a'+b' \Rightarrow m|a+b-(a'+b') \Rightarrow m|a-a'+b-b' \Rightarrow$ Por las hipótesis del Lema $\lambda m+\mu m$ Q.E.D.

$ab \equiv_m a'b' \Rightarrow m|ab - a'b' \Rightarrow m|ab - ab' + ab' - a'b' \Rightarrow m|a(b-b') + (a-a')b' = a\lambda m + \mu m b' = m\varphi$ Q.E.D.

De los anteriores lemas se desprenden las dos siguientes propiedades[1]:

Propiedades

$$[a]_m \oplus [b]_m = [a+b]_m$$
$$[a]_m \otimes [b]_m = [a \cdot b]_m$$

En cierto modo, lo que expresan es que dos números de particiones distintas si se suman o se multiplican tienen como resultado un número en la partición de la que sea representante dicho resultado.

Teorema

De estas propiedades se deduce que $\mathbb{Z}_m$ es un anillo unitario conmutativo con $+, \cdot : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$

Demostración: Notacion: $\bar{a} = [a]_m$

$$(\bar{a} \oplus \bar{b}) \times \bar{c} = \overline{(a+b)} \otimes \bar{c} = \overline{(a+b) \cdot c} \overset{\mathbb{Z}\ prop.}{=} \overline{ac+bc} = \overline{ac} \oplus \overline{bc} = \bar{a} \otimes \bar{c} \oplus \bar{b} \otimes \bar{c}$$

Función de Euler $\varphi()$

La tripleta ordenada $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ forma un anillo conmutativo y unitario, además $(\mathbb{Z}_m, +)$ es un grupo conmutativo y SIEMPRE es cíclico, es decir, $\exists a \in \mathbb{Z} : [a]_m + [a]_m + \cdots = [b]_m$ siendo $b = 0, 1, 2, \cdots, m-1$, lo que quiere decir que cualquier clase de dicho conjunto puede ser generada a partir de la aplicación sucesiva de la operación del grupo al generador.

Por otro lado, $(\mathbb{Z}_m^x, \cdot)$ es un grupo conmutativo no necesariamente cíclico. Este conjunto contiene las clases que son unidades del conjunto, es decir, que esa clase, operada por el operador correspondiente con otra, tiene como resultado el elemento neutro de la operación (lo que quiere decir que la operación de cada elemento con el de la otra clase, tienen como resultado un elemento de la clase cuyo representante es el elemento neutro de la operación).

En nuestro caso, al ser la multiplicación la seleccionada, el elemento neutro será el 1 por lo que algunos ejemplos son:

- $\mathbb{Z}_3^x = \{[1]_3, [2]_3\}$ porque solo $[1]_3 \cdot [1]_3 = [1]_3$, $[2]_3 \cdot [2]_3 = [1]_3$
- $\mathbb{Z}_2^x = \{[1]_2\}$ porque solo $[1]_2 \cdot [1]_2 = [1]_2$
- $\mathbb{Z}_5^x = \{[1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$

En el fondo no se trata más que de la siguiente propiedad:

$$[a]_m \cdot [b]_m = [ab]_m \Rightarrow ab \equiv_m 1$$

Ej.: $[2]_9 \cdot [5]_9 = [10]_9 \Rightarrow 10 \equiv_9 1$

Esto ocurre así porque al multiplicar cada elemento de la 1ª partición por el elemento de la 2ª, los elementos resultantes de cada operación coinciden exactamente con los de la partición $[1]_m$ que siempre son congruentes módulo 1.

Para saber cuántos elementos posee el conjunto $\mathbb{Z}_m^x$, que no es más que saber el número de unidades inversibles, utilizamos la función de euler que cumple:

$$\varphi(m) = |\mathbb{Z}_m^x| \le m-1$$

[1] Nótese que el empleo de $\otimes$ y $\oplus$ es usado para remarcar que se tratan de operaciones distintas de + y $\cdot$

Siendo $|\mathbb{Z}_m^x|$ el cardinal del conjunto (número de elementos).

Teorema: $\mathbb{Z}_m^x$ es cíclico $\Leftrightarrow m = 2, 4, p^k, 2p^k$ donde $p > 2$ es un número primo

Proposición

Toda clase inversible de $\mathbb{Z}_m$ cumple que:

$$mcd(a, m) = 1 \Leftrightarrow [a]_m \in \mathbb{Z}_m^x$$

Demostración:

$$[a]_m \in \mathbb{Z}_m^x \Rightarrow [a]_m[b]_m = [1]_m \Rightarrow ab - 1 = \lambda m \Rightarrow 1 = ab - \lambda m \overset{Bezout}{\Rightarrow} mcd(a, m) = 1$$

Cálculo de la función de Euler

$$\varphi(m) = |\{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < m : mcd(a, m) = 1\}|$$

Aunque esa es la definición formal, en la práctica para el cálculo de las clases inversibles que posee un cierto m, factorizaremos en primos ese módulo y después aplicaremos las siguientes proposiciones.

$$p \text{ primo} \Rightarrow \varphi(p) = p - 1 \tag{1.1}$$

$$\text{primo} \Rightarrow \varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} \tag{1.2}$$

$$mcd(m_1, m_2) \Rightarrow \varphi(m_1 m_2) = \varphi(m_1) \cdot \varphi(m_2) \tag{1.3}$$

Demostración:

$$1.) \ p \text{ primo} \Rightarrow \mathbb{Z}_p^x \text{ es un cuerpo conmutativo} : \mathbb{Z}_p^x = \{0, 1, 2, \cdots, p - 1\}$$

3.) Sea $\phi : \mathbb{Z}_{m_1 m_2} \to \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2}$ a cada $\phi(\bar{a}) = (\tilde{a}, \hat{a})$, siendo $\bar{a} = [a]_{m_1 m_2}$, $\tilde{a} = [a]_{m_1}$ y $\hat{a} = [a]_{m_2}$:

- Comprobamos que está bien definida

$$\bar{a} = \bar{a'} \Rightarrow a - a' = \lambda m_1 m_2 \Rightarrow \begin{cases} a - a' = (\lambda m_2) m_1 & \Rightarrow \tilde{a} = \tilde{a'} \\ a - a' = (\lambda m_1) m_2 & \Rightarrow \hat{a} = \hat{a'} \end{cases} \Rightarrow \phi(\bar{a}) = \phi(\bar{a'})$$

- Ahora comprobamos que es biyectiva, para que conserve la suma y el producto
- Comenzamos por la inyectividad

$$\phi(\bar{a}) = \phi(\bar{b}) \Rightarrow (\tilde{a}, \hat{a}) = (\tilde{b}, \hat{b}) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{a} = \tilde{b} & \Rightarrow a - b = \lambda m_1 \\ \hat{a} = \hat{b} & \Rightarrow a - b = \mu m_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a - b = \dot{m_1}) \wedge (a - b = \dot{m_2}) \Rightarrow a - b = m_1 \dot{m_2} \Rightarrow a - b = \omega m_1 m_2 \Rightarrow \bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \text{ Inyectiva}$$

- Suprayectividad

$$(\tilde{a_1}, \tilde{a_2}) \overset{?}{=} \phi(\bar{a})$$

Se que

$$1 = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot 1 = a_1 \lambda_1 m_1 + a_1 \cdot \lambda_2 m_2 \equiv_{m_1} a_1 \lambda_2 m_2 \equiv a_1 \lambda_2 m_2 + a_2 \lambda_1 m_1 = a \\ a_2 \cdot 1 = a_2 \lambda_1 m_1 + a_2 \cdot \lambda_2 m_2 \equiv_{m_2} a_2 \lambda_1 m_1 \equiv a_2 \lambda_1 m_1 + a_1 \lambda_2 m_2 = a \end{cases} \Rightarrow \text{ sobre}$$

Con lo que se conserva tanto el producto como la suma al ser biyectiva:

$$\phi(\bar{a} + \bar{b}) = \phi(\bar{a}) + \phi(\bar{b})$$

$$\phi(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \phi(\bar{a}) \cdot \phi(\bar{b})$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE CONGRUENCIAS

Hallar la clase inversa de una dada

Primero de todo, según una de las proposiciones ya vistas:

$$mcd(a,m) = 1 \Leftrightarrow [a]_m \in \mathbb{Z}_m^x$$

Es decir, una clase sólo es inversible cuando ella y el módulo son coprimos.

Para hallar la clase inversible que en el fondo sería lo mismo que resolver esta ecuación: $[a]_m x = [1]_m$, seguimos los siguientes pasos que explicaremos mendiante un ejemplo:

$$[7]_{201} \cdot [x]_m = 1$$

1. Comprobar que es inversible

$$mcd(7, 201) = 1 \mid 1 \Rightarrow \exists [7]_m^{-1}$$

2. Realizar el algoritmo de la división de Euclides y escribir la expresión de Bezout.

$$\begin{aligned} 201 &= 7 \cdot 28 + 5 && (1.4) \\ 7 &= 5 \cdot 1 + 2 && (1.5) \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 && (1.6) \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 && (1.7) \end{aligned}$$

$$1 \overset{(3)}{=} 5 - 2 \cdot 2 \overset{(1)(2)}{=} 201 - 7 \cdot 28 - 7 + 5 \overset{(1)}{=} 201 - 7 \cdot 28 - 7 + 201 - 7 \cdot 28 \Rightarrow$$
$$1 = 3 \cdot 201 - 86 \cdot 7$$

3. Una vez dado, el número que multiplique a mi clase $[a]_m$ es la clase inversible que buscamos

$$1 = 3 \cdot 201 - 86 \cdot 7 \Rightarrow -86 \cdot 7 \equiv 1 \Rightarrow [x]_m = [-86]_m = [115]$$

Resolución de ecuaciones diofánticas

Las ecuaciones diofánticas son aquellas en las que los coeficientes y las incógnitas solo pueden tomar valores en el anillo de los enteros.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c : a_i, c \in \mathbb{Z}$$

Para que estas ecuaciones tengan solución, basta ver según lo anterior que $mcd(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid c$. Además las soluciones de dicho sistema vendrán dadas por:

$$ax + by = c \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + k \cdot \frac{b}{mcd(a,b)} \\ y = y_0 - k \cdot \frac{a}{mcd(a,b)} \end{cases}$$

Donde x_0, y_0 son soluciones del sistema y k es un parámetro que pertenece a los $\mathbb{Z}$. Las soluciones iniciales se sacan obteniendo por el teorema de bezout (sean coprimos o no) los números que multiplicados por los coeficientes tienen como resultado el número c. Ej.:

$$10x + 6y = 4$$

1. Comprobamos si tiene solución:

$$\begin{aligned} 10 &= 6 \cdot 1 + 4 && (1.8) \\ 6 &= 4 \cdot 1 + 2 && (1.9) \\ 4 &= 4 \cdot 2 + 0 && (1.10) \end{aligned}$$

Como $mcd(10, 6) = 2 \mid 4 \Rightarrow$ posee solución.

2. Hallamos x_0, y_0 en función del teorema de Bezout:

$$2 = u \cdot 10 + v \cdot 6 \Rightarrow$$

$$2 = 6 - 4 = 6 - 10 + 6 \Rightarrow 2 = 6 \cdot 2 - 1 \cdot 10 \Rightarrow x_0 = -1, y_0 = 2$$

3. El resto de soluciones vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot \frac{b}{mcd(a,b)} = -1 + 3k \\ y = y_0 + k \cdot \frac{a}{mcd(a,b)} = 2 + 5k \end{cases}$$

4. Ahora basta con dar valores a k para hallar el resto de soluciones:

$$\begin{cases} x = -1 + 3k = -7, -4, -1, 2, 5, \cdots \\ y = 2 + 5k = -8, -3, 2, 7, 12, \cdots \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones diofánticas

Cuando se poseen tantas incógnitas como ecuaciones, procedimiento es el mismo que para los sistemas de ecuaciones lineales, como la solución a ese sistema es única, basta con ver si los valores hallados al resolver la ecuación son enteros o no. El problema viene cuando encontramos que el número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones, puesto que existen infinitas soluciones y a nosotros solo nos interesan las enteras. En este caso tenemos que seguir los siguientes pasos.

1. Escalonar el sistema de ecuaciones diofánticas
2. Resolver como en el caso de ecuaciones diofánticas la ecuación de menos número de incógnitas
3. Sustituir en las sucesivas ecuaciones posteriores los valores de las incógnitas anteriores para dejar la ecuación en función de k

Ej.:

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 5 \\ 5x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

1. Escalono el sistema

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 5 \\ 5x + 3y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 5 \\ 29x + 13y = 19 \end{cases}$$

2. Resuelvo la 2ª ecuación:

$$\begin{cases} x = 2 - 13k \\ y = -3 + 29k \end{cases}$$

3. Sustituyo en la otra ecuación: $7x + 2y + 3z = 5 \Leftrightarrow 7(2 - 13k) + 2y(-3 + 29k) + 3z = 5 \Rightarrow z = -1 = 11k$

   Siendo estas las soluciones enteras para el sistema.

POLINOMIOS

Sea R un anillo conmutativo y unitario, un polinomio se define como una suma finita con coeficientes en R:

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_0, a_1, \cdots, a_n \in R, n \geq 0\}$$

Lo expresado arriba es una expresión sintética de lo que un polinomio representa puesto que se puede conocer a un polinomio solo por sus coeficientes:

$$R[x] = (a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, 0, 0, \cdots)$$

Para referirnos a los polinomios lo haremos como "f"[1].

$$\text{Ej.: } (x^2+1)|f \Rightarrow f = g(x^2+1) \text{ Pero como se confunde } f(x) = g(x)\cdot(x^2+1)$$

También podemos escribir los polinomios como:

$$\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

Grado de un polinomio

Llamamos grado de un polinomio al mayor subíndice no nulo de los coeficientes del polinomio.

$$\text{Ej.: } f = x^4 + 3x^3 + -x + 1 \Rightarrow gr(f) = 4$$

Operaciones con polinomios

Para poder operar estos objetos matemáticos es necesario primero definir las operaciones competentes que logren conseguir las propiedades más ventajosas para el manejo de los mismos (p. ej. que posea las características de un anillo o de un cuerpo).

Suma

La suma de polinomios se realiza coeficiente a coeficiente.

$$\sum a_ix^i + \sum b_ix^i = \sum (a_i + b_i)x^i$$

El grado del polinomio resultante es el del polinomio de mayor grado de los que conformaban la suma.

[1] en ocasiones podremos llamar f(x) cuando se confunda la notación con otros elementos.

Producto

El producto de polinomios posee una serie de peculiaridades.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$$

Definimos ahora, los coeficientes del polinomio producto siendo éste:

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i + b_j$$

Es decir el polinomio resultante sería de la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + (a_n b_m x^{n+m})$$

Definiciones

Proposición

Si R es un anillo conmutativo y unitario entonces los polinomios con coeficientes en R también lo son[2].

$$(R, +, \cdot) \text{ anillo conmutativo y unitario} \Rightarrow (R[x], +, \cdot) \text{ anillo conmutativo y unitario}$$

Esto otorga a los polinomios, las propiedades de anillo de los enteros.

Teorema

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo (como los $\mathbb{R}$, p. ej.)

$$f, g \in \mathbb{K}[x], g \neq 0 \Rightarrow \exists! q, r \in \mathbb{K}[x] : f = q \cdot g + r$$

Donde r es el polinomio nulo o $gr(r) < gr(g)$, es decir, se pueden dividir polinomios.

Demostración:

1. Unicidad
$$f = q \cdot g + r = q' \cdot g + r' \Rightarrow (q - q')q = r' - r$$
   Supongamos que $r \neq r'$:
$$r' - r \neq 0 \Rightarrow q' - q \neq 0 \Rightarrow gr(r' - r) = gr(q' - q) + gr(g)$$
   Por lo dicho en el teorema, $gr(r' - r) \leq gr(g)$, porque $r' - r < max\,(gr(r), gr(r'))$ y del mismo modo, $gr(q' - q) + gr(g) \geq gr(g)$ porque el $gr(q' - q) > 0$ por lo que $\# \Rightarrow r = r'$.
   Ahora para demostrar la unicidad de q, tomamos $r = r'$:
$$(q' - q)g = r' - r \Leftrightarrow (q - q')g = 0 \overset{g \neq 0}{\Rightarrow} q - q' = 0 \Rightarrow q' = q$$
2. Existencia
   Sea $gr(f)$ y $gr(g) = m$, $f = a_0 + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0$ y $g = b_0 + \cdots + b_m x^m, b_m \neq 0$

[2] La demostración se haría propiedad a propiedad de anillo, verificando que se cumple para un polinomio

Realizaremos la demostración por inducción sobre n, suponiendo que $n \geq m$ porque para $n < m \Rightarrow f = 0 \cdot g + f$:

$$\text{Hipótesis de inducción: } f = g \cdot (a_n b_m^{-1} x^{n-m}) + r$$

Caso base: $n = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow f = a_0 \neq 0 \wedge g = b_0 \neq 0 \Rightarrow a_0 = (a_0 b_0)^{-1} b_0 + 0 \Rightarrow f = q \cdot g + r$

Ahora demostramos el caso n suponiendo como cierto $l < n$:

$$gr(f - (a_n b_m^{-1} x^{n-m})g) < n \overset{H.I.}{\Rightarrow} f - (a_n b_m^{-1} x^{n-m})g = q \cdot g + r \Rightarrow f = (a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q)g + r \Rightarrow f = qg + r$$

Proposición

Sean $f, g \in \mathbb{K}[x]$, decimos que $f|g$ si $g = f \cdot h : h \in \mathbb{K}[x]$ y que $d = mcd(f, g)$ si $d|f, g$ siendo d el mayor de los divisores comunes a ambos.

Además, según un **teorema**, dados dos polinomios con coeficientes[3] en un cuerpo, $f, g \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow \exists mcd(f, g)$

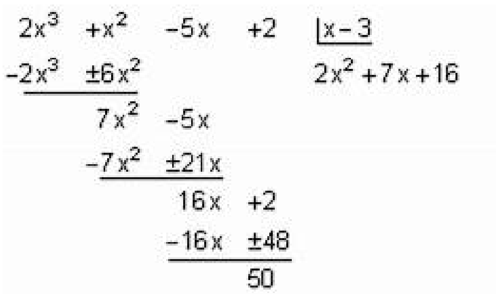
<u>Demostración</u>:

Sean $f = r_0$ y $g = r_1$, suponemos ambos no nulos $\Rightarrow r_0 = q_1 r_1 + r_2 \Rightarrow gr(r_2) < gr(r_1) \vee r_2 = 0$

$$mcd(r_0, r_1) = mcd(r_1, r_2) \Rightarrow d|r_0, r_1 \Leftrightarrow d|r_1, r_2$$

Si $r_2 = 0 \Rightarrow d = r_1$, pero si $r_2 \neq 0 \Rightarrow r_1 = q_2 \cdot r_2 + r_3$, lo que implicaría un nuevo paso del algoritmo pero esta vez con r_3. Esto se repite hasta llegar a $r_n = 0$ donde $r_{n-1} = mcd(r_0, r_1)$.

Ej.:



Teorema de Bezout en polinomios

Dados dos polinomios con coeficientes en un cuerpo conmutativo, su máximo común divisor se puede expresar como combinación lineal de ambos polinomios.

$$f, g \in \mathbb{K}[x], d = mcd(f, g) \Rightarrow d = uf + vg : u, v \in \mathbb{K}[x]$$

Cuando ocurre el caso particular de que $d = 1$ entonces los polinomios $u(x)$ y $v(x)$ deben ser constantes no nulas, ya que:

$$1 = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow gr(1) = gr(u) + gr(v) \Leftrightarrow 0 = gr(u) + gr(v) \Rightarrow gr(u) = gr(v) = 0 \Rightarrow u = k, v = z : k, z \in \mathbb{R}$$

Polinomios primos e irreducibles

Decimos que $f \in \mathbb{K}[x], gr(f) > 0$ es **irreducible** si $f = g \cdot h \Rightarrow gr(g) = 0 \vee gr(h) = 0$, es decir, $g, h \in \mathbb{K}[x]^x$

[3] El polinomio cuyo coeficiente de la x que determina su grado es 1 se llama mónico

Decimos que $f \in \mathbb{K}[x], gr(f) > 0$ es **primo** si $f|g \cdot h \Rightarrow f|g \vee f|h$, es decir, $g, h \in \mathbb{K}[x]^x$

De ambas definiciones se desprende la siguiente proposición:

$$f \text{ primo} \Leftrightarrow f \text{ irreducible}$$

<u>Demostración</u>:

Supongamos que f es irreducible, que $f \mid gh$ y $f \nmid g$

$$mcd(f,g) = 1 \overset{Bezout}{\Rightarrow} 1 = uf + vg \Leftrightarrow h = uhf + vgh \overset{gh=f\cdot q_1}{\Leftrightarrow} h = (uh + vq_1)f \Rightarrow f \mid h \Rightarrow p \text{ es primo}$$

Supongamos ahora que f es primo, con lo cual:

$$f \text{ primo} \Rightarrow f \mid g \vee f \mid h$$

$$f = g \cdot h \Rightarrow 1 = q_1(x) \cdot h(x) \Rightarrow gr(1) = gr(q_1) + gr(h) \Rightarrow 0 = gr(q_1) + gr(h) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow gr(q_1) = gr(h) = 0 \Rightarrow \text{ son constantes} \Rightarrow f \text{ primo}$$

Teorema

Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ y f no constante:

1. $\exists f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathbb{K}[x]$ irreducibles : $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n$
2. Si $f = g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_s \in \mathbb{K}[x]$ también irreducible $\Rightarrow r = s \wedge f_i = a_i \cdot g_i : \forall i = 1, \cdots, r$ donde $a_i \in \mathbb{K}[x]^x$

<u>Demostración</u>:

1. Demostramos la existencia:
   Sea $f(x)$ un polinomio cualquiera perteneciente a $K[x]$:
   $$\begin{cases} \text{Si } f(x) \text{ primo} & \Rightarrow \text{Q.E.D.} \\ \text{Si } f(x) \text{ no primo} & \Rightarrow \exists g(x) : g(x) \mid f(x) : gr(g) \text{ minimo} \Rightarrow f(x) = g_1(x) \cdot f_1(x) \end{cases}$$
   Si aplicamos sucesivas veces el caso de los primos, llegará un momento en el que:
   $$f = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \cdots \cdot g_n \cdot f_n$$
   Donde $f_n(x)$ será primo y en consecuencia, f será descomposición de polinomios primos.
2. Demostramos la unicidad:
   Por inducción sobre r:
   a) Probamos los casos base: $r = 1 \Rightarrow f_1 = g_1$
   b) Demostrados los casos $n \leq r - 1$, demostramos que:
   $$f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_r = g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_s \Rightarrow f_1 \mid g_1 \cdot \cdots \cdot g_n \Rightarrow f_1 \mid g_i \Rightarrow g_1 = f_1 \cdot h \Rightarrow h = a_0 = cte.$$
   Sustituyendo en la expresión inicial:
   $$f_1 \cdot \cdots \cdot f_r = f_1 \cdot a_0 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n \Rightarrow f_2 \cdot \cdots \cdot f_r = a_0 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_s$$
   En el primer lado de la igualdad hay $r - 1$ factores y en el lado derecho $s - 2$, con lo cual:
   $$r - 1 = s - 1 \overset{H.I.}{\Rightarrow} r = s$$

Raíces de un polinomio

Son los valores que hacen 0 el polinomio, pero obsevemos con detenimiento un concepto que tal vez no tengamos en la cabeza de Bachillerato, veamos con detenimiento el siguiente polinomio:

$$f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$$

Es curioso observar que a priori diríamos que este polinomio no tiene raíces en los $\mathbb{R}$, pero cojamos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora el valor del polinomio es:

$$f(A) = A^2 + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Luego de aquí se desprende que el polinomio tiene raíces en el anillo de las matrices cuadradas, a pesar de que habíamos dicho que no tenía raíces reales.

Supongamos que $f \in \mathbb{K}[x]$ y que $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$, siendo ambos cuerpos conmutativos (como $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, p. ej.), si uno es el subcuerpo del otro, es decir, poseen las mismas operaciones y uno está contenido en el otro, entonces considerando un $\alpha \in \mathbb{F}$ se define:

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n$$

En consecuencia, $f(\alpha) \in \mathbb{F}$ y es ráiz del polinomio f si $f(\alpha) = 0$

Proposición

α es raíz de $f \Leftrightarrow f(\alpha) = (x - \alpha) \cdot g(x)$ para algún $g \in \mathbb{F}[x]$, es decir, las raíces de un polinomio generan factores lineales de un polinomio.

Demostración:

1. $\Rightarrow$:
   Tomamos $f \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow f \in \mathbb{F}[x]$ y como $\alpha \in \mathbb{F}[x] \Rightarrow x - \alpha \in \mathbb{F}[x]$, entonces tenemos que: $f(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x) : q, r \in \mathbb{F}[x]$.
   Llegados a este punto, $r(x) = 0 \vee gr(r) < gr(x - \alpha)$ siendo $r(x) \neq 0$. Entonces $r(x) = a_0 \neq 0$ porque $gr(x - \alpha) = 1$, pero como α es raíz:
   $$f(\alpha) = 0 = q(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + r(\alpha) \Leftrightarrow 0 = q(\alpha) \cdot 0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow r(x) = 0$$
2. $\Leftarrow$:
   $$f(x) = (x - \alpha)g(x) \Rightarrow f(\alpha) = (\alpha - \alpha)g(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) = 0$$

Propiedades

Sean $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ dos polinomios, el producto de polinomios evaluados es equivalente la evaluación del producto y de la suma de polinomios.

$$f(\alpha) + g(\alpha) = (f + g)(\alpha)$$

$$f(\alpha) \cdot g(\alpha) = (f \cdot g)(\alpha)$$

Demostración[4]:

[4] La demostración de la suma es trivial

- $f(\alpha)+g(\alpha)$:

  $$(a_0+a_i\alpha+\cdots+a_n\alpha^n)(b_0+b_1\alpha+\cdots+b_m\alpha^m)=\sum_{0\leq i\leq n}(a_i\alpha^i)(b_j\alpha^j)=\sum_{0\leq i\leq n\wedge 0\leq j\leq m}(a_ib_j\alpha^{i+j})$$

- $(f\cdot g)(\alpha)$:

  $$\left(\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k\right)(\alpha)=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)\alpha^k$$

  Y se puede observar que:

  $$\sum_{0\leq i\leq n\wedge 0\leq j\leq m}(a_ib_j\alpha^{i+j})=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)\alpha^k$$

Teorema

Sea $f\in\mathbb{K}[x]:\mathbb{K}\subset\mathbb{F}\wedge f\neq 0$, el número de raíces del polinomio es menor o igual que el grado del polinomio:

$$|\{\alpha\in\mathbb{F}:f(\alpha)=0\}|\leq gr(f)$$

Demostración: Razonamos por inducción sobre el $gr(f)=n$:

$$n=0\rightarrow f=a_0\neq 0\Rightarrow\{\alpha\in\mathbb{F}:f(\alpha)=0\}=\emptyset$$

Tomando como cierta la proposición para los valores inferiores a n, demostramos los correspondientes a n:

$$gr(f)=n\Rightarrow\begin{cases}\nexists\alpha\in\mathbb{F}:f(\alpha)=0 & \Rightarrow f(\alpha)\neq 0:\forall\in\mathbb{F}\Rightarrow 0\leq n\\ \exists\alpha\in\mathbb{F}:f(\alpha)=0 & \Rightarrow\quad(*)\end{cases}$$

$$(*)\rightarrow f(\alpha=0)\Rightarrow f(x)=(x-\alpha)\cdot g(x):g\in\mathbb{F}[x]\wedge gr(g)=n-1\Rightarrow f(\beta)=0\Leftrightarrow(\beta-\alpha)\cdot g(\beta)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\beta-\alpha=0\vee g(\beta)=0\Leftrightarrow|\{\beta\in\mathbb{F}:f(\beta)=0\}|=1+|\{\beta\in\mathbb{F}:g(\beta)=0\}|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|\{\beta\in\mathbb{F}:f(\beta)=0\}|\leq 1+gr(g)=1+n-1$$

Teorema Fundamental del Álgebra

Si $f\in\mathbb{C}[x]$ y es no constante, entonces $\exists\alpha\in\mathbb{C}:f(\alpha)=0$.

La demostración de dicho Teorema excede con creces la capacidad de este curso así que se pospondrá para más adelante, sin embargo, si podemos demostrar un Corolario:

Corolario

Si $f\in\mathbb{R}[x]\Rightarrow\exists\alpha\in\mathbb{C}:f\in\mathbb{C}[x]\Rightarrow f(\alpha)=0$

Demostración:

Supongamos que $f\in\mathbb{C}[x]:f=\sum_{i=0}^n a_ix^i:a_i\in\mathbb{C}$, tomamos su conjugado como $\bar{f}=\sum_{j=0}^n\bar{a}_jx^j:a_j\in\mathbb{C}$ y, por último, definimos el polinomio $h=f\cdot\bar{f}=\sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k}(a_i\bar{a}_j)\right)x^k$:

$$\overline{\sum_{i+j=k}(a_i\bar{a}_j)}=\sum_{i+j=k}(\bar{a}_ia_j)\Rightarrow h\in\mathbb{R}[x]\Rightarrow\alpha\in\mathbb{C}:0=h(\alpha)=f(\alpha)\cdot\bar{f}(\alpha)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f(\alpha)=0\\ f(\alpha)\neq 0\Rightarrow\bar{f}(\alpha)=0\Rightarrow\overline{\bar{f}(\alpha)}=0\Rightarrow 0=\overline{\sum_{i=0}^n(\bar{a}_i\alpha^i)}=\sum_{i=0}^n(a_i\bar{\alpha}^i)=f(\bar{\alpha})=0\end{cases}$$

Teorema de la irreducibilidad de un polinomio

Un polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ es irreducible cuando $gr(f) = 1$, puesto que ya hemos comprobado que para $gr(f) > 1$, f posee tantas raíces como el valor del grado del polinomio y cada raíz descompone el polinomio en un factor lineal.

Corolario

$$f \in \mathbb{C}[x] : gr(f) = n \geq 1 \Rightarrow \exists! \alpha_1, \cdots, \alpha_n, a \in \mathbb{C} : a \neq 0 : f(x) = a(x - \alpha_1) \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_n)$$

Polinomios irreducibles en $\mathbb{R}$

Para un $f \in \mathbb{R}[x]$, es irreducible si y solo si $gr(f) = 1$ $gr(f) = 2$ y su discriminante es negativo. Demostración:

- "$\Rightarrow$"
$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \notin \mathbb{R} : \forall \Delta < 0$$
- "$\Leftarrow$": $f \in \mathbb{R}[x]$ irreducible : $gr(f) > 1 \Rightarrow$
$$\exists \alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})h(x) : h(x) \in \mathbb{C}[x]$$
Por lo tanto como:
$$f(x) = (x^2 - 2Real(\alpha)x + |\alpha|^2)h(x)$$
Descompone en división exacta con $h(x)$ si este es no constante, pero como ambas raíces pertenecen a los complejos, cuando $h(x)$ es constante, es irreducible en $\mathbb{R}$ con grado 2.

De estos hechos se deduce que TODO polinomio impar SIEMPRE es irreducible, porque pueden ser producto de uno de grado 1 y otro de grado 2 o 3 de grado 1.

Polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}$

En este conjunto podemos encontrar polinomios irreducibles de cualquier grado, pero existe un teorema conocido como **criterio de Einsenstein** que dice:

$$\exists p \text{ primo} \in \mathbb{Z} : p \mid a_0, p \mid a_1, \cdots, p \mid a_{n-1} \wedge p \nmid a_n \wedge p^2 \nmid a_0 \Rightarrow f \text{ es irreducible}$$

Para calcular dichas raíces podemos buscar un $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} : r \mid a_0 \wedge s \mid a_n$. Además se puede añadir como criterio[5] $r - s \mid p(1)$ y $r + s \mid p(-1)$

Demostración: Aplicamos que es una raíz:

$$0 = a_0 + a_1 \frac{r}{s} + \cdots + a_n \frac{r^n}{s^n} \overset{\cdot s^n}{\Rightarrow} 0 = a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} s + a_n r^n \overset{1.)2.)}{\Rightarrow}$$

$$1.) \rightarrow -a_0 s^n = (a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n r^{n-1})r \Rightarrow r \mid -a_0 s^n \Rightarrow r \mid a_0$$

$$2.) \rightarrow -a_n r^n = (a_0 s^n + \cdots + a_n r^n)s \Rightarrow s \mid -a_n r^n \Rightarrow s \mid a_n$$

[5] La demostración de este añadido se hizo en un ejercicio que no figura en el documento

Polinomios irreducibles en $\mathbb{Z}_p$

Siempre que tengamos un cuerpo conmutativo hay polinomios irreducibles de cualquier grado.

Ej.: $f \in \mathbb{Z}_2[x]$

- Grado 1: $x+1$, x irreducibles
- Grado 2: x^2, x^2+x, x^2+1 no son irreducibles pero x^2+x+1 sí
- ...

Teorema raíces en una extensión de K

Existe un teorema que dice que si extendemos K a un cuerpo superior que lo contenga, entonces podemos encontrar ahí también las raíces de un polinomio de $K[x]$, pero antes vamos a ver determinados ejemplos.

Ejemplo 1

Si definimos la matriz $C \in Mat_n(\mathbb{K}$ y definimos $f(C)$ como la evaluación de f en C, siendo:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{Z}_2}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^3 + x + 1 \rightarrow \text{irreducible en } \mathbb{Z}_2$$

Ahora podemos decir que $f(C) = C^3 + C + I = 0$, extendiendo un polinomio irreducible en K, a un anillo que contiene a K y donde no es irreducible.

Para formalizar el cuerpo al que debe pertenecer esta raíz, lo definimos de la siguiente manera:

$$F = \{g(C) : g \in \mathbb{Z}_2[x]\} \subseteq Mat_3(\mathbb{Z}_2)$$

Las matrices que conforman este nuevo cuerpo son: $\{a_0I, a_0I + a_1C, a_0I + a_1C + a_2C^2, \cdots\}$. Para comprobar que es un cuerpo definimos la suma y el producto de los elementos de dicho conjunto:

$$g(C) + h(C) = (g+h)(C) \in F$$

$$g(C) \cdot h(C) = (g \cdot h)(C) \in F$$

Con esta definición podemos decir que $(F, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo con 8 elementos, y por tanto $\mathbb{Z}_2 \subset F$.

<u>Demostración</u>:

$$+ : \text{asociativa, elemento neutro: } 0 = 0(C) \in F, \text{ elemento opuesto: } -g(C) = (-g(C) \in F \text{ y es conmutativa}$$

$$\cdot : \text{asociativa, distributiva, elemento neutro: } 1(C) = I \in F, \text{ conmutativa}$$

[6] Con cual tras demostrar todas estas propiedades, podemos decir con seguridad que es un anillo conmutativo y unitario. Para ver que es un cuerpo:

$$g(C) \neq 0 \in F \Rightarrow g \neq 0 \wedge x^3 + x + 1 \nmid g \text{ porque si lo hiciese } g(C) = (C^3 + C + I)h(C) = 0 \ \#$$

Además $mcd(x^3+x+1, g) = 1 \Rightarrow 1 = k(x)(x^3+x+1) + h(x)g(x) \Rightarrow I = k(C)\cdot 0 + h(C)g(C) = h(C)g(C)$

$$\Rightarrow h(C) = g^{-1}(C)$$

[6] $g(C) \cdot h(C) = (g \cdot h)(C) = (h \cdot g)(C) = h(C) \cdot g(C)$

Por último[7], $Z_2 \simeq \{a_0 I : a_0 \in \mathbb{Z}_2\} \subset F$

Por qué tiene 8 elementos?:

$$g(C) = [q(x)(x^3 + x + 1) + r(x)](C) = q(C)\ \overbrace{(C^3 + C + I)}^{=0} + r(C) = r(C)$$

Por lo que:

$$C \subset F = \{g(C) : g \in \mathbb{Z}_2[x]\} = \{a_0 I + a_1 C + a_2 C^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2\}$$

Teorema de extension de K cuando f es irreducible

De este ejemplo nace el caso general del teorema que dice: "Para cualquier polinomio puedes encontrar raíces en un cuerpo que sea extensión del cuerpo en el que está definido".

Sean:

$$f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : n \geq 1$$

$$F = \{g(C) : g \in K[x]\}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(C) = 0 : C \in F$
2. $g \neq 0 \wedge gr(g) < gr(f) : g \in K[x] \Rightarrow g(C) \neq 0$
3. $(F, +, \cdot)$ es un **anillo conmutativo y unitario**, y si f es irreducible entonces es un **cuerpo conmutativo**
4. $K \simeq \{a \cdot I : a \in K\} \subset F$
5. $F = \{g(C) : g \in K[x], gr(g) < n\} = \{a_0 I + a_1 C + \cdots + a_n C^{n-1} : a_0, \cdots, a_{n-1} \in K\}$

Demostración:

1. Suponemos que :

   $$C = x(C) : x \in K[x] \Rightarrow C \in F$$

   Llegados a este punto si llamamos $A = f(C)$ tratamos de demostrar que $A = 0$:

   $$A = 0 \Rightarrow A \cdot I = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot E_1 = 0 \\ A \cdot E_2 = 0 \\ \vdots \\ A \cdot E_n = 0 \end{cases}$$

   Donde E_i denota a cada una de las columnas de la matriz identidad. De este modo deducimos que:

   $A \cdot E_1 = (a_0 + a_1 C + \cdots + a_{n-1}C^{n-1} + a_n C^n)E_1 = a_0 E_1 + a_1 C E_1 + \cdots + a_{n-1}C^{n-1}E_1 + a_n C^n E_1 =$

[7] Decir que un cuerpo es isomorfo a otro "$\simeq$", es decir que existe una biyección entre ambos conjuntos que conserva la suma y el producto

$$\overset{CE_i=E_{i+1}}{=} a_0E_1 + a_1E_2 + \cdots + a_{n-1}E_n + (-a_0E_1 - a_1E_2 - \cdots - a_{n-1}E_n) = 0$$

Para demostrar el resto de casos, basta con observar que:

$$A \cdot E_2 = A \cdot C \cdot E_1 = (a_0I + a_1C + \cdots + a_{n-1}C^{n-1} + C^n)CE_1 \overset{C \cdot C^i}{=} C \cdot A \cdot E_1 = C \cdot 0 = 0$$

2. Como $g \neq 0 \Rightarrow g = b_0 + \cdots + b_m x^m : \exists b_i \neq 0$ y desde aquí deducimos que:

$$0 = g(C) = b_0I + b_1 + \cdots + b_mC^m \overset{\cdot E_1}{\Rightarrow} 0 = b_0IE_1 + b_1CE_1 + \cdots + b_mC^mE_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \ \#, \text{ Porque para que sea no nulo, algún } b_i \text{ debe ser distinto de } 0.$$

3. Que las propiedades de ser anillo conmutativo y unitario son demostraciones triviales, sin embargo, la demostración de que cuando f es irreducible, F adquiere las propiedades de cuerpo reviste más importancia y complejidad:

$$0 \neq g(C) \in F \Rightarrow f \nmid \Rightarrow mcd(f,g) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = u(x)f(x) + h(x)g(x) = u(C)f(C) + h(C)g(C) = h(C)g(C) \Rightarrow g^{-1}(C) = h(C)$$

4. Al ser un subcuerpo:

$$\begin{gathered} aI + bI = (a+b)I \in F \\ (aI)(bI) = (ab)I \in F \\ 0 = 0I \in F \\ I = 1 \cdot I \in F \\ -(aI) = (-a)I \in F \\ (aI)^{-1} \overset{a \neq 0}{=} a^{-1}I \end{gathered}$$

Por ser un isomorfismo:

$$K \xrightarrow{\phi} \{aI : a \in K\}$$

Observamos que la función ϕ es claramente biyectiva y como $\phi(a+b) = (a+b)I = aI + bI = \phi(a) + \phi(b)$ y $\phi(a \cdot b) = (a \cdot b)I = aI \cdot bI = \phi(a) \cdot \phi(b)$, se ve que se conserva la suma y el producto por lo tanto podemos decir que $K \simeq \{aI : a \in K\} \subset F$

5. Suponemos un $g(x) \in K[x]$, podemos decir por el Teorema de la división entera que $g = f \cdot q + r$, donde $r = 0$ o $gr(r) < n$, esto implica que $g(C) = f(C)q(C) + r(C) = r(C)$ porque $f(C) = 0$ así que: $gr(g) = gr(r) < gr(f)$

Caso interesante

Un caso interesante de la posible aplicación de este teorema es la qeu sigue, sea $f = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ y $F = \{a_0I + a_1C : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, donde $C \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En consecuencia, si hallamos una expresión general de las matrices que pertenecen al cuerpo F, estas son de la forma $\begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$. De esta forma observamos que la información general de la matriz esta contenida en la 1ª columna puesto que conocida la primera columna conocemos el resto de la matriz. Si consideramos que dos matrices distintas de F, su producto tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_0 - a_1 b_1 & \cdots \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 & \cdots \end{pmatrix}$$

Con lo cual se puede apreciar que si solo nos fijamos en la primera columna, se puede usar este cuerpo F como un buen modelo de los **números complejos** porque de hecho, la matriz C compañera del polinomio f es, según esta interpretación, el número i y si nos fijamos en sus elementos coincide con lo relatado.

Para el caso del otro día

$$f = x^3+x+1 \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow F = \{a_0 I + a_1 C + a_2 C^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2\} \text{ donde } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{Z}_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Las matrices de F son: } \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & a_1 \\ 0 & a_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 \\ a_2 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Teorema de extensión de K para cualquier polinomio

Como consecuencia del teorema que se cumple para los polinomios irreducibles, podemos extender su enunciado al TODOS LOS POLINOMIOS, con independencia de su irreducibilidad.

El teorema dice: sea $f \in K[x]$ no constante, entonces $\exists F \supset K$, un $a \in K$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in F$ tales que:

1. F es un cuerpo conmutativo que contiene a K como subcuerpo.
2. $f(x) = a(x-\alpha_1) \cdot \cdots \cdot (x-\alpha_n)$

<u>Demostración</u>: por inducción sobre $n = gr(f)$:

- Caso base:$n = 1$

$$f(x) = a_1 x + a_0 : a_0, a_1 \in K \wedge a_1 \neq 0 \Rightarrow F = K \wedge \alpha_1 = -a_0 \cdot a_1^{-1} \in K \wedge a = a_1$$

- Paso inductivo, consideramos cierto para $l < gr(f) = n$:

$$f = p_1 \cdot \cdots \cdot p_m : p_i \in K[x] \text{ irreducible} \Rightarrow p_i \in K \Rightarrow K \subset K_1 \wedge \alpha_1 \in K : p(\alpha_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\alpha_1) = 0 \Rightarrow f(x) = (x-\alpha_1)g(x) \text{ donde } g(x) \in K[x] : gr(g) = l \overset{H.I.}{\Rightarrow}$$

$$K \subset K_1 \subset F : g(x) = a(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \Rightarrow f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\cdots\cdot(x-\alpha_n) \in F$$

Relaciones de Girard-Newton

Al analizar el grado de un polinomio cuadrático mónico cualquiera como $f = a_0 + a_1 x + x^2$, se observa que el número de raíces según lo hablado en el capítulo debería ser 2, de este modo, el polinomio se puede reescribir como: $f = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$. Desarrollando:

$$f = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - (\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \\ a_1 = -(\alpha_1+\alpha_2) \end{cases}$$

De este razonamiento para el caso de un polinomio de grado 2, se desprenden **las relaciones de GIRARD-NEWTON**[8], que son generales para cualquier grado.

$$a_{n-k} = (-1)^k \cdot \sum_{1 \leq i \leq \cdots \leq i_k < n} \alpha_{i_1} \cdot \cdots \cdot \alpha_{i_k} \text{ donde } k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Ej[9]:

$$n = 3 \rightarrow \begin{cases} a_0 = -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ a_1 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 \\ a_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \end{cases}$$

Estas relaciones nos otorgan la capacidad manifiesta de poder construir polinomios a partir de otros sin saber verdaderamente cuales son las raíces de los de partida:

$$\text{Sea } p(x) = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 = -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ a_1 = 3 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 \\ a_2 = 1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \end{cases}$$

Aunque no conocemos el valor de las raíces, si que podemos construir un polinomio sabiendo la relación que guardan:

$$\alpha'_k = \alpha_k + 1 \text{ donde } k = 1, 2, 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow \begin{cases} a'_0 = -(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = -3 \\ a'_1 = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) + (\alpha_1 + 1)(\alpha_3 + 1) + (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 6 \\ a'_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3) = -3 \end{cases}$$

[8] Guardan relación con las fórmulas de generación de los polinomios simétricos elementales

[9] En el fondo se trata de hacer sumandos de $n-k$ elementos y poner tantos sumandos como posibles combinaciones de raíces

ESPACIO VECTORIAL Y APLICACIÓN LINEAL

En este capítulo vamos a definir el concepto central de la asignatura: el espacio vectorial. Sus características dotan de propiedades muy especiales a los espacios que cumplen dicha definición y nos permite, junto con las aplicaciones lineales, descubrir una serie de propiedades abstractas a dichos espacios con consecuencias muy importantes en espacios concretos de este tipo.

ESPACIOS VECTORIALES

Definición (Espacio Vectorial)

Si suponemos que $(V, +, \cdot)$ *donde* $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$ *y* K *es un cuerpo conmutativo, definimos un* ***espacio vectorial sobre*** K *como la terna que cumple:*

- $(V, +)$ *es un grupo conmutativo.*
- $\forall a \in K : \forall v, v' \in V : a(v + v') = av + av'$
- $\forall a, a' \in K : \forall v \in V : (a + a')v = av + a'v$
- $\forall a, a' \in K : \forall v \in V : a(a'v) = (aa')v$
- $\forall v \in V : 1_k \cdot v = v$

A los elementos de este conjunto conocido como espacio vectorial los llamaremos ***vectores****.*

Proposición

Algunas propiedades muy elementales de esta definición son:

1. $a, b \in K : ab = 0_k \Rightarrow a = 0_k \vee b = 0_k$
2. $a \cdot 0_k = 0_k$
3. $0_k \cdot v = 0_v$ *y* $a \cdot 0_v = 0_v$
4. $a \cdot v = 0_v \Rightarrow a = 0_k \vee v = 0_v$

Demostración:

1. $$ab = 0_k \text{ y } a \neq 0_k \overset{\exists a^{-1}\in K}{\Rightarrow} a^{-1}ab = a^{-1}0 \Rightarrow b = 0_k$$

2. $$a \cdot 0_k = a \cdot (0_k + 0_k) = a \cdot 0_k + a \cdot 0_k \overset{-a \cdot 0_k}{\Leftrightarrow} a \cdot 0_k - a \cdot 0_k = a \cdot 0_k + a \cdot 0_k - a \cdot 0_k \Leftrightarrow 0_k = a \cdot 0_k$$

3. $$0_k \cdot v = (0_k + 0_k)v = 0_k v + 0_k v \overset{-0_k v}{\Leftrightarrow} 0_k v - 0_k v = 0_k v + 0_k v - 0_k v \Leftrightarrow 0_v = 0_k v$$

4. $$av = 0_v \wedge a \neq 0_k \overset{\exists a^{-1}}{\Rightarrow} a^{-1}av = a^{-1}0_v \Leftrightarrow (a^{-1}a)v = 0_v \Leftrightarrow v = 0_v$$

Ejemplo:

Veamos algunos ejemplos de espacios vectoriales:

- Suponemos $V = K^n = \overbrace{K \times \cdots \times K}^{n}$, tenemos que definir ahora la suma de dos vectores y el producto por un escalar:

  $$(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$$

  $$a(a_1, \cdots, a_n) = (a \cdot a_1, \cdots, a \cdot a_n)$$

  Está claro y es trivial demostrar que existe el neutro de la suma $0_v = (0, \cdots, 0)$ y que existe el opuesto $-(a_1, \cdots, a_n) = (-a_1, \cdots, -a_n)$, aunque no serán todas, veamos por ejemplo la demostración de alguna de las propiedades definidas al principio:

  $$(ab)(a_1, \cdots, a_n) = (aba_1, \cdots, aba_n) = a(ba_1, \cdots, ba_n)$$

  Este ejemplo que hemos dado es el **enésimo espacio vectorial estándar o canónico**, y probaremos más adelante que **cualquier espacio vectorial es isomorfo a este** y, por tanto, es modelo de los demás.

- Consideramos $V = K[x]$ y definimos la suma y el producto por un escalar:

  $$f + g \text{ es la suma habitual de polinomios}$$

  $$a \cdot f = b\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n}(b \cdot a_i)x^i$$

  Se pueden comprobar a través de esta definición el resto de propiedades de espacio vectorial confirmando que se puede considerar como uno mismo.

- Llamamos $W = K_n[x] = \{f \in K[x] : gr(f) < n\}$ y definidas las operaciones anteriores[1] también cumple las propiedades de espacio vectorial, además, se comprueba fácilmente que el producto y la suma de polinomios definidas antes conservan que todo polinomio del conjunto tras ser operado con otro tenga como resultado un polinomio del conjunto (no altera el grado), por lo tanto es cerrado.

- Llamamos $V = Mat_{m\times n}(K)$, se definen la suma y el producto como:

  $$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

  $$b(a_{ij}) = (b \cdot a_{ij})$$

  Y del mismo modo se pueden comprobar todas las propiedades anteriores para confirmar que se trata realmente de un espacio vectorial.

[1] W es un subespacio vectorial de V

- Llamamos $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es una aplicación}\}$, definimos suma y producto:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) : \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$$

Y del mismo modo, se puede comprobar que esta definición cumple todas las propiedades de espacio vectorial.

Definición (Subespacio Vectorial)

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $W \subseteq V : W \neq 0$, decimos que W es un ***subespacio vectorial*** *de V si es cerrado bajo las operaciones de V, es decir:*

- $w, w' \in W : w + w' \in W$
- $a \in K \wedge w \in W : a \cdot w \in W$

Y lo denotamos por $W < V$.

Observación:

Como $W \subseteq V$ y las propiedades se cumplen para todos los $v \in V$, en particular se cumplen para todos los $w \in W \subseteq V$ y, en consecuencia, por ser W cerrado bajo las operaciones de V cumple él mismo la definición de espacio vectorial.

Por tanto, podemos decir de algún modo que ser subespacio vectorial es ser espacio vectorial dentro de otro espacio vectorial.

Ejemplo:

Sea $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es aplicacion}\}$ un espacio vectorial que denotaremos por V. Si llamamos $W = \{f \in V : f(-x) = f(x) : \forall x \in \mathbb{R}\}$, entonces podemos comprobar que se dan las condiciones de subespacio vectorial:

$$f, g \in \mathbb{W} : (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

$$a \in \mathbb{K}, g \in \mathbb{W} : (a \cdot g)(-x) = a \cdot g(-x) = a \cdot g(x) = (a \cdot g)(x)$$

Proposición (Operaciones con subespacios)

Sean W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales del espacio V, entonces:

- $W_1 \cap W_2 < V$
- $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\} < V$

Son subespacios vectoriales de V

Observación:

Dados dos subespacios W_1 y W_2, la unión:

$$W_1 \cup W_2 \not< V \text{ en general}$$

No es un subespacio en general. Como contraejemplo podemos pensar que W_1 es el eje de abcisas y W_2 es el eje de ordenadas y la union de ambos no es subconjunto del plano porque la suma de vectores de cada eje da vectores del plano fuera de los ejes.

Sistema generador, base e indepecia lineal

Una vez visto el concepto de espacio vectorial y subespacio, vamos a caracterizar un conjunto de vectores del mismo que sea capaz de definir por completo la totalidad del espacio y que nos servirá como referencia para trabajar con el resto de vectores.

Definición (Independencia lineal)

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *es* ***linealmente independiente*** *si toda combinación lineal nula implica que dichos coeficientes son nulos:*

$$\forall a_1, \cdots, a_m \in K : a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0_v \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

Cuando esta condición no se verifica entonces decimos que el conjunto es **linealmenten dependiente** y entonces podemos encontrar una combinación con algún coeficiente no nulo que relaciona a todos:

$$\forall a_1, \cdots, a_m \in K : \exists a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0_v : \exists a_i \neq 0$$

Esto implica que el vector v_i se puede reescribir como combinación lineal de los restantes:

$$v_i = -a_i^{-1} a_1 v_1 - \cdots - a_i^{-1} a_{i-1} v_{i-1} - \cdots - a_i^{-1} a_m v_m$$

Ejemplo:

Sea el espacio vectorial canónico $K \times K \to K^2$. Si tomamos como vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$, estos son linealmente independientes porque:

$$a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 = (0, 0) \Leftrightarrow (a_1, a_2) = (0, 0) \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Pero si añadimos el vector $v = (1, -2)$, entonces:

$$-1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 \cdot v = (0, 0)$$

Lo que resulta en que $\{e_1, e_2, v\}$ son linealmente dependientes.

Definición (Envoltura lineal)

Sea $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$ *un conjunto de vectores cualesquiera, llamamos* $L(S) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m : a_1, \cdots, a_m \in K\}$ *al conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de dichos vectores, que también forma un subespacio vectorial.*

Proposición

La definición anterior tiene como consecuencia directa que:

- $S \subset L(S)$
- $L(S)$ *es el menor subespacio vectorial en* V *que contiene a* S
- $\forall F \subset V : S \subset F,\ F \supset L(S)$

Definición (Sistema generador)

Para un subespacio $F < V$ *cualquiera, si encontramos un* S *tal que* $L(S) = F$*, entonces decimos que* $L(S)$ *es un* ***sistema de generadores*** *de* F*.*

Ejemplo:

Sea el espacio vectorial canónico K^2, si tomamos como $L(e_1, e_2)$ tenemos que $a_1 e_1 + a_2 e_2 = (a_1, a_2) \Rightarrow V = L(S)$, luego es generador del espacio vectorial V.

En este curso nos vamos a limitar a estudiar espacios vectoriales finitamente[2] generados, esto es, aquellos en los que el sistema generador está formado por un conjunto finito de vectores.

Definición (Base vectorial)

*Cuando un conjunto $B = v_1, \cdots, v_n$ de vectores es **linealmente independiente** y a su vez **sistema generador**, entonces decimos que es **base vectorial** de V.*

Los vectores de V por tanto se puede expresar como:

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = a'_1v_1 + \cdots + a'_mv_m : v_1, \cdots, v_m \in B$$

Y, de hecho, esta descomposición es única porque restando ambas ecuaciones tenemos que:

$$0_v = (a_1 - a'_1)v_1 + \cdots + (a_m - a'_m)v_m \overset{l.i.}{\Rightarrow} a_1 - a'_1 = \cdots = a_m - a'_m = 0 \Rightarrow a_i = a'_i$$

Ejemplo:

- Siendo K^n el espacio vectorial canónico, llamamos a $B_c = \{e_1, \cdots, e_n\}$ su base canónica.
- Siendo $K[x]$ el espacio de los polinomios con coeficientes en K, éste no es finitamente generado, su base es infinita siendo una de ellas: $B = \{1, x, x^2, \cdots\}$.
- Si tomamos $V = Mat_{3\times2}(K)$ podemos definir la base de esta como:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Proposición

*Un conjunto B es base si y sólo si es un sistema de generadores **minimal**, es decir, que ningún subconjunto de B es sistema de generadores.*

Demostración:

- "$\Rightarrow$": supongamos que B no es minimal, entonces $\exists S \subsetneq B$ tal que S es sistema de generadores:

  $\exists v \in B : v \notin S : v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m : v_n, \cdots, v_m \in S \Rightarrow 0_v = 1_kv - a_1v_1 - \cdots - a_mv_m \Rightarrow B$ no es l. i.

- "$\Leftarrow$": supongamos que B no es l.i., entonces $\exists v_1, \cdots, v_m \in B : a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0_v \Rightarrow$

  $\Rightarrow \exists i : a_i \neq 0_k \overset{p.ej.}{\Rightarrow} a_m \neq 0 \Rightarrow v_m = -a_m^{-1}a_1v_1 - \cdots - a_m - 1a_{m-1}v_{m-1} \Rightarrow S = B \backslash \{v_m\}$ es sistm. gen.

  Lo que es una contradicción porque entonces B no es minimal.

Proposición

*Un conjunto B es base si y sólo si es un sistema linealmente independiente **maximal**, esto es, que cualquier conjunto que lo contiene no es linealmente independiente.*

Teorema (Existencia de bases)

Todo espacio vectorial finitamente generado tiene alguna base.

Demostración:

Como V es finitamente generado, entonces: $\exists S = \{v_1, \cdots, v_m\}$ sistema de generadores de V y entonces $\exists S' \subseteq S : S'$ es sistema de generadores minimal, por lo que S' es base. Esto es así porque si a un sistema de generadores se le puede quitar un elemento, entonces no es minimal y puede encontrarse en él uno que sí lo sea, entonces dicho sistema minimal ya es base.

[2]Por ejemplo, $K[x]$ no lo es.

Lema (de Intercambio)

Supongamos V un espacio finitamente generado, sea $L = \{v_1, \cdots, v_s\}$ un conjunto linealmente independiente y $S = \{w_1, \cdots, w_t\}$ un sistema de generadores de V, entonces:

1. $s \leq t$
2. $\exists i_1, \cdots, i_s,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq t : \{v_1, \cdots, v_s\} \cup S \setminus \{w_{i_1}, \cdots, w_{i_s}\}$ *es un sistema de generadores.*

Lo que viene a afirmar que dado un sistema de generadores, si se sustituyen vectores del mismo por vectores de un conjunto que sea linealmente independiente, entonces el resultado sigue siendo sistema de generadores.

<u>Demostración</u>:

Por inducción sobre s:

$$s = 1 \Rightarrow 0 \neq v_1 : L\{v_1\} \text{ es l. i. y } S = \{w_1, \cdots, w_t\}$$

Como S es un sistema de generadores:

$$v_1 = a_1 w_1 + \cdots + a_t w_t \neq 0 \Rightarrow \exists a_i \neq 0 \overset{p.ej.}{\Rightarrow} a_1 \neq 0 \overset{\exists a_1^{-1}}{\Rightarrow} w_1 = a_1^{-1} v_1 - a_1^{-1} a_2 w_2 - \cdots - a_1^{-1} a_t w_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{v_1, w_2, w_3, \cdots, w_t\} \text{ es sist. gen.}$$

Puesto que para cualquier combinación lineal en la que participara w_1 ahora podemos sustituir por su descomposición anterior que sólo depende de dichos vectores.

Ahora, para el caso en que s sea arbitrario:

$$L\{v_1, \cdots, v_s\} \text{ l. i. y } S = \{w_1, \cdots, w_t\}$$

$$\{v_1, \cdots, v_{s-1}\} \text{ es l.i.} \Rightarrow \{v_1, \cdots, v_{s-1}, w_s, \cdots, w_t\} \text{ es sistema de generadores}$$

Además ocurre que:

$$v_s = a_1 v_1 + \cdots + a_{s-1} v_{s-1} + a_s w_s + \cdots + a_t w_t \neq 0 \Rightarrow \exists a_i \neq 0$$

ya que $a_s = \cdots = a_t = 0$ y entonces $v_s = a_1 v_1 + \cdots + a_{s-1} v_{s-1}$, pero no puede ser porque por hipótesis L era linealmente independiente. Con lo cual podemos suponer que $a_s \neq 0$:

$$w_s = a_s^{-1} v_s - a_s^{-1} a_1 v_1 - \cdots - a_s^{-1} a_{s-1} v_{s-1} - a_s^{-1} a_{s+1} v_{s+1} - \cdots - a_s^{-1} a_t w_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{v_1, \cdots, v_{s-1}, v_s, w_{s+1}, \cdots, w_t\} \text{ es sistema de generadores}$$

Proposición

Si V es finitamente generado y L es linealmente independiente, entonces L es finito.

<u>Demostración</u>:

Elegimos un sistema de generadores de s vectores: $S = \{w_1, \cdots, w_s\}$, si L es linealmente independiente, entonces por el lema de intercambio, el número de vectores que conforman L es menor que s, luego es finito.

Proposición

Si V es finitamente generado, entonces:

1. *Todas las bases de V son finitas*

2. *Todas las bases de V tienen el mismo cardinal*

Demostración:

1. Si B es base de V, entonces B es linealmente independiente $\Rightarrow$ es finito.
2. Supongamos que B_1 y B_2 son ambas bases de V con un número de elementos s_1 y s_2. Podemos decir que $s_1 \leq s_2$ por considerar B_1 linealmente independiente y B_2 sistema de generadores, pero del mismo modo, al revés, podemos decir que $s_2 \leq s_1$ haciendo las consideraciones al revés, en consecuencia: $s_1 = s_2$

Definición (Dimensión)

Sea V un espacio vectorial finitamente generado, definimos la dimensión de V como:

$$\dim V = |B|$$

donde B es una base cualquiera de V.

Ejemplo:

- $\dim K^2 = 2 \rightarrow B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$
- $\dim K^n = n \rightarrow B = \{e_1, \cdots, e_n\}$
- $\dim Mat_{m\times n}(K) = m{\cdot}n \rightarrow B = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq m \wedge 1 \leq j \leq n\} : E_{ij} = (a_{rs}) \begin{cases} 1 & si \quad (i,j) = (r,s) \\ 0 & si \quad (i,j) \neq (r,s) \end{cases}$

Por lo tanto si todo espacio vectorial posee una base, y toda base un cardinal, este la dimensión representa el número mínimo de vectores linealmente independientes que lo definen.

Teorema (de extensión de la base)

Sea V un espacio vectorial finitamente generado y $W < V$ un subespacio del mismo, se cumplen:

1. *W es finitamente generado*
2. $\dim W \leq \dim V$
3. *Si B_w es base de W, entonces $\exists B_v$ base de V tal que: $B_w \subseteq B_v$*
4. $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$

Demostración:

1. Sea L_w linealmente independiente $\Rightarrow$ también es linealmente independiente en V, luego como V es finitamente generado: $|L_w| \leq \dim V = |B_v|$ entonces L_w es finito $\Rightarrow L_w \subset L \subset W$: L es conjunto linealmente independiente maximal.
2. Se demuestra junto con la 2 al demostrar que L_w es finito.
3. $\dim W > \dim V \Rightarrow |B_w| > |B_v| \Rightarrow B_v$ no es capaz de generar W pero sí V, pero como $W \subset V \Rightarrow \#$
4. $B_w = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de W y $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V, sabemos que $m \leq n$. Consideramos B_w como linealmente independiente en V y a B como sistema generador en V, salvo el orden podemos, por el **lema de intercambio** , intercambiar vectores entre ambos conjuntos así: $\{w_1, \cdots, w_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ el conjunto es linealmente independiente y de nuevo sistema de generadores, por lo que es base de V.

Ejemplo:

En K^2 consideramos el vector $w_1 = (2, -3)$, como $\{w_1\}$ es linealmente independiente y es base de W_1, entonces podemos extenderla a una base mayor $\Rightarrow \{e_1, (2, -3)\} \vee \{(2, -3), e_2\}$ y ambas son bases de K^2.

Observación:

Se cumple que siendo $\dim V = n$:

- L es independiente y $|L| = n \Rightarrow L$ es base.
- S es sistema de generadores y $|S| = n \Rightarrow S$ es base.

Teorema (de la Fórmula de GrassManm)

Sea V un espacio vectorial finitamente generado y $W_1, W_2 < V$ subespacios vectoriales, entonces se cumple:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Demostración:

Llamamos $m_1 = \dim W_1$, $m_2 = \dim W_2$ y $p = \dim(W_1 \cap W_2)$, vemos que $p \leq m_1$ y $p \leq m_2$.

Sea ahora $B_{W_1 \cap W_2} = \{v_1, \cdots, v_p\}$, entonces por el Teorema de extensión de bases:

$$B_{W_1} = \{v_1, \cdots, v_p, w_{p+1}, \cdots, w_{m_1}\} \text{ y } B_{W_2} = \{v_1, \cdots, v_p, w'_{p+1}, \cdots, w'_{m_2}\}$$

Probamos ahora que $B = \{v_1, \cdots, v_p, w_{p+1}, \cdots, w_{m_1}, w'_{p+1}, \cdots, w'_{m_2}\}$ es base de $W_1 + W_2$, porque se puede apreciar que el número de elementos es $n + (n - p) + (m - p) = n + m - p$ que es justamente lo que dice la definición, ahora lo demostramos:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p + a_{p+1} w_{p+1} + \cdots + a_{m_1} w_{m_1} + a'_{p+1} w'_{p+1} + \cdots + a'_{m_2} w'_{m_2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p + a_{p+1} w_{p+1} + \cdots + a_{m_1} w_{m_1} = -(+a'_{p+1} w'_{p+1} + \cdots + a'_{m_2} w'_{m_2})$$

Como la primera parte del igual pertenece a W_1 y la segunda a W_2 y ambas son iguales, ambas pertenecen a $W_1 \cap W_2$. Esto último me permite expresar dichos vectores en términos de la base de la intersección.

$$a'_{p+1} w'_{p+1} + \cdots + a'_{m_2} w'_{m_2} = b_1 v_1 + \cdots + b_p v_p \Leftrightarrow -b_1 v_1 - \cdots - b_p v_p + a'_{p+1} w'_{p+1} + \cdots + a'_{m_2} w'_{m_2} = 0$$

Como justamente estos vectores conforman la base B_{W_2}, son linealmente independientes, en consecuencia: $b_1 = \cdots = b_p = a'_{p+1} = \cdots = a'_{m_2} = 0$, y esto implica que:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p + a_{p+1} w_{p+1} + \cdots + a_{m_1} w_{m_1} = 0$$

Y como estos también son linealmente independientes porque son la base B_{W_1}, entonces: $a_1 = \cdots = a_p = \cdots = a_{m_1} = 0$, con lo cual queda demostrado que B es base de $W_1 + W_2$, ya que todo vector $w_1 + w_2 = v \in W_1 + W_2 : w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2$ y cualquier vector de W_1 o de W_2 se puede expresar en términos de la nueva base.

$$u_1 + u_2 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} w_{p+1} + \cdots + \lambda_{m_1} w_{m_1} + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_p v_p + \mu_{p+1} w'_{p+1} \cdots + \mu_{m_2} w'_{m_2} =$$
$$= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_p + \mu_p) v_p + \lambda_{p+1} w_{p+1} + \cdots + \lambda_{m_1} w_{m_1} + \mu_{p+1} w'_{p+1} \cdots + \mu_{m_2} w'_{m_2}$$

Definición (Suma Directa)

Sea V un espacio vectorial y $W_1, W_2 < V$ dos subespacios vectoriales, entonces si se verifica que:

$$\forall v \in V : \exists! w_1 \in W_1,\ m_2 \in W_2 : v = w_1 + w_2$$

decimos que V es la ***suma directa*** *de $W_1 + W_2$ y se expresa de la siguiente forma:*

$$W_1 \oplus W_2$$

Proposición

La definición de suma directa es equivalente a esta otra:

$$\forall v \in V : \exists! w_1 \in W_1,\ m_2 \in W_2 : v = w_1 + w_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2 \ y\ W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

Demostración:

- $\Leftarrow$: supongamos que $v = w_1 + w_2 \in W_1 \cap W_2$, entonces:

  $$w_1 + w_2 = w_1' + w_2' : w_1, w_1' \in W_1 \text{ y } w_2, w_2' \in W_2 \Rightarrow w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 = 0 \Rightarrow w_1 = w_1' \text{ y } w_2 = w_2'$$

- $\Rightarrow$: tomemos $w' \in W_1 \cap W_2$ y supongamos $w' \neq 0$, entonces:

  $$v = w_1 + w_2 \Rightarrow v - w' = w_1 + w_2 - w' \Rightarrow v = \underbrace{w_1 + w'}_{\in W_1} + \underbrace{w_2 - w'}_{\in W_2}$$

  Pero como la descomposición es única, entonces:

  $$\begin{cases} w_1 = w_1 + w' \\ w_2 = w_2 - w' \end{cases} \Rightarrow w' = 0$$

Viendo por ejemplo el espacio vectorial de K^2 es fácil comprender este concepto, $W_1 = K \times \{0\}$ y $W_2 = \{0\} \times K$ vemos que son los ejes coordenados y que la suma de vectores de ambos planos definen por completo el espacio bidimensional, además su intersección únicamente es el 0.

Observación:

Cuando nos paramos a pensar en una suma directa de 3 o más sumandos tenemos que comprobar que se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} V = W_1 + W_2 + W_3 \\ W_1 \cap W_2 = \{0\} \\ (W_1 + W_2) \cap W_3 = \{0\} \end{cases}$$

Es decir, en el fondo es comprobar que todos los vectores son una única suma de los vectores de cada subespacio.

Ejemplo:

Consideramos $V = Mat_2(\mathbb{R})$ por lo que una base sería $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Si consideramos como $S_2(\mathbb{R})$ al conjunto de las matrices simétricas y a $A_2(\mathbb{R})$ al conjunto de las antisimétricas, entonces:

$$S_2(\mathbb{R}) = \{A \in V : A = A^t\} < V$$
$$A_2(\mathbb{R}) = \{A \in V : A = -A^t\} < V$$

Para comprobar que son subespacios comprobamos[3] que el producto y la suma son cerrados.

$$A, B \in A_2(\mathbb{R}) \to A + B = -A^t - B^t = -(A^t + B^t) = -(A + B)^t \in A_2(\mathbb{R})$$

$$a \in \mathbb{R}, A \in A_2(\mathbb{R}) \to a \cdot A = a \cdot (-A^t) = -a \cdot A^t = -a \cdot A^t = -(a \cdot A^t) \in A_2(\mathbb{R})$$

Ahora determinamos las dimensiones de cada una:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a_{12} = a_{21} \Leftrightarrow A = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim S_2(\mathbb{R}) = 3$$

[3] Y las de $S_2(\mathbb{R})$ se demuestran de forma análoga.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow \begin{cases} a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} = 0 \\ a_{ij} = -a_{ji} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim A_2(\mathbb{R}) = 1$$

Ahora viendo como es la intersección de ambos subespacios:

$$A \in A_2(\mathbb{R}) \cap S_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} A = A^t \\ A = -A^t \end{cases} \Rightarrow A^t = -A^t \Leftrightarrow A^t = -A^t = 0 \Rightarrow A = 0$$

Con lo cual vemos que se cumplen todas las hipótesis de la fórmula de GrassMann, por ello es que la suma supone el total del espacio vectorial definido:

$$\dim(S_2 + A_2) = 3 + 1 - 0 = 4 = \dim Mat_2(\mathbb{R}) \Rightarrow V = S_2 \oplus A_2$$

Con lo cual, esto demuestra que toda matriz de orden 2 debe poder expresarse como suma de matrices de ambos subespacios.

$$(A + A^t)^t = A^t + A^{tt} = A^t + A \to A + A^t \text{ es simétrica}$$

$$(A - A^t)^t = A^t - A^{tt} = A^t - A \to A - A^t \text{ es antisimétrica}$$

Coordenadas y Cambio de Base

Dado un espacio vectorial Las son los valores que identifican a un vector con respecto a una base y son **únicos** con respecto a esa base.

Definición (Coordenadas)

Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V, cada vector se escribe de modo único como:

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n : \exists! x_i \in K$$

a los coeficientes x_i los denotamos por ***coordenadas*** *del vector v respecto de la base B.*

Ejemplo:

Un vector $v = (a_1, a_2)$ se escribe de esa forma en la base canónica pero $v = (a_1 - a_2, a_2)$ son las coordenadas del mismo vector en la base $B' = \{e_1, e_1 + e_2\}$

Proposición (Cambio de base)

Sean $B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ y $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ bases de V, entonces:

$$\begin{cases} v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n & en\ B \\ v = x'_1 v'_1 + \cdots + x'_n v_n & en\ B' \end{cases} \Rightarrow x'_1 v'_1 + \cdots + x'_n v'_n = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n =$$

$$= x_1 (\overbrace{a_{11} v'_1 + \cdots + a_{n1} v'_n}^{v_1\ en\ B'}) + \cdots + x_n (\overbrace{a_{1n} v'_1 + \cdots + a_{nn} v'_n}^{v_n\ en\ B'}) = (a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n) v'_1 + \cdots + (a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n) v'_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'_1 = a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n, \cdots, x'_n = a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n$$

Si expresamos esta igualdad en forma matricial, como si de un sistema lineal se tratase (que de hecho lo es), entonces tenemos que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{Coord.\ en\ B'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}}^{v_1\ en\ B'} & \cdots & \overbrace{a_{1n}}^{v_n\ en\ B'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{Matriz\ de\ paso} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{Coord.\ en\ B}$$

De forma análoga, en el otro sentido:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Por tanto, de ambas igualdades se deduce:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 = (PQ - I) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow PQ - I = 0 \Leftrightarrow PQ = I \Rightarrow \exists P^{-1} = Q$$

*Esto quiere decir que $P, Q \in Mat_n(\mathbb{R})^x$, también llamado **grupo lineal** de n dimensión sobre (K) $GL_n(K)$. En consecuencia, la matriz de paso de una base a otra es la inversa del cambio de base al revés.*

Definición (Característica de un Cuerpo)

Sea K un cuerpo, definimos su característica como el valor $p \in K$ que verifica que:

$$\chi(K) = \begin{cases} 0 & si\ 1_k \cdot n \neq 0 : \forall n \in \mathbb{N} \\ p > 0 & si\ p \cdot 1_k = 0 : 0 < n < p : n \cdot 1_k \neq 0 \end{cases}$$

Es decir, que el 0_k es el 0 cuando todos los múltiplos de 1 nos se anulan, pero cuando hay un valor para el que se anula y todos los anteriores no, entonces ese p es la característica del cuerpo.

Ejemplo:

Sea $K^2 = V$ y $B' = \{e_1 + 2e_2, 2e_1 + e_2\}$ una base del mismo, puesto que es un conjunto de vectores de dimensión 2 y linealmente independiente:

$$a_1(e_1+2e_2)+a_2(2e_1+e_2) = 0 \Leftrightarrow (a_1+2a_2)e_1+(2a_1+a_2)e_2 = 0 \Rightarrow a_1-a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow 3a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 = a_2$$

Siempre y cuando $\chi(K) \neq 3$, volviendo a nuestro ejercicio, las matrices de paso son:

$$M(B', B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M(B_c, B') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Pero podemos hacer este cálculo de forma más explícita:

$$\begin{cases} v'_1 = e_1 + 2e_2 \\ v'_2 = 2e_1 + e_2 \end{cases} \overset{E_1 = E_1 - 2E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} v'_1 - 2v'_2 = e_1 - 4e_1 = -3e_1 \Leftrightarrow e_1 = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3})_{B'} \\ e_2 = v'_2 - 2e_1 = v'_2 - 2(\frac{-1}{3}v'_1 + \frac{2}{3}v'_2) \Rightarrow e_2 = (\frac{2}{3}, \frac{-1}{3})_{B'} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(B_c, B') = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

$$v = (7, -6)_{B_c} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-19}{3} \\ -\frac{20}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow v = \left(\frac{-19}{3}, \frac{-20}{3} \right)_{B'}$$

Espacio vectorial cociente

Los conjuntos cocientes, en general, son un concepto abstracto complicado de entender al principio, pero con muy buenas propiedades. Estos permiten caracterizar y clasificar los elementos del conjunto inicial en un conjunto de subgrupos al que pertenecen todos los elementos relacionados entre sí a través de una relación de equivalencia.

Proposición

Sea $W < V$ un subespacio del espacio V, la siguiente relación:

$$v \equiv_W v' \Leftrightarrow v - v' \in W : v, v' \in V$$

es una relación de equivalencia que divide al espacio vectorial en particiones disjuntas dos a dos.

Demostración:

- Reflexiva: $v - v = 0_v = 0_w \in W \Rightarrow v \equiv_W v$
- Simétrica: $v \equiv_W v' \Rightarrow v - v' \in W \Rightarrow v' - v = -(v - v') \in W \Rightarrow v' \equiv_W v$
- Transitiva: $v \equiv_W v'$ y $v' \equiv_W v'' \Rightarrow v - v' \in W$ y $v' - v'' \in W \Rightarrow v - v'' = v - v' + v' - v'' \in W \Rightarrow v \equiv_W v''$

Definición (Clase Lateral)

Denotamos $[v]_w = \bar{v}$ y veamos que $\bar{v} = v + W = \{v + w : w \in W\}$:

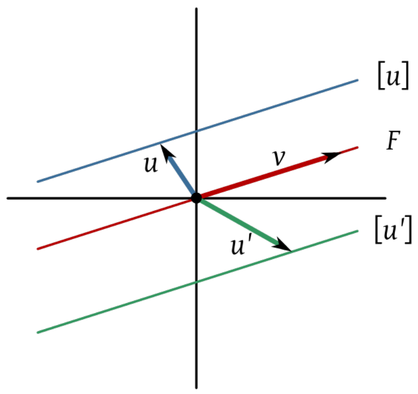
- *Primero vemos que $\bar{v} \subset v + W$, consideremos:*

$$v' \in \bar{v} \Rightarrow v' \equiv_W v \Rightarrow v' - v = w \in W \Rightarrow v' = v + w \in v + W$$

- *Ahora vemos que $v + W \subset \bar{v}$, consideramos:*

$$v' \in v + W \Rightarrow v' = v + w : w \in W \Rightarrow v' - v = w \in W \Rightarrow v' \equiv_W v \Rightarrow v' \in \bar{v}$$

*A este espacio que hemos definido como $\bar{v}$ se le conoce como **clase lateral**.*



Definición (Conjunto Cociente)

*Se define el **conjunto cociente** y se denota por $V/W = \{[v]_W : v \in V\}$ al conjunto de clases laterales resultantes de la relación de equivalencia generada por W y forma un K-ESPACIO-VECTORIAL las siguientes propiedades:*

- $\bar{v} + \bar{v'} = \overline{v + v'}$
- $a \cdot \bar{v} = \overline{a \cdot v}$

Observación:

Es notable destacar los siguientes aspectos:

- $0_{V/W} = [0]_W$ y que $-\bar{v} = \overline{-v}$.

- Hay que comprobar que la suma y el producto están bien definidos, es decir, que no dependen del representante escogido para operar:
  - Sean $\overline{v}_1 = \overline{v}_2$ representantes de una clase y $\overline{v'}_1 = \overline{v'}_2$ otros de otra distinta, entonces:
$$\overline{v_1 + v_1'} = \overline{v_2 + v_2'} \Leftrightarrow (v_1 + v_1') - (v_2 + v_2') = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(v_1 - v_2)}_{\in W} + \underbrace{(v_1' + v_2')}_{\in W} \in W$$
  - El producto se demuestra de forma análoga.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $W < V$ un subespacio vectorial del mismo. Si denotamos $\dim V = n$ y $\dim W = m$, entonces $\dim V/W = n - m$.

De hecho, si $B = \{v_1, \cdots, v_m\}$ es una base de W y $B' = \{v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ es una ampliación suya para V, entonces $B'' = \{v_{m+1}, \bar{\cdots}, \bar{v_n}\}$ es base de V/W.

Demostración:

Elegimos una base cualquiera de W: $B_W = \{w_1, \cdots, w_m\}$ y ampliamos esta base para V: $B = \{w_1, \cdots, w_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$, es decir, hemos añadido $n-m$ vectores a la base de B_W para ampliarla a B. Ahora probamos que $\{\overline{v}_{m+1}, \cdots \overline{v}_n\}$ es base de V/W.

- Linealmente independiente:

  $a_{m+1}\overline{v}_{m+1} + \cdots + a_n\overline{v}_n = 0 \Leftrightarrow \overline{a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n} = 0 \Leftrightarrow a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n - 0 \in W$

  Como estos vectores pertenecen a W, entonces se podrán expresar en función de su base:

  $a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n = a_1w_1 + \cdots a_mw_m \Rightarrow a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n - a_1w_1 + \cdots a_mw_m = 0 \overset{B \text{ es base}}{\Rightarrow}$ l. ind.

- Sistema de generadores:

  $\forall v \in V : \overline{v} = \overline{a_1w_1 + \cdots + a_mw_m + a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n} = \overline{a_1w_1 + \cdots a_mw_m} + a_{m+1}\overline{v}_{m+1} + \cdots a_n\overline{v}_n =$

  Como $a_1w_1 + \cdots a_mw_m \in W \Rightarrow \overline{a_1w_1 + \cdots a_mw_m} = 0$, luego tenemos que:
$$= a_{m+1}\overline{v}_{m+1} + \cdots a_n\overline{v}_n$$
  Luego queda demostrado que para cualquier $\bar{v}$, este se puede expresar como combinación lineal de los vectores añadidos para ampliar la base, luego es sistema de generadores.

Ejemplo:

En $\mathbb{R}^5$ consideramos W como el subespacio[4] de los vectores cuyas coordenadas se ajustan al siguiente sistema: $W = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$, vamos a ver que $\dim W = 3$ y vamos a calcular la base de $B_{V/W}$.

Podemos ver que el sistema de ecuaciones forma un subespacio vectorial de V por ser un sistema homogéneo del que son vectores los vectores solución de ese sistema. Su dimensión es el número de incógnitas menos el rango de la matriz de coeficientes, es decir, $\dim W = 5 - 2 = 3$. Esto es así porque según vimos en Bachillerato, es necesario que haya 3 incógnitas parametrizadas que en este caso van a ser x_3, x_4, x_5 y las otras toman valores conforme a ellas, así que esencialmente los vectores de W dependen de 3 valores, de ahí la dimensión 3.

Para hallar los vectores de la base de W, vemos que la solución del sistema es: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{x_4}{2}, x_5 - \frac{x_4}{2}, x_3, x_4, x_5)$. Por lo que cualquier vector solución se puede escribir como:
$$x_3(0, 0, 1, 0, 0) + x_4(1, -1, 0, 1, 0) + x_5(0, 1, 0, 0, 1)$$

[4] Más adelante se demostrará que esto es un subespacio

Otra forma es dar valores de vectores que sean linealmente independientes entre los tres parámetros, p. ej., $(x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ y hallar los valores de x_1 y x_2 para completar con las dos variables que faltan cada uno de los vectores.

Con lo cual, para encontrar la base ahora de V/W, vemos que vectores es necesario añadir a la hallada para que sea base de V, un caso sencillo para ampliar la base es añadir vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^5$:

$$B = \{(0, 0, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), v_1, v_2\} =$$

$$= \{(0, 0, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), e_1 = (1, 0, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)\}$$

Con lo cual, e_1 y e_2 forman la base de V/W.

APLICACIONES LINEALES

Definición

*Sean V y V' dos espacios vectoriales y $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación entre ambos, entonces decimos que **dicha aplicación es lineal** si conserva la suma y el producto por un escalar:*

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) : \forall v_1, v_2 \in V$$

$$\phi(a \cdot v_1) = a \cdot \phi(v_1) : \forall a \in K, \ \forall v \in V$$

Al conjunto de aplicaciones lineales entre ambos espacios se le denota[5] por $Hom(V, V')$.

Ejemplo:

- Sea $\phi : K^3 \longrightarrow K^2$ y $\phi(x, y, z) = (x - y, x + y + z)$:

  $$\phi\left[(x, y, z) + (x', y', z')\right] = \phi(x + x', y + y', z + z') = (x + x' - y - y', x + x' + y + y' + z + z') =$$

  $$= (x - y, x + y + z) + (x' + y', x' + y' + z') = \phi(x, y, z) + \phi(x', y', z')$$

- Sea $\phi : V \longrightarrow V$ y sea ϕ $K - lineal$, entonces decimos que es un endomorfismo. Por ejemplo, $\phi : V \longrightarrow V$ siendo $id_V = \phi(v) = v$, es un endomorfismo.

- Sea $\phi : V \longrightarrow V$ y sea $\phi(v) = r \cdot v$ donde $r \in K$, también es un isomorfismo. Concretamente a esto se le conoce como **homotecia**[6]. ϕ cumple que $\phi = \phi^{-1}$ con lo que es fácil demostrar que es una biyección y por extensión un isomorfismo.

- Si tenemos $W < V$, podemos definir V/W y ahora $\phi : V \longrightarrow V/W$ siendo $\phi(v) = \bar{v}$, entonces ϕ es aplicación lineal.

- Si tenemos que $V = W \oplus U$ y $\phi : V \longrightarrow V$, entonces $v = w + u$ de modo único y la aplicación $\phi(v) = w$ es lineal. A esta aplicación se la conoce como **proyección** de v con base W y dirección U.

  - Vamos a ver que ocurre con los vectores de W:

    $$v \in W \Leftrightarrow \phi(v) = v$$

    Esto es así porque:

    $$v \in W \Rightarrow v = \underbrace{v}_{\in W} + \underbrace{0}_{\in U} \Rightarrow \phi(v) = v$$

    $$\phi(v) = v \Rightarrow v = \underbrace{w}_{=v} + u \Rightarrow u = 0 \Rightarrow v \in W$$

---

[5]Si el espacio de llegada y de salida son el mismo, es decir, $V = V'$, entonces se denota por $End(V)$

[6]Y en este caso además es un isomorfismo dentro del propio V

- Vamos a ver que ocurre con los vectores de U:

$$v \in U \Leftrightarrow \phi(v) = 0$$

Esto es así porque:

$$v \in U \Rightarrow v = \underbrace{0}_{\in W} + \underbrace{v}_{\in U} \Rightarrow \phi(v) = 0$$

$$\phi(v) = 0 \Rightarrow v = \underbrace{w}_{=0} + u \in U$$

- Si tenemos que $V = W \oplus U$, entonces $v = w + u$ de modo único y la aplicación $\phi(v) = w - u$ es lineal. A esta aplicación se la conoce como **simetría** de v con base W y dirección U.

  - Vamos a ver que ocurre con los vectores de W:

$$v \in W \Leftrightarrow \phi(v) = v$$

Esto es así porque:

$$v \in W \Rightarrow v = \underbrace{v}_{\in W} + \underbrace{0}_{\in U} \Rightarrow \phi(v) = v - 0 = v$$

$$\phi(v) = v \Rightarrow w - u = v = \underbrace{w}_{=v} + u \Rightarrow 2u = 0 \Rightarrow v = w \in W$$

  - Vamos a ver que ocurre con los vectores de U:

$$v \in U \Leftrightarrow \phi(v) = -v = -1_k \cdot v$$

Esto es así porque:

$$v \in U \Rightarrow v = \underbrace{0}_{\in W} + \underbrace{v}_{\in U} \Rightarrow \phi(v) = 0 - v = -v$$

$$\phi(v) = -v \Rightarrow w - u = -v = -w - u \Rightarrow 2w = 0 \Rightarrow v = u \in U$$

Definición (Imagen y Núcleo)

*Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, decimos que **la imagen** de ϕ es el subespacio vectorial del espacio de llegada cuyos vectores son imagen de algún vector del espacio de salida:*

$$Im(\phi) = \{\phi(v) : v \in V\} < V'$$

*Del mismo modo, decimos que **el núcleo** de ϕ es el subespacio vectorial del espacio inicial cuyos vectores se transforman en el vector nulo del espacio de llegada:*

$$\ker(\phi) = \{v \in V : \phi(v) = 0_v\} < V$$

Proposición

Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, decimos que:

1. *ϕ es suprayectiva $\Leftrightarrow Im(\phi) = V'$*
2. *ϕ es inyectiva $\Leftrightarrow \ker(\phi) = \{0_v\}$*

Demostración:

1. trivial
2. De la primera se deduce que:

- "$\Rightarrow$": supongamos que es inyectiva
  Vemos primero que: $\phi(0_v) = \phi(0_v + 0_v) = \phi(0_v) + \phi(0_v) \Leftrightarrow 0'_v = \phi(0_v) \Rightarrow 0_v \in \ker(\phi)$.
  $$v \in \ker(\phi) \Rightarrow \phi(v) = 0'_v \Rightarrow \phi(v)\phi(0) \Rightarrow v = 0 : \forall v \in \ker(\phi)$$
- "$\Leftarrow$": supongamos cierto que el $\ker(\phi) = \{0_v\}$.
  $$\phi(v_1) = \phi(v_2) \Rightarrow \phi(v_1 - v_2) = 0'_v \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker(\phi) \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_v \Rightarrow v_1 = v_2$$

Proyecciones

Para las proyecciones resulta que la base es la imagen y la dirección es el núcleo de la misma, es decir, $Im(\phi) = W$ y $\ker(\phi) = U$, siendo $V = W \oplus U$. Además, en las proyecciones $\phi^2 = \phi$.

Demostración:

- $W = Im(\phi)$
  - "$\subset$":
    $$w \in W \Rightarrow w = w + 0 \Rightarrow \phi(w) = w \Rightarrow w \in Im(\phi)$$
  - "$\supset$":
    $$w \in Im(\phi) \Rightarrow w = \phi(v) \Rightarrow \phi(v) \in W$$
- $U = \ker(\phi)$:
  $$v \in U \Leftrightarrow \phi(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker(\phi)$$
- ϕ proyección $\Leftrightarrow \phi^2 = \phi$
  - "$\Rightarrow$":
    $$\phi^2(v) = \phi^2(w + u) = \phi(\phi(w + u)) = \phi(w) = w = \phi(v)$$
    Por ello se las llama idempotencias.
  - "$\Leftarrow$": tenemos que ser capaces de componer, sabiendo que $\phi^2 = \phi$, que $V = W \oplus V$ siendo $W = \{v \in V : \phi(v) = v\}$ base de la simetría y $U = \{v \in V : \phi(v) = 0\}$ dirección de la simetría. Es decir, partimos de la hipótesis y de la definición de ambos subespacios y hay que demostrar la suma directa.
    $$v \in W \cap U \Leftrightarrow 0 = \phi(v) = v \Leftrightarrow v = 0 \Rightarrow W \cap U = \{0\}$$
    $$\phi(v) \in W \wedge v - \phi(v) \in U \Rightarrow v = \phi(v) + v - \phi(v)$$
    Esto es así porque $\phi(\phi(v)) = \phi^2(v) = \phi(v) \Rightarrow \in W$ y $\phi(v - \phi(v)) = \phi(v) - \phi^2(v) = 0 \Rightarrow \in U$.
    Solo falta ver que existe una proyección de V con base W y dirección U que como es única, esta debe coincidir necesariamente con ϕ:
    $$\varphi : V \longrightarrow V \text{ proyección con base W y dirección U} \Rightarrow W = \{v \in V : \varphi(v) = v\} \wedge U = \{v \in V : \varphi(v) = 0\} \Rightarrow$$
    $$\Rightarrow v \in W \vee v \in U : \phi(v) = \varphi(v) \Rightarrow v \in V : v = w + u \Rightarrow \phi(v) = \phi(w) + \phi(u) = \varphi(w) + \varphi(u) = \varphi(v) : \forall v \in V$$

Además, ϕ es suprayectiva:
$$\Leftrightarrow Im(\phi) = V \Leftrightarrow W = V \wedge U = \{0\} \Leftrightarrow id_v = \phi$$

Además, ϕ es inyectiva:
$$\Leftrightarrow \ker(\phi) = \{0\} \Leftrightarrow V = \{0\} \Leftrightarrow W = V \Leftrightarrow \phi = id_v$$

Simetrías

Para las simetrías resulta que $Im(\phi) = V$ y $\ker(\phi) = \{0\}$, por lo tanto todas las simetrías son inyectivas y suprayectivas y en consecuencia, isomorfismos. Además, en las simetrías $\phi = \phi^{-1}$.

Demostración:

- $V = Im(\phi)$
$$v \in V \Leftrightarrow v = w + u \Rightarrow w - (-u) = \phi(w - u) \in Im(\phi)$$
- $\{0\} = \ker(\phi)$:
$$v \in \ker(\phi) \wedge v = w+u \Rightarrow w+u = v = 0 = \phi(v) = w-u \Rightarrow u = w \Rightarrow u = w \in U \cap W = \{0\} \Rightarrow u = w = 0 = v$$
- ϕ simetría $\Leftrightarrow \phi^{-1} = \phi$
  - "$\Rightarrow$":
$$(\phi \circ \phi)(v) = \phi(\phi(v)) = \phi(w - u) = w - (-u) = w + u = v \Rightarrow \phi = id_v$$
    Por ello se las llama involuciones
  - "$\Leftarrow$": tenemos que ser capaces de componer, sabiendo que $\phi^2 = id_V$, que $V = W \oplus V$ siendo $W = \{v \in V : \phi(v) = v\}$ base de la simetría y $U = \{v \in V : \phi(v) = -v\}$ dirección de la simetría. Es decir, partimos de la hipótesis y de la definición de ambos subespacios y hay que demostrar la suma directa.
$$v \in W \cap U \Leftrightarrow -v = \phi(v) = v \Leftrightarrow v = 0 \Rightarrow W \cap U = \{0\}$$
$$v + \phi(v) \in W \wedge v - \phi(v) \in U \Rightarrow v = \frac{v + \phi(v)}{2} + \frac{v - \phi(v)}{2}$$
    Esto es así porque $\phi(v + \phi(v)) = \phi(v) + v \Rightarrow \in W$ y $\phi(v - \phi(v)) = \phi(v) - v \Rightarrow \in U$.
    Solo falta ver que existe una simetría de V con base W y dirección U que como es única, esta debe coincidir necesariamente con ϕ:
$$\varphi : V \longrightarrow V \text{ simetría con base W y dirección U} \Rightarrow W = \{v \in V : \varphi(v) = v\} \wedge U = \{v \in V : \varphi(v) = -v\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v \in W \vee v \in U : \phi(v) = \varphi(v) \Rightarrow v \in V : v = w+u \Rightarrow \phi(v) = \phi(w)+\phi(u) = \varphi(w)+\varphi(u) = \varphi(v) : \forall v \in V$$

Por último, la relación que existe, dada la misma base y la misma dirección, entre las simetrías y las proyecciones es: Sean ϕ simetría y φ la proyección asociada:
$$\begin{cases} \phi(v) = w - u \\ \varphi(v) = w \\ id(v) = w + u \end{cases} \Rightarrow (\phi + id)(v) = 2w = 2\varphi(v) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (\phi + id) = \varphi$$

Proposición (Operaciones con aplicaciones lineales)

Sean $\phi_1, \phi_2 : V \longrightarrow V'$ aplicaciones $K-lineales$, si definimos las operaciones:

- $(\phi_1 + \phi_2)(v) \overset{Def}{=} \phi_1(v) + \phi_2(v) : \forall v \in V$
- $(a \cdot \phi_1)(v) \overset{Def}{=} a \cdot \phi_1(v) : \forall v \in V$

entonces podemos considerar $(Hom(V, V'), +, \cdot)$ como un espacio vectorial.

Observación:

Del mismo modo, se puede ver que $(\phi_2 \circ \phi_1)(v)$ es también una aplicación lineal si ambas aplicaciones lo son. Con lo que $(End(V), +, \circ)$ conforma un anillo conmutativo y unitario.

Teorema

Sean V y V' espacios vectoriales y $\{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V y $v'_1, \cdots, v'_n \in V'$ vectores arbitrarios de V' el teorema dice que:
$$\exists! \phi : V \longrightarrow V' : \phi(v_i) = v'_i : \forall i = 1, \cdots, n$$
Esto quiere decir que una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales está determinada de modo único por la imagen de los vectores de la base del espacio de partida.

Demostración:

- Existencia: Sea $v \in V : v = (a_1, \cdots, a_n)_B$ quiere decir que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Ahora definimos $\phi(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i'$ y vemos que es lineal:

$$w = (b_1, \cdots, b_n)_B \Rightarrow v+w = (a_1+b_1, \cdots, a_n+b_n)_b \Rightarrow \phi(v+w) = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)v_i' = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i' + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i' = \phi(v)+\phi(w)$$

$$a \cdot v = (a \cdot a_1, \cdots, a \cdot a_n)_B \Rightarrow \phi(a \cdot v) = \sum_{i=1}^{n}(a \cdot a_i)v_i' = a \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i v_i' = a \cdot \phi(v)$$

  Y ahora vemos que se demuestra la existencia:

$$v_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)_B \Rightarrow \phi(v_i) = 1 \cdot v_i' = v_i'$$

- Unicidad:

  Suponemos que hay dos y vemos que van a cumplir: $\phi(v_i) = \varphi(v_i) = v_i' : \forall i = 1, \cdots, n$

$$\phi(v) = \phi(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i'$$

$$\varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i'$$

Ejemplo:

Esto lo que quiere decir es que si suponemos que $V = K^2$ y $V' = K^3$ entonces solo hay una aplicación lineal que cumpla que $\phi(e_1) = (2, 1, -3)$ y $\phi(e_2) = (0, 1, 0)$, con lo cual sabiendo la relación que existe entre los vectores de la base de un espacio y los vectores del espacio de llegada podemos definir de modo único la aplicación que las relaciona.

$$\phi(a_1, a_2) = \phi(a_1 e_1 + a_2 e_2) = a_1(2, 1, -3) + a_2(0, 1, 0) = (2a_1, a_1 + a_2, -3a_1)$$

Isomorfía de Espacios Vectoriales

En ocasiones conocemos poco las características del espacio vectorial que estamos manejando. En estas situaciones, es útil encontrar un isomorfismo entre el espacio que manejamos y otro que sí conocemos, pues de encontrar dicha biyección se puede trabajar con uno y otro de forma intercambiable y aplicar los resultados del uno en el otro y viceversa.

Teorema

Dos espacios vectoriales son isomorfos si y solo si la dimensión de ambos es la misma.

$$V \simeq V' \Leftrightarrow \dim_k V = \dim_k V'$$

Demostración:

- "$\Rightarrow$": vamos a ver que $B' = \{\phi(v_1), \cdots, \phi(v_n)\}$ es base de V'

  Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V y $\phi : V \longrightarrow V'$ un isomorfismo, entonces:

$$v' \in V \overset{isomf}{\Rightarrow} v' = \phi(v) = \phi(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1\phi(v_1) + \cdots + a_n\phi(v_n) \Rightarrow \{\phi(v_1), \cdots, \phi(v_n)\} \text{ es sist. gener.}$$

  Ahora vemos que son linealmente independientes:

$$0 = a_1\phi(v_1) + \cdots + a_n\phi(v_n) = \phi(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \Rightarrow a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \in \ker(\phi) = \{0\} \Rightarrow 0 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

- "$\Leftarrow$":
  Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V y $B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ base de V', entonces:
$$\exists!\phi : V \longrightarrow V' : \phi(v_i) = v'_i : \forall i = 1, \cdots, n$$
$$\exists!\varphi : V' \longrightarrow V : \varphi(v'_i) = v_i : \forall i = 1, \cdots, n$$
$$\varphi \circ \phi : V \longrightarrow V \Rightarrow (\varphi \circ \phi)(v_i) = \varphi(v'_i) = v_i \Rightarrow \varphi \circ \phi = id_V$$
  Pero del mismo modo se sigue que:
$$\phi \circ \varphi : V \longrightarrow V \Rightarrow (\phi \circ \varphi)(v_i) = \phi(v'_i) = v_i \Rightarrow \phi \circ \varphi = id_{V'}$$
  Lo que implica que ambas son biyectivas y como son lineales, ambas son isomorfismos.

Corolario

Si la dimensión de un espacio cualquiera es n, entonces es isomorfo al producto cartesiano de n veces K.
$$\dim_k V = n \Rightarrow V \simeq K^n$$

Demostración:

$$\dim_k V = n = \dim_k K^n \Rightarrow V \simeq K^n$$

Sin embargo, no podemos identificar un isomorfismo canónico que verifique este teorema, solo podemos afirmar que existe porque para poder identificarlo es necesario definir una base de V' y cambia en función de la base elegida.

Teorema (de la dimensión)

Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal y V un espacio vectorial con dimensión finita $\dim_k V = n$, entonces se cumple que:

1. $\ker(\phi)$ *y* $Im(\phi)$ *son de dimensión finita.*
2. $\dim_k \ker(\phi) + \dim_k Im(\phi) = n$

Demostración:

Como $\ker(\phi) < V$ y $\dim_k V = n$ entonces sabemos que $\dim_k \ker(\phi) \leq n$, por tanto, escogemos una base del $\ker(\phi)$ como $\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ y la extendemos a V de modo que la base de V es $B = \{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ con estos últimos $n - r$ vectores del $\ker(\phi)$.

Vamos a ver que $\{\phi(v_1), \cdots, \phi(v_r)\}$ es una base de la $Im(\phi)$:
$$v' \in Im(\phi) \Rightarrow v' = \phi(v) = \phi(a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_nv_n) =$$
$$= a_1\phi(v_1) + \cdots + a_r\phi(v_r) + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_n\phi(v_n) = a_1\phi(v_1) + \cdots + a_r\phi(v_r)$$

Y ahora vemos que estos son linealmente independientes:
$$0 = a_1\phi(v_1)+\cdots+a_r\phi(v_r) = \phi(a_1v_1+\cdots+a_rv_r) \Rightarrow a_1v_1+\cdots+a_rv_r \in \ker(\phi) \Rightarrow a_1v_1+\cdots+a_rv_r =$$
$$= a_{r+1}v_{r+1}+\cdots+a_nv_n \Leftrightarrow a_1v_1+\cdots+a_rv_r-a_{r+1}v_{r+1}-\cdots-a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_r = a_{r+1} = \cdots = a_n = 0$$

Teorema (Primer Teorema de Isomorfía)

Supongamos que $\phi : V \longrightarrow V'$ es una aplicación K-lineal se cumple que:
$$V/\ker(\phi) \simeq Im(\phi)$$
Este teorema vale siempre, sea cual sea la dimensión de V

Demostración:

Supongamos que V es de dimensión finita, entonces $\ker(\phi)$ y $Im(\phi)$ también son finitos por el teorema de la dimensión, además sabemos que:

$$\dim V = \dim\ker(\phi) + \dim Im(\phi) \Leftrightarrow \dim V - \dim\ker(\phi) = \dim Im(\phi) \Leftrightarrow \dim V/\ker(\phi) = \dim Im(\phi)$$

$$\Rightarrow V/\ker(\phi) \simeq Im(\phi)$$

Vamos ahora a ver la aplicación lineal que relaciona ambos conjuntos y establece el isomorfismo:

$$\bar{\phi} : V/\ker(\phi) \longrightarrow Im(\phi)$$

$$\overline{\phi}(\bar{v}) = \phi(v)$$

De este modo ya se cumple el isomorfismo, pero hay que comprobar que está bien definida probando que:

$$\bar{v} = \bar{w} \Rightarrow \phi(v) = \phi(w)$$

Y por último también que:

$$\phi \text{ es lineal, inyectiva y suprayectiva}$$

Teorema (Segundo Teorema de Isomorfía)

Consideramos $W, U < V$ y definimos los subespacios:

$$(W+U)/W \simeq U/(W\cap U)$$

Demostración:

Considerando W y U de dimensión finita, entonces $W+U$ es de dimensión finita y $W\cap U$ también lo es. Ahora vemos que:

$$\dim(W+U/W) = \dim(W+U) - \dim W \overset{Grassman}{=} \dim U - \dim(W\cap U) = \dim(U/W\cap U)$$

Matriz asociada a una aplicación lineal

Del mismo modo que un espacio vectorial quedaba completamente determinado a través de la base que lo componía, nuestro objetivo ahora es condensar toda la información relativa a una transformación lineal en un objeto matemático que nos sea fácil de manejar, en este caso, una matriz.

Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación K-lineal, $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V y $B' = \{v_1', \cdots, v_m'\}$ una de V'. Sabemos que ϕ está determinado de modo único por su valor en los vectores de la base B, es decir:

$$\begin{cases} \phi(v_1) = a_{11}v_1' + \cdots + a_{m1}v_m' \\ \vdots \\ \phi(v_n) = a_{1n}v_1' + \cdots + a_{mn}v_m' \end{cases}$$

Con lo cual, podemos construir una matriz:

$$M_{B,B'}(\phi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}}^{\phi(v_1)} & \cdots & \overbrace{a_{1n}}^{\phi(v_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{En base } B'} \in Mat_{m\times n}(K)$$

Luego la pregunta es clara, ¿cómo podemos recuperar la aplicación ϕ a partir de su matriz asociada en términos de B y B'? Expresamos la imagen de un vector genérico de V en términos de la base B':

$$\phi(x_1v_1+\cdots+x_nv_n) = x_1\phi(v_1)+\cdots+x_n\phi(v_n) = x_1(a_{11}v_1'+\cdots+a_{m1}v_m')+\cdots+x_n(a_{1n}v_1'+\cdots+a_{mn}v_m') =$$

$$= \underbrace{(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)}_{x_1'} v_1' + \cdots \underbrace{(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)}_{x_m'} v_m' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(v) = \phi(x_1v_1+\cdots+x_nv_n) = (a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)v_1'+\cdots(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n)v_m' = x_1'v_1'+\cdots+x_m'v_m' = v'$$

Con lo cual para transformar un vector en otro tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{x_1'}^{\phi(v)} \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}}^{\phi(v_1)} & \cdots & \overbrace{a_{1n}}^{\phi(v_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overbrace{x_1}^{v} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(v) = M_{B,B'}(\phi)\cdot v^t$$

Teorema (de la Matriz Asociada)

Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación K-lineal, $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V y $B' = \{v_1', \cdots, v_m'\}$ una de V'. Podemos expresar la imagen por ϕ de los vectores de V como:

$$\forall v \in V : \phi(v) = M_{B,B'}(\phi)\cdot v^t$$

donde la matriz de la ecuación es la matriz:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}}^{\phi(v_1)} & \cdots & \overbrace{a_{1n}}^{\phi(v_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Consideremos $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y que $\phi(e_1) = \frac{3e_1+4e_2}{5}$ y $\phi(e_2) = \frac{4e_1-3e_2}{5}$, entonces tenemos que:

$$A = M_{B_c}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = I \Rightarrow \phi^2 = id_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \text{ simetría}$$

Con lo cual, ϕ posee base W y dirección U de la simetría, entonces:

$$v = (x_1, x_2)_B \in W \Leftrightarrow \phi(v) = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow W : x_1 - 2x_2 = 0$$

Para hallar el subespacio U el procedimiento es el mismo.

Proposición (Operaciones con matrices asociadas)

- *Sean $V \overset{\phi_1,\phi_2}{\longrightarrow} V'$ dos aplicaciones lineales y B y B' bases respectivas de los espacios V y V', entonces:*
$$M_{B,B'}(\phi_1+\phi_2) = M_{B,B'}(\phi_1) + M_{B,B'}(\phi_2)$$
- *Del mismo modo, si $a \in \mathbb{K}$ y $\phi : V \longrightarrow V'$, entonces:*
$$M_{B,B'}(a\cdot\phi) = a\cdot M_{B,B'}(\phi)$$
- *Por último, $V \overset{\phi}{\longrightarrow} V' \overset{\varphi}{\longrightarrow} V''$, entonces:*
$$M_{B,B''}(\varphi\circ\phi) = M_{B,B''}(\varphi)\cdot M_{B,B''}(\phi)$$

Proposición

Además, comentamos anteriormente que $(Hom_k(V,V'),+,\cdot)$ forma un espacio vectorial, por lo que podemos ver tomando $\dim V = n$ y $\dim V' = m$ que:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : (V,V') & \longrightarrow & Mat_{m\times n}(K) \\ \phi & \longmapsto & M_{B,B'}(\phi) \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales, luego

$$Hom_k(V,V') \simeq Mat_{m\times n}(K)$$

Demostración:

- Está bien definida porque ya comprobamos que toda aplicación lineal está definida de módo único por la transformación de los vectores de una base y además cada aplicación podía escribirse en forma de matriz, que está asociada a cada ϕ.
- La suma y el producto se respetan de forma trivial.
- Que es inyectiva:

  $$\phi \in \ker(\phi) \Rightarrow \Phi(\phi) = 0 \Rightarrow \Phi(\phi) = Mat_{B,B'}(\phi) \Rightarrow \phi(v_1) = \cdots = \phi(v_n) = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow Inyectiva$$

- Ahora que es suprayectiva:

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat_{m\times n}(K) \Rightarrow \exists \phi : V \longrightarrow V' \text{ tal que } \phi(v_i) = a_{1i}v_1' + \cdots + a_{mi}v_m' \Rightarrow \exists! \phi \Rightarrow Sobre$$

  Como para que la imagen de ϕ sea A tiene que definirse a partir de los vectores de V', entonces es única porque ya demostramos que estos la determinan.

Observación:

Análogamente, si consideramos $(End_k(V),+,\circ)$ que forma un anillo unitario, entonces $End_k(V) \simeq Mat_n(K)$:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : (V,V) & \longrightarrow & Mat_{m\times n}(K) \\ \phi & \longmapsto & M_B(\phi) \end{array}$$

Equivalencia de aplicaciones lineales y relación entre sus matrices

Si dos aplicaciones lineales son esencialmente la misma aplicación, pero están expresadas respecto de bases distintas, entonces guardarán una relación muy especial que también relacionará sus matrices. En este apartado, tratamos de estudiar qué consecuencias tiene dicha relación y que ventajas le podemos sacar.

Definición (Equivalencia de aplicaciones)

Sea $A_1, A_2 \in Mat_{m\times n}(K)$ y V, V' espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente, entonces se define la ***equivalencia de matrices*** *como:*

$$A_1 \approx A_2 \Leftrightarrow \exists \phi : V \to V' \text{ lineal y bases } B_1, B_2 \subset V \text{ y } B_1', B_2' \subset V' : \begin{cases} A_1 = M_{B_1,B_1'}(\phi) \\ A_2 = M_{B_2,B_2'}(\phi) \end{cases}$$

Es decir, dos matrices son equivalentes si representan a la misma aplicación lineal respecto de bases distintas.

Para entender este concepto vamos a ver con cuidado todo el desarrollo del razonamiento teórico. Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ y B_1, B_2 bases de V y B'_1, B'_2 bases de V', definimos las matrices:

$$A_1 = Mat_{B_1,B'_1}(\phi) \qquad\qquad A_2 = Mat_{B_2,B'_2}(\phi)$$

Para entender la relación entre observar ϕ desde las bases B_1 y B'_1 con las de B_2 y B'_2 podemos ver la siguiente composición de funciones:

$$\underbrace{V}_{B_1} \xrightarrow{id_v} \underbrace{V}_{B_2} \xrightarrow{\phi} \underbrace{V'}_{B'_2} \xrightarrow{id_{v'}} \underbrace{V'}_{B'_1}$$

De este modo, podemos ver A_1 como la composición[7] de las funciones que en el diagrama anterior aparecen, luego

$$A_1 = M_{B_1,B'_1}(\phi) = M_{B'_2,B'_1}(id_{V'}) \cdot M_{B_2,B'_2}(\phi) \cdot M_{B_1,B_2}(id_V) = \underbrace{M(B'_2, B'_1)}_{Q} \cdot A_2 \cdot \underbrace{M(B_1, B_2)}_{P} = Q \cdot A_2 \cdot P$$

Sabemos, por ser matrices de paso, que $Q \in Mat_m(K)^x = Gl_m(K)$ y $P \in Mat_n(K)^x = Gl_n(K)$, es decir, existen sus inversas. Por lo tanto, podemos dar la siguiente definición para la equivalencia de matrices:

Definición (Equivalencia de matrices)

Sean $A_1, A_2 \in Mat_{m\times n}(K)$, se define la ***equivalencia*** *como:*

$$A_1 \approx A_2 \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K), Q \in GL_m(K) : A_1 = Q \cdot A_2 \cdot P$$

donde el conjunto $GL(K)$ se refiere a las matrices inversibles de los tamaños adecuados.

Observación:

Esto quiere decir que para una misma aplicación lineal existen varias representaciones matriciales en función de la base escogida que la defina, pero por medio de esta fórmula se relacionan todas ellas. Vemos, por tanto, que esta relación entre matrices establece una relación de equivalencia en $Hom(V, V')$ y las matrices que representan a la misma ϕ pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Proposición

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base del mismo y $P \in Gl_n(K)$. Expresamos P de la siguiente forma y definimos el conjunto B':

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad\qquad B' = \left\{ v'_1 = \sum_{i=1}^{n} p_{i1} v_i, \cdots, v'_n = \sum_{i=1}^{n} p_{in} v_i \right\}$$

entonces ocurre que:

1. *El conjunto B' es base de V.*
2. *$P = M(B', B)$*

Demostración:

1. Supongamos:

$$0 = a_1 v'_1 + \cdots + a_n v'_n = a_1(p_{11}v_1 + \cdots p_{n1}v_n) + \cdots + a_n(p_{1n}v_1 + \cdots p_{nm}v_n) =$$

$$= (p_{11}a_1 + \cdots p_{1n}a_n)v_1 + \cdots + (p_{n1}a_1 + \cdots + p_{nm}a_n)v_n \Rightarrow$$

[7] Nótese que la composición de funciones se hace en orden inverso al producto de las mismas.

Como los vectores v_i formaban una base por hipótesis, tenemos que:

$$\Rightarrow \begin{cases} p_{11}a_1 + \cdots p_{1n}a_n = 0 \\ \vdots \\ p_{n1}a_1 + \cdots + p_{nm}a_n \end{cases} \Rightarrow P\cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P^{-1}\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \forall i = 0, \cdots, n : a_i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{v_1', \cdots, v_n'\} \text{ l. ind.} \overset{\dim V = n}{\Rightarrow} \{v_1', \cdots, v_n'\} \text{ es base}$$

2. Probada la 1ª la segunda es inmediata porque si probamos lo primero, coger cada vector de B' y lo expreso en base B, sus coordenadas son los coeficientes de la matriz P.

Observación:

Esto nos lleva a considerar que TODA matriz inversible se puede considerar como una matriz de cambio de base dentro de un espacio vectorial.

Rango de una aplicación lineal

Una característica fundamental tanto de las aplicaciones lineales como del álgebra matricial es el rango de dicho objeto. Esta característica nos permite desde discutir sistemas lineales para elucubrar sus posibles soluciones como conocer la dimensión de la imagen del subespacio de llegada de una aplicación lineal.

Definición (Rango)

*Sea $\phi : V \to V'$ una aplicación lineal, se define el **rango de la aplicación** como:*

$$rg(\phi) = \dim_k Im(\phi)$$

Por tanto, en dimensión finita $\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim Im(\phi) = \dim \ker(\phi) + rg(\phi)$.

Sea $A \in Mat_{m\times n}(K)$ definida como $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, *se define el **rango de la matriz** como:*

$$rg(A) = \dim_k L(a_{11}e_1 + \cdots + a_{m1}e_m, \cdots, a_{1n}e_1 + \cdots + a_{mn}e_m)$$

Es decir, que $rg(A)$ es el subespacio generado por los vectores columnas de la matriz A (que están expresados en función de la base canónica de K^m).

Lema

Sea $A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(K)$ y W a un espacio vectorial cualquiera de dimensión $\dim W = m$ *escogemos una base suya $B = \{w_1, \cdots, w_m\}$ y la definición de rango de la matriz A no cambia.*

$$rg(A) = \dim L(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m, \cdots, a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m)$$

Demostración:

En el fondo, la dimensión de $L()$ no es más que el número de vectores linealmente independientes de ese sistema de generadores, por lo que yo si encuentro un conjunto de vectores linealmente independientes maximal de los que forman ese sistema, entonces serán una base. Por ello podemos considerar que hay una cantidad $p \leq n$ de vectores linealmente independientes siendo n el número de vectores que hay dentro de $L()$. Y lo mismo ocurre con el $L()$ de la condición 2) del rango de una aplicación lineal, en el que designaremos su p por q. Ahora se trata de ver que $p = q$

$$\{a_{11}e_1 + \cdots + a_{m1}e_m, \cdots, a_{1q}e_1 + \cdots + a_{mq}e_m\} \text{ supongamoslos l. ind.}$$

Tenemos que llegar a que $\{a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m, \cdots, a_{1q}w_1 + \cdots + a_{mq}w_m\}$ son linealmente independientes.

$$0 = \lambda_1(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + \lambda_q(a_{1q}w_1 + \cdots + a_{mq}w_m) =$$
$$= (\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_q a_{1q})w_1 + \cdots + (\lambda_1 a_{m1} + \cdots + \lambda_q a_{mq})w_m \Rightarrow$$

Como $B = \{w_1, \cdots, w_m\}$ es base de W, entonces:

$$0 = \underbrace{(\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_q a_{1q})}_{=0} w_1 + \cdots + \underbrace{(\lambda_1 a_{m1} + \cdots + \lambda_q a_{mq})}_{=0} w_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_q a_{1q})e_1 + \cdots + (\lambda_1 a_{m1} + \cdots + \lambda_q a_{mq})e_m =$$
$$= \lambda_1(a_{11}e_1 + \cdots + a_{m1}e_m) + \cdots + \lambda_q(a_{1q}e_1 + \cdots + a_{mq}e_m) \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_q = 0$$

Porque $B = \{e_1, \cdots, e_m\}$ es base.

Observación:

Este lema lo que nos resume es que para la definición del rango de una matriz, se pueden utilizar los vectores de la base de un espacio de dimensión m cualquiera, es decir, que no es necesario que sean los del espacio K^m ni tampoco los de la base canónica de un espacio.

Proposición

Sea $\phi : V \to V'$ una aplicación lineal y $A = M_{B,B'}(\phi)$ la matriz que la representa, entonces el rango de ambas coincide, es decir:

$$rg(\phi) = rg(A) : A = M_{B,B'}(\phi) \text{ donde } B \text{ y } B' \text{ son bases arbitrarias}$$

Es decir, lo que queremos decir es que el rango es el mismo sea cual sea la matriz que representa dicha transformación lineal.

Demostración:

$$rg(\phi) = \dim Im(\phi) = \dim L(\phi(v_1), \cdots, \phi(v_n)) = \dim L(a_{11}v'_1 + \cdots + a_{m1}v'_m, \cdots, a_{1n}v'_1 + \cdots + a_{mn}v'_m) = rg(A)$$

Proposición

Sea $A \in Mat_{m\times n}(K)$ cuyo rango es r, entonces A es equivalente a una matriz[8] con esta forma:

$$A \approx A' = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in Mat_{m\times n}(K)$$

Demostración:

$$A = M_{B,B'}(\phi), \phi : \underbrace{V}_{B_1} \to \underbrace{V'}_{B'_1}$$

Ahora definimos $B_2 = \{w_1, \cdots, w_r, \underbrace{w_{r+1}, \cdots, w_n}_{B \text{ del } \ker(\phi)}\}$ base de V y esto puede hacerse por el teorema de la dimensión. Y $B'_2 = \{\phi(w'_1), \cdots, \phi(w'_r), w'_{r+1}, \cdots, w'_m\}$ base de V', es decir, los primeros son imágenes de los primeros de B'_1 y después se amplía la base hasta V', pero para ello primero hay que comprobar que las imágenes son linealmente independientes.

$$0 = a_1\phi(w_1) + \cdots + a_r\phi(w_r) = \phi(a_1w_1 + \cdots + a_rw_r) = \phi(a_1w_1 + \cdots + a_rw_r) \Rightarrow v = a_1w_1 + \cdots + a_rw_r \in \ker(\phi) \Rightarrow$$

[8] Esta notación quiere decir que la matriz se puede dividir en 4 cuadrantes desiguales, la parte superior izquierda corresponde a una matriz identidad cuadrada de tamaño r y el resto de cuadrantes a matrices nulas que no tienen por qué ser cuadradas.

$$\Rightarrow v = a_{r+1}w_{r+1} + \cdots + a_n w_n \Rightarrow a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r = a_{r+1}w_{r+1} + \cdots + a_n w_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r - a_{r+1}w_{r+1} - \cdots - a_n w_n = 0$$

Pero como son base: $a_1 = \cdots = a_r = 0 \Rightarrow$ demostrado que son linealmente independientes. Con lo cual, quien es esta matriz?:

$$Mat_{B_2,B_2'}(\phi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \overbrace{\phi(w_1)_{B_2'}} & \overbrace{\phi(w_2)_{B_2'}} & \overbrace{\ldots} & & \overbrace{\phi(w_r)_{B_2'}} & \overbrace{\phi(w_{r+1}),\cdots=0} & \overbrace{\phi(w_n)=0} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposición

Dos matrices A_1 y A_2 son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango:

$$A_1 \approx A_2 \Leftrightarrow rg(A_1) = rg(A_2)$$

Demostración:

- "$\Rightarrow$":
$$A_1 = M_{B_1,B_1'}(\phi), A_2 = M_{B_2,B_2'}(\phi) \Rightarrow rg(A_1) = rg(\phi) = rg(A_2)$$
- "$\Leftarrow$":
$$rg(A_1) = rg(A_2) = r \Rightarrow A_1 \approx \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \text{ y } A_2 \approx \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A_1 \approx A_2$$

Observación:

Esta relación entre matrices define una relación de equivalencia que genera un nuevo espacio cociente de la forma $Mat_{m\times n}(K)/\approx = \{\bar{A} : A \in Mat_{m\times n}(K)\}$. Por ejemplo, si tenemos que $m = 4$ y $n = 3$, entonces $rg(A) \leq 3 \Rightarrow r = 0, 1, 2, 3$, es decir, hay cuatro clases de equivalencia y cada matriz pertenece a una u otra en función del rango que tenga.

Teorema

Este teorema afirma que el rango por vectores columna y por vectores fila es el mismo aunque a priori no parezca tan trivial.

$$rg(A) = rg(A^t)$$

Demostración:

$$A \approx \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = Q \cdot A \cdot P : P \in Gl_n(K), Q \in Gl_m(K) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^t = (QAP)^t$$

$$= P^t A^t Q^t : P^t \in Gl_n(K), Q^t \in Gl_m(K) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), A \in Mat_{n\times m} : \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^t \approx A^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rg\left(\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^t\right) = rg(A^t) \Leftrightarrow rg(A^t) = r = rg(A)$$

Proposición

Sea $P \in Mat_n(K)$, entonces dicha matriz es inversible si y sólo si su rango es máximo:

$$P \in Gl_n(K) \Leftrightarrow rg(P) = n$$

Demostración:

- "$\Rightarrow$":

$$P \in Gl_n(K) \Rightarrow P = M(B', B) : B = \{v_1, \cdots, v_n\} \text{ y } B' = \{v_1', \cdots, v_n'\} \text{ bases} \Rightarrow$$

  $\Rightarrow \{v_1', \cdots, v_n'\}$ l. ind. pero cada $v_i = p_{1i}v_1 + \cdots + p_{ni}$ por ser P matriz de paso $\Rightarrow rg(P) = n$

  Por aquello de que el número de columnas linealmente indepentientes era el mismo respecto de bases arbitrarias.

- "$\Leftarrow$":

  $rg(P) = n \Rightarrow B = B_c$ y $B' = \{p_1e_1 + \cdots + e_np_n\}$ siendo los vectores de B' los vectores columnas de P $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{ como } rg(P) = n \text{ B' es l. ind.} \Rightarrow B' \text{ base} \Rightarrow P = M(B', B) \in Gl_n(K)$$

SISTEMAS LINEALES

El estudio de sistemas de ecuaciones lineales es una característica fundamental muy presente en matemáticas. Tiene muy útiles aplicaciones prácticas y, en consecuencia, es conveniente utilizar una forma eficiente de resolver y discutir este tipo de sistemas. Así como el método de sustitución o de igualación sirven para cuando los sistemas son pequeños, quedan muy obsoletos cuando tenemos sistemas muy grandes o con parámetros que desconocemos. De este modo, se va a tratar en este capítulo de dar un método y desarrollar una serie de herramientas que nos permitan realizar esta tarea de forma más eficiente.

Introducción al problema

Dado un problema general, como es la resolución de un sistema lineal, vamos a tratar de encontrar una solución desde el álgebra que nos permita transformar dicho problema conceptual en un problema algebraico de tipo vectorial.

Definición (Sistema Lineal)

*Definimos un **sistema lineal** a un conjunto de ecuaciones compuestas por combinación lineal de las incógnitas, es decir:*

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} : a_{ij}, b_{ij} \in K$$

Al conjunto de las soluciones de dicho sistema lo denotamos por $\Sigma(K) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in K^n : a_{11}a_1 + \cdots + a_{1n}a_n = b_1, \cdots, a_{m1}a_1 + \cdots + a_{mn}a_n = b_m\}$.

Sin embargo, podemos considerar los a_{ij} como los coeficientes de una matriz de tamaño $m \times n$ y entonces la expresión de Σ se podría escribir como:

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Precisamente por este motivo podemos considerar en cierto modo a $A = M_{B,B'}(\phi)$ y a B las imágenes a través de ϕ de unos ciertos vectores, llegando al siguiente enunciado.

Teorema

Sean V y V' espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente, si consideramos el endomorfismo ϕ caracterizado por la matriz $A = M_{B,B'}(\phi)$, entonces

$$\Sigma(K) = \phi^{-1}(B)$$

Luego, hemos transformado el problema inicial a uno de tipo vectorial, pues resolver el sistema lineal consiste en calcular las antimágenes de cierto vector a través de ϕ. En lo sucesivo del capítulo, nuestro objetivo será responder a las siguiente preguntas:

- ¿Cuándo un sistema tiene solución?
- ¿Cuántas soluciones puede tener mi sistema?
- ¿Cómo puedo encontrar las soluciones del sistema?

Sistemas Homogéneos

Definición (Sistema Homogéneo)

*Sea Σ un sistema lineal con coeficientes en K, se dice que es **homogéneo** si la matriz B es nula, es decir, si es de la forma:*

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad : a_{ij}, b_{ij} \in K$$

Proposición

Si Σ es un sistema homogéneo, entonces el conjunto de soluciones $\Sigma(K)$ es un subespacio vectorial de K^n de dimensión $n - rg(A)$.

Demostración:

Si consideramos V y V' como espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente y $A = M_{B,B'}(\phi)$ como la matriz de una aplicación lineal entre ambas, entonces dijimos que $\Sigma(K) = \phi^{-1}(B)$, pero como hemos dicho que el sistema es homogéneo, entonces se reescribe como $\Sigma(K) = \phi^{-1}(0)$. Por tanto, $v \in \Sigma(K) \Leftrightarrow \phi(v) = 0 \Rightarrow \Sigma(K) = \ker \phi$ y ya vimos que esto siempre es un subespacio vectorial. Además vista esa igualdad, la dimensión es trivialmente la del enunciado.

Método de Gauss

Este método consiste en calcular una matriz equivalente a A mucho más apropiada para poder resolver el sistema, esto es, una matriz triangular inferior.

Método genérico de resolución

Podemos decir que siendo el sistema lineal homogéneo:

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Si $rg(A) = r > 0$, entonces podemos dejar sólo las r primeras filas, pues las últimas filas serán combinación lineal de las anteriores que sí que son linealmente independientes, quedando el sistema de la siguiente forma:

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ahora no hay más que pasar al otro lado de la igualdad $n-r$ incógnitas para que la matriz A de coeficientes nos quede cuadrada, una vez hecho el sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \\ \vdots \\ -a_{n,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \\ \vdots \\ -a_{n,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y-2z+t=0 \\ x-2y+z-2t=0 \\ -2x+y+z+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z+t=0 \\ -3y+3z-3t=0 \\ 3y-3z+3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z+t=0 \\ -3y+3z-3t=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Estos sistemas son todos equivalentes y poseen el mismo conjunto de soluciones, lo único que cambia es la matriz A que en este caso es mucho más sencilla.

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma(K) = \Sigma''(K) < K^4 : \dim \Sigma(K) = 4 - rg(A'') = 2$$

Tras resolverlo todo, tenemos que:

$$\Sigma(K) = \{(x,y,z) \in K^4 : x = z, y = z - t\} \Rightarrow \Sigma(K) : \begin{cases} x = z \\ y = z - t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

Para ahora hallar una base, decimos que van a ser dos vectores, por lo que elegimos dos vectores que entre sí sean linealmente independientes y de dimensión 4. Lo más sencillo es dar todo 0 menos una de las variables independientes 1 en cada uno de ellos, el resto de valores toman valor en función de estos si pertenecen al subespacio así que:

$$\Rightarrow B = \{(?,?,1,0),(?,?,0,1)\} = \{(1,1,1,0),(0,-1,0,1)\}$$

Esto también se puede escribir de forma matricial:

$$P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z & -t \\ -z & 2t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2z & -t \\ -z & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z & -t \\ -z & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z-t \end{pmatrix}$$

Que vemos que sale lo mismo que anteriormente.

Sistemas no homogéneos

Los sistemas no homogéneos no poseen todos los $b_i = 0$ y las condiciones que los rigen cambian, por ejemplo, el conjunto de las soluciones ya no forma un subespacio vectorial porque el vector nulo no pertenece a él; en este caso forma un espacio afín del que ya se verán sus características.

Sea el sistema lineal no homógeneo (Σ_b) y su sistema homogéneo (Σ_0) asociado: Lo primero de todo, posee un sistema lineal asociado que sí es homogéneo.

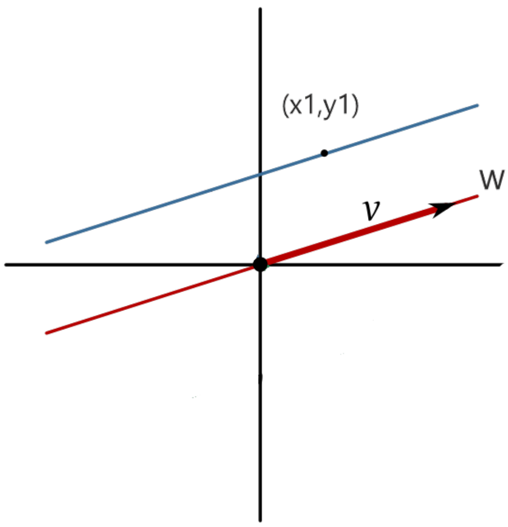
$$\Sigma_b : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_0 : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El teorema dice concretamente que:

1. $\Sigma_b(K) \neq \emptyset \Leftrightarrow rg(A) = rg(A^*)$
2. $\Sigma_b(K) \neq \emptyset \Rightarrow \Sigma_b(K) = \{(a_1, \cdots, a_n) + (c_1, \cdots, c_n) : (c_1, \cdots, c_n) \in \Sigma_0(K) \text{ y } (a_1, \cdots, a_n) \in \Sigma(K)\}$

Es decir, sus soluciones se expresan como un vector de dimensión n, que es una solución arbitraria del sistema, más las soluciones de su sistema homogéneo asociado. Gráficamente esto quedaría representado por elegir un punto cualquiera del espacio que sea solución (un punto es una n-tupla ordenada que posee unas coordenadas en el espacio) y después sumarle todo el subespacio vectorial que genera el sistema homogéneo asociado, es decir, trazar la construcción geométrica que sea el subespacio del sistema homogéneo, pero de forma paralela por el punto que habíamos hallado.



Demostración:

1. Definimos $\phi : K^n \longrightarrow K^m : M_{B_{c_n}, B_{c_m}}(\phi) = A$ donde $B_{c_n} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $B_{c_m} = \{e'_1, \cdots, e'_m\}$. De este modo, $v = (x_1, \cdots, x_n) \in K^n \Rightarrow \phi(v) = (x'_1, \cdots, x'_m) \in K^m \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

   Ahora vemos que si el sistema es compatible, entonces hay al menos un vector solución cuya imagen[1] por ϕ es $(b_1, \cdots, b_m)$, por lo que:

   $\Sigma_b(K) \neq \emptyset \Leftrightarrow (b_1, \cdots, b_m)_{B_{c_m}} \in Im(\phi) \Leftrightarrow b_1 e'_1 + \cdots + b_m e'_m \in Im(\phi) = L\left(\phi(e_1), \cdots, \phi(e_m)\right) \Leftrightarrow$

[1]Porque multiplicar por la matriz A es como aplicar ϕ

$$\Leftrightarrow L\left(b_1e_1' + \cdots + b_me_m', \phi(e_1), \cdots, \phi(e_m)\right) = Im(\phi) \Leftrightarrow \dim L = \dim Im(\phi) \Leftrightarrow rg(\phi) = rg(A \mid B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow rg(A) = rg(A \mid B)$$

2. Sea $(a_1, \cdots, a_n) \in \Sigma_b(K)$ y $(c_1, \cdots, c_n) \in \Sigma_0(K)$, entonces vemos que:

$$A\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = B, A\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (a_1{+}c_1, \cdots, a_n{+}c_n) \in \Sigma_b(K) \Rightarrow A\cdot\begin{pmatrix} a_1 + c_1 \\ \vdots \\ a_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + 0 \\ \vdots \\ b_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Regla de Cramer

Para la resolución de sistemas lineales que sean compatibles determinados, existe un método muy eficiente conocido como la *regla de Cramer*:

$$\Sigma : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Rightarrow \left(x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{|A|}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{|A|}, z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{|A|} \right)$$

<u>Demostración</u>:

ESTRUCTURA DE ENDOMORFISMOS

Vamos a estudiar en este capítulo la estructura de unas aplicaciones lineales muy concretas, las que van de un cuerpo en sí mismo. La intención de este capítulo es clasificar los endomorfismos según su clase de equivalencia a través de los conceptos que se van a desarrollar.

Definición (Semejanza de Aplicaciones)

Sea $\phi : V \to V$ una aplicación lineal de un espacio vectorial V en sí mismo, con dimensión $\dim V = n$*, entonces definimos la **semejanza entre matrices** como:*

$$A \sim A' \Leftrightarrow \exists B, B' \subset V : \begin{cases} A = M_B(\phi) \\ A' = M_{B'}(\phi) \end{cases}$$

De nuevo, como en el capítulo anterior, dada la aplicación lineal esta queda definida por su matriz $A = M_B(\phi)$ y la matriz $A' = M_{B'}(\phi)$ respecto de otra base B' queda relacionada con primera por medio de una matriz de paso:

$$A' = P^{-1}AP : P = M(B', B) \in Gl_n(K)$$

Por tanto, podemos dar la siguiente definición equivalente a la primera dada:

Definición (Semejanza de Matrices)

*Sean $A, A' \in Mat_n(K)$ dos matrices de dimensión n, decimos que estas dos matrices **son semejantes** si y sólo si existe una matriz de paso entre ambas:*

$$A \sim A' \Leftrightarrow \exists P \in Gl_n(K) : A' = P^{-1}AP$$

Observación:

Esta relación entre matrices define una relación de equivalencia en el espacio $End(V)$.

POLINOMIO MÍNIMO Y CARACTERÍSTICO

Polinomio mínimo de un endomorfismo

Consideramos $A \in Mat_n(K)$ y el conjunto de vectores $\{I_n, A, A^2, \cdots, A^{n^2}\} \subset Mat_n(K)$. Como $\dim Mat_n(K) = n^2$ y en ese conjunto hay $n^2 + 1$ vectores, necesariamente ese conjunto debe ser linealmente dependiente. Con lo cual, $\exists a_0, \cdots, a_{n^2} \in K : a_0 I + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$ donde $\exists a_i \neq 0$, es decir, en cierta manera se puede interpretar que A es la raíz del polinomio:

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n^2} x^{n^2})(A) = f(A) : f \neq 0$$

Por tanto, es lógico preguntarse cuál es el polinomio mínimio para el cuál esto ocurre.

Definición (Polinomio Mínimo de un Endomorfismo)

Sea $\phi \in End(V)$ y dada la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi_\phi : K[x] & \longrightarrow & End(V) \\ p(x) & \longmapsto & p(\phi) \end{array}$$

*se define el **polinomio mínimo** de un endomorfismo como el mínimo elemento en el $\ker \Phi_\phi$ y lo denotamos por $q_\phi(x)$, es decir, el polinomio mínimo es el polinomio de menor grado que se anula en el endomorfismo.*

Proposición

Sea $A \in Mat_n(K)$, siempre existe un polinomio no nulo y de grado al menos 1 del que es raíz.

$$\forall A \in Mat_n(K) : \exists f \in K[x] : f(A) = 0$$

Definición (Polinomio Mínimo de una Matriz)

Sea $A \in Mat_n(K)$ y dada la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A : K[x] & \longrightarrow & Mat_n(K) \\ p(x) & \longmapsto & p(A) \end{array}$$

*se define el **polinomio mínimo de una matriz** como el mínimo elemento del $\ker \Phi_A$ y se denota por $q_A(x)$, es decir, el polinomio mínimo es el polinomio de menor grado que se anula en la matriz.*

Proposición

Sea $A \in Mat_n(K)$, existe un único polinomio $q_A \in K[x]$ que cumple:

- $q_A \neq 0$
- q_A *mónico*
- $q_A(A) = 0$
- $f(A) = 0 \Rightarrow q_A \mid f$

Demostración:

Las tres primeras condiciones ya se han visto donde se explica la parte de como descubrir dicho polinomio, por lo que vamos a demostrar la 3ª:

$$f(A) = 0 \Rightarrow f(A) = 0 = g(A)q_A(A) + r(A) \Rightarrow r(A) = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow q_A \mid f$$

Vemos que $r(A) = 0 \Rightarrow r = 0$ porque q_A es mínimo, entonces $r(A)$ que es de grado más pequeño no puede anularse a menos que sea el polinomio nulo.

Veamos que es único:

$$q_A, q'_A \Rightarrow q_A \mid q'_A \text{ pero también } q'_A \mid q_A \Rightarrow q_A = q'_A$$

Proposición

Sean $A, A' \in Mat_n(K) : A \sim A'$, entonces tienen el mismo polinomio mínimo.

Demostración:

$$q_A(A') = q_A(P^{-1}AP) = (a_0 + a_1x + \cdots + x^m)(P^{-1}AP) = a_0I + a_1P^{-1}AP + \cdots + (P^{-1}AP)^m =$$

$$= a_0I + P^{-1}a_1AP + \cdots + P^{-1}A^mP = P^{-1}(a_0I + a_1A + \cdots + A^m)P = P^{-1}\underbrace{q_A(A)}_{=0}P = 0$$

El último objetivo de este razonamiento es poder afirmar que el polinomio mínimo de un endomorfismo y de su representación matricial coinciden. Para ello, analizamos la matriz del endomorfismo resultante de evaluarlo en un polinomio:

$$f = a_0 + \cdots + a_mx^m \Rightarrow f(\phi) = a_0id_v + \cdots + a_m\phi^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_B(f(\phi)) = a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m = f(A) : A = M_B(\phi)$$

y vemos precisamente que la matriz final es la misma que la resultante de evaluar la matriz A del endomorfismo en f, es decir, $f(A) = M_B(f(\phi))$.

Por tanto, de aquí podemos concluir que para que el endomorfismo $q_\phi(\phi)$ sea el endomorfismo nulo, su matriz en cualquier base ha de ser la matriz nula, es decir[1]

$$q_\phi(\phi) = 0 \Leftrightarrow M_B(q_\phi(\phi)) = 0 \Leftrightarrow q_\phi(A) = 0 \Rightarrow q_\phi \mid q_A$$

$$q_A(A) = 0 \Leftrightarrow M_B(q_A(\phi)) = 0 \Leftrightarrow q_A(\phi) = 0 \Rightarrow q_A \mid q_\phi$$

Este resultado nos permite ver $q_\phi(\phi)$ como el endomorfismo nulo o como la matriz nula en función de lo que mejor nos convenga.

Por tanto, visto que el razonamiento de polinomio mínimo se aplica para cualquier matriz y que dos matrices semejantes conservan su polinomio mínimo, podemos hacer referencia a el polinomio mínimo del endomorfismo **sea cual sea la matriz que lo representa**, puesto que este se conserva independientemente de la base en la que esté expresada su matriz.

Ejemplo:

- Sea $f \in K[x]$ mónico, donde f es no constante$\Rightarrow C_f \Rightarrow q_{C_f} = f$ donde C_f es la matriz compañera del polinomio f.
- Si ϕ es proyección, entonces:

$$\phi^2 = \phi \Leftrightarrow (x^2 - x)(\phi) = 0 \Leftrightarrow q_\phi = \begin{cases} x(\phi) = 0 & \Rightarrow \phi = 0 \\ (x-1)(\phi) = 0 & \Rightarrow \phi = id \\ (x^2 - x)(\phi) = 0 & \Rightarrow \phi \neq 0, id \end{cases}$$

- Si ϕ es simetría, entonces:

$$\phi^2 = id \Leftrightarrow (x^2 - 1)(\phi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(\phi) = 0 & \Rightarrow \phi = id \\ (x+1)(\phi) = 0 & \Rightarrow \phi = -id \\ (x^2 - x)(\phi) = 0 & \Rightarrow \phi \neq 0, -id \end{cases}$$

- Supongamos que $q_\phi = (x-1)(x-r) : r \neq 0, 1, -1$ donde decimos que este endomorfismo es una homología general de razón r.

[1] En la segunda ecuación se puede concluir que $q_A(\phi) = 0$ porque $M_B(q_A(\phi)) = 0$ para cualquier base B ya que es cierto que A cambia en función de la base, pero matrices semejantes tienen el mismo polinomio mínimo, luego $q_A = q_{A'}$.

Polinomio mínimo de un endomorfismo y un vector

Lógicamente, si $q_\phi(\phi) = 0$, entonces $\forall v \in V : q_\phi(\phi)(v) = 0$ puesto que es la aplicación nula. Por tanto, surge la siguiente pregunta: ¿cuál es el polinomio mínimo $q_v(x)$ para que $q_v(\phi)(v) = 0$?, es decir, se puede redefinir el concepto de polinomio mínimo, pero ahora respecto de dos objetos $q_{\phi,v}$ siendo $v \in V : v \neq 0$ y $\phi \in End(V)$ un endomorfismo.

Definición (Polinomio mínimo de un Endomorfismo y un Vector)

Sea $\phi \in End(V)$ y $v \in V$ no nulo, dada la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{v,\phi} : K[x] & \longrightarrow & V \\ p(x) & \longmapsto & p(\phi)(v) \end{array}$$

se define el ***polinomio mínimo de un endomorfismo y un vector*** *como el mínimo del* $\ker \Phi_{v,\phi}$ *y se denota por $q_{v,\phi}$, es decir, es el polinomio de menor grado para el cual la imagen de v a través del endomorfismo $q(\phi)$ es nula.*

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$ y $v \in V$, entonces:

$$q_{v,\phi} \mid q_\phi$$

Demostración:

Se tiene trivialmente por ser q_ϕ el mínimo donde se anulan todos los v y ser $q_{v,\phi}$ el mínimo donde se anula v (no necesariamente los demás).

Ejemplo:

Imaginemos que tenemos una proyección cuya matriz respecto de la base canónica es $M_{B_c}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el polinomio mínimo de esta proyección? Por todo lo desarrollado antes es fácil ver que $q_\phi(\phi) = x^2 - x$, pero ¿quién es $q_{\phi,e_1}(\phi)$ y q_{ϕ,e_2}?.

Aplicamos la proyección al primer vector y segundo vector: $\phi(e_1) = e_1$ y $\phi(e_2) = 0$. Entonces $q_{\phi,e_1} = x - 1(\phi)$ y $q_{\phi,e_2} = x$ porque $(x-1)(\phi) = \phi - id$ y ahora $\phi(e_1) - id(e_1) = e_1 - e_1 = 0$, es decir, al evaluar e_1 en q_{ϕ,e_1} obtenemos que el resultado es 0. Del mismo modo que con $(x)(\phi) = \phi$ y ahora $\phi(e_2) = 0$.

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$ y $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, entonces:

$$q_\phi = mcm\{q_{\phi,v_1}, \cdots, q_{\phi,v_n}\}$$

Demostración:

Vamos a ver que $q_\phi = \bar{q}$ y para ello basta con ver que se dividen mutuamente, es decir, que $q_\phi \mid \bar{q}$ y $\bar{q} \mid q_\phi$:

$$q_i \mid q_\phi \Rightarrow \bar{q} \mid q_\phi$$

Por otro lado:

$$\bar{q} = q_i \cdot g_i : i = 1, 2, \cdots, n$$

Con lo cual, vemos que le pasa a $\bar{q}(\phi)$ cuando se le aplica a v_i:

$$[\bar{q}(\phi)](v_i) = [(g_i q_i)(\phi)](v_i) = [g_i(\phi) \circ q_i(\phi)](v_i) = g_i(\phi)\left(\underbrace{q_i(\phi)(v_i)}_{=0}\right) = g_i(\phi)(0) = 0 \Rightarrow [\bar{q}(\phi)](v_i) == 0$$

Por tanto, $\bar{q}(\phi)$ es la aplicación nula porque se anula sobre cada uno de los vectores de la base, luego $q_\phi \mid \bar{q}$.

Cálculo del polinomio mínimo

Ya visto el concepto de polinomio mínimo, en la práctica basta con calcular el polinomio mínimo de cada uno de los vectores de la base del espacio vectorial y saber que el buscado es el m.c.m. de ellos.

Además, la búsqueda del polinomio mínimo de cada vector se puede plantear de la siguiente forma: como lo que se busca es una expresión $a_0 v + a_1\phi(v) + \cdots + a_n\phi^n(v_n)$ de tamaño mínimo y con algún $a_i \neq 0$, entonces basta calcular $v, \phi(v), \phi^2(v), \cdots \in V$ hasta que el conjunto sea linealmente dependiente[2], luego tendremos cada a_i.

Ejemplo:

Sea $\phi \in End(V)$ representado en la base canónica por

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calculamos las imágenes de los vectores de la base $\phi(e_1) = e_2 + e_3$ y $\phi^2(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3$. Vemos incluso que, antes de que el número de vectores sea mayor que la dimensión de R^3, ya tenemos una colección de vectores que guardan dependencia lineal de la siguiente forma: $\phi^2(v) - 2e_1 - 2\phi(e_1) = 0$, por tanto, tenemos que $[(x^2-x-2)(\phi)](e_1) = 0$ luego $q_{\phi,e_1} = x^2-x-2$. Realizando este procedimiento con el resto de vectores y hallando el m.c.m. tenemos el q_ϕ.

Polinomio característico de un endomorfismo

Aunque el polinomio mínimo goza de buenas propiedades, tenemos una herramienta más potente: el polinomio característico. Este especial polinomio nos permitirá determinar desde el número y dimensión de los subespacios invariantes por ϕ hasta poder expresar la matriz de ϕ de la forma más sencilla posible.

Definición (Autovalores y Vectores Propios)

*Sea $\phi \in End(V)$, $\lambda \in K$ y $v \neq 0$, definimos los **vectores propios** del endomorfismo como aquellos que verifican:*

$$\phi(v) = \lambda \cdot v$$

*y definimos los **autovalores** como todos los valores de λ para los cuales existen autovectores.*

Definición (Polinomio Característico)

*Sea $\phi \in End(V)$ y $A = M_B(\phi)$, definimos el **polinomio característico de** ϕ como:*

$$p_\phi(x) = |A - x \cdot I_n|$$

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$, $A = M_B(\phi)$ y $A' = M_{B'}(\phi)$, entonces el polinomio característico respecto de ambas matrices coincide, es decir, matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

[2] Realmente este polinomio es el mínimo porque si existiera otro de grado menor para el cual se anulase el vector evaluado en el endomorfismo resultante, entonces habría un conjunto más pequeño linealmente independiente y eso no puede ser.

Demostración:

Sean $A = M_B(\phi)$ y $A' = M'_B(\phi)$, ambas matrices por ser semejantes cumplen que $A' = P^{-1}AP$. Veamos que:

$$p_{A'} = |A' - xI_n| = |P^{-1}AP - P^{-1}xP| = |P^{-1}(A - xI_n)P| = |P^{-1}||(A - xI_n)|P| = |(A - xI_n| = p_A$$

Observación:

El resultado anterior prueba que la definición de polinomio característico es adecuada porque es independiente de la base en la que yo represente la matriz de ϕ, luego tiene sentido hablar de $p_\phi(x)$ en vez de $p_A(x)$.

Definición (Espectro)

Sea $\phi \in End(V)$, se define el ***espectro*** *de un endomorfismo como el conjunto de los autovalores :*

$$\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_t\} : q_\phi(\lambda_i) = 0$$

Teorema de Caley-Hamilton

Aunque hemos adelantado que el polinomio característico tendrá muy buenas propiedades y que el mínimo y el característico coinciden, es fundamental probar que el polinomio característico se anula en el endomorfismo porque la gran mayoría de resultados provechosos de esta definición utilizarán dicho resultado.

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$, entonces λ es autovalor si y solo si:

- $q_\phi(\lambda) = 0$
- $|A - \lambda I| = 0$

Demostración:

- $2 \Rightarrow 1$
$$\phi(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow q_{\phi,v} = x - \lambda \Rightarrow x - \lambda \mid q_\phi \Rightarrow q_\phi(\lambda) = 0$$
- $1 \Rightarrow 2$
$$q_\phi(\lambda) = 0 \Rightarrow x - \lambda \mid q_\phi \Rightarrow q_\phi = (x - \lambda)g(x)$$
Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base consideremos $q_i = q_{\phi,v_i}$, entonces si $x - \lambda \nmid q_1, \cdots, q_n \Rightarrow x - \lambda \nmid mcm\{q_1, \cdots, q_n\}$ pero ocurre que $q_\phi = mcm\{\cdots\}$ luego necesariamente $x - \lambda \mid q_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Por tanto, se tiene (podemos escoger que es q_1 porque el orden no importa) que $q_1 = q_{\phi,v_i} = (x - \lambda)h(x)$. Esto necesariamente conlleva a que $(\phi - \lambda \cdot id)(h(\phi)(v_1)) = 0$, $h(\phi)(v_1)$ no puede ser 0 porque sería el polinomio mínimo de v_1 y no lo es luego precisamente $h(\phi)(v_1) = v$, es decir, es el vector donde se cumple la desigualdad.
- $2 \Rightarrow 3$
Si expresamos en términos de una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de forma que queda $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ vemos que como $\phi(v) = \lambda \cdot v$ se ve fácilmente que $(A - \lambda \cdot I_n)(v) = 0$, luego como ese sistema tiene solución no nula el determinante de la matriz del sistema es 0, por lo tanto tenemos que $|A - \lambda \cdot I_n| = 0$

Lema

Sea $\phi \in End(V)$, el polinomio mínimo y característico tienen las mismas raíces.

Demostración:

Tenemos la siguiente cadena de equivalencias

$$q_\phi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0 \Leftrightarrow p_\phi(\lambda) = 0$$

por tanto, λ es raíz de q_ϕ si y sólo si lo es de p_ϕ.

Lema

Sea $f \in K[x]$ un polinomio irreducible, si f^a es la potencia exacta que divide a q_ϕ, entonces

$$f^a | q_\phi,\ f^a | q_\phi,\ f^{a+1} \nmid q_\phi \Rightarrow f^a | p_\phi$$

Demostración:

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Llamamos $q_i = q_{\phi, v_i}$

Sabemos que $q_\phi = mcm\{q_1, \ldots, q_n\}$. Queremos ver que hay vectores en V cuyo polinomio mínimo es exactamente f^a. Razonamos por reducción al absurdo.

Supongamos $q_i = f^{a_i} g_i$ tal que

$$f^{a_i} || q_i : a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a$$

Supongamos que $a_n < a$. Entonces $mcm\{q_1, \ldots, q_n\} = f^{a_n} \cdot mcm\{g_1, \ldots, g_n\}$. Sin embargo, esto es una contradicción ya que $mcm\{q_1, \ldots, q_n\} = q_\phi$, y por hipótesis $f^a | q_\phi$, pero $a_n < a$.

Por tanto, $a_n = a$

$$\Rightarrow q_{\phi, v_n} = f^a \cdot g_n \Rightarrow 0 = f^a(\phi)(\underbrace{g_n(\phi)(v_n)}_{v \neq 0}) \Rightarrow q_{\phi, v} = f^a$$

Ya que si $v = 0, q_{\phi, v_n}$ sería como mucho g_n, pero g_n es menor que el mínimo.

Por tanto, $\exists v \in V, v \neq 0 : q_{\phi, v} = f^a$

Llamamos $m = gr(f^a)$. Por las propiedades del polinomio mínimo, sabemos que $\nexists f \in K[x], gr(f) < m : f_{\phi, v} = 0$.

Veamos que los vectores $\{v, \phi(v), \ldots, \phi^{m-1}(v)\}$ son linealmente independientes. Supongamos

$$0 = a_0 v + a_1 \phi(v) + \ldots + a_{m-1} \phi^{m-1}(v)$$

$$0 = \left[(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1})(\phi) \right] (v)$$

Sin embargo, estamos diciendo que el polinomio $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}$ que sobre $\phi(v)$ vale 0, pero su grado es menor que m, que es el grado del mínimo, lo cual es imposible salvo que el polinomio sea nulo.

$$a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$$

Extendemos ahora estos m vectores independientes a una base de todo el espacio.

$$B = \{v, \phi(v), \ldots, \phi^{m-1}(v), v_{m+1}, \ldots, v_n\} \text{ base de } V$$

Veamos que $f^a | p_\phi$.

$$v \mapsto \phi(v), \phi(v) \mapsto \phi^2(v), \ldots, \phi^{m-1}(v) \mapsto \phi^m(v)$$

Los primeros vectores de la base van al siguiente de la base, excepto el $\phi^{m-1}(v)$, que va a $\phi^m(v)$. Estudiamos dicha imagen.

$$m = gr(f^a) \Rightarrow f^a = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0 \Rightarrow \phi^m(v) + b_{m-1}\phi^{m-1}(v) + b_1\phi(v) + b_0 v = 0$$

$$\phi(\underbrace{\phi^{m-1}(v)}_{v_m}) = \phi^m(v) = -b_0 v - b_1\phi(v) - \ldots - b_{m-1}\phi^{m-1}(v)$$

$$A = M_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} C_{f^a} & M \\ \hline 0 & N \end{array}\right)$$

$p_\phi = |A - xI_n| = \left|\begin{array}{c|c} C_{f^a} - xI_m & M \\ \hline 0 & N - xI_{n-m} \end{array}\right| \overset{\text{Triangular inferior}}{=} |C_{f^a} - xI_m| \cdot |N - xI_{n-m}| = p_{C_{f^a}} \cdot p_N = \pm f^a \cdot p_N$

Por tanto, $f^a | p_\phi$ $\square$

A partir de aquí, tenemos $\begin{cases} q_\phi = f_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot f_t^{a_t} \\ \pm p_\phi = f_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot f_t^{e_t} \cdot f_{t+1}^{e_{t+1}} \cdot \ldots \cdot f_s^{e_s} \end{cases}$ $\quad 1 \leq a_i \leq e_i$

Veamos que los factores $f_{t+1}^{e_{t+1}} \cdot \ldots \cdot f_s^{e_s}$ no pueden existir, es decir, que si $f \in K[x]$ irreducible y $f|p_\phi \Rightarrow f|q_\phi$. La idea de la demostración se basa en la reducción al caso de que f fuera de grado 1, utilizando la técnica de extensión del cuerpo a un cuerpo mayor donde sabemos que f descompone completamente.

Sea $K \subset \tilde{K} : p_\phi$ descompone completamente en $\tilde{K}[x]$. Sea $A = M_B(\phi) \in Mat_n(K) \subseteq Mat_n(\tilde{K})$

Sea $\tilde{V} = \tilde{K}^n$ un $\tilde{K}$- espacio vectorial. En este espacio $\tilde{K}^n$ fijamos la base $\tilde{B}_c$.

Definimos $\tilde{\phi} \in End(\tilde{K}^n)$ tal que $M_{\tilde{B}_c}(\tilde{\phi}) = A$. Se cumple que:

- $p_{\tilde{\phi}} = |A - xI_n| = p_\phi$
- $\tilde{K}[x] \ni q_{\tilde{\phi}} | q_\phi \in K[x]$

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $f \nmid q_\phi \overset{f \text{ irreducible}}{\Rightarrow} 1 = mcd(f, q_\phi)$. Por Bézout:

$$1 = a \cdot f + b \cdot q_\phi$$

Por otra parte, ya hemos probado que $p_\phi = p_{\tilde{\phi}}$ y $q_{\tilde{\phi}}$ tienen las mismas raíces. Sea

$$\tilde{\lambda} \in \tilde{K} : \underbrace{f(\tilde{\lambda})}_{p_{\tilde{\phi}}(\tilde{\lambda})=0} = 0 \Rightarrow x - \tilde{\lambda} | f$$

Sea $\tilde{v} \neq 0 : \tilde{\phi}(\tilde{v}) = \tilde{\lambda} \cdot \tilde{v}$, es decir, que $\tilde{v}$ es vector propio del autovalor $\tilde{\lambda}$. Descomponiendo $f = g(x)(x - \tilde{\lambda})$ tenemos que:

$$1 = a(x)g(x)(x - \tilde{\lambda}) + b(x)q_\phi(x)$$

Usando el endomorfismo $\tilde{\phi}$:

$$id_{\tilde{V}} = a(\tilde{\phi}) \circ g(\tilde{\phi}) \circ (\tilde{\phi} - \tilde{\lambda} \cdot id_{\tilde{V}}) + b(\tilde{\phi}) \circ q_\phi(\tilde{\phi})$$

OBS: $q_\phi(\tilde{\phi}) = 0$

$$id_{\tilde{V}} = a(\tilde{\phi}) \circ g(\tilde{\phi}) \circ (\tilde{\phi} - \tilde{\lambda} \cdot id_{\tilde{V}})$$

Aplicamos esta identidad entre aplicaciones lineales al vector $\tilde{v}$ elegido previamente:

$$\tilde{v} = id_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = a(\tilde{\phi}) \left(g(\tilde{\phi})(\tilde{\phi}(\tilde{v}) - \tilde{\lambda}\tilde{v}) \right)$$

Por construcción de $\tilde{v} : \tilde{\phi}(\tilde{v}) - \tilde{\lambda}\tilde{v} = 0$

$$\tilde{v} = a(\tilde{\phi})\left(g(\tilde{\phi})(\tilde{\phi}(0)\right) = 0(!)$$

Por tanto, todos los irreducibles de q_ϕ y de p_ϕ son los mismos, cambiando únicamente los exponentes. Así,

$$q_\phi | p_\phi$$

□

Teorema (de Caley-Hamilton)

Todo endomorfismo es raíz de su polinomio característico, es decir,

$$p_\phi(\phi) = 0$$

Demostración:

La demostración de este teorema consiste en probar que el polinomio mínimo siempre divide al polinomio característico:

$$q_\phi | p_\phi$$

Porque implica directamente que $p_\phi(\phi) = 0$

Proposición

Sea q_ϕ el polinomio mínimo y p_ϕ el polinomio característico, entonces poseen los mismos irreducibles en su descomposición salvo la multiplicidad de estos, que es mayor en la del característico.

$$1 \leq a_i \leq e_1 : q_\phi = f_1^{a_1} \cdot \dots \cdot f_t^{a_t} \wedge \pm p_\phi = f_1^{e_1} \cdot \dots \cdot f_t^{e_t} \cdot f_{t+1}^{e_{t+1}} \cdot \dots \cdot f_s^{e_s}$$

Demostración:

Sea $q_\phi = f_1^{a_1} \cdot \dots \cdot f_t^{a_t}$ y $\pm p_\phi = f_1^{e_1} \cdot \dots \cdot f_t^{e_t} \cdot f_{t+1}^{e_{t+1}} \cdot \dots \cdot f_s^{e_s}$. Vamos a ver que estos factores adicionales no pueden existir, y en consecuencia solo cambian los exponentes de cada factor irreducible, pero no los factores irreducibles. Para ello basta con demostrar que $f \mid p_\phi \Rightarrow f \mid q_\phi$

Sea $f \in K[x] : f$ es irreducible y $f \mid p_\phi \Rightarrow f \mid q_\phi$. Vamos a extender el cuerpo K a un cuerpo $\tilde{K}$ de manera que $K \subset \tilde{K}$ y p_ϕ descompone en $\tilde{K}[x]$. Entonces tenemos que la matriz de A también tiene sentido en $\tilde{K}$: $A = M_B(\phi) \in Mat_n(K) \subset Mat_n(\tilde{K})$. Si fijamos una base en un espacio del nuevo cuerpo, entonces ahora A puede representar la matriz de otro endomorfismo dentro de ese cuerpo, por lo que ahora si llamamos $\tilde{V} = \tilde{K}^n$ donde es $\tilde{K}-$espacio vectorial y definimos $\tilde{B}_c$ podemos considerar $\tilde{\phi} \in End(\tilde{K}^n) : M_{\tilde{B}_c}(\tilde{\phi}) = A$.

Ahora tenemos que $p_{\tilde{\phi}} = |A - x \cdot I_n|$, pero este mismo polinomio es el de ϕ, luego $p_{\tilde{\phi}} = |A - x \cdot I_n| = p_\phi$. Del mismo modo, tenemos que $q_{\tilde{\phi}} \in \tilde{K}[x]$ y $q_\phi \in K[x]$, pero por el cuerpo al que pertenece cada uno se tiene que $q_{\tilde{\phi}} \in \tilde{K}[x] \mid q_\phi \in K[x]$

Por reducción a lo absurdo, supongamos que $f \nmid q_\phi$, este caso como f es irreducible, entonces $1 = mcd(f, q_\phi)$ y por el Teorema De Bezout se tiene que $1 = a \cdot f + b \cdot q_\phi$.

Por otro lado, sabemos que $p_{\tilde{\phi}}$ y $q_{\tilde{\phi}}$ tienen las mismas raíces, por lo que sea $\tilde{\lambda} \in \tilde{K} : f(\tilde{\lambda}) = 0$. Como $p_{\tilde{\phi}} = p_\phi$ entonces $f \mid p_{\tilde{\phi}}$ y como $gr(f) \geq 1$ entonces para alguno de estos landa $f(\tilde{\lambda}) = 0$, lo que implica que $x - \tilde{\lambda} \mid f$ y por tanto $p_{\tilde{\phi}}(\tilde{\lambda}) = 0$, es decir, $\tilde{lambda}$ es un autovalor. Con lo cual tenemos vectores propios, así que sea $\tilde{v} = 0 : \tilde{\phi}(\tilde{v}) = \tilde{\lambda} \cdot \tilde{v}$, tenemos recuperando la identidad de Bezout anterior que:

$$1 = a(x)g(x)(x - \tilde{\lambda}) + b(x)q_\phi(x) \Rightarrow id_{\tilde{v}} = a(\tilde{\phi}) \circ g(\tilde{\phi}) \circ (\tilde{\phi} - \tilde{\lambda} id_{\tilde{v}}) + b(\tilde{\phi}) \circ \underbrace{q_\phi(\tilde{\phi})}_{=0} = a(\tilde{\phi}) \circ g(\tilde{\phi}) \circ (\tilde{\phi} - \tilde{\lambda} id_{\tilde{v}})$$

Si ahora lo aplicamos al $\tilde{v} \neq 0$ elegido previamente tenemos que:

$$\tilde{v} = a(\tilde{\phi}) \left(g(\tilde{\phi}) \left(\underbrace{\tilde{\phi} - \tilde{\lambda}\tilde{v}}_{=0} \right) \right) \Rightarrow \tilde{v} = 0 \Rightarrow \#$$

CLASES NOTABLES DE ENDOMORFISMOS

Tal y como dijimos al comienzo del capítulo, el objetivo de este desarrollo es poder hacer una clasificación exhaustiva de los endomorfismos a través de la clase de equivalencia a la que pertenezcan. Además, nos gustaría que para escoger el representante de su clase de equivalencia escojamos la matriz más sencilla posible, esto es, aquella que permita un cálculo computacional más sencillo a la hora de trabajar con la matriz.

Definición (Subespacios Propios)

Sea V un espacio vectorial y $\phi \in End(V)$, se define un ***subespacio propio para el autovalor*** *λ como aquel que verifica:*

$$V_{\phi,\lambda} = \{v \in V : \phi(v) = \lambda v\}$$

es decir, son los subespacios generador por vectores propios.

Observación:

Realmente estamos diciendo que $V_{\phi,\lambda} = \ker(\phi - \lambda id)$ por lo que trivialmente es un subespacio de V.

Definición (Multiplicidades Algebraicas y Dimensión geométrica)

Sea $\phi \in End(V)$, si su polinomio característico es $\pm p_\phi = (x-\lambda_1)^{e_1} \cdots (x-\lambda_t)^{e_t}$ decimos que las ***multiplicidades algebraicas de los autovalores*** *son los e_i.*

Del mismo modo, decimos que la ***dimensión geométrica*** *es la dimensión del subespacio propio para el autovalor λ, es decir:*

$$d_i = \dim_K V_{\phi,\lambda_i} = \dim \ker(\phi - \lambda_i id) = n - rg(\phi - \lambda_i id)$$

Observación:

En la práctica, la dimensión geométrica representa el número de vectores propios linealmente independientes para cada autovalor λ_i.

Proposición

Las dimensiones geométricas siempre son más pequeñas o iguales que las multiplicidades algebraicas:

$$\forall i \in \mathbb{N} : d_i \leq e_i$$

Demostración:

Como d es la dimensión de un subespacio consideramos una base del mismo: $B = \{v_1, \cdots, v_d\}$ base de $V_{\phi,\lambda}$ y ahora completamos dicha base a una base de V siendo esta $B' = \{v_1, \cdots, v_d, v_{d+1}, \cdots, v_n\}$ así que vamos a expresar la matriz de ϕ en base B':

$$M_{B'}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & M \\ \hline 0 & N \end{array} \right)$$

Esto ocurre así porque los primeros d vectores de la base van a ellos mismos multiplicados por λ (son autovectores) y las otras cajas no son tan relevantes.

Si calculamos ahora su polinomio característico vemos que:

$$p_\phi = \left| \begin{array}{c|c} (\lambda - x)I_d & M \\ \hline 0 & N - xI_{n-d} \end{array} \right| = (\lambda - x)^d p_N$$

Pero como sabemos que $p_\phi = (x-\lambda)^e g(x)$ vemos claramente que $e \geq d$.

Diagonalizabilidad

La primera clase de endomorfismos que nos encontramos son los diagonalizables. Estos tienen una propiedad excelente a la hora de trabajar con ellos: sólo tienen valores distintos de 0 en la diagonal principal. Dicha característica confiere una gran ventaja a trabajar con esta matriz adecuada, por ejemplo, para calcular las potencias de matrices o las imágenes sucesivas de la aplicación.

Definición (Diagonalizabilidad)

*Sea $\phi \in End(V)$, decimos que es **diagonalizable** si existe alguna base B respecto de la cual su matriz $M_B(\phi)$ sea diagonal.*

Ejemplo:

Supongamos que $\phi : V \to V$ es una simetría, entonces $V = W \oplus U$ con $\dim V = n$, $\dim W = m$ y $\dim U = m - n$. Escogemos una base de V, $B = \{\underbrace{v_1, \cdots, v_m}_{B_W}, \underbrace{v_{m+1}, \cdots, v_n}_{B_U}\}$ vemos que como un endomorfismo queda determinado por la imagen de los vectores de la base:

$$M_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-m} \end{array} \right)$$

Lo que ocurre realmente es que si $A = M_{B'}(\phi)$ y $A = M_B(\phi)$, entonces $\exists P = M(B', B) : A' = P^{-1}AP$. Es decir, transformo mediante una matriz de paso, una matriz que no es diagonal en una **semejante** que sí lo es.

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$, entonces es diagonalizable si y sólo si V posee alguna base formada por vectores propios.

Demostración:

Por un lado, tenemos que $\Rightarrow$ se demuestra como:

$$\exists B = \{v_1, \cdots, v_n\} : M_B(\phi) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(v_i) = \lambda_i \cdot v_i \Rightarrow v_i \text{ autovector}$$

Por otro, la implicación contraria $\Leftarrow$ es viendo que:

$$B \text{ base} : \phi(v_i) = \lambda_i v_i : i = 1, \cdots, n \Rightarrow M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Observación:

Luego esto nos da un muy buen criterio a priori para saber si un endomorfismo es diagonalizable, puesto que basta con calcular sus vectores propios y ver si forman una base.

Ejemplo:

Supongamos el siguiente endomorfismo:

$$M_{B_c}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_\phi = (x+1)^2(x-2) \\ q_\phi = (x+1)(x-2) \end{cases}$$

Luego sus autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ y de ahí podemos deducir que $V_{\phi,\lambda_1} = \ker(\phi + id) \equiv x + y + z = 0$ y como es un plano puedo encontrar en él dos vectores linealmente independientes.

Por otro lado, $V_{\phi,\lambda_2} = \ker(\phi - 2id) \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, que por ser una recta posee un vector linealmente independiente.

Así que uniendo los 3 vectores comentados se tiene que $B' = \{(e_1 - e_2), (e_1 - e_3), (e_1 + e_2 + e_3)\}$ y se comprueba fácilmente que es base de V. Expresando ϕ en la base construida se tiene que

$$A' = M_{B'}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$ y λ_1, λ_2 autovalores del endomorfismo, entonces los vectores propios de λ_1 son distintos de los vectores propios de λ_2, es decir, vectores propios respecto de autovalores distintos forman conjuntos linealmente independientes.

$$v_1 \in V_{\phi,\lambda_1},\ \ v_2 \in V_{\phi,\lambda_2} : \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \{v_1, v_2\}\ l.i.$$

Demostración:

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \Rightarrow \phi(a_1v_1 + a_2v_2) = \phi(0) = 0 \Rightarrow a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_2v_2 = 0$$

Por otro lado tenemos que:

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \Rightarrow a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_1v_2 = 0$$

Restando ambas:

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

Y tenemos que $a_1v_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$, entonces ϕ es diagonalizable si y sólo si p_ϕ descompone completamente en $K[x]$ y $d_i = e_i : \forall i$.

Demostración:

- $\Rightarrow$

  Supongamos que ϕ es diagonalizable, entonces existe una base donde su matriz es diagonal, es decir,

  $$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow p_\phi = |A - x \cdot I_n| = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x) = (-1)^n \cdot (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_n)$$

  Como es diagonalizable por hipótesis, entonces existe una base formada por vectores propios: $B = \{\underbrace{v_{11}, \cdots, v_{1m_1}}_{V_{\phi,\lambda_1}}, \cdots, \underbrace{v_{t_1}, \cdots, v_{tm_t}}_{V_{\phi,\lambda_t}}\}$. Entonces tenemos que $m_1 \leq d_1$, ..., $m_t \leq d_t$. Como es base tiene que haber n vectores y como sabemos que $gr(p_\phi) = \dim V = n = e_1 + \cdots + e_t = m_1 + \cdots + m_t \leq d_1 + \cdots + d_t \Rightarrow (d_1 - e_1) + \cdots + (d_t - e_t) = 0 \Rightarrow d_i = e_i$.

- $\Leftarrow$

  Si el polinomio descompone completamente en $K[x]$, entonces $gr(p_\phi) = n = e_1 + \cdots + e_t$ y si suponemos que $d_i = e_i$, entonces se tiene que $n = e_1 + \cdots + e_t = d_1 + \cdots + d_t$. Pero como d_1 indica que hay d_1 vectores linealmente independientes para el primer autovalor, podemos ir construyendo con cada conjunto de vectores de cada d_i una base de n y como es una base formada por autovectores, entonces es diagonalizable.

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$, entonces ϕ es diagonalizable si y sólo si q_ϕ descompone en $K[x]$ y las raíces son distintas.

Demostración:

- $\Rightarrow$

  Ya es conocido porque si p_ϕ lo es y $q_\phi \mid p_\phi$ ya está.

- $\Leftarrow$

  $$q_\phi = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_t) : \lambda_1 \neq \cdots \neq \lambda_t = (x-\lambda_i)g_i(x)$$

  Vemos que $1 = mcd(g_1, \cdots, g_t)$, luego $1 = g_1(x)a_1(x) + \cdots + g_t(x)a_t(x)$. Tenemos pues que

  $$id_v = g_1(\phi) \circ a_1(\phi) + \cdots + g_t(\phi) \circ a_t(\phi)$$

  y entonces ocurre:

  $$\forall v \in V : v = g_1(\phi)(a_1(\phi)(v)) + \cdots + g_t(\phi)(a_t(\phi)(v))$$

  Es decir, podemos expresar cada v como $v = v_1 + \cdots + v_t$ donde cada $v_i = g_i(\phi)(a_i(\phi)(v))$. Veamos que cada uno de esos sumandos es un vector propio:

  $$v_i \in V_{\phi,\lambda_i} : \phi(v_i) - \lambda_i v_i = (x-\lambda_i)(\phi)(v_i) = (x-\lambda_i)(\phi)(g_i(\phi)(a_i(\phi)(v))) =$$
  $$= [(x-\lambda_i)g_i(x)a_i(x)](\phi)(v) = q_\phi(\phi)(a_i(\phi)(v)) = 0(a_i(\phi)(v)) = 0$$

  Entonces lo que tenemos es que cada vector v se puede expresar como la suma de $v_1, \cdots, v_t$ vectores, si consideramos B_i base de V_{ϕ,λ_i} (que genera v_i), entonces tenemos que $B_1 \cup \cdots \cup B_t$ es sistema de generadores de V y además como vimos que vectores propios de autovalores distintos son independientes, la unión de todas las bases es independiente y por tanto es base de V.

Ejemplo:

Vamos a aplicarlo al caso de las homologías: supongamos que $q_\phi = (x-1)(x-r) : r \neq 0, 1, -1$ y vemos que como se cumplen las condiciones anteriores, entonces es diagonalizable. Entonces, por lo probado antes tenemos que $v = v_1 + v_r$ cada uno en uno de los subespacios propios. Vamos a ver que la intersección es 0; $v_1 = v_r \Rightarrow \phi(v_1) = v_1 \wedge r \cdot v_1 = 0 \Leftrightarrow (1-r)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$. Tenemos entonces que $V = V_{\phi,1} \oplus V_{\phi,r}$, luego los primeros vectores van a ellos mismos y los segundos se multiplican por r.

Por ejemplo, en dimensión K^2 tenemos que las únicas aplicaciones lineales diagonalizables posibles responden a la siguiente afirmación:

$$\begin{cases} x-\lambda \\ (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) : \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

En el primer caso son homotecias de razón λ y en el segundo la matriz resultante es:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi = \phi_1 \circ \phi_2$$

Es decir, cualquier aplicación en el plano que sea diagonalizable y no sea una homotecia es producto de dos homologías generales. Y esto es aplicacble a cualquier dimensión con el correspondiente aumento de producto de homologías.

Potencia enésima de matrices

Una aplicación bastante buena de esta parte de teoría es hallar la fórmula general de la sucesión geométrica cuyo término base es la matriz A. Para ello hay que distinguir dos casos:

- **Diagonalizable**

  Este caso es el más sencillo puesto que sabemos que si una matriz es diagonalizable, es posible convertirla en su matriz diagonal asociada a través de una matriz de cambio de base.

  Da la casualidad de que la potencia enésima de una matriz diagonal es muy fácil de calcular por lo que es relativamente sencillo calcular el término general de la matriz diagonal y después transformar a la matriz original a través de esa matriz de paso.

  Ej.:

  Sea $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$ su polinomio característico es $p_\phi = (x-2)(x-1)$, luego su matriz diagonal es: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. El término general para la matriz diagonal es $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}$ luego a través de la matriz de cambio de base $P = M(B, B') = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ se tiene que:

  $$A = P^{-1}DP \Rightarrow A^n = P^{-1}D^nP = \begin{pmatrix} -8 \cdot 2^n + 9 & -6 \cdot 2^n + 6 \\ 12 \cdot 2^n - 12 & 9 \cdot 2^n - 8 \end{pmatrix}$$

- **NO diagonalizable**

  Este caso es más complejo y se explicará el procedimiento general a través de un ejemplo (aunque explicando los pasos a seguir y las partes). Ej.:

Triangularizabilidad

Las condiciones para que una matriz sea diagonalizable son muy restrictivas pues obligan al endomorfismo a poder formar una base de vectores propios. En general, estas condiciones tan específicas no se pueden dar y debemos buscar otra forma "sencilla" para las matrices de aquellos endomorfismos no diagonalizables. Una de las posibles soluciones es poder triangularizar la matriz, lo que no logra la simplicidad de la diagonalización pero sí simplifica los cálculos al obtener muchos 0 dentro de la matriz.

Definición (Triangularizabilidad)

*Sea $\phi \in End(V)$, decimos que ϕ es **triangularizable** si existe alguna base B de V respecto de la cual la matriz de ϕ sea triangular.*

Observación:

En el documento se va a desarrollar la teoría para conseguir matrices triangulares inferiores, esto es, con los 0 bajo la diagonal principal. Si se desea una matriz triangular superior, basta con invertir el orden de los vectores de la base en la que es triangular inferior.

Teorema

Sea $\phi \in End(V)$, entonces ϕ es triangularizable si y sólo si p_ϕ descompone en $K[x]$.

Demostración:

- $\Rightarrow$

Supongamos que:

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow p_\phi = |A - xI| = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}-x & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm}-x \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 1 - x)\cdots(a_{nm} - x)$$

Y cabe destacar que cada elemento de la diagonal, es un autovalor correspondiente del endomorfismo.

- $\Leftarrow$

  Partimos ahora de que el polinomio característico descompone completamente, luego:

  $$p_\phi = (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_n)$$

  Por inducción sobre n:

  $$n = 1 \Rightarrow M_B(\phi) = (a_{11}) \Rightarrow Ok$$

  Ahora vemos $n-1 \overset{?}{\Rightarrow} n$:

  $$p_\phi = (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_n)$$

  Como λ_1 es autovalor, $\exists v_1 \neq 0 : \phi(v_1) = \lambda_1 v_1$ y entonces puedo ampliar este vector a una base de V que será $B = \{v_1, w_2, \cdots, w_n\}$ con w_i arbitrarios. Llamamos $W < V$ al subespacio generado por $\{w_2, \cdots, w_n\}$ y se ve que la dimensión de W es $n-1$. Por tanto la matriz resultante queda:

  $$A = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  Consideramos ahora esta matriz una matriz por cajas de forma que:

  $$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & M \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

  Puedo considerar N como $M_{\{w_2,\cdots,w_n\}}(\psi)$ de forma que $\psi : W \to W$. El polinomio característico de la matriz anterior es $p_\phi = |A - xI| = (\lambda_1 - x)p_N = (\lambda_1 - x)p_\psi$ luego tenemos que $p_\psi = (x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_n)$ y aplicando la hipótesis de inducción tenemos que ψ es triangularizable con lo cual como en la columna de λ_1 de la matriz A ya tiene todo ceros debajo ya está.

FORMA CANÓNICA DE JORDAN

De nuevo, aunque las clases anteriores nos dan unas muy buenas representaciones para cierto tipo de endomorfismos, no son válidas para todos en general. Nuestro objetivo en esta sección es desarrollar una estructura general, canónica, para todos los endomorfismos que encontremos. Esta forma será diagonal o triangular para los endomorfismos que sí cumplan las condiciones de la sección anterior, pero tendrá una nueva representación para aquellos que no encajen en los conceptos vistos.

Definición (Subepacios Invariantes)

Sea $\phi : V \to V$ y $W < V$ se dice que W es un ***subespacio invariante*** *si es cerrado bajo ϕ, es decir, $\phi(W) \subset W$.*

Observación:

El resultado de esta definición es que si W es un subespacio $\phi - invariante$ (que denotaremos por $W <_\phi V$), entonces la restricción de ϕ al subespacio es de nuevo un endomorfismo, pero esta vez sobre W:

$$\phi\,|_W : W \to W \Rightarrow \phi\,|_W \in End(W)$$

Además, podemos ver que $\phi(L(v_1)) \subset L(v_1) \Leftrightarrow \phi(v_1) = \lambda v_1$, luego las rectas invariantes son las generadas por vectores propios.

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$, entonces los subespacios propios $V_{\phi,\lambda}$ y $\ker \phi$ son subespacios invariantes del mismo.

$$\phi\left(V_{\phi,\lambda}\right) \in V_{\phi,\lambda} \qquad\qquad \ker\{\phi\} <_\phi V$$

Proposición

Sea $\phi \in End(V)$ un endomorfismo y $W <_\phi V$ un subespacio invariante del mismo, entonces:

- *El polinomio característico de la restricción a W divide al polinomio característico del endormorfismo inicial, es decir:*
$$p_{\phi|_W} \mid p_\phi$$
- *El polinomio mínimo de la restricción a W divide al polinomio mínimo del endormorfismo inicial, es decir:*
$$q_{\phi|_W} \mid q_\phi$$

Observación:

El resultado anterior es fundamental, puesto que nos permite caracterizar los subespacios invariantes de la dimensión que queramos. Si tenemos un polinomio característico concreto, los subespacios invariantes de dimensión 2 solo podrán ser aquellos para los cuales el polinomio característico de la restricción a ellos mismos tengan 2 factores del polinomio característico original, etc.

Lema

Sea $\phi \in End(V)$ y $g \in K[x] : g(\phi) = 0$ que podemos factorizar como:

$$g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_t : g_i \in K[x] : mcd(g_i, g_j) = 1$$

entonces se cumple que:

$$V =_\phi \ker g_1(\phi) \oplus \cdots \oplus \ker g_t(\phi)$$

Demostración:

Llamamos a $v_i = \ker g_i(\phi)$ vamos a ver que todo vector de V se expresa como suma de dichos v_i y que la intersección de todos es nula.

Nos fijamos solo en uno de los factores:

$$g = g_i h_i \Rightarrow mcd(h_1, \cdots, h_t) = 1 \Rightarrow 1 = h_1(x)a_1(x) + \cdots + h_t(x)a_t(x) \Rightarrow id_v = h_1(\phi)\circ a_1(\phi) + \cdots + h_t(\phi)\circ a_t(\phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = [h_1(\phi) \circ a_1(\phi)](v) + \cdots + [h_t(\phi) \circ a_t(\phi)](v) \Rightarrow v = v_1 + \cdots + v_t : v_i = [h_i(\phi) \circ a_i(\phi)](v)$$

Ahora tenemos que ver que cada uno de esos vectores está en su núcleo correspondiente:

$$g_i(\phi)(v_i) = [g_i(\phi)\circ h_i(\phi)\circ a_i(\phi)](v) = [g_i(x)h_i(x)a_i(x)(\phi)](v) = [a_i(x)g(x)](\phi)(v) = a_i(\phi)(g(\phi)(v)) = a_i(\phi)(0) = 0$$

$$\Rightarrow v_i \in \ker g_i(\phi)$$

Ahora vamos a ver que si la suma de todos es el vector nulo, entonces necesariamente todos son el vector nulo (eso es que la intersección es nula):

$$v_1 + \cdots + v_t = 0 \Rightarrow 0 = h_i(\phi)(v_1 + \cdots + v_t) = h_i(\phi)(v_i)$$

Por otra parte tenemos que $g_i(\phi)(v_i) = 0$ pero habíamos definido que:

$$mcd(g_i, h_i) = 1 \Rightarrow 1 = a_i(x)g_i(x) + b_i(x)h_i(x) \Rightarrow v_i = [a_i(\phi) \circ g_i(\phi)](v_i) + [b_i(\phi) \circ h_i(\phi)](v_i) = 0 \Rightarrow v_i = 0$$

Definición (Matriz diagonal por cajas)

Sea V un espacio vectorial de modo que $V =_\phi V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ y $\phi \in End(V)$. Si escogemos B de forma que esté formada por unión de las bases de cada subespacio, es decir, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_t$, entonces la matriz de ϕ queda[3] *como:*

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_t \end{pmatrix}$$

donde cada $A_i = M_{B_i}(\phi \mid_{V_i})$.

Además, para denotar una matriz diagonal por cajas utilizaremos la siguiente notación:

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$$

Ejemplo:

Supongamos que $q_\phi = \underbrace{(x - \lambda_1)}_{g_1} \cdots \underbrace{(x - \lambda_t)}_{g_t} : \lambda_i \neq \lambda_j$ con lo cual sabemos que es diagonalizable. Vemos que $mcd(g_i, g_j) = 1$ osea que se cumple la condición del lema porque $q_\phi(\phi) = 0$ por lo que si llamo $V_i = \ker\{(x - \lambda_i)(\phi)\} = \ker(\phi - \lambda_i id_v) = V_{\phi, \lambda_i}$ y esto quiere decir que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ y eso es diagonalizable.

Teorema de Estructura

Aplicando el lema anterior al polinomio mínimo y característico, vemos que el endomorfismo se puede descomponer como la suma directa de los subespacios generados por el ker de cada factor del polinomio mínimo y característico[4], es decir, podemos simplificar el estudio de un endomorfismo al estudio de cada uno de los trozos en los que se divide su polinomio característico y después juntar todas las bases para obtener la matriz escalonada por cajas de antes.

$$q_\phi = f_1^{a_1} \cdots f_t^{a_t} \qquad\qquad p_\phi = f_1^{e_1} \cdots f_t^{e_t}$$

Por el lema anterior, podemos dividir V en suma directa de los subespacios del ker de cada factor:

$$V =_\phi V_1 \oplus \cdots \oplus V_t : V_i = \ker f_i^{a_i}(\phi) \qquad\qquad V =_\phi V_1' \oplus \cdots \oplus V_t' : V_i' = \ker f_i^{e_i}(\phi)$$

Ahora mismo, estamos tratando de ver que la descomposición según uno u otro es indiferente, puesto que generan los mismos subespacios:

$$\ker f_i(\phi) \subset \ker f_i^2(\phi) \subset \cdots \subset \ker f_i^{a_i}(\phi) \subset \cdots \subset \ker f_i^{e_i}(\phi) \Rightarrow V_i \subset V_i'$$

Como la suma directa de ambas descomposiciones son el mismo espacio vectorial V y cada una está contenida en su homóloga, entonces $\forall i \in \mathbb{N} : \dim V_i = \dim V_i'$ porque si no la suma de las

[3] Los 0 de la matriz denotan matrices nulas de las dimensiones adecuadas
[4] Porque ya vimos que coinciden

dimensiones daría resultados distintos, por tanto, por estar uno metido en el otro y tener la misma dimensión $V_i = V_i'$. Y con este razonamiento ya tendríamos dividido de forma única el espacio V:

$$V =_\phi V_1 \oplus \cdots \oplus V_t : \forall i \in \mathbb{N},\ V_i = \ker f_i^{a_i}(\phi) = \ker f_i^{e_i}(\phi)$$

Como se tratan del núcleo de una aplicación lineal, sabemos que la suma directa es de subespacios $\phi - invariantes$ y, por tanto, se induce un endomorfismo en cada subespacio generado por la restricción $\phi_i = \phi\ |_{V_i}: V_i \to V_i$. Una vez hecho esto, definimos B_i base de V_i y llamamos $A_i = M_{B_i}(\phi_i)$ y generamos la base total uniendo las de cada trozo $B = B_1 \cup \cdots \cup B_t$ y llamando a $A = M_B(\phi)$ quedaría la matriz del total como: $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$.

Tratamos ahora de estudiar estos endomorfismos generados por la restricción del inicial a los subespacios $\phi - invariantes$. Para ello, vamos a intentar ver que el polinomio mínimo y característico de la restricción coincide precisamente con el factor del polinomio sobre el que estamos estudiando. En primer lugar, tenemos[5] que

$$q_{\phi_i} \mid f_i^{a_i} \Rightarrow q_{\phi_i} = f_i^{b_i} : b_i \leq a_i$$

y hay que ver que exponente es precisamente a_i, para lo que suponemos $q_{\phi_1} = f_1^{b_1} : b_1 < a_1$. De esta forma, consideramos que:

$$f_1^{a_1-1} \cdots f_2^{a_2} \cdots f_t^{a_t}$$

y entonces $f_1^{a_1-1} \cdots f_2^{a_2} \cdots f_t^{a_t}(\phi) = 0$, pero eso diría que $q_\phi \mid f_1^{a_1-1} \cdots f_2^{a_2} \cdots f_t^{a_t}$ que es absurdo, luego:

$$\boxed{q_{\phi_i} = f_i^{a_i}}$$

En segundo lugar, con el característico que ocurre lo mismo, es el mismo polinomio que el mínimo pero elevado a un exponente que puede ser igual o mayor:

$$q_{\phi_i} \mid p_{\phi_i} \Rightarrow \pm p_{\phi_i} = f_i^{c_i} : a_i \leq c_i$$

Como sabemos que A es diagonal por cajas, entonces $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$ y sucede:

$$p_\phi = |A - xI_n| = |(A_1 - xI_{m_1}) \oplus \cdots \oplus (A_t - xI_{m_t})| = |A_1 - xI_{m_1}| \cdots |A_t - xI_{m_t}| = p_{\phi_1} \cdots p_{\phi_t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_\phi = f_1^{c_1} \cdots f_t^{c_t} = p_{\phi_1} \cdots p_{\phi_t} \Rightarrow gr(p_{\phi_i}) = c_i \Rightarrow e_i = c_i$$

$$\boxed{p_{\phi_i} = f^{e_i}}$$

Observación:

Del hecho anterior, deducimos que $\dim V_i = gr(f_i^{e_i})$, es decir, que el grado del polinomio característico siempre coincide con la dimensión del espacio V sobre el que actúa ϕ.

Teorema (Subespacios Cíclicos)

Sea $v \in V$ y $\phi \in End(V)$, definimos el conjunto

$$L_\phi(v) = \{g(\phi)(v) : g \in K[x]\} = \{g(\phi)(v) : g \in K[x],\ gr(g) < gr(q_{\phi,v})\}$$

es decir, todas las posibles combinaciones lineales[6] *de potencias de ϕ evaluadas en v y que verifica las siguientes propiedades:*

- $L_\phi(v) <_\phi V$
- $B_v = \{v, \phi(v), \cdots, \phi^{m-1}(v)\}$ *es una base siendo* $m = gr(q_{\phi,v})$.
- $M_{B_v}(\phi\ |_{L_\phi(v)}) = C_{q_{\phi,v}}$

[5] Ya que sabemos que la restricción se anula en el trozo de polinomio que le toca.

[6] La segunda igualdad de la definición del conjunto es válida porque cualquier potencia mayor que $gr(q_{\phi,v})$ será una de las potencias de ϕ menores que dicho grado, puesto que será combinación lineal de las mismas por lo razonado en el apartado del polinomio mínimo de un endomorfismo y un vector.

- *$L_\phi(v)$ es el subespacio $\phi-$ invariante* ***más pequeño*** *que contiene al vector v*

Demostración:

- Veamos que es cerrado bajo ϕ:

$$g(\phi)(v) \in L_\phi(v) \Rightarrow \phi(g(\phi)(v)) = x(\phi)\left(g(\phi)(v)\right) = \left[(x \cdot g(x))(\phi)\right](v) = h(\phi)(v) : h \in K[x] \Rightarrow \in L_\phi(v)$$

- Veamos que son independientes y sistema de generadores:

$$a_0 v + a_1\phi(v) + \cdots + a_{m-1}\phi^{m-1}(v) = 0 \Rightarrow (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1})(\phi)(v) \overset{gr(\cdots)<gr(q)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} = 0 \Rightarrow a_i = 0 : \forall i$$

$$g \in K[x] = \left[g(x)(\phi)\right](v) = \left[h(x)q_{\phi,v}(x) + a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1}\right](\phi)(v) =$$
$$= \left[(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1})(\phi)\right](v) = a_0 v + a_1\phi(v) + \cdots + a_{m-1}\phi^{m-1}(v)$$

- Trivial por el tema de polinomios (o incluso haciendo las imágenes a mano).
- No procede.

Teorema (de Estructura)

Sea $\phi \in End(V)$ y $f \in K[x]$ irreducible, si los polinomios mínimo y característico son $p_\phi = \pm f_\phi^e$ y $q_\phi = f^a$, entonces:

$$\exists v_1, \cdots, v_s \in V : V = L_\phi(v_1) \oplus \cdots \oplus L_\phi(v_s)$$

de manera que $a = a_1 \geq \cdots \geq a_s$, entendiendo dichos índices como[7] $q_{\phi,v_i} = f^{a_i}$.

Demostración:

Vamos a hacer inducción sobre e:

- $e = 1$
$$e = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \pm p_\phi = q_\phi = f \Rightarrow \exists B \text{ base de } V : M_B(\phi) = C_f$$

- H.I.: supongamos que $\bar{\phi} : \overline{V} \to \overline{V}$ y tenemos que $\pm p_{\bar{\phi}} = f^{\bar{e}}$ y $q_{\overline{\phi}} = f^{\bar{a}}$ de manera que $1 \leq \bar{a} \leq \bar{e} < e$ entonces $\overline{V} = L_{\bar{\phi}}(\bar{w}_2) \oplus \cdots \oplus L_{\bar{\phi}}(\bar{w}_s)$

  Hemos visto que $\exists v_1 \in V : q_{\phi,v_1} = f^a$, luego $B_{v_1} = \{v_1, \cdots, \phi^{m-1}(v_1)\}$ es base de $L_\phi(v_1)$ que es un subespacio invariante y también que $M_{B_{v_1}}(\phi\mid_{L_{\phi(v_1)}}) = C_{f^a}$.

  Siempre podemos escribir $V = L_\phi(v_1) \oplus W$ donde W es una extensión de $L_\phi(v_1)$ hasta cubrir todo V. Luego su matriz queda como $M_B(\phi) = \begin{pmatrix} C_{f^a} & M \\ 0 & N \end{pmatrix}$, pero no está claro que pueda extender usando un W que sea $\phi-$ *invariante* y así quedara $M = 0$ y poder aplicar la hipótesis de inducción. Así que vamos a hacerlo al revés, cocientar V por $L_\phi(v_1)$ para hallar el W isomorfo que buscamos:

  Definimos $\overline{V} = V/L_\phi(v_1)$ los elementos por tanto son clases de $\bar{v}$, es decir, $\bar{v} = \bar{w} \Rightarrow v - w \in L_\phi(v_1)$ y que un vector pertenezca a dicho subespacio quiere decir que son de la forma $g_1(\phi)(v_1)$. Veamos como se define $\bar{\phi}$ en este nuevo espacio vectorial $\bar{\phi} : \overline{V} \to \overline{V}$ de forma que $\overline{\phi}(\bar{v}) = \overline{\phi(v)}$. Vemos si $\bar{v} = \bar{w} \overset{?}{\Rightarrow} \overline{\phi(v)} = \overline{\phi(w)}$:

$$\overline{\phi(v)} = \overline{\phi(w)} \Leftrightarrow \phi(v) - \phi(w) \in L_\phi(v_1) \Leftrightarrow \phi(v - w) \in L_\phi(v_1) \overset{v-w \in L_{\bar{\phi}}(v_1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \phi(g_1(\phi)(v_1)) \in L_\phi(v_1) \Leftrightarrow (xg_1(x))(\phi)(v_1) \in L_\phi(v_1) \Leftrightarrow h(x)(\phi)(v_1) \in L_{\bar{\phi}}(v_1)$$

  Vemos que es lineal:

$$\bar{\phi}(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{\phi}(\overline{v + w}) = \overline{\phi(v + w)} = \overline{\phi(v) + \phi(w)} = \overline{\phi(v)} + \overline{\phi(w)} = \bar{\phi}(\bar{v}) + \bar{\phi}(\bar{w})$$

[7] Luego el cálculo de dichos v_i es muy sencillo, puesto que basta con calcular el subespacio $f^{a_i}(\phi)(v_i) = 0$ y descartar los vectores que hayamos encontrado en $a_i - 1$ o anteriores.

Del mismo modo, el producto por un escalar se verifica con normalidad.

Ahora vemos quienes son el polinomio mínimo y característico de $\bar{\phi}$, habíamos elegido que $q_{\phi,v_1} = f^a = q_\phi$, vamos a ver que $f^a(\bar{\phi})(\bar{v}) = 0$:

$$f^a(\bar{\phi})(\bar{v}) = \overline{f^a(\phi)(v} = \overline{0(v)} = \bar{0} \Rightarrow f^a(\bar{\phi}) = 0 \Rightarrow q_{\bar{\phi}} \mid f^a \Rightarrow q_{\bar{\phi}} = f^{\bar{a}} : \bar{a} \leq a$$

Con el característico ocurre de forma igual, como tiene las mismas raíces que su mínimo nos queda que:

$$p_{\bar{\phi}} = f^{\bar{e}} : \bar{e} < e$$

Y es estrictamente menor porque: $gr(p_\phi) = n \dim V > \underbrace{\dim \bar{V}}_{n-\dim L_\phi} (v_1) = gr(f^{\bar{e}})$

Considerando que $q_{\bar{\phi}} = f^{\bar{a}}$, entonces $q_{\bar{\phi},\bar{w}_i} = f^{b_i} \mid f^{\bar{a}} : b_i \leq \bar{a}$. Vamos a ver que significa esto último:

$$f^{b_i}(\bar{\phi})(\bar{w_i}) = 0 \Rightarrow \overline{f^{b_i}(\phi)(w_i)} \Rightarrow f^{b_i}(\phi)(w_i) \subset L_\phi(v_1) \Rightarrow f^{b_i}(\phi)(w_i) = g_i(\phi)(v_1)$$

Ahora vamos a ver que:

$$f^{a-b_i}(\phi)\left(g_i(\phi)(v_1)\right) = \underbrace{f^{a-b_i}(\phi)\left(f^{b_i}(\phi)(w_i)\right)}_{=f^a(\phi)(w_i)=0} = 0$$

Es decir, a $\phi(v_1)$ lo anula cierto polinomio y por lo tanto:

$$\underbrace{q_{\phi,v_1}}_{=f^a} \mid f^{a-b_i} g_i \Rightarrow f^{b_i} \mid g_i \Rightarrow g_i = f^{b_i} h_i$$

Ahora volviendo a tener en cuenta la igualdad anterior ocurre que:

$$f^{b_i}(\phi)(w_i) = f^{b_i}(\phi)\left(h_i(\phi)(v_1)\right) = f^{b_i}(\phi)\left[w_i - h_i(\phi)(v_1)\right] = 0$$

Ahora definimos el siguiente vector $v_i = w_i - h_i(\phi)(v_1)$. ¿Qué sabemos de dicho vector?, pues: $f^{b_i}(\phi)(v_i) = 0$, $\bar{v_i} = \bar{w_i}$ por como está definido v_i y $\underbrace{q_{\phi,v_i}}_{=f^{a_i}} \mid f^{b_i} : a_i \leq b_i$.

Es decir, en la descomposición inicial de $V = L_\phi(\bar{w}_2) \oplus \cdots \oplus L_\phi(\bar{w}_s)$ hemos cambiado de representante a v_i y hemos conseguido una sucesión de menor o iguales: $a_i \leq b_i \leq \bar{a} < a$.

Vamos a probar finalmente que $V = L_\phi(v_1) \oplus \cdots \oplus L_\phi(v_s)$, para ello vamos a demostrar dos cosas: que todo vector se descompone en suma de uno de esos vectores y que la suma de todos igualada a 0 obliga a que todos sean el vector nulo.

$$v \in V \Rightarrow \bar{v} = g_2(\bar{\phi})(\bar{w_2}) + \cdots + g_s(\bar{\phi})(\bar{w_s}) = g_2(\bar{\phi})(\bar{v_2}) + \cdots + g_s(\bar{\phi})(\bar{v_s}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v - \left(g_1(\phi)(v_2) + \cdots + g_s(\phi)(v_s)\right) = g_1(\phi)(v_1) \Rightarrow v = g_1(\phi)(v_1) + \cdots + g_s(\phi)(v_S)$$

Para ver la segunda condición:

$$0 = g_1(\phi)(v_1) + \cdots + g_s(\phi)(v_s) \Rightarrow -g_1(\phi)(v_1) = g_2(\phi)(v_2) + \cdots + g_s(\phi)(v_s) \Rightarrow \bar{0} = g_2(\bar{\phi})(\bar{v_2}) + \cdots + g_s(\bar{\phi})(\bar{v_s}) \Rightarrow$$

$$g_2(\bar{\phi})(\bar{v_2}) = \cdots = g_s(\bar{\phi})(\bar{v_s}) = \bar{0} \Rightarrow g_2(\bar{\phi})(\bar{w_2}) = \cdots = g_s(\bar{\phi})(\bar{w_s}) = \bar{0}$$

Porque como la suma es directa, necesariamente cada uno de ellos es 0. Ahora vemos que debido a esto:

$$f^{b_i} \mid g_i \Rightarrow g_i = f^{b_i} \cdot h_i \Rightarrow g_i(\phi)(v_i) = h_i(\phi)(\underbrace{f^{b_i}(\phi)(v_i)}_{=0}) = 0 \Rightarrow g_i(\phi)(v_i) = 0$$

Observación:

Este resultado es muy importante porque, si ya podíamos separar[8] la matriz inicial en suma directa de los núcleos de las restricciones a cada factor del polinomio mínimo, ahora podemos a su vez dividir dichas restricciones en sumas directas de subespacios cíclicos. Esto provoca que la matriz de la restricción del endomorfismo sea una matriz diagonal por cajas y además que la matriz de ϕ restringido a $L_\phi(v_i)$ sea la compañera del polinomio mínimo de $\phi(v_i)$, es decir, $C_{f^{a_i}}$.

[8] Es destacable notar que esta descomposición no es única puesto que a pesar de que el resto de subespacios si están determinados por el 1º, el 1º podemos elegirlo libremente.

Teorema (de clasificación: forma canónica racional)

Sea $\phi \in End(V)$ y $f \in K[x]$ irreducible, si los polinomios mínimo y característico son $\pm p_\phi = f^e$ y $q_\phi = f^a$, entonces:

$$\exists B \text{ base de } V : M_B(\phi) = C_{f^{a_1}} \oplus \cdots \oplus C_{f^{a_s}} \text{ y } a = a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_s \geq 1$$

Esta descomposición es única y se la conoce como ***matriz canónica racional de*** *ϕ. A los polinomios de las sucesivas potencias como* ***divisores elementales****:*

$$f^{a_s} \mid f^{a_s+1} \mid \cdots \mid f^{a_2} \mid f^{a_1}$$

y caracterizan a los polinomios mínimo y característico porque:

$$\begin{cases} p_\phi = f^{a_s} \cdot \cdots \cdot \underbrace{f^{a_1}}_{=q_\phi} \\ q_\phi = f^{a_1} = f^a \end{cases}$$

Demostración:

Está clara la existencia, porque descomponemos $V = L_\phi(v_1) \oplus \cdots \oplus L_\phi(v_s)$, elegimos bases B_i de cada uno donde $B_i = \{v_i, \phi(v_i), \phi^2(v_i), \cdots, \phi^{m_i-1}(v_i)\}$ tal que $m_i = gr(f^{a_i}) : f^{a_i} = q_{\phi,v_i}$ y la base resultante de la unión de todas hemos demostrado que cumple las premisas.

Para ver que se cumple la unicidad vamos a ver primero que se verifica la siguiente propiedad (de hecho para una cantidad numerable de sumandos):

$$g(A_1 \oplus A_2) = \sum \left(b_i (A_1 \oplus A_2)^i\right) = \sum \left(b_i (A_1^i \oplus A_2^i)\right) = \sum \left((b_i A_1^i) \oplus (b_i A_2^i)\right) =$$

$$= \left(\sum b_i x^i\right)(A_1) \oplus \left(\sum b_i x^i\right) d(A_2) = g(A_1) \oplus g(A_2)$$

Es decir, que aplicar un polinomio a una matriz por cajas es lo mismo que aplicárselo a cada una de las cajas.

Veamos ahora pues:

$$g(\phi) = \begin{cases} g\left(C_{f^{a_1}} \oplus \cdots \oplus C_{f^{a_s}}\right) \\ g\left(C_{f^{a'_1}} \oplus \cdots \oplus C_{f^{a'_s}}\right) \end{cases}$$

En concreto vamos a tomar $g = f^{a-1}$ y utilizaremos el símbolo $C_{p(x)}^{(k)}$ para denotar que esa matriz compañera aparece k veces en la suma directa (porque habíamos dicho que los índices se pueden repetir):

$$\begin{cases} f^{a-1}\left(C_{f^a}^{(k_a) \geq 1} \oplus C_{f^{a-1}}^{(k_a-1) \geq 0} \oplus \cdots \oplus C_f^{(k_1)}\right) = \left[f^{a-1}\left(C_{f^a}\right)\right]^{(k_a)} \\ f^{a-1}(\cdots) = \left[f^{a-1}\left(C_{f^a}\right)\right]^{k'_a} \end{cases}$$

Entonces si ambas expresiones son representaciones matriciales del endomorfismo $f^{a-1}(\phi)$, entonces han de tener el mismo rango:

$$rg\left(\left[f^{a-1}\left(C_{f^a}\right)\right]^{k'_a}\right) = rg\left(f^{a-1}(\phi)\right) = rg\left(\left[f^{a-1}\left(C_{f^a}\right)\right]^{(k_a)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_a \cdot rg\left(f^{a-1}\left(C_{f^a}\right)\right) = k'_a \cdot rg\left(f^{a-1}\left(C_{f^a}\right)\right) \overset{rg \neq 0}{\Rightarrow} k'_a = k_a$$

Si hacemos la misma demostración usando f^{a-2}, f^{a-3}, ... llegamos a la misma conclusión con cada uno de los exponentes, por lo tanto la representación es única.

Observación:

Por eso, que dos matrices sean semejantes implica que tengan los mismo polinomios mínimos y característicos, pero que **dos endomorfismos tengan el mismo polinomio característico y mínimo no implica que sean semejantes**, porque deben coincidir en sus divisiores elementales

Endomorfismos Nilpotentes

Hemos visto buenas propiedades para simplificar el estudio del endomorfismo inicial al estudio de endomorfismos más pequeños caracterizados por poseer un único factor en su polinomio mínimo y característico. En este subapartado vamos a sacarle provecho a todos estos enunciados válidos para el estudio adecuado de estos endomorfismos más pequeño, de manera que podamos utilizar los teoremas anteriormente citados para encontrar bases sencillas cuando el polinomio mínimo y característico sólo tiene un factor.

Definición (Endomorfismos nilpotentes)

Sea $\xi \in End(V)$, decimos que es ***nilpotente de índice*** a *siendo* $1 \leq a \leq n$ *si* $q_\xi = x^a$.

Observación:

Consecuentemente, como el grado del característico es la dimensión del espacio, entonces $\pm p_x i = x^n$.

Por el Teorema de Estructura y el Teorema de la Forma Canónica Racional, existe una base conveniente para la cual la matriz del endomorfismo nilpotente quedaría como:

$$M_B(\xi) = C_{x^a}^{(k_a)} \oplus \cdots \oplus C_x^{(k_1)}$$

donde el exponente[9] (k_i) denota el número de veces que aparece en la suma directa esa caja. Además, como dichos teoremas probaban que la matriz asociada es la compañera del polinomio, entonces la caja C_{x^a} es:

$$C_{x^a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_{0,a}$$

De este modo, podemos dar la siguiente definición que será fundamental para la descomposición canónica de matrices en su base de Jordan.

Definición (Matriz Elemental de Jordan)

Se define una ***matriz elemental de Jordan*** *como una matriz del tipo:*

$$J_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}_{b \times b}$$

De este modo, podemos reescribir la matriz del endomorfismo nilpotente como:

$$M_B(\xi) = J_{0,a}^{(k_a)} \oplus \cdots \oplus J_{0,1}^{(k_1)}$$

Observación:

Esto supone la culminación del proceso de simplificación del endomorfismo, pues podemos separar la matriz inicial como suma directa de la matriz de cada factor lineal y, posteriormente, tratar cada factor lineal como si de un endomorfismo nilpotente se tratase.

Ejemplo:

- Dimensión 1:

$$J_{0,1} = (0)$$

[9] Los teoremas anteriores también prueban que $1 \leq (k_a)$ y los demás ≥ 0, es decir, que por lo menos el mínimo sale en la descomposición al menos una vez.

- Dimensión 2:
$$\begin{cases} x^2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow & J_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ x \mid x \Rightarrow a = 1 \Rightarrow & J_{0,1}^{(2)} = 0 \end{cases}$$

- Dimensión 3:
$$\begin{cases} x^3 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow & J_{0,3} \\ x \mid x^2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow & J_{0,2} \oplus J_{0,1} \\ x \mid x \mid x \Rightarrow a = 1 \Rightarrow & J_{0,1}^{(3)} = 0 \end{cases}$$

- Dimensión 4:
$$\begin{cases} x^4 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow & J_{0,4} \\ x \mid x^3 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow & J_{0,3} \oplus J_{0,1} \\ x^2 \mid x^2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow & J_{0,2}^{(2)} = 0 \\ x \mid x \mid x \mid x \Rightarrow a = 1 \Rightarrow & J_{0,0}^{(4)} = 0 \end{cases}$$

Cálculo de Matrices y Bases de Jordan

Una vez desarrolladas todas las herramientas teóricas anteriores para poder justificar los procedimientos que vamos a realizar, trataremos de describir un proceso más o menos unificado para calcular la matriz de Jordan de un endomorfismo y definir la base sobre la cual está expresada dicha matriz.

Conversión de trozos a endomorfismos nilpotentes

El caso general que nos encontraremos a la hora de trabajar con estos endomorfismos no será de la forma de los endomorfismo nilpotentes sino que será algo de la forma: $(x - \lambda)^e$.

Para trabajar con estos elementos como si fuesen nilpotentes, definimos $\xi = \phi - \lambda id$ que posibilita que los polinomios sean de la forma $p_\xi = x^e$ y $q_\xi = x^a$ y así podemos tratarlos como si de un nilpotente se tratase.

Una vez hallada y construida la matriz en bases de Jordan del endomorfismo nilpotente que hemos construido, regresar a nuestro ejemplo es muy sencillo, puesto que se trata de despejar de la siguiente forma:
$$\phi = \lambda id + \xi \Rightarrow M_B(\phi) = \lambda I + M_B(\xi)$$
Lo que en definitiva es rellenar con λ los 0 que dejan las bases de Jordan en las diagonales de los endomorfismos nilpotentes.

Por lo tanto, **un endomorfismo admite una matriz de Jordan si y sólo si su polinomio característico descompone completamente**.

Cálculo de la Matriz de Jordan

Supongamos que tenemos un endomorfismo $\phi \in End(V)$ sobre un espacio V de dimensión n, cuyos polinomios son:

$$\pm p_\phi(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_s)^{e_s} \qquad q_\phi(x) = (x - \lambda_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_s)^{a_s}$$

Lo primero que sabemos es que $V =_\phi \ker((\phi - \lambda_1 I)^{e_1}) \oplus \cdots \oplus \ker((\phi - \lambda_s I)^{e_s}) = \ker((\phi - \lambda_1 I)^{a_1}) \oplus \cdots \oplus \ker((\phi - \lambda_s I)^{a_s})$, luego si calculamos las matrices de Jordan de cada sumando, luego basta componerlas para que queden como una matriz diagonal por cajas.

Centrándonos en un sumando en concreto, sabemos primero que es $\phi - invariante$ por ser el ker de una aplicación lineal y también que el polinomio mínimo y característico de la restricción a ese sumando en el que nos hemos fijado son $p_{\phi_i}(x) = (x - \lambda_i)^{e_i}$ y $q_{\phi_i}(x) = (x - \lambda_i)^{a_i}$. Precisamente por esto, le podemos aplicar el Teorema de Estructura, luego sabemos que existe una base que descompone el espacio como:

$$\ker\left((x - \lambda_i)^{a_i}\right) =_{\phi_i} L_\phi(v_1) \oplus \cdots \oplus L_{\phi_i}(v_{e_i}) \Rightarrow M_B(\phi_i) = C_{(x-\lambda_i)^{a_i}} \oplus \cdots \oplus C_{(x-\lambda_i)^{a_r}}$$

donde los $a_i \geq a_{i+1} \geq \cdots \geq a_r$ y son los divisores elementales del polinomio. Sin embargo, aún sabiendo los divisores elementales la matriz resultante no es muy limpia puesto que la columna final correspondiente a los coeficientes del polinomio del que es compañera la matriz queda muy sucia. En este caso, es más provechoso transformar el endomorfismo a uno nilpotente como se ha explicado en el apartado Conversión de trozos a endomorfismos nilpotentes, es decir, tomar $\xi = \phi - \lambda_i$. Una vez tenemos esto, basta con aplicar el Teorema de Estructura al nuevo endomorfismo:

$$\ker\left(\xi^{a_i}\right) =_\xi L_\xi(v_1) \oplus \cdots \oplus L_\xi(v_{e_i}) \Rightarrow M_B(\xi) = C_{\xi^{a_i}} \oplus \cdots \oplus C_{\xi^{a_r}}$$

Luego aquí basta tener en cuenta que $C_{\xi^a_j}$ es una Matriz Elemental de Jordan de las que se vieron en Endomorfismos Nilpotentes y recuperar la matriz de ϕ basta con tener en cuenta la siguiente igualdad:

$$M_B(\phi) = M_B(\xi) + \lambda_i I$$

Sin embargo, la verdadera pregunta está en saber cuáles son los exponentes $a_1, \cdots, a_r$ de los divisores elementales en los que se descompone el subespacio invariante. Pues la respuesta es sencilla. Nosotros somos capaces de calcular, para una dimensión concreta, todas las posibles matrices elementales de Jordan que hay en función de qué posibles divisores elementales haya. Pues bien, la matriz canónica de Jordan no deja de ser una matriz equivalente a la inicial de endomorfismo, luego deben tener el mismo rango. Por tanto, basta con elegir como matriz de Jordan (es decir, realmente para esto no nos importan los v_i ni los $L_{\phi_i}(v_i)$) que tenga el mismo rango que la restricción ϕ_i de ϕ al trozo que estamos examinando.

Ejemplo:

FALTA EL EJEMPLO

Cálculo de la Base de Jordan

Aunque tengamos la matriz de Jordan, la base es necesaria en multitud de ocasiones y muy conveniente de conocer en general. Para poder encontrarla nos situamos en la misma situación que en el apartado Cálculo de la Matriz de Jordan, es decir, tenemos

$$\ker\left((x - \lambda_i)^{a_i}\right) =_{\phi_i} L_\phi(v_1) \oplus \cdots \oplus L_{\phi_i}(v_{e_i}) \Rightarrow M_B(\phi_i) = C_{(x-\lambda_i)^{a_i}} \oplus \cdots \oplus C_{(x-\lambda_i)^{a_r}}$$

Como estos a_j son los grados de q_{ϕ_i, v_j}, estamos buscando un vector de modo que $v \in \ker(\phi - \lambda_i id)^{a_j}$ pero no pertenezca a los $a_m \leq a_j$. Luego, para cada exponente a_j hay que calcular un vector que pertenezca a ese núcleo pero que no pertenezca a los anteriores (para que así sea realmente ese su polinomio mínimo) y de esta forma construir la base parcial de cada uno de los sumandos, luego basta con juntarlos todos.

Ejemplo:

FALTA EL EJEMPLO

Factores invariantes

Supongamos que tenemos un endomorfismo $\phi : V \to V$ y que:

$$q_{\phi,v} = g \text{ y } q_{\phi,w} = h \text{ donde } mcd(g,h) = 1 \Rightarrow q_{\phi,v+w} = gh$$

De este modo es lógico pensar que:

$$C_g \oplus C_h \sim C_{gh}$$

Demostración:

Bastaría con demostrar que tenemos un endomorfismo en K^{m+n} de manera que en una base es la suma directa de esas cajas y en la otra es la otra matriz compañera.

Sea $\phi : K^{m+n} \to K^{m+n}$ donde $M_B(\phi) = C_g \oplus C_h$ por lo que sabemos que:

$$B = \{v, \phi(v), \ldots, \phi^{m+n-1}(v), w, \phi(w), \ldots, \phi^{m+n-1}(w)\}$$

Luego entonces como $q_{\phi,v+w} = gh$ si escogemos el vector $v' = v+w$ vemos que $\{v', \phi(v'), \ldots, \phi^{m+n-1}(v')\}$ forma una base, puesto que son linealmente independientes y hay tantos como la dimensión del espacio sobre el que están definidos y la matriz respecto de esa base es justamente la compañera.

Aplicaciones de lo que se ha explicado

Supongamos que $\phi : V \to V$ y que $\pm p_\phi = f_1^{a_1} \cdot f_2^{a_2} = q_\phi$ y supongamos que $q_\phi = p_\phi$ donde cada f_i es un irreducible distinto.

Entonces sabemos que $V =_\phi V_1 \oplus V_2$ por el lema de estructura y además $V_i = \ker(f_i^{a_i}(\phi))$ y del mismo modo $\exists B_i : M_{B_i}(\phi\,|_{V_i}) = C_{f_i^{a_i}}$. Luego volviendo a la matriz general:

$$M_{B_1 \cup B_2}(\phi) = C_{f_1^{a_1}} \oplus C_{f_2^{a_2}} \sim C_{f_1^{a_1} f_2^{a_2}}$$

Por lo tanto se puede escoger siempre una base respecto de la cual, la matriz de ϕ es la compañera del producto de ambos trozos. Es decir, que **cuando mínimo y característico coinciden** entonces se ve que por inducción sobre el número de factores se tiene que:

$$\phi : V \to V : \pm p_\phi = q_\phi \Rightarrow \exists B : M_B(\phi) = C_{q_\phi}$$

Por ejemplo veamos: $\phi : R^4 \to R^4 : p_\phi = (x^2+x+1)(x^2-x+1) \Rightarrow q_\phi = (x^2+x+1)(x^2-x+1) \Rightarrow$
$$\begin{cases} M_B(\phi) = C_{x^2+x+1} \oplus C_{x^2-x+1} & \text{por divisores elementales} \\ M_{B'}(\phi) = C_{x^4+x^2+1} & \text{por factores invariantes} \end{cases}.$$

Paso de divisores elementales a factores invariantes

Supongamos que $p_\phi = f_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot f_t^{e_t}$ y $q_\phi = f_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot f_t^{a_t}$, entonces:

$$M_B(\phi) = \left(C_{f_1^{a_1}} \oplus C_1\right) \oplus \cdots \oplus \left(C_{f_t^{a_t}} \oplus C_t\right)$$

Donde $C_i = C_{f_i^{b_1}} \oplus C_{f_i^{c_i}} \oplus \cdots$, es decir, es la agrupación en suma directa de todas las matrices compañeras de ese divisor elevado a exponentes menores que el que poseen en el polinomio mínimo. Por lo tanto y tras reordenar la base, es semejante a esta matriz:

$$C_{f_1^{a_1}} \oplus \cdots \oplus C_{f_t^{a_t}} \oplus C \sim C_{f_1^{a_1} f_t^{a_t}} \oplus C$$

Es decir, en definitiva es reordenar la base para agrupar las "cajas" de forma que todos los trozos del polinomio mínimo queden juntos en una matriz compañera del mínimo y los restos que hemos llamado C_i en otra matriz a parte que llamaremos C.

En el paso siguiente hacemos lo mismo con las cajas de exponente menor que conforman la matriz C, es decir, nos va quedando una expresión de la forma:

$$C_{f_1^{a_1} \cdots f_t^{a_t}} \oplus C_{f_1^{b_1} \cdots f_t^{b_t}} \oplus \cdots \oplus C_{f_1 \cdots f_t}$$

Cada uno de estos productos de trozos agrupados por los exponentes se llaman **factores invariantes**.

Vamos a ver un ejemplo, supongamos que $\phi : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ y su $p_\phi = (x-1)^3(x^2+x+1)(x^2+x+1)^2$. De cada trozo tenemos:

$$\begin{cases} (x-1)^3 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^3 \\ (x-1)^2, (x-1) \\ (x-1), (x-1), (x-1) \end{cases} \\ x^2+x+1 \Rightarrow x^2+x+1 \\ (x^2-x+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} (x^2-x+1)^2 \\ x^2-x+1, x^2-x+1 \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto habría 6 posibles clases de semejanza, veamos una de ellas para ver el ejemplo:

$$M_B(\phi) = C_{(x-1)^2} \oplus C_{x-1} \oplus C_{x^2+x+1} \oplus C_{(x^2-x+1)^2} \text{ por divisores elementales}$$

Pero también lo podemos clasificar por factores invariantes, ¿Quienes son estos? pues primero escogemos los divisores elementales de mayor grado:

$$h_1(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2 \Rightarrow C_{h_1(x)}$$

$$h_2(x) = x-1 \Rightarrow C_{h_2(x)}$$

Luego por factores invariantes, la matriz queda de la siguiente forma:

$$M_{B'}(\phi) = C_{h_1(x)} \oplus C_{h_2(x)}$$

FORMAS LINEALES Y BILINEALES

Durante este capítulo vamos a desarrollar las propiedades y características de dos objetos matemáticos muy presentes: las formas lineales y bilineales. La relevancia de estos objetos va desde la definición del concepto de "ortogonalidad" básico en ramas como la geometría hasta la definición de normas a través de productos escalares.

FORMAS LINEALES

Las formas lineales son fundamentalmente aplicaciones lineales del espacio vectorial en el cuerpo sobre el que está estructurado. Es decir, son aplicaciones lineales que a cada vector les asigna un número y, por la similitud con las funciones reales escalares, toma gran relevancia analizar las propiedades que tienen.

Espacio Dual

El espacio dual es un concepto abstracto y vago a priori pero con propiedades esenciales más tarde. Sobre todo, el principio de dualidad nos permite hacer extensibles enunciados sobre V (más intuitivos para nosotros) a V^*, su dual. Del mismo modo, enunciados sorprendentes en V vienen de traducir dichas hipótesis de un enunciado muy intuitivo en V^*.

Definición (Formas Lineales y Espacio Dual)

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K, se define el ***espacio dual*** *como el espacio vectorial de dimensión n definido por:*

$$V^* = Hom(V, K)$$

A los elementos de dicho espacio, es decir, a las aplicaciones lineales $\omega : V \to K$ se las conoce como ***formas lineales****.*

Como las formas lineales se tratan de aplicaciones lineales, podemos caracterizarlas a través de la matriz que la representa, es decir, que suponiendo $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V y $\{1_k\}$ de K, entonces[1]:

$$Mat_{B,\{1_k\}}(\omega) \in Mat_{1\times n}(K) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \text{ donde } \forall i \in \mathbb{N} : a_i = \omega(v_i)$$

[1] Realmente estamos considerando el escalar a_i como un vector en un espacio de dimensión 1 como es K, luego sería $\omega(v_i) = a_i \cdot 1_k$ para indicar que está expresado en dicha base, pero se omite para no sobrecargar la notación.

Observación:

Para tener una idea más intuitiva de lo que representan estos nuevos objetos matemáticos, estamos definiendo lo que serían las "líneas" de un sistema de ecuaciones:

$$\omega(v) = \omega(x_1 v_1 + \cdots x_n v_n) = a_1 x_1 + \cdots a_n x_n$$

Es decir, que en definitiva no son más que aplicaciones que a cada vector les asignan un escalar (o elemento de K) y que evaluar un vector sobre ella no es más que sustituir las coordenadas del vector en la ecuación de la forma lineal.

Ejemplo:

La aplicación lineal $\omega : Mat_n(K) \to K$ de forma que $\omega(A) = tr(A)$ es una forma lineal que a cada matriz (elemento de $V = Mat_n(K)$) le asigna su traza (elemento de $K = \mathbb{R}$).

La aplicación lineal $\omega : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de forma que $\omega(f) = \int_0^1 f(t)dt$ es una forma lineal que a cada función continua le asigna el valor de su integral entre 0 y 1.

Proposición (Base Dual)

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y V^* su dual, dada una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de V, entonces el conjunto:

$$B^* = \{v_1^*, \cdots, v_n^*\} : \forall i \in \mathbb{N},\ v_i^* = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

es una base del espacio dual.

Demostración:

En primer lugar, trivialmente $V^* \simeq V$ porque tienen la misma dimensión y la dimensión de V es n. En segundo lugar, los elementos de V^* son aplicaciones lineales, luego para poder tenerlos definidos tendremos que conocer su valor sobre cada uno de los vectores de una base B de V, por lo tanto, la clave está en ver que la definición que se ha dado de los v_i^* genera un conjunto linealmente independiente:

$$a_1 v_1^* + \cdots a_n v_n^* = 0 \Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} : 0 = (a_1 v_1^* + \cdots a_n v_n^*)(v_j) = a_j v_j^*(v_j) = a_j$$

Ejemplo:

Sea $B = \{e_1 - e_2, e_1 + 3e_2\}$ una base de K^2, vamos a ver como definimos v_1^*:

$$\begin{cases} 1 = v_1^*(e_1 - e_2) = v_1^*(e_1) - v_1^*(e_2) \\ 0 = v_1^*(e - 1 - 3e_2) = v_1^*(e_1) - 3v_1^*(e_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1^*(e_2) = \frac{-1}{4} \\ v_1^*(e_1) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Entonces $Mat_{B_c,\{1_k\}}(v_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$, para calcular v_2^* se hace igual.

Pero ahora si cambiamos la base a $B' = \{e_1 - e_2, e_1\}$ base de K^2 entonces volviendo a calcular todo:

$$\begin{cases} 1 = v_1^*(e_1 - e_2) \\ 0 = v_1^*(e_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1^*(e_1) = 0 \\ v_1^*(e_2) = -1 \end{cases}$$

Observación:

Es cierto que existe un isomorfismo entre un espacio y su dual y entonces debe existir una aplicación que a cada vector que le asigne su dual, pero es importante resaltar que ésta aplicación no es canónica entre ambos ya que incluso la demostración de este resultado depende de las bases escogidas al estar una determinada por la otra.

Con esto queremos decir que, si $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ son dos bases con algunos vectores comunes, por ejemplo $v_1 = v'_1$, los vectores v_1^* y $v_1'^*$ no tienen por qué coincidir, pues están condicionados por el resto de la base.

Proposición

Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V y $B^* = \{v_1^*, \cdots, v_n^*\}$ una del dual V^*, entonces las coordenadas de una forma lineal $\omega \in V^*$ son precisamente $\omega = (\omega(v_1), \cdots, \omega(v_n))$.

Definición (Aplicación dual)

Sean V y W dos espacios vectoriales y $\phi \in Hom(V, W)$ una aplicación entre ellos, se define la ***aplicación dual*** *a ϕ como:*

$$V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\omega} K$$

$$\begin{array}{rcl} \phi^* : W^* & \longrightarrow & V^* \\ \omega & \longmapsto & \omega \circ \phi \end{array}$$

Además, se verifican las siguientes propiedades:

- $\phi^*(\omega_1 + \omega_2) = (\omega_1 + \omega_2) \circ \phi = \omega_1 \circ \phi + \omega_2 \circ \phi = \phi^*(\omega_1) + \phi^*(\omega_2)$
- $\phi^*(\lambda\omega) = (\lambda\omega) \circ \phi = \lambda(\omega \circ \phi) = \lambda\phi^*(\omega)$
- $(id_V)^* = id_{V^*}$
- $(\phi_2 \circ \phi_1)^* = \phi_1^* \circ \phi_2^*$

Observación:

Por tanto, acabamos de ver que la dualidad asigna a cada espacio otro espacio vectorial y a cada aplicación su dual. Conserva la identidad y cambia de orden las composiciones por lo que se llama (esto se ve en otras asignaturas) un **funtor contravariante**.

Proposición

Sea ϕ una aplicación entre dos espacios vectoriales V y W y ϕ^* su dual correspondiente, las matrices de ambas aplicaciones guardan la siguiente relación:

$$A = M_{B_v, B_w}(\phi) \Rightarrow M_{B_w^*, B_v^*}(\phi^*) = A^t$$

Espacio Bidual

Consideremos la aplicación $\langle \bullet, \bullet \rangle : V^* \times V \to K$ como aquella que evalúa en la formal el vector seleccionado, es decir, $(\omega, v) \longmapsto \omega(v)$. Si fijamos v obtenemos la aplicación $\langle \bullet, v \rangle : V^* \to K$ que llamaremos ξ_v y que mapea $\omega \longmapsto \langle \omega, u \rangle$

Proposición

La aplicación $\xi_v \in Hom(V^*, K)$ definida como $\xi_v(\omega) = \omega(v)$ es una aplicación lineal y biyectiva.

Demostración:

- Está bien definida, es decir, ocurre que $\forall v \in V : \eta_v(v) \in V^{**} = Hom_k(V^*, K)$

$$[\eta(v)]\,(\omega_1 + \omega_2) = (\omega_1 + \omega_2)(v) = \omega_1(v) + \omega_2(v) = [\eta(v)]\,(\omega_1) + [\eta(v)]\,(\omega_2)$$

$$[\eta(v)]\,(\lambda\omega) = (\lambda\omega)(v) = \lambda\omega(v) = \lambda\,[\eta(v)]\,(\omega)$$

- Es lineal:

$$[\eta(v_1 + v_2)]\,(\omega) = \omega(v_1 + v_2) = \omega(v_1) + \omega(v_2) = [\eta(v_1)]\,(\omega) + [\eta(v_2)]\,(\omega) = [\eta(v_1) + \eta(v_2)]\,(\omega)$$

$$[\eta(\lambda v)]\,(\omega) = \omega(\lambda v) = \lambda\omega(v) = \lambda\,[\eta(v)]\,(\omega)$$

- Es biyectiva:

  Se puede observar que $\dim V = \dim V^{**}$, por lo que solo hace falta ver si es inyectiva o suprayectiva para demostrarlo. Por lo que vamos a ver que es inyectiva, supongamos que no:

  $$\ker(\eta_v) \neq \{0\} \Rightarrow v \in \ker(\eta_v) \Rightarrow \forall \omega \in V^* : [\eta(v)](\omega) = 0$$

  Pues construimos una forma lineal que no verifique esto:

  $$B = \{v, v_2, \cdots, v_n\} \text{ de } V \Rightarrow \exists B^* \text{ de } V^* \Rightarrow [\eta(v)](v_1^*) = v_1^*(v) = 1 \neq 0 \Rightarrow \#$$

Definición (Espacio Bidual)

*Sea V un espacio vectorial de dimensión n, se define el **espacio bidual** como $V^{**} = Hom(V^*, K)$ conformado por todas las aplicaciones ξ_v.*

Proposición

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y V^{**} su bidual, la aplicación

$$\begin{aligned} \eta : V &\longrightarrow V^{**} \\ v &\longmapsto \xi_v \end{aligned}$$

es un isomorfismo canónico entre ambos espacios.

Ortogonalidad

Un concepto fundamental que también se desarolla por ejemplo en el apartado de FORMAS BILINEALES es la ortogonalidad. Ésta nos va a permitir, en el caso del espacio dual, caracterizar los hiperplanos vectoriales con formas lineales del espacio dual.

Definición (Ortogonalidad)

*Sea V un espacio vectorial y V^* su dual, decimos que $\omega \in V^*$ es **ortogonal** a $v \in V$ si $\omega(v) = 0$.*

*Además, sea W un subespacio de V, se define el **ortogonal de** W como:*

$$W^\perp = \{\omega \in V^* : \forall w \in W,\ \omega(w) = 0\}$$

Proposición

La definición de ortogonalidad verifica las siguientes propiedades:

1. $W < V \Rightarrow W^\perp < V^*$
2. $\{0\}^\perp = V^*$ *y* $V^\perp = \{0_{v^*}\}$
3. $W_1 \subset W_2 \Rightarrow W_2^\perp \subset W_1^\perp$
4. $n = \dim V$ *y* $m = \dim W \Rightarrow \dim W^\perp = n - m$
5. $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$
6. $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$
7. $W_1^{\perp\perp} = W$
8. $V = W \oplus U \Rightarrow V^* = W^* \oplus U^*$

Demostración:

1. Es subespacio:

$$\omega_1, \omega_2 \in W^\perp \Rightarrow (\omega_1 + \omega_2)(w) = \omega_1(w) + \omega_2(w) \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 \in W^\perp$$

$$\omega \in W^\perp \text{ y } \lambda \in K \Rightarrow (\lambda\omega)(w) = \lambda\omega(w) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda\omega \in W^\perp$$

2. La primera parte es trivial porque afirmar eso implica que todas las formas lineales se anulan sobre 0, lo cual es cierto. La segunda es análoga porque una forma lineal que se anula sobre todos los vectores de V es la aplicación lineal nula.

3. Trivial porque si una forma se anula sobre todos los vectores de W_2 entonces también se anula sobre todos los vectores de W_1. El otro contenido no es cierto porque puede haber formas que se anulen sobre W_1 pero que no se anulen sobre W_2.

4. Esta demostración es cómo se calcula en la práctica el ortogonal de un subespacio: Supongamos $B_W = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de W y extendemos a una base del total $B = \{w_1, \cdots, w_m, w_{m+1}, \cdots, w_n\}$ base de V. Ahora tenemos que demostrar que $\{w^*_{m+1}, \cdots, w^*_n\}$ es base de $W^\perp$:

   Como son independientes porque formaban parte de una base, basta con probar que son sistema de generadores, por tanto sea $\omega \in W^\perp$:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i^*$$

   Como está en el ortogonal se anula sobre todos los vectores de W, en particular sobre los vectores de la base elegida:

$$\underbrace{\omega(w_1)}_{=a_1} = \underbrace{\cdots}_{=a_i} = \underbrace{\omega(w_m)}_{=a_m} = 0$$

   De este modo veamos el caso para w_1 y los demás son iguales:

$$\omega(w_1) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i (w_i)^*\right)(w_1) = a_1 w_1^*(w_1) = a_1$$

   Luego se tiene que todas las coordenadas de esta forma lineal desde a_1 hasta a_m se anulan, luego se tiene que:

$$\Rightarrow \omega = a_{m+1} w^*_{m+1} + \cdots a_n w^*_n$$

5. Análoga a la demostración del punto 6

6. Hay dos contenidos que se siguen de la condición 3, en concreto: $(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp$ y por otro lado $W_1^\perp + W_2^\perp \subset (W_1 \cap W_2)^\perp$ con lo cual volviendo a lo que queremos demostrar tenemos que:

$$\underbrace{(W_1 \cap W_2)^{\perp\perp}}_{\eta_v(W_1 \cap W_2)} \subset (W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp \subset W_1^{\perp\perp} \cap W_2^{\perp\perp} = \eta_v(W_1) \cap \eta_v(W_2) \Rightarrow$$

   Como la eta es biyectiva, si las imágenes coinciden, los elementos tienen que ser los mismos:

$$\eta_v(w_1) = \eta_v(w_2) \Rightarrow w_1 = w_2 \Rightarrow \eta_v(W_1) \cap \eta_v(W_2) \subset \eta_v(W_1 \cap W_2)$$

   Como el primer espacio que empieza la cadena de contenidos y el último son el mismo subsespacio, la cadena de contenidos se vuelve cadena de igualdades, por lo que en particular:

$$(W_1 \cap W_2)^{\perp\perp} = (W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp \Rightarrow (W_1 \cap W_2)^{\perp\perp\perp} = (W_1^\perp + W_2^\perp)^{\perp\perp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_v(W_1 \cap W_2)^\perp = \eta_v(W_1^\perp + W_2^\perp) \Rightarrow (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$$

7. Veamos que ocurre que $\eta_v(W) \subset W^{\perp\perp} = (W^\perp)^\perp$:

$$\forall \omega \in W^\perp : [\eta_v(w)](\omega) = \omega(w) = 0$$

   Pero como $\dim(W^\perp)^\perp = \dim V^* - \dim W^\perp = \dim V^* - (\dim V - \dim W) = \dim W = \dim \eta_v(W)$.

Teorema (Principio de dualidad)

La correspondencia $Sub(V) \to Sub(V^*)$ que lleva cada subespacio $W \to W^*$ en su dual es un antiismorfismo de retículos completos, es decir, lleva ínfimos a supremos y viceversa y sumas a intersecciones y viceversa.

Proposición

Sea $V \xrightarrow{\phi} W$ una aplicación lineal y $W^* \xrightarrow{\phi^*} V^*$ su dual, entonces se tienen las siguientes propiedades:

1. $\ker(\phi^*) = Im(\phi)^\perp < W^*$
2. $Im(\phi^*) = \ker(\phi)^\perp < V^*$

Demostración:

1. Basta con probar que un elemento de uno está en el otro y viceversa:

$$\omega \in \ker(\phi^*) \Rightarrow \phi^*(\omega) = 0 \Rightarrow \omega \circ \phi = 0 \Rightarrow \forall v \in V : \omega(\phi(v)) = 0 \Rightarrow \omega \in (Im(\phi))^\perp$$

2. Demostración análoga a la anterior.

Observación:

Si recordamos que $A = M_{B_v,B_w}(\phi)$ y $A^t = M_{B_w^*,B_v^*}(\phi^*)$, veamos de otra forma que el rango de ambas matrices es el mismo:

$$rg(A^t) = rg(\phi^*) = \dim W^* - \dim \ker(\phi^*) = \dim W - \dim(Im(\phi))^\perp =$$

$$= \dim W - (\dim W - \dim Im(\phi)) = \dim Im(\phi) = rg(\phi) = A$$

Hiperplanos explicación

Supongamos que tenemos $\dim V = n$ y un hiperplano $H < V$, es decir, $\dim H = n-1$. Este tendrá una única ecuación cartesiana que lo defina, por lo tanto:

$$v \in H \Leftrightarrow a_1x_1 + \cdots a_nx_n = 0$$

De este modo $H^\perp$ vemos que $\dim H^\perp = n - (n-1) = 1$, con lo cual, este está generado por una única forma lineal. Si definimos B^* la pregunta es quién es ω. Si definimos $\omega = a_1v_1^* + \cdots + a_nv_n^*$, es decir, de la manera usual vemos que al aplicarla a un vector de V lo que ocurre es que tras desarrollar:

$$a_iv_i^*(v) = a_iv_i^*(b_1v_1 + \cdots b_nv_n) = a_ib_i$$

Porque v_i^* se anula sobre todos los vectores de la base, excepto sobre el del mismo índice que él. Si esto lo hacemos con todos los vectores y sumando (lo que sería hacerla evaluación normal de $\omega(v)$) se tiene que:

$$\omega(v) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

Si $v = (b_1, \cdots, b_n) \in H \Rightarrow a_1b_1 + \cdots a_nb_n = 0 \Rightarrow \omega(v) = 0$ si definimos ω como lo hemos hecho, luego está bien definida.

FORMAS BILINEALES

La definición $V \times V^* \to K$ de forma que $(v, \omega) \to \omega(v) \in K$, que justamente se dio para $[\eta(v)](\omega)$ tiene buenas propiedades que podemos querer "copiar" para otros objetos matemáticos. ¿Pero qué propiedades tiene esta aplicación? Si denotamos la aplicación por $\langle v, \omega\rangle$, entonces:

- $\langle v+v',\omega\rangle = \langle v,\omega\rangle + \langle v',\omega\rangle$
- $\langle \lambda v,\omega\rangle = \lambda\langle v,\omega\rangle$
- $\langle v,\omega+\omega'\rangle = \langle v,\omega\rangle + \langle v,\omega'\rangle$
- $\langle v,\lambda\omega\rangle = \lambda\langle v,\omega\rangle$

Es decir, que considerando la función fija para ω y libre para v lo que tenemos es una forma lineal sobre V y si escogemos la función fija para v y libre para ω, entonces también es una forma lineal sobre V^*.

Características de las formas bilineales

Vamos aproximarnos primero al concepto de forma bilineal y ver que consecuencias y características tiene sobre las definiciones de espacio vectorial y endomorfismos que venimos desarrollando hasta ahora.

Definición (Forma Bilineal)

*Sea $f : V \times V \to K$ una aplicación, se dice que es **K-bilineal** si es lineal respecto de ambas componentes de la función, es decir, verifica:*

- $f(v+v',w) = f(v,w) + f(v',w)$
- $f(v,w+w') = f(v,w) + f(v,w')$
- $f(av,w) = af(v,w)$
- $f(v,bw) = bf(v,w)$

Al conjunto de todas las formas bilineales se le denota como $Bil(V)$

Ejemplo:

Supongamos que tenemos $\omega_1, \omega_2 \in V^*$ y definimos $f(v,w) = \omega_1(v)\omega_2(w)$ es trivialmente una forma bilineal porque verifica dichas condiciones.

Ejemplo:

Supongamos que $V = Mat_n(K)$ y definimos $f(A,C) = tr(A \cdot C)$ y se puede comprobar fácilmente que se verifican las propiedades de bilinealidad.

Definición (Tipos de formas bilineales)

Sea f una forma K-bilineal, decimos que f es:

- ***Degenerada:*** $rg(f) < n$
- ***Definida positiva:*** $\forall x,y \in V,\ x,y \neq 0 : f(x,y) > 0$
- ***Semidefinida positiva:*** $\forall x,y \in V : f(x,y) \geq 0$
- ***Semidefinida negativa:*** $\forall x,y \in V : f(x,y) \leq 0$
- ***Definida negativa:*** $\forall x,y,\ x,y \neq 0 \in V : f(x,y) < 0$

Observación:

Obsérvese que $\forall x \in V : f(x,0) = 0$ y que, por tanto, una forma que es definida positiva o definida negativa tiene por único elemento que cumple $f(v,v) = 0$ al $v = 0$.

Proposición (Operaciones con formas bilineales)

El conjunto $Bil(V)$ tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones:

$$(f+g)(v,w) = f(v,w) + g(v,w) \qquad\qquad f \in Bil(V) \Rightarrow (\lambda f)(v,w) = \lambda f(v,w)$$

<u>Observación</u>:

Una forma bilineal no es una aplicación lineal porque no ocurre lo siguiente:

$$f((v,w) + (v'w')) \neq f(v,w) + f(v',w')$$

Matriz asociada y Cambio de Base

Si definimos una base de V, los vectores operandos quedarán determinados de la forma:

$$\begin{cases} v = x_1 v_1 + \cdots x_n v_n \\ w = y_1 v_1 + \cdots y_n v_n \end{cases}$$

De este modo, podemos expresar la imagen de dicha forma bilineal como:

$$f(v,w) = \sum_{i,j} (x_i y_j f(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} (a_{ij}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ donde } a_{ij} = f(v_i, v_j)$$

La matriz A formada por los a_{ij} es la asociada a la forma bilineal y está compuesta por las imágenes de la forma bilineal en todos los posibles pares de vectores de la base:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Teorema (de la Matriz Asociada)

Sea $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma K-bilineal y $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V, podemos expresar la imagen por f de los pares de vectores de V como:

$$\forall v, w \in V : f(v,w) = v \cdot M_{B,B'}(\phi) \cdot w^t$$

donde la matriz de la ecuación es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ donde } a_{ij} = f(v_i, v_j)$$

Si suponemos ahora que B' es otra base, entonces la función cambiará a:

$$f(v,w) = \begin{pmatrix} x'_1 & \cdots & x'_n \end{pmatrix} (a'_{ij}) \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Por tanto, llamando $P = M(B', B) \in GL_n(K)$ a la matriz de paso de B' a B, entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 & \cdots & y'_n \end{pmatrix} P^t$$

luego si reescribimos la matriz A en estos nuevos términos, vemos que se relacionan como:

$$f(v,w) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} \cdot \underbrace{P^t \cdot A \cdot P}_{A'} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \Rightarrow A' = P^t AP$$

Definición (Congruencia de Matrices)

*Sean $A, A' \in Mat_n(K)$, decimos que ambas matrices son **congruentes** si están relacionadas como:*

$$\exists P \in GL_n(K) : A' = P^t AP$$

esta relación es de equivalencia en el espacio $Mat_n(K)$.

Ejemplo:

Si escogemos $V = Mat_2(K)$ y la base formada por:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si definimos la forma bilineal como $f(A,C) = tr(A \cdot C)$ vamos a calcular los coeficientes de su matriz:

$$\begin{cases} a_{11} = tr(E_{11}, E_{11}) = tr \cdots = 1 \\ a_{12} = tr(E_{11}, E_{12}) = tr \cdots = 0 \\ a_{13} = tr(E_{11}, E_{21}) = tr \cdots = 0 \\ a_{14} = tr(E_{11}, E_{22}) = tr \cdots = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Observación:

Del mismo modo que ocurría con las aplicaciones lineales, ocurre que la aplicación que asocia a cada forma su matriz es un isomorfismo de espacios y, en consecuencia, la dimensión del espacio $Bil(V)$ es:

$$f \xmapsto{\Phi} M_B(f) \Rightarrow Bil(V) \simeq Mat_n(K) \Rightarrow \dim Bil(V) = n^2$$

Simetría y antisimetría

Como nos encaminamos a una clasificación general de las formas bilineales, es necesario observar las características de dos tipos fundamentales de formas: las simétricas y las antisimétricas, pues más adelante veremos que son las piezas fundamentales de cualquier forma bilineal.

Definición (Simetría y Antisimetría)

*Sea $f : V \times V \to K$ una forma K-bilineal, decimos que f es **simétrica** si:*

$$f(v,w) = f(w,v) \Rightarrow A = M_B(f) \in Mat_n(K) \text{ simétricas}$$

*y decimos que f es **antisimétrica** si:*

$$f(v,w) = -f(w,v) \Rightarrow A = M_B(f) \in Mat_n(K) \text{ antisimétricas}$$

Recordemos por un instante que cualquier matriz se podía escribir como combinación de una matriz simétrica y antisimétrica:

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

así que es razonable pensar que con las formas bilineales suceda lo mismo.

Teorema

Sea $f \in Bil(V)$, entonces se puede[2] *escribir como combinación lineal de una forma simétrica y otra antisimétrica:*

$$f = f_s + f_a : \begin{cases} f_s(v,w) = \frac{f(v,w)+f(w,v)}{2} & \Rightarrow A_{f_s} = \frac{A+A^t}{2} \\ f_a(v,w) = \frac{f(v,w)-f(w,v)}{2} & \Rightarrow A_{f_a} = \frac{A-A^t}{2} \end{cases}$$

Observación:

En consecuencia, podemos calcular la dimensión de estos dos subespacios de $Bil(V)$:

$$\begin{cases} Bil_s(V) = \{f_s : V \times V \to K\} & \Rightarrow \dim Bil_s(V) = \frac{n(n+1)}{2} \\ Bil_a(V) = \{f_a : V \times V \to K\} & \Rightarrow \dim Bil_a(V) = \frac{n(n-1)}{2} \end{cases}$$

Definición (Vectores Isótropos)

Sea V un espacio vectorial y $f : V \times V \to K$ una forma bilinieal, un vector v se dice ***isótropo respecto a*** *f si verifica $f(v,v) = 0$.*

Proposición

Sea V un espacio vectorial y f una forma bilineal sobre dicho espacio, entonces:

$$f \text{ antisimétrica} \Leftrightarrow \forall v \in V : f(v,v) = 0$$

Demostración:

- $\Rightarrow$:

  Trivial por la definición de antisimetría

- $\Leftarrow$:

$$0 = f(v+w, v+w) \Rightarrow 0 = \underbrace{f(v,v)}_{=0} + f(v,w) + f(w,v) + \underbrace{f(w,w)}_{=0} \Rightarrow f(v,w) = -f(w,v)$$

Corolario

Si f es simétrica donde $f \neq 0$, entonces $\exists v \in V : f(v,v) \neq 0$

Forma cuadrática asociada

Reviste gran importancia, sobre todo en los capítulos posteriores, el valor que toma la función bilineal sobre el mismo vector como ambas componentes de la función. Hemos visto que podemos caracterizar las formas antisimétricas como aquellas en las que todos los vectores son isótropos. Por ejemplo, para que una forma no sea degenerada, el único vector isótropo debe ser el 0. Por todo esto, tiene sentido definir una nueva función que a cada vector $v \in V$ le asigne su imagen por f como ambas componentes.

Definición (Forma Cuadrática)

Sea f una forma bilineal, se define su ***forma cuadrática asociada*** *como la aplicación*

$$\begin{aligned} q : V &\longrightarrow K \\ v &\longmapsto f(v,v) \end{aligned}$$

[2] De este modo, es fácil comprobar que toda la teoría desarrollada no tiene sentido a menos que $\chi(K) \neq 2$ puesto que si no la antisimetría no tendría sentido.

Proposición

Sea $q : V \to K$ una forma cuadrática, existe una única forma bilineal f simétrica de la cual es asociada y viene dada por la expresión:

$$f(v,w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$$

Es decir, que existe una correspondencia biyectiva entre las formas bilineales simétricas y las formas cuadráticas asociadas.

Demostración:

$$f \in Bil_s(V) \Rightarrow f(v+w, v+w) = \begin{cases} q(v+w) \\ q(v) + q(w) + 2f(v,w) \end{cases} \Rightarrow f(v,w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$$

Observación:

Es notable destacar que la proposición anterior no se verifica para una forma bilineal en general, por ejemplo, la forma cuadrática nula proviene de cualquier antisimétrica:

$$f \in Bil_a(V) \Rightarrow q(v) = 0 \text{ pero } \Leftarrow \text{ no es cierto}$$

Observación:

Cuando hablamos de la matriz de la forma cuadrática no estamos hablando más que de la matriz de la forma bilineal de la que procede, ya que el cálculo sería el mismo que cuando vimos la matriz de la forma bilineal, pero cambiando los y_i por x_i.

Ortogonalidad

En este apartado, vamos a tratar de relacionar la ortogonalidad tal y como se definió en el capítulo Ortogonalidad con una nueva definición a través de una forma bilineal. De esta manera, el objetivo fundamental es intentar sacar provecho de los resultados que ésta tenía en el espacio dual para utilizarlos en la que se va a ver ahora.

Definición (Formas Izquierda y Derecha)

*Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal, definimos la **forma izquierda** $f_{iz} \in Hom(V, V^*)$ y la **forma derecha** $f_d \in Hom(V, V^*)$ de la forma bilineal como aquellas que verifican que:*

$$f_{iz} : V \to V^* \text{ donde } f_{iz}(v)(w) = f(v,w)$$

$$f_d : V \to V^* \text{ donde } f_d(v)(w) = f(w,v)$$

es decir, que f_{iz} asocia a cada vector v la forma de V^* que al aplicarse sobre w tiene como resultado la aplicación bilineal y con la derecha sucede de modo análogo.

Proposición

Sea $f \in Bil(V)$ y f_{iz} y f_d sus formas izquierda y derecha respectivamente, dadas unas bases B y B^* de V y V^* sus matrices son:

$$M_{B,B^*}(f_{iz}) = A^t \qquad M_{B,B^*}(f_d) = A$$

Demostración:

$$M_{B,B^*}(f_{iz}) = (c_{ij}) \text{ donde } f_{iz}(v_i) = \sum c_{ji}v_j^* \Rightarrow f_{iz}(v_i)(v_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ji}v_j^*\right)(v_k) = c_{ki}$$

Pero por otro lado tenemos que:

$$f_{iz}(v_i)(v_k) = f(v_i, v_k) = a_{ik} \Rightarrow c_{ki} = a_{ik}$$

Con lo cual se tiene que:

$$M_{B,B^*}(f_{iz}) = M_B(f)^t = A^t$$

Del mismo modo y con una demostración análoga tenemos que:

$$M_{B,B^*}(f_d) = A$$

Observación:

En consecuencia, tenemos[3] que:

$$\begin{cases} rg(f) = rg(f_{iz}) = n - \dim\ker(f_{iz}) \\ rg(f) = rg(f_d) = n - \dim\ker(f_d) \end{cases} \Rightarrow \dim\ker f_{iz} = \dim\ker f_d = n - rg(f)$$

Esto quiere decir pues, que los núcleos de ambas funciones no tienen por qué coincidir, pero siempre tendrán la misma dimensión.

Proposición

Sea f una forma bilineal, entonces:

$$f \text{ no degenerada } \Leftrightarrow f_{iz} \text{ isomorfismo o } f_d \text{ isomorfimo}$$

Definición (Ortogonalidad respecto de una forma bilineal)

*Sea $W < V$, $f \in Bil_a(V)$ y $v, w \in V$, decimos que v y w son **ortogonales respecto de f** si $f(v,w) = 0$. Además, se define el **ortogonal a un subespacio** como:*

$$W^{\perp} = \{v \in V : f(v,w) = 0 : \forall w \in W\} < V$$

Ejemplo:

- El conjunto W y su ortogonal $W^{\perp}$ no tienen porque ser disjuntos, por ejemplo considerando:

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = M_B(f) \text{ donde } f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

  los vectores isótropos de esta forma bilineal son:

  $$v = (x_1, x_2) : f(v,v) = 0 \Rightarrow f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$$

  Si ocurre que $f(v,v) = 0$ quiere decir que $v \in L(v)^{\perp}$ con lo cual estos vectores quedarían definidos por:

  $$x_1x_2 - x_2x_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

  Lo que implica que todos los vectores son ortogonales a sí mismos[4].

[3] En una forma bilineal no hay un núcleo concreto porque no se puede considerar subespacio de nada. Lo único que podemos llamar núcleo es la intersección de los núcleos izquierdo y derecho y considerarlo un cojunto de pares que se anulan y que estudiaremos más tarde.

[4] Pero no hemos demostrado que sean ortogonales a todos los vectores, que no es cierto.

- Del mismo modo, para cualquier forma bilineal antisimétrica:
$$\{0\}^{\perp} = \mathbb{R}^2$$
porque $f(v,0) = f(v,0) + f(v,0) \Rightarrow f(v,0) = 0$.
$$(\mathbb{R}^2)^{\perp} = 0$$
Por que $f(v,w) = 0 : \forall w \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f_{iz}(v)(w) \Rightarrow v \in \ker(f_{iz})$, pero como el $rg(f) = 2 = rg(f_{iz})$ entonces $\ker(f_{iz}) = \{0\} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\perp} = \{0\}$.

- Consideramos $W : x_1 - x_2 = 0$, para que un vector sea ortogonal a esa recta, tiene que serlo a todos los vectores de esa recta, por lo que basta que sea ortogonal al generador de esa recta:
$$0 = f(v, e_1 + e_2) = x_1 - x_2$$
Luego el ortogonal de W es $W^{\perp}$ la propia recta.

Ortogonalidad en productos escalares

En primer lugar, vamos a definir la noción de producto escalar, que va a ser fundamental para la comprensión de otros capítulos o áreas como la geometría análitica o el espacio vectorial euclídeo.

Definición (Producto Escalar)

*Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $f \in Bil_s(V)$ una forma bilineal simétrica, decimos que esta es **producto escalar** si es bilineal simétrica y definida positiva.*

Vista la definición, si consideramos f un producto escalar y la siguiente aplicación: para cada $v \in V$ le asignamos la aplicación $v^* : V \to K$ que mapea $w \mapsto f(v,w)$, es decir, la forma bilineal f fija para el vector v o, lo que es lo mismo, la aplicación $f_{iz}(v)$. Entonces la aplicación que a cada v le asigna su correspondiente v^* es un isomorfimos y además canónico por la proposición sobre f no degeneradas.

Por otro lado, tenemos que la correspondencia entre v y la aplicación η_v que vimos en el apartado de Espacio Bidual es un isomorfismo canónico entre V y V^{**}.

Por tanto, dado $v \in V$ podemos considerar, ya no $L(v)^{\perp} < V^*$, sino $L(v)^{\perp} < V$ debido al siguiente razonamiento:

- Consideramos $v^* \in V^*$ y calculamos $L(v^*)^{\perp}$, de este modo, estamos considerando todos los $\eta_v \in V^{**}$ de modo que $\eta_v(v^*) = 0$, esto es, que $v^*(v) = 0$.
- Como, por ser f un producto escalar, tenemos que $v \mapsto v^*$ es un isomorfismo, podemos considerar $L(v)^{\perp} = L(v^*)^{\perp} < V^{**}$ por ser $L(v) \simeq L(v^*)$.
- Del mismo modo, como también hemos visto que $w \mapsto \eta_w$ es un isomorfismo, entonces $L(v^*)^{\perp} \simeq W < V$.
- Por tanto, cuando escogemos un vector v y decimos que otro vector w es ortogonal a él, estamos diciendo que $\eta_w(v^*) = v^*(w) = f(v,w) = 0$.

Surge ahora la pregunta de ¿y para qué todo este razonamiento si me podía limitar a considerar la definición de ortogonalidad previa sin relacionarla con la ortogonalidad del espacio dual? Pues muy sencillo: porque como una es equivalente a la otra a través de isomorfismos todos los enunciados válidos para una también lo son para la otra. De este modo y prácticamente de forma trivial, tenemos el siguiente enunciado.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y f un producto escalar, la ortogonalidad con respecto a f verifica las siguientes propiedades:

- $W \subset U \Rightarrow U^{\perp} \subset W^{\perp}$

Clasificación de formas bilineales

Del mismo modo que en el tema de clasificación de endomorfismos, tratábamos de agrupar las aplicaciones lineales en clases de equivalencia y escoger el representante más sencillo posible dentro de cada clase, en este apartado vamos a tratar de hacer lo mismo pero con las formas bilineales.

Teorema (de Clasificación de Formas Antisimétricas)

Sea $f \in Bil_a(V)$, entonces $rg(f) = 2 \cdot s$ y $\exists B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V tal que la matriz de f queda como:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{(s)} \oplus (0)^{(t)} \text{ donde } 2s + t = \dim V$$

Demostración:

Supongamos que $f = 0$, está trivialmente probado por lo que podemos suponer f distinto de 0.

Por tanto, supongamos $f \neq 0 \Rightarrow \exists v, w : v \neq w : f(v, w) \neq 0$, deben ser distintos porque todos los vectores son isótropos al ser la forma antisimétrica. Vamos a probar primero que son linealmente independientes denotando por $a = f(v, w)$:

$$\lambda v + \mu w = 0 \Rightarrow f(v, \lambda v + \mu w) = 0 \Rightarrow \mu a = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Ahora para elegir la base escogemos como primeros vectores $v_1 = a^{-1}v$, $v_2 = w$ viendo primero que:

$$f(v_1, v_2) = a^{-1}f(v, w) = a^{-1}a = 1$$

Y los escogemos de este modo porque ocurre con ambos que:

$$\Pi = L(v, w) = L(v_1, v_2) \Rightarrow V = \Pi \oplus \Pi^{\perp}$$

Vamos a probar esto último:

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_2w_3 + \cdots + x_nw_n \in \Pi^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = f(v_1, v) = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + \cdots = x_2 + \cdots \\ 0 = f(v_2, v) = x_1 \cdot -1 + x_2 \cdot 0 + \cdots = -x_1 + \cdots \end{cases}$$

Luego como posee dos ecuaciones independientes ocurre que $\dim \Pi^{\perp} = n - 2$ así que falta solo ver que $\Pi \cap \Pi^{\perp} = \{0\}$ para poder afirmar que son suma directa, por lo tanto, sabiendo que si $v \in \Pi \Rightarrow \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2$:

$$v \in \Pi \cap \Pi^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} 0 = f(\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2, v_1) = -\lambda_2 \\ 0 = f(\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2, v_2) = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \Pi \cap \Pi^{\perp} = \{0\}$$

Para terminar la demostración tomamos una base de V de forma que $B = \{ \underbrace{v_1, v_2}_{B \text{ base de } \Pi} \underbrace{v_3, \cdots, v_n}_{\text{base de } \Pi^{\perp}} \}$, con lo cual la matriz de f en la base elegida queda como:

$$M_B(f) = M_{\{v_1,v_2\}}(f\mid_{\Pi\times\Pi}) \oplus M_{\{v_3,\cdots,v_n\}}(f\mid_{\Pi^{\perp}\times\Pi^{\perp}})$$

Como la segunda matriz se puede considerar como una forma restringida a una dimensión más pequeña, aplicamos inducción y terminamos.

Observación:

La demostración nos propone un método para calcular la base B que genera esa representación matricial:

- Como la matriz es no nula, $\exists v, w \in V : f(v, w) \neq 0$ que serán los primeros vectores de la base.
- Calculamos el ortogonal del plano formado por ambos vectores, es decir, $\Pi = L(v_1, v_2) \Rightarrow \Pi^{\perp} = L(v_1, v_2)^{\perp}$.

- La restricción de la forma bilineal f al subespacio $\Pi^{\perp}$ es de nuevo una forma bilineal que podemos simplificar con este método, es decir, calcularíamos dos vectores tal que $f(v,w) \neq 0$, etc.

Ejemplo:

Si estamos en dimensión 2 tenemos que:

$$A \in A_2(K) \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow f \in Bil_a(V) \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \\ f(v,w) = x_1y_2 - x_2y_1 \end{cases}$$

Si estamos en dimensión 3 tenemos que:

$$A \in A_3(K) \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow f \in Bil_a(V) \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \\ f(v,w) = x_1y_2 - x_2y_1 \end{cases}$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in A_3(K)$$

Como $A \neq 0$, si consideremos $A = M_{B_c}(f)$ de forma que $f : K^3 \times K^3 \to K$, entonces:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la base B en la que la matriz de la forma bilineal es esa tenemos en cuenta lo siguiente:

- Como la matriz es antisimétrica todos los vectores son isótropos, es decir, que $f(v,v) = 0 : \forall v \in V$. De este modo, la diagonal de la matriz siempre debe ser 0.
- Como la matriz es no nula, existe una pareja de vectores de forma que $\exists v, w \in V : f(v,w) \neq 0$ que en este caso se verifica con e_1 y e_2 ya que $f(e_1, e_2) = 1$. De este modo tomamos como primeros vectores de la base $v_1 = e_1 \cdot 1$ y $v_2 = e_2 \cdot 1$.
- Calculamos el ortogonal del plano formado por ambos vectores, es decir:

$$\Pi^{\perp} = \begin{cases} 0 = f(e_1, v) = x_2 + x_3 \\ 0 = f(e_2, v) - x_1 + x_3 \end{cases} \Rightarrow B = \{(1,-1,1)\} \text{ es base de } \Pi^{\perp}$$

- Tomamos la base $B = \{e_1, e_2, e_1 - e_2 + e_3\}$ y solo queda calcular $P = M(B, B_c)$.

Teorema (de Clasificación de Formas Simétricas)

Sea $f \in Bil_s(V)$, entonces $\exists B = \{v_1, \cdots v_n\}$ base de V respecto de la cual $M_B(f)$ es diagonal.

Demostración:

Si $f = 0$ no hay nada que probar puesto que se cumple trivialmente.

Suponiendo que $f \neq 0 \Rightarrow \exists v \in V : f(v,v) \neq 0$, es decir, existe algún vector no isótropo. En la práctica, sean cuales sean los vectores escogidos se debe cumplir que o bien v, o bien w o $v + w$ sean NO isótropos. De este modo llamamos v_1 a ese v que no es isótropo.

En primer lugar vamos a ver que $L(v_1)^{\perp}$ es un hiperplano:

Extendemos a una base del total de forma que $B = \{v_1, w_2, \cdots, w_n\}$ de forma que ahora calculamos el subespacio ortogonal de la siguiente forma:

$$v = x_1v_1 + x_2w_2 + \cdots + x_nw_n \in L(v)^{\perp} \Leftrightarrow 0 = f(v_1, v) = \underbrace{f(v_1, v_1)}_{\neq 0} x_1 + \cdots$$

Por lo que ya vemos que es un hiperplano porque posee una única ecuación con lo cual $\dim L(v)^{\perp} = n - 1$. Por lo que basta ahora con comprobar que la intersección de ambos subespacios es 0:

$$v \in L(v_1) \cap L(v_1)^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} 0 = f(\lambda v_1, v_1) = \lambda f(v_1, v_1) \Rightarrow \lambda = 0 \\ v = \lambda v_1 \end{cases} \Rightarrow v = 0$$

Ahora para escoger la base B que hace diagonal la matriz tomamos $B = \{ \underbrace{v_1}_{\text{base de } L(v_1)^{\perp}}, \underbrace{v_2, \cdots, v_n}_{\text{base de } L(v_1)^{\perp}} \}$ luego la matriz de la forma bilineal en esta base queda de la siguiente forma:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & M_B(f\mid_{L(v_1)^{\perp} \times L(v_1)^{\perp}}) & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Es decir, que nos quedan todo ceros menos en la posición a_{11} y después una caja más pequeña que es la forma bilineal restringida a al subespacio ortogonal hallado. Por inducción se termina teniendo que ocurre de nuevo en los sucesivos trozos más pequeños luego la matriz queda diagonal.

Métodos de diagonalización de formas simétricas

Fundamentalmente tenemos tres métodos plausibles:

- Por vectores isótropos:

  Hemos visto en la demostración de que existe una base respecto de la cual es diagonal que para obtener dicha matriz diagonal se siguen los siguientes pasos:

  1. Buscamos un vector no isótropo que llamaremos v
  2. Calculamos el subespacio ortogonal que siempre será un hiperplano y además $L(v) \oplus L(v)^{\perp} = V$
  3. Como v es ortogonal a todo lo que queda de V, la fila y la columna que contiene a v son 0 menos la posición de v.
  4. La restricción de f al subespacio ortogonal hallado vuelve a ser una forma bilineal y repetimos el proceso.

  Repitiendo este proceso un número finito de veces, cada v es un vector de la base respecto de la cual es diagonal.

  Ejemplo:

  FALTA EJEMPLO

- Sumando filas con filas o columnas con columnas (que es como multiplicar a izquierda o derecha por matrices elementales) y aplicar el mismo cambio sobre las filas o las columnas (las que no se hayan hecho) para que de esta forma sea como multiplicar por una matriz elemental y su traspuesta por el otro lado, hasta tener una matriz diagonal. El producto de todas esas matrices sobre la identidad es la matriz P de cambio de base.

  Ejemplo:

  FALTA EJEMPLO

- El último método consiste en obtener la forma cuadrática asociada y llegar mediante métodos algebraicos como completar cuadrados a una forma cuadrática asociada de la forma $q(v) = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots$ porque esta forma es la asociada a una matriz diagonal.

  Ejemplo:

$$q(v) = -x^2+4xy+3y^2+2z^2 \Rightarrow q(v) = -(x-2y)^2+4y^2+3y^2+2z^2 = -(\underbrace{x-2y}_{x'})^2+7\underbrace{y^2}_{y'}+2\underbrace{z^2}_{z'}$$

  Luego tenemos que:

$$\begin{cases} x' = x+2y \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=M(B,B')} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Clasificación de formas bilineales simétricas sobre $\mathbb{C}$

Teorema

Sea $f \in Bil_s(V)$ cuyo rango es $rg(f) = r$ y V un $\mathbb{C}-$espacio vectorial, entonces:

$$\exists B = \{v_1, \cdots, v_n\} \text{ base de } V : M_B(f) = I_r \oplus 0_{n-r}$$

Demostración:

Sabemos por el teorema general que $M_B(f)$ es diagonal respecto de alguna base, es decir:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_r & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Si cambiamos los primeros r vectores por los que siguen a continuación y los demás los dejamos igual

$$v_i' = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_i}} v_i & i = 1, \cdots, r \\ v_i & i > r \end{cases}$$

conseguimos que con este cambio la forma bilineal valga:

$$f(v_i', v_i') = f\left(\frac{1}{\sqrt{d_i}} v_i, \frac{1}{\sqrt{d_i}} v_i\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 f(v_i, v_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 d_i = 1$$

es decir, que quede la matriz que habíamos enunciado.

Clasificación de formas bilineales simétricas sobre $\mathbb{R}$: Ley de inercia

Teorema

Sea $f \in Bil_s(V)$ cuyo rango es $rg(f) = r$ y V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, entonces:

$$\exists B = \{v_1, \cdots, v_n\} \text{ base de } V : M_B(f) = I_s \oplus (-I_t) \oplus 0_{n-r} \text{ donde } r = s+t$$

Además, s y t son únicos y forman lo que llamamos ***signatura*** *de la forma bilineal:*

$$\varepsilon(f) = (s, t)$$

Demostración:

Sabemos por el teorema general que $M_B(f)$ es diagonal respecto de alguna base, es decir:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_r & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso procedemos de la misma manera que con los complejos, pero distinguiendo entre positivos (desde d_1 hasta d_s) y negativos (desde d_{s+1} hasta d_r) porque aquí no existen ciertas raíces. Se puede definir una base B' de forma que se cambian los positivos por 1 y los negativos por menos 1:

$$v_i' = \begin{cases} \frac{1}{e_i}v_i & 1 \leq i \leq s : d_i = e_i^2 \\ \frac{1}{e_1}v_i & s+1 \leq i \leq r : d_i = -e_i^2 \\ v_i & r < i \leq n \end{cases}$$

Entonces tenemos que:

$$f(v_i', v_i') = \begin{cases} \frac{1}{e_i^2}f(v_i', v_i') = \frac{1}{e_i^2}d_i = 1 \\ \frac{1}{e_i^2}f(v_i', v_i') = \frac{1}{e_i^2}d_i = -1 \\ f(v_i, v_i) = 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$M_{B'}(f) = I_s \oplus (-I_t) \oplus 0_{n-r}$$

A priori parece que esta clasificación no clasifica por rango porque para el mismo rango podemos tener distintos para el número de 1 y -1. Veamos pues la unicidad, supongamos que tenemos dos matrices de esta forma:

$$M_B(f) = I_s \oplus (-I_t) \oplus 0_{n-r}$$

$$M_{B'}(f) = I_{s'} \oplus (-I_{t'}) \oplus 0_{n-r}$$

A pesar de que estos valores de la signatura pueden ser distintos, el rango no puede serlo, por lo tanto se tiene que:

$$\begin{cases} rg(f) = r = s + t \\ rg(f) = r = s' + t' \end{cases}$$

Si nos fijamos en el subespacio generado por los vectores positivos de la primera matriz y nos fijamso en el generado por los vectores no positivos de la segunda matriz vamos a ver que son suma directa y generan el espacio V:

$$W_1 = L(v_1, \cdots, v_s) \Rightarrow \dim W_1 = s$$

$$W_2 = L(v_{s'+1}', \cdots, v_n') \Rightarrow \dim W_2 = n - s$$

Veamos que la intersección es nula:

$$\sum_{i=1}^{s} a_i v_i = \sum_{j=s'+1}^{n} a_j' v_j' \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \begin{cases} f(v,v) = \sum_{i=1}^{s} a_i^2 f(v_i, v_i) = \sum_{i=1}^{s} a_i^2 \geq 0 & \text{por } \in W_1 \\ f(v,v) = \sum_{j=s'+1}^{n} (a_j')^2 f(v_j', v_j') = \sum_{j=s'+1}^{r} -(a_j')^2 \leq 0 & \text{por } \in W_2 \end{cases}$$

Por lo tanto, como deben ser iguales, entonces necesariamente por ser todos los cuadrados positivos, se tiene que:

$$a_1^2 + \cdots + a_s^2 = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_s = 0 \Rightarrow v = 0$$

Por tanto, usando la fórmula de Grassmann:

$$n \geq \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 = s + n - s' \Rightarrow s' \geq s$$

Por un razonamiento análogo cambiando la base llegaríamos a $s \geq s'$, en consecuencia $s = s'$, implicando $t = t'$.

Teorema

Sea $f \in Bil_s(V)$ y $\dim V = n$, entonces verifica:

- *Si $s + t < n$, entonces es* ***degenerada.***
- *Si $\varepsilon(m, 0)$ con $m < n$, entonces es* ***semidefinida positiva.***
- *Si $\varepsilon(0, m)$ con $m < n$, entonces es* ***semidefinida negativa.***
- *Si $\varepsilon(n, 0)$, entonces es* ***definida positiva.***
- *Si $\varepsilon(0, n)$, entonces es* ***definida negativa.***

Ejemplo:

Sobre $n = 2$ y $rg(f) = 2$ hay 3 clases de equivalencia por congruencia de matrices, una por cada posible signatura:

$$\varepsilon(f) = (2, 0) \Rightarrow f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(f) = (1, 1) \Rightarrow f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(f) = (0, 2) \Rightarrow f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -x_1y_1 - x_2y_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es notable destacar que la tercera es menos la primera pero a pesar de ello, NO son congruentes.

Viendo las formas cuadráticas asociadas:

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$q(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$$

Si ahora $rg(f) = 1$, entonces:

$$\varepsilon(f) = (1, 0) \Rightarrow f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1$$

$$\varepsilon(f) = (0, 1) \Rightarrow f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -x_1y_1$$

Y viendo las formas cuadráticas asociadas entonces:

$$q(x_1, x_2) = x_1^2$$

$$q(x_1, x_2) = -x_1^2$$

ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

El espacio vectorial euclídeo es un concepto fundamental que servirá de antesala del espacio afín, la geometría euclídea, la física, etc. Nos permite modelar el espacio n dimensional de $\mathbb{R}$ y estudiar analíticamente las propiedades de dicho espacio. Sin ir más lejos, permite modelar el espacio tridimensional real (o al menos sirve como base) para poder hacer un estudio exhaustivo de la geometría en tres dimensiones, para poder hacer modelos físicos sobre el comportamiento de cierto objeto, etc.

DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

Definición (Base Ortonormal)

*Sea f un producto escalar y V un espacio vectorial euclídeo, entonces la base B para la cual la forma bilineal es la identidad se dice que es una base **ortonormal**.*

Definición (Espacio Vectorial Euclídeo)

*Se define un **espacio vectorial euclídeo** como una dupla (V, f) formada por un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y un producto escalar.*

*De este modo, decimos que **dos espacios vectoriales son isomorfos** cuando:*

$$(V, f) \simeq (V', f') \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \phi : V \to V' \text{ isomorfismo} \\ f(\phi(v), \phi(w)) = f(v, w) : \forall v, w \in V \end{cases}$$

Teorema

Sean V y V' espacios vectoriales euclídeos, éstos son isomorfos si y solo si la dimensión de V es la misma que la de V', es decir:

$$(V, f) \simeq (V', f') \Leftrightarrow \dim V = \dim V'$$

Demostración:

La implicación en el sentido derecho está clara por la definición de isomorfismo de espacios euclídeos y por la condición de isomorfismos de espacios vectoriales.

Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base ortonormal de V respecto de f y $B = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ base ortonormal de V' respecto de f', entonces definimos:

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i v'_i$$

Esta es la única aplicación lineal que lleva los vectores de la base B a los de la base V' ya tenemos completamente definida la aplicación. Tal y como la hemos definido se tiene que $f(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ donde cada v_i, v_j son vectores de la base B. De este modo, $f(v_i', v_j') = \delta_{ij}$ también porque hemos dicho que B' es ortonormal respecto de f' luego esto ya prueba la biyectividad, etc.

Observación:

De este razonamiento extraemos que lo que clasifica los espacios euclídeos es la dimensión del espacio vectorial porque si tenemos dos productos escalares distintos basta con definir la aplicación biyectiva que transforma uno en otro y ya son isomorfos.

Teorema (del Criterio de Silvester)

Sea $f \in Bil_s(V)$ y $A = (a_{ij}) = M_B(f) \in Mat_n(\mathbb{R})$ donde $a_{ij} = f(v_i, v_j)$, entonces:

$$f \text{ es producto escalar } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 : \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

es decir, basta con ver que todos los menores superiores izquierdos son positivos.

Demostración:

- $\Rightarrow$:

  Como f es producto escalar, f es definida positiva y entonces f es definida positiva sobre $L(v_1, \cdots, v_i) = V_i$ vectores de la base de V porque si lo es sobre V, sobre una restricción también. Por lo que la matriz de dicha forma bilinieal quedaría como:

  $$M_{\{v_1, \cdots, v_i\}}(f \mid_{V_i}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} \Rightarrow |M| > 0$$

  Esto ocurre porque si g es definida positiva y la matriz en alguna base $M_B(g) = I_n \Rightarrow |M_B(g)| = 1$, como para cambiar a la base que queramos se usa una matriz P inversible, se tiene que:

  $$|M_B(f)| = |P^t I_n P| = |P|^2 > 0$$

- $\Leftarrow$

  Supongamos que $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, vamos a definir una base $B' = \{v_1', \cdots, v_n'\}$ de forma que $L(v_1, \cdots, v_i) = L(v_1', \cdots, v_i')$ y que $f(v_i', v_j') = 0$ si $i \neq j$ y $f(v_i', v_i') > 0$ por inducción.

  En el primer paso, $v_1' = v_1$ es trivial la demostración solo falta probar que $f(v_1', v_1') > 0$:

  $$f(v_1', v_1') = a_{11} \Rightarrow a_{11} > 0$$

  Por la condición de partida de que el determinante es positivo.

  En el paso inductivo, considerando construido hasta el paso i y vamos a verlo para el paso $i+1$. Consideramos $W = L(v_1, \cdots, v_{i+1}) = L(v_1', \cdots, v_i', v_{i+1})$ que se cumplen porque hemos demotrado que generan el mismo subespacio hasta el paso i. Sabemos que $f \mid_{W \times W}$ es no degenerada porque el rango es máximo:

  $$A = M_{\{v_1, \cdots, v_{i+1}\}}(f \mid_{W \times W}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| > 0 \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow f \in Bil_s(\mathbb{R}) \text{ no degenerada}$$

  Si ahora consideramos el subespacio $L(v_1', \cdots, v_i')^\perp$, entonces $L(v_1', \cdots, v_i') = L(v_1, \cdots, v_i) < W$ y como f es no degenerada entonces se cumple que[1] $\dim U^\perp = \operatorname{co}\dim U$, por tanto:

  $$\dim L(v_1', \cdots, v_i') = \operatorname{co}\dim L(v_1', \cdots, v_i') = \dim W - \dim L = i + 1 - i = 1$$

[1] Este resultado se puede ver que es cierto en las dos siguientes proposiciones

Es decir, que puedo elegir un vector en W de forma que sea ortogonal a todos los vectores $L(v_1, \cdots, v_i)$, por tanto:

$$\exists v'_{i+1} \in W : v'_{i+1} \in L(v'_1, \cdots, v'_i)^{\perp} \Rightarrow W$$

Para completar la demostración falta comprobar que $f(v'_{i+1}, v'_{i+1}) > 0$, veamos que:

$$M_{\{v_1, \cdots, v_{i+1}\}}(f\mid_{W\times W}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix} \Rightarrow B = M_{\{v'_1, \cdots v'_{i+1}\}}(f\mid_{W\times W}) = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{i+1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = C_1 \oplus C_2 : C_2 = d_{i+1} \Rightarrow |B| = |C_1| \cdot |C_2| \Rightarrow |C_2| > 0$$

Proposición

Sea f una forma bilineal no degenerada en un espacio vectorial euclideo, la dimensión de un subespacio ortogonal es la codimensión del subespacio del que es ortogonal, es decir:

$$\dim W^{\perp} = n - m : \dim W = m$$

Además, si f es producto escalar:

$$W^{\perp} \oplus W = V$$

Demostración:

1. Supongamos que la dimensión es m, pues sea $\{w_1, \cdots, w_m\}$ base de W, entonces:

$$v \in W^{\perp} \Leftrightarrow 0 = f(v, w_i) = f_d(w_i)(v) : V \to V^*$$

De este modo, podemos denominar a $f_d(w_i) = \omega_i \in V^*$ puesto que es una forma lineal. Es decir, que para poder definir que vectores están en $W^{\perp}$ podemos entenderlos como m formas lineales que se anulan sobre v, luego tenemos m ecuaciones cartesianas igualadas a 0. Estas ecuaciones lineales son independientes porque como se trata de una forma no degenerada, el rango es máximo y en consecuencia la función f_d es un isomorfismo. En consecuencia, m ecuaciones con n incógnitas implican que el espacio de soluciones ($W^{\perp}$) tiene dimensión $n - m$, es decir, la codimensión.

2. Vemos que:

$$v \in W \cap W^{\perp} \Rightarrow f(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

Luego como la interseccion es nula y la suma de las dimensiones es todo n entonces queda probado:

$$\dim W + W^{\perp} = \dim W + \dim W^{\perp} - \dim W \cap W^{\perp} = n = \dim V$$

Proposición

Sea f definida positiva, los vectores ortogonales son independientes.

$$f(w_i, w_j) = 0 \Rightarrow \{w_i, w_j\} \textit{ independientes}$$

Demostración:

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = 0 \Rightarrow 0 = f(w_i, \lambda_1 w_1 + \cdots \lambda_n w_n) = \lambda_i \underbrace{f(w_i, w_i)}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_i = 0 : \forall i$$

Teorema (Método de Gram-Schimdt)

Sea (V, f) un espacio vectorial euclídeo y $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V, entonces

$$B' = \begin{cases} v_1' = v_1 \\ v_2' = v_2 + \lambda_{2,1} v_1' \\ v_3' = v_3 + \lambda_{3,2} v_2' + \lambda_{3,1} v_1' \\ \vdots \\ v_n' = v_n + \lambda_{n,n-1} v_{n-1}' + \cdots + \lambda_{n,1} v_1' \end{cases}$$

forma una base ortogonal de V, es decir, podemos encontrar $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$ únicos de forma que la base formada por esos vectores sea ortogonal respecto de f.

Demostración:

Primero vamos a ver como encontrar estos $\lambda_{i,j}$ **únicos** conociendo que la base formada debe ser ortogonal:

$$0 = f(v_2', v_1') = f(v_2 + \lambda_{2,1} v_1, v_1) = f(v_2, v_1) + \lambda_{2,1} f(v_1, v_1) \Rightarrow \lambda_{2,1} = -\frac{f(v_2, v_1)}{f(v_1, v_1)}$$

Para el caso v_3' se imponen de nuevo las condiciones que sean necesarias:

$$\begin{cases} 0 = f(v_3', v_2') = f(v_3, v_2') + \lambda_{3,2} f(v_2', v_2') + \lambda_{3,1} \underbrace{f(v_1', v_2')}_{=0} \\ \\ 0 = f(v_3', v_1') = f(v_3, v_1') + \lambda_{3,2} \overbrace{f(v_2', v_1')}^{=0} + \lambda_{3,1} f(v_1', v_1') \end{cases}$$

De esta manera, por inducción siempre queda un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los $\lambda_{i,j}$ y que siempre posee una solución única. Además cabe destacar (la demostración es trivial) que:

$$L(v_1, \ldots, v_i) = L(v_1', \ldots, v_i')$$

Del mismo modo, a partir de aquí se puede construir una base ortonormal, modificando los vectores hallados en el paso anterior para que su módulo sea unitario, es decir:

$$v_i'' = \frac{v_i'}{\sqrt{f(v_i', v_i')}}$$

Vamos a comprobarlo:

$$f(v_i'', v_i'') = f\left(\frac{v_i'}{\sqrt{f(v_i', v_i')}}, \frac{v_i'}{\sqrt{f(v_i', v_i')}}\right) = \frac{1}{f(v_i', v_i')} f(v_i', v_i') = 1$$

Es notable destacar que la matriz de el produto escalar en esta base es la matriz identidad, porque todos los vectores son ortogonales dos a dos y ellos mismos son 1.

Definición (Norma de un vector)

Sea f producto escalar en un espacio vectorial euclídeo, se define la ***norma de un vector*** *como:*

$$||v|| = \sqrt{f(v, v)} = \sqrt{q(v)}$$

Proposición

La función norma definida anteriormente $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$, cumple las siguientes propiedades:

- $||v|| \geq 0, \; ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

- $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
- $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Demostración:

- Trivial
- Por biliniealidad
- Primero vamos a probar un resultado conocido como la desigualdad de Schwarz:

$$f \text{ producto escalar } \Rightarrow f(v,w)^2 \leq q(v)q(w)$$

Vamos a considerar $q(v+\lambda w)$. Es sencillo ver que $0 \leq q(v+\lambda w) = q(v)+\lambda^2 q(w)+2\lambda f(v,w)$. Este resultado lo podemos entender como un polinomio con coeficientes reales con grado dos sobre λ que es la indeterminada. Para que ese polinomio se anule, por venir de la forma cuadrática que viene, tiene que ocurrir que:

$$q(v+\lambda w) = 0 \Rightarrow v + \lambda w = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = -\lambda w \\ \nexists \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Luego el polinomio o no tiene ninguna raíz real o tiene solo una que sería la que hace v y w proporcionales, luego el discriminante tiene que ser menor igual que 0:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (v,w)^2 - 4q(w)q(v) \leq 0 \Rightarrow f(v,w)^2 \leq q(v)q(w)$$

Conociendo este resultado, vamos a probar ahora la desigualdad triangular y con probar que $||v+w||^2 \leq (||v|| + ||w||)^2$ es suficiente:

$$||v+w||^2 = q(v+w) = f(v+w,v+w) = q(v)+2f(v,w)+q(w) \leq q(v)+2\sqrt{q(v)}\sqrt{q(w)}+q(w) =$$

Porque de la desigualdad que hemos probado antes tenemos que $|f(v,w)| \leq \sqrt{q(v)}\sqrt{q(w)}$.Y ahora para terminar tenemos que:

$$= (\sqrt{q(v)} + \sqrt{q(w)})^2 = (||v|| + ||w||)^2$$

Además, recuperando la desigualdad de Schawrz podemos dar otra interpretación a la definición que se ha dado de norma:

$$\frac{|f(v,w)|}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \underbrace{\frac{f(v,w)}{||v|| \cdot ||w||}}_{\cos(\varphi)} \leq 1 : 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Es decir, que podemos entender el producto escalar como una forma de relacionar los módulos de los vectores y el ángulo que los relaciona.

Definición (Endomorfismos Autoadjuntos)

*Sea (V,f) un espacio vectorial euclídeo y $\phi \in End(V)$, decimos que es un **endomorfismo autoadjunto respecto de** f si cumple que:*

$$f(\phi(v),w) = f(v,\phi(w)) : \forall v,w \in V$$

Proposición

Sea (V,f) un espacio vectorial euclídeo, $\phi \in End(V)$ un endomorfismo y $C = M_B(f)$, entonces:

$$\phi \text{ autoadjunto } \Leftrightarrow A^tC = CA$$

Además, cómo podemos elegir una base conveniente sobre la que $M_{B'}(f) = I$, entonces se tiene también:

$$\phi \text{ autoadjunto } \Leftrightarrow A^t = A$$

Demostración:

Si definimos una base B de V y llamamos $A = M_B(\phi)$ y $C = M_B(f)$, entonces siendo $v = (x_1, \cdots, x_n)$ y $w = (y_1, \cdots, y_n)$ se tiene:

$$(x_1, \cdots, x_n)A^tC \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \cdots, x_n)CA \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Por tanto, ϕ es autoadjunto si y solo si:

$$A^tC = CA$$

Del mismo modo, si elegimos B convenientemente hemos visto que la matriz de f es I luego el endomorfismo ϕ en esa base cumple que:

$$A = A^t$$

Teorema (Espectral)

Sea (V, f) un espacio vectorial euclídeo, si $\phi \in End(V)$ es autoadjunto entonces existe una base B de V ortonormal respecto de f formada por vectores propios respecto de ϕ.

Demostración:

Vamos a ver primero que q_ϕ descompone completamente, para ello supongamos que $f = x^2 + a_1 x + a_0 \in R[x]$ irreducible de forma que $f \mid q_\phi$, entonces $\exists v \in V : v \neq 0 : q_{\phi,v} = f$. Para buscarlo, en primer lugar vemos que podemos escribir q_ϕ de esta manera:

$$q_\phi = f^a \cdot g_a \geq 1 \ \wedge f \nmid g$$

De este modo, vimos en el Teorema de Caley Hamilton que siempre existe un $w \in V : q_{\phi,w} = f^a$ y ahora para elegir el v basta con seleccionarlo de esta forma:

$$v = f(\phi)^{a-1}(w)$$

Puesto que $f(\phi)(v) = f(\phi)^a(w) = 0 \Rightarrow f(x) = q_{\phi,v}$ por ser f irreducible y en consecuencia el polinomio más pequeño que se anula en v.

Como el polinomio mínimo sobre v es de grado 2, entonces el plano generado por $\pi = L(v, \phi(v))$ tiene $\dim \pi = 2$ porque si tuviese dimensión 1 existiría un polinomio mínimo de grado 1 más pequeño que dividiría a f y eso no es posible. Por definición $L(v, \phi(v))$ es invariante. Si consideramos la restricción del producto escalar sobre ese plano:

$$f\mid_{\pi\times\pi} : \pi \times \pi \to \mathbb{R}$$

De manera que es sencillo ver que esta sigue siendo un producto escalar restringido a ese subespacio, vamos a denotar $g = f\mid_{\pi\times\pi}$.

Como es invariante $\phi\mid_{\pi\times\pi} \in End(\pi)$ y, del mismo modo, este ϕ restringido con el producto escalar restringido sigue siendo autoadjunto. ¿Cual es la matriz de la restricción $\psi = \phi\mid_{\pi\times\pi}$?

$$M_{\{v,\phi(v)\}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, como tenemos un producto escalar, existirán bases ortonormales respecto de las cuales la matriz de ψ será simétrica por ser autoadjunta así que:

$$\exists B = \{w_1, w_2\} : M_B(\psi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Por tanto, aunque las matrices sean distintas el polinomio mínimo sigue siendo el mismo, con lo cual, debemos llegar al mismo resultado a partir de las dos matrices al calcular el polinomio característico:

$$x^2 + a_1 x + a_0 = p_\psi = x^2 - (a + c)x + ac - b^2$$

Como f es irreducible de grado 2, el discriminante es menor que 0 luego:

$$0 > a_1^2 - 4a_0 = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0 \Rightarrow \#$$

Osea que ya podemos suponer que el polinomio mínimo descompone completamente:

$$q_\phi = (x-\lambda_1)^{a_1} + \cdots + (x-\lambda_t)^{a_t}$$

Así que solo falta ver que todos los a_i son 1, por lo que vamos a ver que:

$$\ker(\phi - \lambda id)^2 \subset \ker(\phi - \lambda id)$$

Puesto que si estabiliza la sucesión de núcleos directamente en el primer ker ya tenemos que es diagonalizable.

Supongamos que $v \in \ker(\phi - \lambda id)^2$, aplicando el producto escalar tenemos que:

$$f((\phi-\lambda id)(v), (\phi-\lambda id)(v)) = f(v, (\phi-\lambda id)^2(v)) = f(v,0) = 0 \Rightarrow (\phi-\lambda id)(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker(\phi-\lambda id)$$

Cabe destacar que la suma de endomorfismos autoadjuntos es de nuevo un endomorfismo autoadjunto y en este caso ϕ y $\lambda \cdot id$ lo son.

Sin embargo, aunque hemos demostrado que en esa cierta base ϕ es diagonal, puede ocurrir que la base no sea ortonormal, cosa de la que nos tenemos que cerciorar. Sabemos que $B = B_1 \cup \cdots \cup B_t$ donde B_i es base de V_{ϕ,λ_i}. En primer lugar, sí podemos garantizar que vectores propios de autovalores distintos son ortogonales:

$$f(\phi(v_i), v_j) = f(v_i, \phi(v_j)) \Rightarrow f(\lambda_i v_i, v_j) = f(v_i, \lambda_j v_j) \Rightarrow \lambda_i f(v_i, v_j) = \lambda_j f(v_i, v_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0} f(v_i, v_j) = 0 \Rightarrow f(v_i, v_j) = 0$$

Así que sabemos que todos los vectores entre B_i distintas ya son ortogonales. Para poder terminar, si restrinjo a cada subespacio propio el producto escalar, este sigue siendo un producto escalar y, en consecuencia, existe una base ortonormal para cada V_{ϕ,λ_i} formada además por vectores propios así que ya he terminado.

Observación:

Supongamos que tenemos $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ con un producto escalar y un endomorfismo autoadjunto ϕ. Si escogemos una base ortonormal B de manera $M_B(\phi) = A$ no sea diagonal y, aplicando el teorema, cambiamos a una base ortonormal donde $M_{B'}(\phi) = A'$ sea diagonal, vemos que:

$$M_{B'}(f) = P^t M_B(f) P \Rightarrow I_n = P^t I_n P \Rightarrow P^t = P^{-1}$$

es decir, que, en consecuencia, ϕ se diagonaliza simultáneamente por congruencia y por semejanza, ya que:

$$A' = P^{-1}AP = P^tAP$$

APLICACIONES ORTOGONALES

Las aplicaciones ortogonales son aplicaciones de gran importancia pues conservan el producto escalar, esto quiere decir, en términos geométricos que respetan el "ángulo" (puesto que aún no hemos definido la noción de ángulo) que forman varios vectores entre sí. Cabe destacar que hemos dicho que únicamente respetan la posición relativa entre ellos, no que no deformen dichos vectores aumentando su módulo o disminuyéndolo.

Características de las aplicaciones ortogonales

Primero vamos aproximarnos al concepto de aplicación ortogonal y ver que consecuencias tiene con las definiciones de espacio vectorial euclídeo que se han dado. Una vez conozcamos los detalles técnicos que las hacen tan especiales, estaremos listos para poder clasificar en su conjunto los tipos de aplicaciones en cada dimensión.

Definición (Aplicación Conservativa)

*Sea (V, f) un espacio vectorial euclídeo y $\phi \in End(V)$, decimos que ϕ **conserva** f si verifica que:*

$$f(\phi(v), \phi(w)) = f(v, w) : \forall v, w \in V$$

Proposición

Si ϕ conserva f, entonces ϕ es $\mathbb{R}$-lineal.

Demostración:
Es lineal ya que: $\begin{cases} \phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w) \\ \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v) \end{cases}$. Para comprobar, por ejemplo, la segunda:

$$f(\phi(\lambda v) - \lambda\phi(v), \phi(\lambda v) - \lambda\phi(v)) = f(\phi(\lambda v), \phi(\lambda v)) + \lambda^2 f(\phi(v), \phi(v)) - 2\lambda f(\phi(\lambda v), \phi(v))$$

Como f es producto escalar

$$= f(\lambda v, \lambda v) + \lambda^2 f(v, v) - 2\lambda f(\lambda v, v) = \lambda^2 f(v, v) + \lambda^2 f(v, v) - 2\lambda^2 f(v, v) = 0$$

Para comprobar la primera de las condiciones habría que ver que:

$$f(\phi(v+w) - \phi(v) - \phi(w), \phi(v+w) - \phi(v) - \phi(w))$$

Definición (Aplicación Ortogonal)

*Sea (V, f) un espacio vectorial euclídeo y $\phi \in End(V)$, decimos que ϕ es una **aplicación ortogonal** si ϕ es lineal y conserva f. Denotamos por $O(V) = \{\phi \in End(V) : \phi \text{ ortogonal}\}$ al conjunto de aplicaciones ortogonales.*

Proposición (Grupo Ortogonal)

Sea (V, f) un espacio vectorial euclídeo, las aplicaciones ortogonales verifican las siguientes propiedades:

- $\phi \in O(V) \Rightarrow$ *biyectiva*
- $\phi \in O(V) \Rightarrow \phi^{-1} \in O(V)$
- $\phi, \psi \in O(V) \Rightarrow \psi \circ \phi \in O(V)$

*Por tanto, el conjutno de aplicaciones ortogonales con operación de composición forman lo que se conoce como **Grupo Ortogonal** $(O(v), \circ)$.*

Demostración:

1. Por ser un endomorfismo, basta con probar que es inyectiva, así que:

$$v \in \ker\phi \Rightarrow \phi(v) = 0 \Rightarrow f(\phi(v), \phi(v)) = f(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

2. Como es biyectiva, existe la inversa y entonces es trivial comprobar que es ortogonal.

3. Trivial

Observación:

El conjunto de isomorfismos se denotaba por $GL(V)$, de modo que $(GL(V), \circ)$ tenía estructura de grupo. Es sencillo ver que $O(V) < GL(V)$ y como $GL(V) \simeq Mat_n(K)$ es sencillo demostrar que $O(V) \simeq \{A \in Mat_n(K) : A^t = A^{-1}\}$.

Definición (Orientación de una Base)

Sean B, B' bases[2] *de V y $P = M(B', B) \in GL_n(\mathbb{R})$ la matriz de cambio entre ambas, decimos que:*

$$\begin{cases} |P| > 0 & \Rightarrow B \text{ y } B' \text{ tienen la } \textbf{misma orientación} \\ |P| < 0 & \Rightarrow B \text{ y } B' \text{ tienen } \textbf{distinta orientación} \end{cases}$$

De este modo, si tenemos $\phi \in GL(V)$ y tomamos una base cualquiera $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y consideramos la base resultante de las imágenes de los vectores a través de ϕ que denotamos por $B' = \{\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)\}$, entonces se verifica que:

$$M(B', B) = M_B(\phi) = A \Rightarrow \begin{cases} |A| > 0 \\ |A| < 0 \end{cases}$$

Por tanto, podemos distinguir en $GL(V)$ (y por extensión en $O(V)$) dos grupos de aplicaciones, las que conservan la orientación de las bases y las que invierten esta orientación.

Definición (Grupo Conservativo e Inversivo)

Sea $GL(V)$ el conjunto[3] *de isomorfimos de un espacio vectorial en sí mismo, definimos $GL^+(V)$ como el grupo de isomorfismos que conservan la orientación de las bases y $GL^-(V)$ como el que las invierte. Además, la unión de ambos es el total:*

$$GL(V) = GL^+(V) \sqcup GL^-(V)$$

Ejemplo:

Podemos descomponer $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ porque en este contexto f es un producto escalar y entonces la suma es directa.

Si consideramos $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la simetría ortogonal respecto de W (simetría con base W y dirección $W^\perp$). Para ver que es ortogonal vamos a tomar dos vectores cuales quiera y vamos a ver si se verifican las premisas de ortogonalidad:

$$\begin{cases} v_1 \in \mathbb{R}^n : v_1 = w_1 + w_1' \\ v_2 \in \mathbb{R}^n : v_2 = w_2 + w_2' \end{cases}$$

Sabiendo que las simetrías ya son aplicaciones lineales, vemos si conserva el producto escalar definido:

$$\begin{cases} f(\phi(v_1), \phi(v_2)) = f(w_1 - w_1', w_2 - w_2') = f(w_1, w_2) + f(w_1', w_2') \\ f(v_1, v_2) = f(w_1 + w_1', w_2 + w_2') = f(w_1, w_2) + f(w_1', w_2') \end{cases} \Rightarrow f(\phi(v_1), \phi(v_2)) = f(v_1, v_2)$$

Luego es una aplicación ortogonal.

Por el contrario, hay que tener cuidado porque no siempre podemos verificar esto. Ocurre que sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proyección ortogonal respecto de W [proyección con base W y dirección $W^\perp$] no es una aplicación ortogonal porque a pesar de que descompone como suma directa de subespacios, no es biyectiva.

[2] La base canónica B_c de $\mathbb{R}^n$ es positiva por convenio.
[3] La definición es completamente válida y análoga para el grupo $O(V)$.

Proposición (Propiedades de las aplicaciones ortogonales)

Sea $\phi \in End(V)$ con matriz asociada $A = M_B(\phi)$ y f un producto escalar con matriz $C = M_B(f)$, se verifican:

- $\phi \in O(V) \Leftrightarrow A^tCA = C$
- $\phi \in O(V) \overset{B \text{ ortonormal}}{\Leftrightarrow} A^tA = I_n$
- $\phi \in O(V) \Rightarrow |A| = \pm 1 : \begin{cases} \phi \in O^+(V) & \Rightarrow |\phi| = 1 \\ \phi \in O^-(V) & \Rightarrow |\phi| = -1 \end{cases}$
- *Los únicos autovalores posibles son $\sigma(\phi) \subset \{-1, 1\}$*
- $\phi \in O(V)$ *y* $W <_\phi V \Rightarrow W^\perp <_\phi V$. *Además,* $V = W \oplus W^\perp$.

Demostración:

- Trivialmente por la definición que se ha dado de aplicación ortogonal: $f(\phi(v), \phi(w)) = f(v, w)$
- De la primera se deduce fácilmente por ser $C = I_n$ en base ortonormal.
- Si la base es ortonormal, entonces $A^tA = I \Rightarrow |A^tA| = |I| \Rightarrow |A^t||A| = |I| \Rightarrow |A| = \pm 1$. Además, como $|A|$ es un invariante para cualquier matriz que represente a A, tenemos que se cumple a pesar de que no esté respecto de una base ortonormal.
- Supongamos que $\phi(v) = \lambda v \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} 0 < ||v||^2 = f(v, v) = f(\phi(v), \phi(v)) = f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 ||v||^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$
- La segunda parte ya la tenemos demostrada, queda demostrar que el ortogonal es ϕ-invariante.Tenemos que ver que:
$$f(v, w) = 0 : \forall w \in W \Rightarrow f(\phi(v), w) = 0 : \forall w \in W$$
Para ello aplicamos el siguiente razonamiento:
$$\phi \in O(V) \text{ y la dimensión es finita } \Rightarrow \phi : V \to V \text{ biyectiva} \Rightarrow \phi\mid_W : W \to W \text{ biyectiva}$$
De este modo, puedo considerar w como $\phi(w')$ para algún $w' \in W$ luego se tiene que:
$$f(\phi(v), w) = f(\phi(v), \phi(w') = f(v, w') = 0$$

Clasificación de aplicaciones ortogonales

Nuestro objetivo ahora es el que viene siendo en los capítulos anteriores, poder llegar a un conjunto de clases de equivalencia en las que poder meter todas las aplicaciones de cierto tipo y elegir un representante adecuado para dicha clase.

Dimensión 1

Si tomamos $\dim V = 1$, entonces tenemos que:
$$O(V) = \{id_v, -id_v\}$$

Dimensión 2

Para $\dim V = 2$, consideramos $\phi \in O(V) \Rightarrow M_B(\phi) = A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ en una base $B = \{v_1, v_2\}$ ortonormal. Vamos a analizar su matriz atendiendo a las condiciones de ortogonalidad que debe cumplir:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Cuando vemos esta relación rápidamente surge la idea de considerar estos valores como el coseno y el seno de un único ángulo, quedando:

$$\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \operatorname{sen}\theta \\ c = \cos\theta' \\ d = \operatorname{sen}\theta' \end{cases} : 0 \leq \theta < 2\pi$$

Las condiciones de que sean igual a 1, de este modo se verifican, pero para que se verifiquen las de la izquierda se tiene que:

$$0 = ac + bd = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' = \cos(\theta - \theta') \Leftrightarrow \theta' = \begin{cases} \theta + \frac{\pi}{2} \\ \theta + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Por tanto, ahora podemos distinguir dos casos para clasificar las matrices, suponiendo que $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$ o $\theta' = \theta + \frac{3\pi}{2}$ De este modo, la primera matriz posible que tenemos es:

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} c = \cos\theta' = -\operatorname{sen}\theta = -b \\ d = \operatorname{sen}\theta' = \cos\theta = a \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in O^+(V)$$

$$\theta' = \theta + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} c = \cos\theta' = \operatorname{sen}\theta = b \\ d = \operatorname{sen}\theta' = -\cos\theta = -a \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in O^-(V)$$

Por tanto, si dividimos en ambas clasificaciones vemos que:

$$\phi \in O^+(V) \Rightarrow M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} 0 \leq \theta < 2\pi$$

Que corresponde a una rotación de los vectores del plano de ángulo θ, además como:

$$p_\phi = x^2 - 2x\cos\theta + 1 \Rightarrow x = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

No existen autovalores en general, excepto en el caso extremo de la rotación de ángulo 0 y la de ángulo 180º (porque en el fondo con como simetrías).

Y, por otro lado, considerando las negativas:

$$\phi \in O^-(V) \Rightarrow M_B(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1$$

Estas matrices pueden ser consideradas simetrías del plano porque podemos considerar que:

$$p_\phi = x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = q_\phi \Rightarrow M_{B'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dimensión 3

Si tomamos $\dim V = 3$, entonces el polinomio característico tiene como mínimo una raíz real que ya hemos visto que solo puede ser ± 1. La caja restante corresponde a una rotación o a una simetría:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \in O^+(V)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \in O^-(V)$$

Cabe destacar que este posible caso teórico en el fondo está incluido en el primero por ser un caso de rotación especial:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in O^+(V)$$

Clasificación en dimensión arbitraria

Para dimensión arbitraria tenemos el siguiente teorema:

$$\phi \in O(V) \Rightarrow \exists B \text{ ortonormal de } V :$$

$$M_B(\phi) = I_s \oplus -I_t \oplus \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \cos\theta_m & \operatorname{sen}\theta_m \\ \operatorname{sen}\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix} : s,t,m \geq 0 \wedge \theta_i \in (0,2\pi) : n = s+t+m$$

<u>Demostración</u>:

Como el caso de dimensión 1 es trivial y además ya lo hemos visto en los ejemplos anteriores, así que suponemos cierto para dimensiones menores que n y vamos a verlo para n.

- Supongamos primero que $\lambda = \pm 1 \in \sigma(\phi)$. Entonces existen vectores propios para ese autovalor, consideramos $v_1 \neq 0 \in V_{\phi,\lambda}$ y el subespacio generado por él $W = L(v_1) <_\phi V$. Por ser producto escalar tenemos que:

  $$V =_\phi W \oplus W^\perp$$

  Si restringimos la aplicación a este subespacio invariante, vuelve a ser un endomorfismo y además ortogonal, luego si consideramos $B = \{\underbrace{v_1}_{\in W}, \underbrace{v_2, v_3, \ldots, v_n}_{\in W^\perp}\}$:

  $$\phi|_{W^\perp} \in O(W^\perp) \Rightarrow M_{\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M(\phi|_{W^\perp}) & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M(\phi|_{W^\perp}) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

  Y como esas restricciones tienen dimensión menor que n, entonces se cumple por hipótesis de inducción.

- Supongamos, por otro lado, que $\sigma(\phi)$ es vacío, entonces sabemos que:

  $$q_\phi = f_1^{a_1} \cdots f_t^{a_t} : f_1, \ldots, f_t \in \mathbb{R}[x] \text{ irreducibles de grado } 2$$

  Ahora puedo fijarme en f_1 y encontrar un elemento que tenga ese polinomio mínimo, es decir:

  $$\exists v_1 \in V : q_{\phi,v_1} = f_1 = x^2 + a_1 x + a_0$$

  De este modo:

  $$\pi = L(v_1, \phi(v_1)) <_\phi V : \dim \pi = 2$$

  Y, por tanto, por ser producto escalar se tiene que:

  $$V = \pi \oplus \pi^\perp$$

  Restringimos de nuevo $\phi\,|_{\pi^\perp}$ que sigue siendo ortogonal y en ese trozo la matriz que conforma ya cumple las hipótesis. Los vectores de π son ortogonales a los del perpendicular y podemos seleccionarlos de forma que conformen una base ortonormal en π por lo que compondrán una de las cajas que habíamos definido como rotaciones.

ESPACIO AFÍN

Con este concepto buscamos enriquecer la estructura que habíamos denominado como espacio vectorial euclídeo e ir preparando el terreno para introducir los conceptos de geometría y estudio de coordenadas baricéntricas, para ello también se empiezan a introducir nociones de puntos, posiciones relativas, paralelismo...

DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

Una terna (A, V, φ) es un espacio afín si:

1. $A \neq \emptyset$
2. V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita ($\dim A \overset{def}{=} \dim V$)
3. φ es una función que a cada par de puntos le asigna un vector de V, es decir:

$$\varphi : A \times A \to V : (\vec{pq} = \varphi(p, q) \in V : \forall p, q \in A)$$

   Además esta función verifica estas condiciones:

   - $\varphi(p, q) = \varphi(p, r) + \varphi(r, q) : \forall p, q, r \in A$
   - Si fijamos uno de los puntos de A, entonces la correspondencia entre vectores de V y puntos que conforman la otra componente es una biyección:

$$\forall p \in A, \varphi_p : A \to V \text{ dada por } \varphi_p(q) = \varphi(p, q) \text{ es biyectiva}$$

<u>**Ejemplos**</u>:

Por ejemplo, tal y como conocemos el espacio afín usual su definición formal es:

$$\begin{cases} A = \mathbb{K}^n \\ V = \mathbb{K}^n \\ \varphi(p, q) \overset{def}{=} (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)_{B_c} \in \mathbb{K}^n : p = (a_1, \ldots, a_n), q = (b_1, \ldots, b_n) \end{cases}$$

Las primeras 3 propiedades son trivialmente ciertas, comprobamos la 4:

$$r = (c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow \varphi(p, r) + \varphi(r, q) = (c_1 - a_1, \ldots, c_n - a_n)_{B_c} + (b_1 - c_1, \ldots, b_n - c_n)_{B_c} =$$

$$= (c_1 - a_1 + b_1 - c_1, \ldots, c_n - a_n + b_n - c_n)_{B_c} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)_{B_c} = \varphi(p, q)$$

Comprobamos que φ_p cumple la 5, es decir, es biyectiva:

- Inyectiva.

$$(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)_{B_c} = \varphi_p(q) = \varphi_p(r) = (c_1 - a_1, \ldots, c_n - a_n)_{B_c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_i - a_i = c_i - a_i \Rightarrow b_i = c_i : \forall i \Rightarrow b = c$$

- Suprayectiva

  Sea $v = (x_1, \ldots, x_n)_{B_c}$, ¿ tenemos un $\varphi_p(q) = v : q \in A$?

$$\varphi_p(q) = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)_{B_c} \stackrel{?}{=} (x_1, \ldots, x_n)_{B_c} \Rightarrow b_i - a_i = x_i$$

  Luego ya tenemos la definición de cada b_i y, por lo tanto, ya está demostrado.

En general, se puede considerar cualquier espacio vectorial como un espacio afín si lo definimos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} V \\ A = V \\ \varphi(v, w) = w - v \in V \end{cases} \Rightarrow (V, V, \varphi) \text{ es espacio afín}$$

Aunque esto pone de manifiesto que todo espacio vectorial puede considerarse como un espacio afín, aunque esta forma no sea única porque podemos definir de distinta forma la φ (o incluso algún otro de los elementos de la definición).

Otro resultado muy importante está relacionado con el capítulo de sistemas lineales. Nosotros consideramos Σ un sistema de ecuaciones lineal, y Σ_0 el sistema homogéneo asociado. El espacio de soluciones del sistema lineal dijimos que correspondía a un subconjunto de K^n, es decir, $\Sigma(K) \subseteq K^n$ y del mismo modo ocurría con su asociado; $\Sigma_0(K) < K^n$. Además relacionamos ambos conjuntos de soluciones a través de la siguiente fórmula:

$$\Sigma(K) = (a_0, \cdots, a_n) + \Sigma_0(K) : (a_1, \cdots, a_n) \text{ es solución particular de } \Sigma(K)$$

Dicho lo cual, si consideramos la siguiente estructura:

$$\begin{cases} V = \Sigma_0(K) \\ A = \Sigma(K) \neq \emptyset \\ \varphi((a_0, \cdots, a_n) + v, (a_0, \cdots, a_n) + w) = w - v \end{cases}$$

Luego esto quiere decir que cualquier sistema lineal NO homogéneo puede considerarse como un espacio afín asociado al espacio vectorial euclídeo que forma su asociado.

Propiedades de Espacio Afín

1. $\vec{pp} = 0$
2. $\vec{qp} = -\vec{pq}$
3. $\vec{pq} = \vec{rs} \Leftrightarrow \vec{pr} = \vec{qs}$ (Propiedad del Paralelogramo)

Demostración:

1. $\vec{pp} + \vec{pp} = \vec{pp} \Rightarrow \vec{pp} = 0$
2. $\vec{pq} + \vec{qp} = \vec{pp} = 0 \Rightarrow \vec{qp} = -\vec{pq}$

$$\varphi_p(q) = \vec{pq} = 0 = \vec{pp} = \varphi_p(p) \stackrel{\varphi_p \text{ biyectiva}}{\Rightarrow} q = p$$

3. Hacemos "$\Rightarrow$" porque la otra dirección es completamente análoga:

$$\vec{pr} = \vec{pq} + \vec{qr} = \vec{rs} + \vec{qr} = \vec{qs}$$

Definición alternativa

Teniendo en cuenta que hemos definido el espacio afín como la asignación de un vector concreto para cada par de puntos de A que escojamos, es decir, $\vec{pq} = v \in V$; entonces podemos dar una nueva definición que será:

$$p + v \overset{def}{=} q$$

Esto es, que hemos creado una nueva aplicación que suma a un punto concreto un vector y entonces se le asigna el punto correspondiente:

$$A \times V \to A \text{ de forma que } (p, v) \mapsto p + v = q$$

Donde $q \in A$ es el único tal que $v = \vec{pq} = \varphi_p(q)$. En el fondo lo que estamos haciendo es dado un punto y un vector, la aplicación que hemos definido asocia a ese par donde acabaría el punto tras trasladarlo lo que manda el vector.

Propiedades

1. $p + 0 = p$
2. $p + (v + w) = (p + v) + w$
3. $\forall p, q \in A : \exists! v \in V : p + v = q$
   Es decir, que dados dos puntos cualesquiera siempre existe un vector único que transforma uno en el otro.

Demostración:

1. Porque si consideramos que $\vec{pp} = 0$, entonces sumarle a p el vector nulo implica que su destino es el mismo.
2. Trivial, porque basta con considerar $\begin{cases} v = \vec{pq} \\ w = \vec{qr} \\ v + w = \vec{pr} \end{cases} \Rightarrow r = q + w = q + \vec{qr} = r$
3. Por como hemos redefinido el concepto de espacio euclídeo.

Variedades Afines

Dado un espacio afín, partimos de un punto $p \in A$ y de un subespacio de $W < V$ para denotar el siguiente objeto:

$$p + W = \{p + w : w \in W\}$$

A este conjunto lo denotamos por **variedad afín** que pasa por p con dirección W.

Es notable destacar que $X = p + W$, $W < V$ y $\varphi|_{X \times X}$ tienen de nuevo estructura de espacio afín porque:

1. $X \neq \emptyset : p = p + 0 \in X$
2. $W < V$
3. $\varphi|_{X \times X} : X \times X \to W$

$$\varphi(q, r) = \varphi(p + w_1, p + w_2) = \varphi(p + w_1, p + w_1 + (w_2 - w_1)) = w_2 - w_1 \in W$$

4. Trivial

5. $¿\forall q \in X, \varphi_q : X \to W$ biyectiva?

Que es inyectiva es inmediato porque es la restricción de una que sí es inyectiva, la pregunta es: $¿\varphi_q$ suprayectiva? $¿\forall w \in W : \exists! r \in X : \varphi_q(r) = w$?

Sea $w = \varphi_q(r) = \varphi(q,r) = \vec{qr} : r \in A$ único

$r = q + \vec{qr} = p + (\vec{pq} + \vec{qr})$

$$\begin{cases} \vec{pq} = \varphi(p,q) \; [p,q \in X] \in W \\ \vec{qr} = \varphi(q,r) = \varphi_q(r) = w \in W \end{cases} \quad \Rightarrow r = q + \vec{qr} = p + (\vec{pq} + \vec{qr}) \in p + W = X$$

Proposición

Sea $X = p + W$ una variedad afín. Entonces:

- $X = q + W : \forall q \in X$
- $W = \underbrace{\{\vec{pq} : q \in X\}}_{=p\vec{X}} = \underbrace{\{\vec{qr} : q,r \in X\}}_{=\vec{X}}$

Es decir, el punto de definición de la variedad se puede cambiar por cualquier otro dentro de la misma y la dirección de la variedad la definimos como $\vec{X}$ que podemos determinarla por los extremos de los vectores de la variedad o dos puntos cualesquiera.

Demostración

- Vamos a demotrarlo por el doble contenido, es decir, vamos a ver que siendo p el punto de definición de la variedad afín, siempre puede escribirse cualquier elemento de la variedad en términos de otro punto q.
  - $p + W \subseteq q + W$:
  $$p + w = q + (\vec{qp} + w) \in q + W$$
  Y esto ya demuestra el contenido porque $w \in W$ y $\vec{qp} \in W$ también debido a que $q \in X \Rightarrow q = p + w' \Rightarrow \vec{pq} = w' \Rightarrow \vec{qp} = -w' \in W$
  - $\supseteq$ es análogo
- Ahora vamos a ver que cualquier vector de W se puede definir como el vector definido por dos puntos de la variedad: En primer lugar, es trivial ver que $p\vec{X} \subseteq \vec{X}$, luego lo realmente interesante es ver $¿\vec{X} \subseteq W$?
  $$\underset{p,r\in X}{\vec{qr}} = \vec{qp} + \vec{pr} = \vec{pr} - \vec{pq}$$
  Como $q, r \in X$, entonces ambos pueden escribirse de esta manera:
  $$\begin{cases} r = p + \vec{pr} = p + w \\ q = p + \vec{pq} = p + w' \end{cases}$$
  Luego entonces:
  $$\vec{pr} - \vec{pq} = w - w' \in W$$
  Para terminar vamos a ver $W \subseteq p\vec{X}$:
  $$w \in W \Rightarrow q = p + w \in X \Rightarrow w = \vec{pq} \in p\vec{X}$$

Operaciones con variedades

Intersección:

Puede ocurrir que la intersección entre dos variedades afines no sea nula, es decir, que se cortan y esta convergencia de ambas define de nuevo una variedad, es decir:

$$X_1, X_2 \text{ variedades} \Rightarrow X_1 \cap X_2 \text{ es variedad afin}$$

Además esta nueva variedad queda definida por cualquier punto que está en la intersección y la intersección de las direcciones:

$$X_1 \cap X_2 = p + (\vec{X_1} + \vec{X_2}) : \begin{cases} p \in X_1 \cap X_2 \\ X_1 \vec{\cap} X_2 = \vec{X_1} \cap \vec{X_2} \end{cases}$$

Unión:

Sin embargo, del mismo modo que ocurría con los subespacios vectoriales, la unión de variedades no es en general una variedad:

$$X_1, X_2 \text{ variedades} \Rightarrow X_1 \cup X_2 \text{ no es variedad}$$

Suma:

Por el contrario, la suma de variedades afines sí es una variedad afín y además es la más pequeña que contiene a la unión de ambas variedades:

$$X_1 + X_2 = p_1 + \vec{X_1} + \vec{X_2} + L(p_1\vec{p}_2)$$

Demostración:

- Veamos la intersección:

  Primero uno de los contenidos:

  $$\begin{cases} p \in X_1 \Rightarrow X_1 = p + \vec{X_1} \supseteq p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2}) \\ p \in X_2 \Rightarrow X_2 = p + \vec{X_2} \supseteq p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2}) \end{cases} \Rightarrow X_1 \cap X_2 \supseteq\supseteq p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2})$$

  Ahora vemos el otro contenido:

  $$q \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow q = \begin{cases} p + w_1 = p + p\vec{q}_1 : q_1 \in X_1 \\ p + w_2 = p + pq_2 : q_2 \in X_2 \end{cases} \Rightarrow q = q_1 = q_2 \Rightarrow w = w_1 = w_2 \Rightarrow q = p + w \in p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2})$$

- Veamos la unión y la suma:

  Se deja para mirar en el libro

Formula de las dimensiones para variedades afines

Sean X_1 y X_2 dos variedades afines, entonces se verifica que:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 \neq 0 \Rightarrow & \dim(X_1 + X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim X_1 \cap X_2 \\ X_1 \cap X_2 = 0 \Rightarrow & \dim(X_1 + X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim \vec{X_1} \cap \vec{X_2} + 1 \end{cases}$$

Es decir, en el caso de que no sean disjuntas se aplica la fórmula de Grassman de forma habitual, pero si lo son entonces se juega con la intersección de las direcciones.

Demostración:

- $X_1 \cap X_2 \neq 0$, entonces hay que tener en cuenta que $p_1\vec{p}_2 \in \vec{X_1} + \vec{X_2}$:

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim(\overrightarrow{X_1 + X_2}) = \dim(\vec{X_1} + \vec{X_2} + L(p_1\vec{p}_2)) = \dim(\vec{X_1} + \vec{X_2}) =$$

$$= \dim \vec{X_1} + \dim \vec{X_2} - \dim(\vec{X_1} \cap \vec{X_2}) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2)$$

- $X_1 \cap X_2 = 0$, entonces hay que tener en cuenta que $p_1\vec{p}_2 \notin \vec{X_1} + \vec{X_2}$:

$$\dim(X_1+X_2) = \dim(\overrightarrow{X_1 + X_2}) = \dim(\vec{X_1}+\vec{X_2}+L(p_1\vec{p}_2)) = \dim(\vec{X_1}+\vec{X_2})+\underbrace{\dim p_1\vec{p}_2}_{=1} - \underbrace{\dim(\vec{X_1} + \vec{X_2} \cap p_1\vec{p}_2)}_{=0}$$

$$= \dim \vec{X_1} + \dim \vec{X_2} - \dim(\vec{X_1} \cap \vec{X_2}) + 1 - 0 = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2) + 1$$

Posición relativa

Sean X_1, X_2 variedades de (A, V, φ), se tiene que:

$$X_1, X_2 = \begin{cases} \text{se cortan si } X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \\ \text{son paralelas si } \vec{X_1} \subseteq \vec{X_2} \text{ ó } \vec{X_2} \subseteq \vec{X_1} \\ \text{se cruzan en caso contrario} \end{cases}$$

Es destacable el hecho de que no exigimos que el paralelismo implique la igualdad de las direcciones permite definir correctamente el concepto de recta paralela a un plano o, en general, el concepto de paralelismo entre objetos de distinta dimensión.

Sistema de Referencia

Sea (A, V, φ) la terna usual de espacio afín, escogemos $p \in A$, un punto $p_0 \in A$ fijo y una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, entonces podemos escribir para cualquiera que sea el punto p:

$$p_0\vec{p} = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$$

De este modo, decimos que $(x_1, \ldots, x_n)_R$ son las las coordenadas del punto p en el sistema de referencia afín $R = \{p_0, B\}$, siendo p_0 el centro de referencia del sistema.

Cambio de sistema de referencia

Definimos un sistema de referencia cartesiano, como un conjunto $R = \{p_0, B\}$ formado por un punto $p_0 \in A$ y una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de $V, B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. En consecuencia, si $p \in A$ arbitrario, definimos sus coordenadas de la siguiente forma:

$$p = (x_1, \ldots, x_n)_R \overset{def}{\Leftrightarrow} p_0\vec{p} = (x_1, \ldots, x_n)_B = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$$

Supongamos ahora que tenemos un nuevo sistema de referencia $R' = \{p'_0, B'\}$, entonces ahora las coordenadas de p son $(x'_1, \ldots, x'_n)'_R$. Por tanto, teniendo en cuenta que $p_0 = (a_1, \cdots, a_n)$ los vectores se relacionan de la siguiente forma:

$$p_0\vec{p} = p_0\vec{p'_0} + p'_0\vec{p} \Rightarrow p_0\vec{p} - p_0\vec{p'_0} = p'_0\vec{p}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1, \ldots, x_n)_B - (a_1, \ldots, a_n)_B = (x'_1, \ldots, x'_n)'_B \Rightarrow (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)_B = x'_1, \ldots, x'_n)'_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + M(B', B) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Sin embargo, esta notación nos es muy incomoda puesto que no resulta un cambio de "base" como al que estamos acostumbrados, luego introduciendo el siguiente cambio se conserva la igualdad y se usa una notación más cómoda:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & M(B', B) & \\ a_n & & & \end{array}\right)}_{M(R,'R)} \begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Sistema de Referencia dado por puntos

Se trata ahora de dar una definición alternativa de sistema de referencia, ya que podemos prescindir de esa base que habíamos definido para V y supeditarla a puntos. La relación entre lo que denominaremos el origen y el resto de puntos[1] de referencia es lo que constituirá los vectores que formarán la base de V.

Decimos que $\{p_0, \dots, p_n\}$ es sistema de referencia afín si y sólo si $\{p_0\vec{p}_1, \dots, p_0\vec{p}_n\}$ es base de V. Luego entonces se tiene que $R = \{p_0, B = \{p_0\vec{p}_1, \dots, p_0\vec{p}_n\}\}$ es sistema de referencia cartesiano.

Decimos que $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}, m \leq n$ son afínmente independientes si $p_0\vec{p}_1, \dots, p_0\vec{p}_m$ son linealmente independientes. Además, la independencia de estos vectores no dependen de quién sea escogido como origen de los vectores.

Vamos a definir quién es la menor variedad posible que contiene a un conjunto finito de puntos:

Sea $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ con $m + 1$ puntos. La variedad afín generada por P será:

$$A(P) = p_0 + L(p_0\vec{p}_1, \dots, p_0\vec{p}_n)$$

Definimos la el conjunto:

$$A(P) = p_0 + L(p_0\vec{p}_1, \cdots, p_0\vec{p}_m)$$

Por definición es una variedad y además es trivial que contiene a todos los puntos, ¿pero es la más pequeña posible que contiene a todos los puntos? Sí, porque su dirección es la suma de las direcciones de cada variedad "lineal" que compondría cada vector.

Ecuaciones cartesianas

Sea $X = q_0 + \vec{X}$ variedad afín donde $q_0 \in X$, $\dim X = m$ y $R = \{p_0, B\}$ un sistema de referencia cartesiana. Si tenemos un punto $p \in X$ la pertenencia a X es si y sólo si $q_0\vec{p} \in \vec{X}$, luego podemos sustituir el vector en las coordenadas del subespacio vectorial X:

$$X = \begin{cases} a_{11}(x_1 - c_1) + \dots + a_{1n}(x_n - c_n) = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}(x_1 - c_1) + \dots + a_{pn}(x_n - c_n) = 0 \end{cases}$$

Si pasamos todos los valores que son constantes al otro lado de los iguales, obtenemos el sistema lineal de la variedad afín y, por consiguiente, el asociado que define el subespacio vectorial que va con la variedad y de los que hablamos.

[1] Es notable destacar que si $n = \dim A$, serán necesarios $n + 1$ puntos porque p_0 va a constituir el origen

Ecuaciones paramétricas

Partimos del sistema no homogéneo de las ecuaciones cartesianas:

$$X = \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Como sabemos que p es la codimensión de la variedad, entonces habrá algún menor cuadrado de orden p cuyo determinante no sea nulo. Como esto siempre es cierto y en caso de no ser el que vamos a usar ahora se puede escoger otro cualquiera, entonces podemos suponer que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego entonces se tiene:

$$\begin{cases} x_{p+1} = \lambda_{p+1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_n \\ x_1 = c_{1,p+1}\lambda_{p+1} + \ldots + c_{1n}\lambda_n + d_1 \\ \vdots \\ x_p = c_{p,p+1}\lambda_{p+1} + \ldots + c_{pn}\lambda_n + d_p \end{cases}$$

Paso de paramétricas a cartesianas

Si tenemos por ejemplo el plano $\pi = (-1, 1, 0, 0) + L(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$ y queremos saber sus ecuaciones paramétricas tenemos que:

$$\pi = \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \mu \\ t = 1 - \mu \end{cases}$$

Para pasar a cartesianas nos basamos en que:

$$p = (x, y, z, t) \in \pi \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \mu \\ t = 1 - \mu \end{cases}$$

tiene solución única, luego si consideramos como incógnitas los parámetros y como constantes las coordenadas tenemos que:

$$rg \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y+1 & -1 & 0 \\ z & 0 & 1 \\ t-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y una vez que sabemos el rango de la matriz de coeficientes basta con escoger un menos no nulo de ese rango en la matriz ampliada y orlarlo con todos los menores de mayor rango, de modo que todos estos sean nulos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y+1 & -1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} y+1 & -1 & 0 \\ z & 0 & 1 \\ t-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Y de aquí salen las dos ecuaciones correspondientes al plano en $\mathbb{R}^4$

APLICACIONES AFINES

Supongamos que $\phi : A \to A'$ es una aplicación entre ambos conjuntos y $\lambda : V \to V'$ que es $K - lineal$, entonces el par (ϕ, λ) es una **aplicación afín** si:

$$\forall q \in A : q = p + v \Rightarrow \phi(q) = \phi(p) + \lambda(v)$$

Tal y como se ha definido, la aplicación lineal λ queda definida de manera única en función de las imágenes que de ϕ a cada punto y además es común, por este motivo, denotarla por $\vec{\phi}$:

$$v = \vec{pq} \Rightarrow \lambda(v) = \vec{\phi}(v) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$$

Luego para determinar si es afín una aplicación ϕ basta con ver que la asociada a ella es lineal.

Conjunto de puntos fijos

Dada una aplicación afín $\phi : A \to A$ definimos el conjunto de puntos fijos como:

$$A_\phi = \{p \in A : \phi(p) = p\}$$

Además se tiene que:

$$A_\phi \neq \emptyset \Rightarrow A_\phi \text{ es variedad y } \overrightarrow{A_\phi} = V_{\vec{\phi},1}$$

Es decir, existe una fuerte analogía entre los subespacios invariantes de los espacios vectoriales y las variedades afines, hasta el punto de tener también conjuntos invariantes.

Demostración:

Vamos a tratar de demostrar que $A_\phi \neq \emptyset \overset{?}{\Rightarrow} A_\phi = p_0 + V_{\vec{\phi},1}$, donde $p_0 \in A_\phi$.

En primer lugar, veamos que $p_0 + V_{\vec{\phi},1} \subseteq A_\phi$, para ello escogemos un $p = p_0 + v$ donde $v \in V_{\vec{\phi},1}$: $v = \vec{p_0p}$ de forma que $p = p_0 + v = p_0 + \vec{p_0p}$. Entonces ocurre que por ser ϕ afín:

$$\phi(p) = \phi(p_0) + \vec{\phi}(v) = p_0 + v = p$$

Por otro lado, veamos el otro contenido, es decir, $p_0 + V_{\vec{\phi},1} \supseteq A_\phi$; para ello queremos demostrar $p \in A_\phi \overset{?}{\Rightarrow} p = p_0 + v : v \in V_{\vec{\phi},1}$:

$$\vec{\phi}(\vec{p_0p}) = \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p)} = \vec{p_0p} \in V_{\vec{\phi},1} \Rightarrow p = p_0 + \vec{p_0p} \in p_0 + V_{\vec{\phi},1}$$

Matriz de una aplicación afín

Supongamos que tenemos la siguiente situación:

- $\phi : A \to A'$ una aplicación afín
- $R = \{p_0, B\}$, $R' = \{p'_0, B'\}$ sistemas de referencia cartesianos
- $\dim A = \dim V = n$
- $\dim A' = \dim V' = m$
- $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$

Sabemos que para un punto cualquiera $p \in A$, la imagen está entonces en$\phi(p) \in A'$ y además conocemos $\phi(p_0) \in A'$. Si damos coordenadas a los puntos se tiene que

$$p = (x_1, \dots, x_n)_R \Rightarrow \vec{p_0 p} = (x_1, \dots, x_n)_B$$

$$\phi(p_0) = (a_1, \dots, a_m)_{R'} \Rightarrow \overrightarrow{p_0'\phi(p_0)} = (a_1, \dots, a_m)_{B'}$$

$$\phi(p) = (x_1', \dots, x_m')_{R'} \Rightarrow \overrightarrow{p_0'\phi(p)} = (x_1', \dots, x_m')_{B'}$$

Vamos a expresar las coordenadas de $\phi(p)$ en el sistema R' y tratar de relacionarlas con sus coordenadas en R:

$$\overrightarrow{p_0'\phi(p)} = \overrightarrow{p_0'\phi(p_0)} + \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p)} = \overrightarrow{p_0'\phi(p_0)} + \vec{\phi}(\vec{p_0 p})$$

Depejamos y tenemos que:

$$\vec{\phi}(\vec{p_0 p}) = \overrightarrow{p_0'\phi(p)} - \overrightarrow{p_0'\phi(p_0)} \Rightarrow \vec{\phi}((x_1, \dots, x_n)_B) = (x_1', \dots, x_m')_{B'} - (a_1, \dots, a_m)_{B'} = (x_1' - a_1, \dots, x_m' - a_m)_{B'}$$

Luego expresado en forma matricial tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x_1' - a_1 \\ \vdots \\ x_m' - a_m \end{pmatrix} = M_{B,B'}(\vec{\phi}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : M_{B,B'}(\vec{\phi}) \in Mat_{m\times n}(K)$$

Pero tratando de obtener una expresión más cómoda como la que teníamos para el cambio de base en espacios vectoriales tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + M_{B,B'}(\vec{\phi}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & M_{B,B'}(\vec{\phi}) & \\ a_m & & & \end{array}\right)}_{M_{R,R'}(\phi)} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la matriz que representa a ϕ en las referencias R y R'. Contiene la información relativa a la aplicación asociada $\vec{\phi}$ y además la primera columna son las coordenadas que tiene la imagen del origen de R expresadas en R'.

Aplicaciones notorias

Aplicación constante

Supongamos $\phi : A \to A'$ de manera que $\phi(p) = p_0'$, es decir, para cualquier punto se le asigna el punto constante p_0', entonces veamos quién es la aplicación lineal asociada:

$$\vec{\phi}(\vec{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = \vec{p_0' p_0'} = 0$$

<u>Matriz asociada</u>:

Tomamos $R = \{p_0, B\}$ cualquiera y $R' = \{p_0', B'\} : p_0' = \phi(p)$, es decir, valdría cualquiera pero lo tomamos centrado en el único punto de la imagen para que sea más sencilla la matriz, entonces su matriz asociada es:

$$M_{R,R'}(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Traslación

Supongamos ahora que $V = V'$ y $A = A'$, de modo que tenemos una aplicación afín $\phi : A \to A$ cuya aplicación lineal asociada es $\vec{\phi} = id_v$, entonces tenemos que:

$$\vec{pq} = \phi(\vec{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} \overset{Paral.}{\Rightarrow} \overrightarrow{p\phi(p)} = \overrightarrow{q\phi(q)} = v$$

Por tanto, ahora:

$$\phi(p) = p + v$$

Con lo que queda definida la traslación de vector v. Para ver que está bien definida vamos a ver que es afín, para ello vemos que $\vec{\phi}$ es lineal:

$$\vec{\phi}(\vec{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = \overrightarrow{p+v, q+v} = \overrightarrow{p+v, p+\vec{pq}+v} = \overrightarrow{p+v, (p+v)+\vec{pq}} = \vec{pq}$$

<u>Matriz asociada</u>:

Sea ϕ traslación, su aplicación asociada $\vec{\phi} = id_v$ y como es traslación tiene que ser sobre el mismo A y R, luego $R = \{p_0, B\}$, entonces su matriz asociada es:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ a_n & & & \end{array}\right)$$

Donde $(a_1, \cdots, a_n)$ es el vector de la traslación en la base B.

Cabe destacar dos cosas, la primera es que si el vector de la traslación es el nulo, esto querría decir que todos los puntos son fijos y, por tanto, la matriz sería la identidad. Por otro lado, si queremos simplificar aún más esta expresión podemos elegir una base $B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ de forma que v_1 sea el vector de la traslación porque en ese caso toda esa columna sería un único 1 en a_1 y lo demás 0:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Homotecias

Sea $\phi : A \to A$ afín, $\vec{\phi} = r \cdot id_V$, ϕ es homotecia si excluimos $r = 1$ y $r = 0$ para que no sean ni la identidad ni la aplicación nula.

Este tipo de aplicaciones tiene un único punto fijo, es decir, $A_\phi = \{c\}$ que llamaremos el centro de homotecia. Primero veamos que en caso de haber algún punto fijo, este es único:

$$p, q \in A_\phi \Rightarrow r\vec{pq} = r\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = r\vec{\phi}(\vec{pq}) = r^2\vec{pq} \Rightarrow r(1-r)\vec{pq} = 0 \Rightarrow \vec{pq} = 0 \Rightarrow p = q$$

Veamos ahora quién puede ser el candidato a ser punto fijo:

$$c \in A_\phi \Rightarrow r \cdot \vec{pc} = \vec{\phi}(\vec{pc}) = \overrightarrow{\phi(p) + \phi(c)} = \overrightarrow{\phi(p)c} = \overrightarrow{\phi(p)p} + \vec{pc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p\phi(p)} = (1-r)\vec{pc} \Rightarrow \vec{pc} = \frac{1}{1-r}\overrightarrow{p\phi(p)} \Rightarrow c = p + \vec{pc} = p + \frac{1}{1-r} \cdot \overrightarrow{p\phi(p)}$$

De este modo, podemos definir el centro de homotecia como:

$$c = p + \frac{1}{1-r} \cdot \overrightarrow{p\phi(p)}$$

Comprobamos que el centro es invariante, para ver que cumple la definición y concluir que el cardinal de los puntos fijos es exactamente 1:

$$\phi(c) = \phi(p) + \frac{1}{1-r}\vec{\phi}(\overrightarrow{p\phi(p)}) = p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{r}{1-r}\overrightarrow{p\phi(p)} = p + \left(1 + \frac{r}{1-r}\right)\overrightarrow{p\phi(p)} = p + \frac{1}{1-r}\cdot\overrightarrow{p\phi(p)} = c$$

Matriz asociada:

Sea ϕ homotecia de razón r cuyo centro es c, entonces su matriz asociada es $\vec{\phi} = rid_V$. Si tomamos $R = \{c, B\}$, siendo B una base cualquiera, entonces su matriz es:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & rI_n & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Y las coordenadas[2] de la primera columna son nulas porque hemos elegido de centro c que es un punto fijo.

Proyecciones

Sea $\phi : A \to A$ afín. La aplicación afín conocida como **proyección** cumple:

$$\phi^2 = \phi \Leftrightarrow \vec{\phi}^2 = \vec{\phi} \text{ y } A_\phi \neq \emptyset$$

De hecho, se tiene que $A_\phi = Im(\phi)$.

Demostración

- "$\Rightarrow$":

  Si tenemos en cuenta que:

  $$\overrightarrow{\psi \circ \phi}(\vec{pq}) = \overrightarrow{(\psi \circ \phi)(p)(\psi \circ \phi)(q)} = \overrightarrow{\psi(\phi(p))\psi(\phi(q))} = \vec{\psi}(\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}) = \vec{\psi}(\vec{\phi}(\vec{pq}))$$

  Entonces se tiene:

  $$\phi^2 = \phi \overset{\overrightarrow{\psi\circ\phi} = \vec{\psi}\circ\vec{\phi}}{\Longrightarrow} \vec{\phi}^2 = \vec{\phi} \circ \vec{\phi} = \overrightarrow{\phi \circ \phi} = \vec{\phi^2} = \vec{\phi}$$

  Veamos que $A_\phi \neq \emptyset$:

  $$\forall p \in A \Rightarrow \phi(\phi(p)) = \phi(p) \Rightarrow \phi(p) \in A_\phi \Rightarrow \begin{cases} A_\phi \neq \emptyset \\ Im(\phi) \subseteq A_\phi \end{cases}$$

  Pero además, $p \in A_\phi \Rightarrow p = \phi(p) \in Im(\phi) \Rightarrow Im(\phi) \supseteq A_\phi$, por lo que $Im(\phi) = A_\phi$

- "$\Leftarrow$"

  Sea $p_0 \in A_\phi$ un punto fijo cualquiera y $p \in A$ un punto cualquiera, entonces podemos escribir:

  $$p = p_0 + v : v = \vec{p_0 p} \Rightarrow \begin{cases} \phi(p) = \phi(p_0) + \vec{\phi}(v) = p_0 + \vec{\phi}(v) \\ \phi^2(p) = \phi^2(p_0) + \vec{\phi}^2(v) = p_0 + \vec{\phi}(v) \end{cases} \Rightarrow \phi(p) = \phi^2(p)$$

Matriz asociada

[2] Si queremos hallar el centro porque no lo sabemos, escribimos la matriz en un sistema cualquiera y resolvemos $v = A \cdot v^t$

Sea $R=\{p_0,B\}$, siendo $p_0\in A_\phi$ un punto fijo y $B=\{\underbrace{v_1,\ldots,v_m}_{V_{\vec{\phi},1}},\underbrace{v_{m+1},\ldots,v_n}_{V_{\vec{\phi},0}}\}$.

$$M_R(\phi)=\left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & & \ldots & & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Escogemos el sistema de esta manera porque de este modo la matriz es lo más sencilla posible (el punto fijo hace 0 en la primera columna y la base de vectores propios hace sencilla la matriz de la aplicación lineal).

Origen del nombre proyección

$\vec{\phi}:V\to V$ es una proyección vectorial con base $V_{\vec{\phi},1}$ y dirección $V_{\vec{\phi},0}$

$$\phi\begin{cases}\text{Base } = A_\phi = \begin{cases} Im(\phi) \\ p_0+V_{\vec{\phi},1}\end{cases} \\ \text{Dirección } = V_{\vec{\phi},0}\end{cases}$$

Veamos que papel juegan esta base y esta dirección.

$\{\phi(p)\}=A_\phi\cap(p+V_{\vec{\phi},0})$

- "$\subseteq$":

  Tenemos dos posibles situaciones, si p es punto fijo:

  $$\phi(p)\in Im(\phi)=A_\phi$$

  Si p no es punto fijo:

  $$\vec{\phi}\left(\overrightarrow{p\phi(p)}\right)=\overrightarrow{\phi(p)\phi^2(p)}=\overrightarrow{\phi(p)\phi(p)}=0\Rightarrow\overrightarrow{p\phi(p)}\in V_{\vec{\phi},0}\Rightarrow\phi(p)=p+\overrightarrow{p\phi(p)}\in p+V_{\vec{\phi},0}$$

- "$\supseteq$":

  Si $A_\phi\cap(p+V_{\vec{\phi},0})\neq\emptyset\Rightarrow A_\phi\cap(p+V_{\vec{\phi},0})$ es variedad, por lo que por lo demostrado antes solo falta ver que la dimensión es 0:

  $$\dim(A_\phi\cap(p+V_{\vec{\phi},0}))=\dim\overrightarrow{A_\phi\cap(p+V_{\vec{\phi},0})}=\dim(\vec{A_\phi}\cap\overrightarrow{p+V_{\vec{\phi},0}})=\dim(V_{\vec{\phi},1}\cap V_{\vec{\phi},0})=\dim\{0\}=0$$

Simetrías

Sea $\phi:A\to A$ afín y $\chi(K)\neq 2$. La aplicación afín conocida como **simetría** cumple:

$$\phi^2=id_A\Leftrightarrow\vec{\phi}^2=id_V \text{ y } A_\phi\neq\emptyset$$

Demostración

- "$\Rightarrow$"

  Del mismo modo que lo hemos hecho antes vemos que:

  $$\phi^2=id_V\overset{\overrightarrow{\psi\circ\phi}=\vec{\psi}\circ\vec{\phi}}{\Longrightarrow}\vec{\phi}^2=\vec{\phi}\circ\vec{\phi}=\overrightarrow{\phi\circ\phi}=\vec{id_A}=id_V$$

Veamos que $A_\phi \neq \emptyset$:

Sea $p \in A$ un punto cualquiera y elegimos el punto $m = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)}$, de este modo ocurre que:

$$\phi(m) = \phi(p) + \frac{1}{2}\vec{\phi}(\overrightarrow{p\phi(p)}) = p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\phi(p)\phi^2(p)} = p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\phi(p)p} = p + \overrightarrow{p\phi(p)} - \frac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)} = m$$

- "$\Leftarrow$"

  Sea $p_0 \in A_\phi$ un punto fijo cualquiera y $p = p_0 + v : v = \vec{p_0 p}$ un punto cualquiera, entonces:

$$\phi(p) = \phi(p_0) + \vec{\phi}(v) \Rightarrow \phi^2(p) = \phi^2(p_0) + \vec{\phi}^2(v) = p_0 + id_V(v) = p_0 + v = p$$

Matriz Canónica de una Simetría

Sea $R = \{p_0, B\}$, siendo $p_0 \in A_\phi, B = \{\underbrace{v_1, \dots v_m}_{\in V_{\vec{\phi},1}}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\in V_{\vec{\phi},-1}}\}$

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \\ \vdots & & & & -1 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & -1 \end{array}\right)$$

Homologías

Sea $\phi : A \to A$ afín, la denotamos por **homología general** si cumple:

$$q_{\vec{\phi}} = (x-1)(x-r) : r \neq 1, 0, -1 \text{ y } A_\phi \neq \emptyset$$

Matriz asociada:

De este modo, sea $R = \{p_0, B\}$, siendo $p_0 \in A_\phi, B = \{\underbrace{v_1, \dots v_m}_{\in V_{\vec{\phi},1}}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\in V_{\vec{\phi},r}}\}$ su matriz asociada queda como:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \\ \vdots & & & & r & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & r \end{array}\right)$$

Denotamos por el autovalor r a la **razón** de la homología, a $p_0 + L(v_1, \dots v_m) = p_0 + V_{\vec{\phi},1}$ por la **base** y a la **dirección** por $L(v_{m+1}, \dots, v_n) = V_{\vec{\phi},r}$.

Homología general con desplazamiento

Definimos una homología general con desplazamiento como la composición de una homología general con una traslación cuyo vector de traslación es paralelo a la base de la homología.

Sea $B = \{v_1, v_2\}$ base de vectores propios, entonces la matriz asociada resultante queda como:

$$M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & r \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & r \end{array}\right) = M_R(\phi_2 \circ \phi_1) \Rightarrow \phi = \phi_2 \circ \phi_1$$

Se observa que la matriz de la aplicación φ_2 es una traslación y que el vector de traslación es paralelo al vector v_2 que es el que compone la base de la homología general. La aplicación φ_1 es una homología no elegida en su forma canónica definida, puesto que no hemos puesto de centro a un punto fijo.

Homología especial

Definimos una homología especial como una homología general pero con un único valor que corresponde al 1 que posee multiplicidad doble (si no sería traslación).

Sea $R = \{p_0, B\}$, siendo $p_0 \in A_\phi$ un punto fijo y eligiendo una base de forma que $M_B(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz canónica de Jordan asociada a su aplicación lineal, entonces su matriz queda como:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Denotamos por base a $A_\phi = p_0 + L(v_1)$ y por dirección a $L(v_2)$.

Homología especial con desplazamiento

De modo análogo, definimos la homología especial con desplazamiento como una composición de una homología especial con una traslación cuyo vector es paralelo a la dirección de la homología.

Sea $R = \{p_0, B\}$, siendo $M_B(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = M_R(\phi_2 \circ \phi_1)$$

Clasificación de las Afinidades del Plano

Proposición

Si el 1 no es un autovalor de la aplicación asociada, entonces el conjunto de puntos fijos es un único valor:

$$A_\phi = \{p_0\} \Leftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$$

De hecho, la discusión para clasificar las aplicaciones afines será distinguir los casos en que 1 forme parte de los autovalores y que no forme parte de los mismos.

Es importante dejar claro que cuando el 1 pertenece al espectro de la aplicación asociada, no podemos suponer que el conjunto de puntos fijos es no vacío porque, por ejemplo:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{array}\right) \Rightarrow p \in A_\phi \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_1 \\ x_2 = rx_2 \end{cases} \Rightarrow \#$$

Demostración

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$$

Para que la solución sea única, entonces $rg(A - I_n) = n$, luego:

$$A_\phi = \{p_0\} \Leftrightarrow rg(A - I_n) = n \Leftrightarrow p_A(1) = |A - I_n| \neq 0 \Leftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$$

Biyectividad de las aplicaciones afines

Sea el par (ϕ, λ) una aplicación afín de forma que $\phi : A_1 \to A_2$ y $\lambda : V_1 \to V_2$ donde $\lambda = \vec{\phi}$, entonces el caracter de ϕ depende estrictamente de λ, es decir:

$$\phi \text{ inyectiva } \Leftrightarrow \lambda \text{ inyectiva}$$

$$\phi \text{ suprayectiva } \Leftrightarrow \lambda \text{ suprayectiva}$$

$$\phi \text{ biyectiva } \Leftrightarrow \lambda \text{ bityectiva}$$

Demostración

Se va a realizar la demostración de la primera afirmación, dejando al lector las restantes.

"$\Rightarrow$"

$$\lambda(\vec{pq}) = \lambda(\vec{pr}) \Rightarrow \phi(q) = \phi(p) + \lambda(\vec{pq}) = \phi(p) + \lambda(\vec{pr}) = \phi(r) \overset{\phi \text{ inyectiva}}{\Rightarrow} q = r \Rightarrow \vec{pq} = \vec{pr}$$

"$\Leftarrow$"

$$\phi(q) = \phi(r) \Rightarrow \lambda(\vec{qr}) = \overrightarrow{\phi(q)\phi(r)} = 0 \overset{\lambda \text{ inyectiva}}{\Rightarrow} \vec{qr} = 0 \Rightarrow q = r$$

Grupo Afín

Llamaremos grupo afín del espacio afín $\mathcal{A}$ a:

$$GA(\mathcal{A}) = \{\phi : A \to A \mid \phi \text{ es afín y biyectiva } \}$$

Y este conjunto, junto con la composición y la suma de aplicaciones tiene todas las propiedades de un grupo.

<u>Clasificación en dimensión 2</u>:

Sea $\dim \mathcal{A} = 2$, $K = \mathbb{C}$ y $\phi \in GA(\mathcal{A})$

- $$1 \in \sigma(\vec{\phi}) = \begin{cases} q_{\vec{\phi}} = x - 1 \Rightarrow \phi \text{ traslación } \Rightarrow \begin{cases} \phi = id & A_\phi = \mathcal{A} \\ \phi \neq id & A_\phi = \emptyset \end{cases} \\ q_{\vec{\phi}} = (x-1)(x-r) : r \neq 1, 0, -1 \Rightarrow \phi \text{ diagonalizable } \Rightarrow \begin{cases} \phi \text{ hom. gen.} & A_\phi \neq \emptyset \\ \phi \text{ h. g. con desp.} & A_\phi = \emptyset \end{cases} \\ q_{\vec{\phi}} = (x-1)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} \phi \text{ simetría} & A_\phi \neq \emptyset \\ \phi \text{ simetría con desplazamiento} & A_\phi = \emptyset \end{cases} \\ q_{\vec{\phi}} = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} \phi \text{ homología especial} & A_\phi \neq \emptyset \\ \phi \text{ homología especial con desplazamiento} & A_\phi = \emptyset \end{cases} \end{cases}$$
- $1 \notin \sigma(\vec{\phi}) \Rightarrow A_\phi = \{p_0\}$, luego tomaremos como referencia $R = \{p_0, B\}$ con una base B conveniente.
  $$1 \in \sigma(\vec{\phi}) = \begin{cases} q_{\vec{\phi}} = x - r : r \neq 1, 0 \Rightarrow \vec{\phi} = r\ id_V \Rightarrow \phi \text{ homotecia} \\ q_{\vec{\phi}} = (x-r)(x-s) : r, s \neq 1, 0 \Rightarrow \text{ composición de homologías generales} \\ q_{\vec{\phi}} = (x-r)^2 : r \neq 1, 0 \Rightarrow \text{ homología especial compuesta con homotecia} \end{cases}$$
  <u>Composición de homologías generales</u>
  Sea la base de vectores propios $B = \{v_1, v_2\}$:
  $$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_R(\phi_2 \circ \phi_1)$$
  <u>Homología especial compuesta con homotecia</u>
  Sea la base $B = \{v_1, v_2\}$ tal que $M_B(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ sea la forma de Jordan asociada:
  $$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & r \end{array}\right) \Rightarrow M_{R'}(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & r \\ 0 & 0 & r \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\dim \mathcal{A} = 2$, $K = \mathbb{R}$ y $\phi \in GA(\mathcal{A})$, entonces se mantienen todos los casos anteriores, pero hemos de añadir el caso en el que el polinomio no descompone:

$$q_{\vec{\phi}} = x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x] \text{ irreducible } \Rightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi}) \Rightarrow A_\phi = \{p_0\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q_{\vec{\phi}} = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) : \alpha = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Entonces la matriz asociada queda como:

$$M_B(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{array}\right)$$

Que se parece, pero no es extrapolable a las rotaciones vistas en las aplicaciones ortogonales.

Teorema

Sean A, A' espacios afines, $p_0 \in A$ un punto de A y $\{v_1, \dots v_n\}$ base de V, entonces:

$$\forall p_0' \in A' \text{ y } \{v_1', \dots v_n'\} \text{ base de } V' : \exists! \phi : A \to A' \text{ afín} : \begin{cases} \phi(p_0) = p_0' \\ \vec{\phi}(v_i) = v_i' : \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Luego del mismo modo que al definir los valores de una aplicación sobre una base la aplicación lineal quedaba definida, aquí al definir los valores de la aplicación afín sobre un sistema de referencia esta queda determinada de modo único.

Demostración

Sea $p \in A$ un punto cualquiera de A, entonces:

$$p = p_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \Rightarrow \phi(p) = p'_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i v'_i$$

Y se comprueba trivialmente que cumple las propiedades de afín.

Teorema

Sea $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ sistema de referencia afín de A, entonces:

$$\forall p'_0, p'_1, \ldots, p'_n \in A' : \exists! \phi : A \to A' \text{ afín } : \phi(p_i) = p'_i : \forall i = 1, \ldots, n$$

CÓNICAS

Sea $A = \mathbb{R}^2$ plano afín real usual, definimos el objeto matemático de las cónicas como el conjunto de puntos que verifican:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ y } (a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$$

La expresión matricial de la cónica sería :

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \text{ donde } A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = M_R(C)$$

La matriz de paso entre sistemas de referencia verifica:

$$P = M(R', R) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} : p = (x', y')_{R'} \text{ y } p = (x, y)_R$$

Por tanto, si sustituimos en la expresión inicial:

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \underbrace{P^t A P}_{A' = M_{R'}(C)} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{02} & a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = a'_{11}x'^2 + \ldots + a'_{00}$$

Clasificación de cónicas

Dos cónicas C, C' son **afínmente equivalentes** si respecto de sistemas distintos ambas tienen la misma matriz, es decir:

$$C \sim C' \Leftrightarrow M_R(C) = M_{R'}(C')$$

Esta relación es de equivalencia que cuenta con exactamente 7 clases de equivalecia en el conjunto cociente.

Teorema

Toda cónica real es afínmente equivalente a una y sólo una de las siguientes:

Elipse no degenerada:	$x^2+y^2-1=0$
Hipérbola no degenerada:	$x^2-y^2-1=0$
Parábola no degenerada	$x^2-y=0$
Elipse degenerada:	$x^2+y^2=0$
Hipérbola degenerada:	$x^2-y^2=0$
Parábola simplemente degenerada:	$x^2-1=0$
Parábola doblemente degenerada:	$x^2=0$

Demostración:

$$0=\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} : A=\left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a_{01} & a_{02}\\ \hline a_{01} & A_0 & \\ a_{02} & & \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}a_{01} & a_{02}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + a_{00} =$$

De este modo, si consideramos $R=\{p_0,B\}$ un sistema de referencia, podemos interpretar A_0 como la matriz de una forma cuadrática, puesto que es simétrica, es decir, $M_B(q_0)=A_0=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$. Como el cuerpo son lo reales, $K=\mathbb{R}$, aplicando la Ley de Inercia, se tiene que:

$$A_0 \equiv A_0' = \begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix} : \varepsilon_i = 1,-1,0$$

Como son congruentes, existe una matriz de paso de una a otra y por tanto podemos expresar $A_0 = P^t A_0' P$, siendo $P=M(B,B')$ de forma que $P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$. Ahora si sustituimos convenientemente en la expresión inicial tenemos que:

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} P^t A_0' P \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}a_{01} & a_{02}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + a_{00} =$$

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix} A_0' \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}a_{01} & a_{02}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + a_{00} =$$

$$\varepsilon_1(x')^2+\varepsilon_2(y')^2 + 2\begin{pmatrix}a_{01} & a_{02}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + a_{00} =$$

$$\varepsilon_1(x')^2+\varepsilon_2(y')^2 + 2\begin{pmatrix}a_{01} & a_{02}\end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} + a_{00} =$$

$$\varepsilon_1(x')^2+\varepsilon_2(y')^2 + 2a_{01}'x' + 2a_{02}'$$

Ambos $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ no pueden valer los dos 0, ya que en ese caso $A_0'=A'=0$, y todos los coeficientes del término cuadrático se anularían y eso está excluido. Siempre un ε vale 1 o -1, pero podemos suponer que el primero vale 1 siempre, puesto que si valiese menos 1 es multiplicar el poliniomio por -1 (los puntos no cambian) y si valiese el otro ε el valor no nulo basta con reodenar la base, pudiendo suponer así que siempre el primer ε vale 1.

En el fondo lo que estamos haciendo es cambiar de sistema de referencia $R=\{p_0,B\}$ a un sistema $R'=\{p_0,B'\}$, puesto que teniendo en cuenta que $P=M(B,B')$ se satisface que:

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & & \\ & P & \\ 0 & & \end{array}\right)}_{M(R,R')}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$$

Sabiendo que $\varepsilon_1 = 1$ siempre, distinguimos casos:

- Si $\varepsilon_2 = 1$:

$$(x')^2 + (y')^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02} + a'_{00} = (x' + a'_{01})^2 + (y' + a'_{02})^2 + \underbrace{a'_{00} - a'^2_{01} - a'^2_{02}}_{a''_{00}}$$

$$\begin{cases} x''^2 + y''^2 - 1 & a''_{00} < 0 \\ x''^2 + y''^2 & a''_{00} = 0 \\ \text{No es cónica} & a''_{00} > 0 \end{cases}$$

Para poder verificar que el cambio que hemos hecho al completar cuadrados es correcto, observamos la siguiente relación:

$$\begin{cases} x'' = x' + a'_{01} \\ y'' = y' + a'_{02} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a'_{01} & 1 & 0 \\ a'_{02} & 0 & 1 \end{array}\right)}_{M(R',R'')} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Esta relación es correcta porque la matriz cuadrada 2x2 correspondiente a la identidad representa el cambio de base entre B' y B'' que se mantienen iguales, es decir, $B' = B''$. Sin embargo, el centro a cambiado porque ahora lo marcan las coordenadas a'_{01} y a'_{02} de modo que:+

$$R'' = \{p''_0, B''\} : \overrightarrow{p''_0 p'_0} = a'_{01} \cdot v_1 + a'_{02} \cdot v_2 \Rightarrow p''_0 = (-a'_{01}, -a'_{02})_{R'}$$

- Si $\varepsilon_2 = -1$

$$x'^2 - y'^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{00} = (x' + a'_{01})^2 - (y' - a'_{02})^2 + \underbrace{a'_{00} - a'^2_{01} - a'^2_{02}}_{a''_{0}}$$

$$\begin{cases} x''^2 - y''^2 - 1 & a''_{00} < 0 \\ x''^2 - y''^2 & a''_{00} = 0 \\ x''^2 - y''^2 + 1 & a''_{00} > 0 \end{cases}$$

En este caso, el procedimiento de justificación de que los cambios algebraicos corresponden a cambios de sistemas de referencia es completamente análogo.

- Si $\varepsilon_2 = 0$

$$x'^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{00} = (x' + a'_{01})^2 + 2a'_{02}y' + a'_{00} - a'^2_{01} = x''^2 + 2a'_{02}y' + a''_0 =$$

  - $a'_{02} \neq 0$:

$$0 = x''^2 - (-2a'_{02}y' - a''_0) \Rightarrow \begin{cases} x'' = x' + a'_{01} \\ y'' = -2a'_{02}y' - a''_0 \end{cases} \Rightarrow x''^2 - y''$$

  Comprobamos que se trata de un cambio de sistema de referencia.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a'_{01} & 1 & 0 \\ a'_{02} & 0 & -2a'_{02} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

  Como la matriz 2x2 es inversible, corresponde a un cambio de base por ser inversible y como las coordenadas del centro son válidas todo es correcto.

  - $a'_{02} = 0$:

$$0 = x''^2 + a''_{00} \overset{1/a''_{00}}{\Rightarrow} x'''^2 - 1 : \begin{cases} \text{No es cónica} & a''_{00} > 0 \\ \text{Rectas Paralelas} & a''_{00} < 0 \\ \text{Recta única en el plano (doble sobre sí)} & a''_{00} = 0 \end{cases}$$

Caracterización de las Cónicas

Sea C una cónica, $A = M_R(C)$ y $A' = M_{R'}(C)$ se relacionan ambas de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{c|cc} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ \hline a'_{01} & & \\ & A'_0 & \\ a'_{02} & & \end{array}\right) = A' = P^tAP = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & c_1 & c_2 \\ \hline 0 & & \\ & P_0^t & \\ 0 & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{01} & & \\ & A_0 & \\ a_{02} & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & & \\ & P_0 & \\ c_2 & & \end{array}\right)$$

Siendo $P = M(R', R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & & \\ & P_0 & \\ c_2 & & \end{array}\right)$, $P_0 = M(B', B)$ y c_1 y c_2 la relación entre los centros de ambas. Del mismo modo, por ser afinmente equivalentes, entonces $A \equiv A'$ y se mantienen invariantes:

- El rango: $rg(A) = rg(A')$
- La signatura no porque multiplicamos por -1 , pero sí se mantiene: $(s, t) = \varepsilon(A) = \varepsilon(A') = (s', t') \Rightarrow \delta = |s - t| = |s' - t'|$
- El signo del determinante de A: $sign|A| = d$

Luego podemos clasificar por invariantes las matrices de los 7 tipos de cónicas:

$$\begin{cases} r = \text{ rango} \\ \delta = |s - t| \\ d = \det A \end{cases}$$

- C elipse no degenerada:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv A \Rightarrow \begin{cases} r = 3, \delta = 1, d < 0 \\ r_0 = 2, \delta_0 = 2, d_0 > 0 \end{cases}$$

- C elipse degenerada:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv A \Rightarrow \begin{cases} r = 2, \delta = 2, d = 0 \\ r_0 = 2, \delta_0 = 2, d_0 > 0 \end{cases}$$

- C hipérbola no degenerada:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \equiv A \Rightarrow \begin{cases} r = 3, \delta = 1, d > 0 \\ r_0 = 2, \delta_0 = 0, d_0 < 0 \end{cases}$$

- C hipérbola degenerada:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \equiv A \Rightarrow \begin{cases} r = 2, \delta = 0, d = 0 \\ r_0 = 2, \delta_0 = 0, d_0 < 0 \end{cases}$$

- C parábola no degenerada:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv A \Rightarrow \begin{cases} r = 3, \delta = 1, d < 0 \\ r_0 = 1, \delta_0 = 1, d_0 = 0 \end{cases}$$

- C parábola simplemente degenerada:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv A \Rightarrow \begin{cases} r = 2, \delta = 0, d = 0 \\ r_0 = 1, \delta_0 = 1, d_0 = 0 \end{cases}$$

- C parábola doblemente degenerada:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv A \Rightarrow \begin{cases} r = 1, \delta = 1, d = 0 \\ r_0 = 1, \delta_0 = 1, d_0 = 0 \end{cases}$$

Además, si consideramos C cónica de forma que $A = M_R(C)$ y $A' = M_{R'}(C)$, entonces podemos considerar la matriz de paso P como la matriz de una aplicación afín en vez de una matriz de paso. Esta aplicación afín lleva los puntos de C a los de C' y los expresa respecto del propio sistema de referencia R, sin embargo, la matriz de la cónica cambia a la canónica que queríamos:

$$P = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & M(B, B') & \\ c_2 & & \end{array}\right) = M_R(\phi) : \phi(x, y)_R = (x', y')_R$$

Ejemplo:

En la referencia Canónica consideramos:

$$0 = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y + 2$$

Tras realizar las transformaciones convenientes, se tiene:

$$0 = 5(x + \frac{3y}{5} - \frac{2}{5})^2 - \frac{9y^2}{5} - \frac{4}{5} + \frac{12y}{5} + 5y^2 + 4y + 2 = 5x'^2 + \frac{16}{5}y^2 + \frac{32}{5}y + \frac{6}{5}$$

$$0 = 5x'^2 + \frac{16}{5}(y+1)^2 - \frac{16}{5} + \frac{6}{5} = 5x'^2 + \frac{16}{5}y'^2 - 2 =$$

Luego la relación que existe es:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{3y}{5} - \frac{2}{5} \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Como $d_0 < 0, rg = 3$, se trata de una elipse no degenerada, así que su forma canónica será:

$$x''^2 + y''^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} x'' = \sqrt{\frac{5}{2}}x' = \sqrt{\frac{5}{2}}(x + \frac{3y}{5} - \frac{2}{5}) \\ y'' = \sqrt{\frac{8}{5}}y' = \sqrt{\frac{8}{5}}(y + 1) \end{cases}$$

Podemos definir por tanto $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de forma que su matriz quede como:

$$M_{R_c}(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} & \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{2}} \\ \sqrt{\frac{8}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{8}{5}} \end{array}\right)$$

ISOMETRÍAS

Sea $\dim V = n$ y (A, V, φ) donde $\varphi(p,q) = \vec{pq}$ un espacio afín, si añadimos un producto escalar $f : V \times V \to \mathbb{R}$, entonces denominamos a (A, V, φ, f) espacio afín euclídeo.

Espacio métrico

Definimos la distancia entre dos puntos como:

$$d(p,q) = ||\vec{pq}||$$

De forma que con esta definición se cumplen las siguientes propiedades:

- $d(p,q) \geq 0 : \forall p, q \in A$
- $d(p,q) = 0 \Rightarrow p = q$
- $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,p)$

Lo cual define las características de un espacio métrico.

Teorema de Pitágoras

$$p_0\vec{p}_1 \perp p_0\vec{p}_2 \Rightarrow ||p_1\vec{p}_2||^2 = ||p_0\vec{p}_1||^2 + ||p_0\vec{p}_2||^2$$

Demostración:

$||p_1\vec{p}_2||^2 = f(p_1\vec{p}_2, p_1\vec{p}_2) = f(p_1\vec{p}_0 + p_0\vec{p}_2, p_1\vec{p}_0 + p_0\vec{p}_2) = f(p_1\vec{p}_0, p_1\vec{p}_0) + f(p_0\vec{p}_2, p_0\vec{p}_2) = ||p_1\vec{p}_0||^2 + ||p_0\vec{p}_2||$

Distancia punto-variedad

Sea $p \in A$ un punto y $X \subseteq A$ una variedad, definimos:

$$d(p, X) = \inf\{d(p_1, q) : q \in X\}$$

Y de hecho, este ínfimo se alcanza, luego:

$$d(p, X) = \min\{d(p_1, q) : q \in X\}$$

Luego si la distancia entre un punto y una variedad es 0, el punto está en la variedad:

$$d(p, X) = 0 \Rightarrow p \in X$$

Distancia entre variedades

Sean $X, Y \subseteq A$ variedades afines, definimos la distancia entre ellas como:

$$d(X, Y) = \inf\{d(p,q) : p \in X,\ q \in Y\}$$

Y, de nuevo, este ínfimo se alcanza, luego:

$$d(X, Y) = \min\{d(p,q) : p \in X,\ q \in Y\}$$

En consecuencia, si ambas intersecan, su distancia es 0:

$$X \cap Y \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists p_0 \in X \cap Y : d(p_0, p_0) = 0$$

Referencias Ortonormales

Sea $R = \{p_0, B\}$, diremos que el sistema de referencia es ortonormal, si lo es la base B que lo compone.

Matriz de paso entre sistemas de referencia

Sean R, R' sistemas de referencia ortonormales, entonces la matriz de paso entre ambos verifica que:

$$M(R,R') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & M(B,B') & \\ a_n & & & \end{array}\right)$$

Recíprocamente, si la matriz de cambio de base es de este tipo, entonces los sistemas que intercambia son ortogonales.

Isometrías

Denotamos por movimiento rígido o isometría de A a una aplicación afín $\phi : A \to A$ tal que su aplicación lineal asociada $\vec{\phi}$ es ortogonal, es decir:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & M_B(\vec{\phi}) & \\ a_n & & & \end{array}\right) : \overrightarrow{p_0\phi(p_0)} = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n \text{ y } \vec{\phi} \in O(V)$$

De este modo, R ortonormal implica que $M_B(\vec{\phi})$ ortogonal.

Los movimientos son todos biyectivos por lo que existe la aplicación inversa que también es un movimiento. Como la composición de movimientos es de nuevo un movimiento, entonces el conjunto de estas aplicaciones junto con la composición forman un grupo.

Proposición

Una aplicación afín es un movimiento rígido si y sólo si conserva las distancias.

$$\phi \text{ movimiento} \Leftrightarrow d(p,q) = d(\phi(p), \phi(q))$$

Demostración:

$$d(\phi(p),\phi(q))^2 = ||\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}||^2 = f(\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}, \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}) = f(\vec{\phi}(\vec{pq}), \vec{\phi}(\vec{pq})) \overset{\vec{\phi}\in O(V)}{=} f(\vec{pq},\vec{pq}) = ||\vec{pq}||^2 = d(p,q)^2$$

Ejemplo: Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de forma que su matriz en base canónica sea:

$$M_{R_c}(\phi) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Veamos que ϕ es movimiento:

$$M_{B_c}(\vec{\phi}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\vec{\phi}) = 1 \Rightarrow \vec{\phi} \in O^+(2)$$

Como $1 \notin \sigma(\phi) \Rightarrow A_\phi = \{p_0\} : p_0 = \begin{cases} (\frac{4}{5}-1)x + \frac{3}{5}y = 0 \\ -1 - \frac{3}{5}x + (\frac{4}{5}-1)y = 0 \end{cases}$. Luego si escogemos un sistema apropiado $R = \{p_0, B = \{v_1, v_2\}\}$ su matriz quedaría como:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ consideramos la matriz:

$$M_{R_c}(\phi) = \frac{1}{3} = \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow M_{B_c}(\vec{\phi}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ ortogonal} \Rightarrow \vec{\phi} \in O^(3)$$

Como $\det(\vec{\phi}) < 0 \Rightarrow \det(\vec{\phi}) = -1$, luego existe una base respecto de la cual:

$$M_B(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

Como la traza es un invariante, tenemos que:

$$tr(\vec{\phi}) = 1 = -1 + 2c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow M_B(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego ϕ será una simetría especular si hay puntos fijos:

$$A_\phi : \begin{cases} 1 - x - y + 2z = 0 \\ 1 - x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow A_\phi = \emptyset$$

Lo que quiere decir que $\vec{\phi}$ es simetría ortogonal, pero ϕ no es simetría (es simetría con desplazamiento).

Clasificación de Movimientos

Sea $\phi : A \to A$ movimiento, A espacio afín euclídeo de dimensión 2:

- $\vec{\phi} \in O^+(V)$
  - **Giros**: $\boxed{A_\phi \neq \emptyset}$
    Elegimos un $R = \{p_0, B\}$ de forma que $p_0 \in A_\phi$ y una base ortonormal para que:
    $$M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : 0 \leq \theta \leq \pi$$
    Como casos especiales tenemos que $\begin{cases} \theta = 0 & \Rightarrow \phi = id_A \\ \theta = \pi & \phi \text{sim. central} \end{cases}$
  - **Giro con desplazamiento**: $\boxed{A_\phi = \emptyset}$
    Elegimos de nuevo un $R = \{p, B\}$ donde B es ortonormal (ahora no podemos coger p conveniente) de forma que:
    $$M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ a_2 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(a_1,a_2)\neq(0,0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

Se trata de la composición de un giro con centro p_0 y ángulo θ (la segunda matriz), seguido de una traslación de vector $v = (a_1, a_2)$. Cuando este giro es la identidad, se tiene sólo una traslación.

- $\vec{\phi} \in O^-(V)$
  - **Simetría Ortogonal Axial**: $\boxed{A_\phi \neq \emptyset}$

    Elegimos $R = \{p_0, B\}$ con $p_0 \in A_\phi$ y B base ortonormal, de forma que:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

    La base de la simetría corresponde a la variedad $p_0 + L(v_1) = A_\phi$ y la dirección $L(v_2) = L(v_1)^\perp$.

  - **Simetría Ortogonal Axial con desplazamiento**: $\boxed{A_\phi = \emptyset}$

    Si esto ocurre dijimos que $1 \in \sigma(\vec{\phi})$ luego se tiene que:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

    Se trata de la composición de una traslación de vector $a_1 v_1$ (la primera matriz) con una simetría ortogonal axial, es decir, se trata de una simetría con desplazamiento.

Sea $\phi : A \to A$ movimiento donde A es un espacio afín de dimensión 3:

- $\vec{\phi} \in O^+(V)$
  - **Rotación**: $\boxed{A_\phi \neq \emptyset}$

    Elegimos un sistema de referencia $R = \{p_0, B\}$ donde $p_0 \in A_\phi$ y B sea una base ortonormal, entonces:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) : 0 \leq \theta \leq \pi$$

    Con lo cual, tal y como lo vimos el eje de rotación es $p_0 + L(v_1)$ y el ángulo θ. Como casos especiales: $\begin{cases} \theta = 0 & \text{Identidad} \\ \theta = \pi & \text{Simetría axial} \end{cases}$

  - **Movimiento Helicoidal**: $\boxed{A_\phi = \emptyset}$

    En este caso solo podemos elegir una base ortonormal para poder obtener un sistema de referencia ortonormal, pero ya el punto no es fijo:

$$M_R(\phi) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ a_3 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)}_{(a_1,a_2,a_3)\neq(0,0,0)} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ 0 & & I_3 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ a_3 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

    Se le llama movimiento helicoidal por ser la composición de una rotación y una traslación de vector $a_1 v_1$ (el movimiento que haría una hélice). Como caso especial, cuando los giros son de ángulo 0, entonces tenemos las traslaciones dentro de este grupo.

- $\vec{\phi} \in O^-(3)$

  - **Rotación con simetría especular**: $\boxed{A_\phi \neq \emptyset}$

    Elegimos un sistema de referencia ortonormal $R = \{p_0, B\}$ donde $p_0 \in A_\phi$ y B ortonormal, entonces:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

    Se trata de una rotación seguida de una simetría especular, cuya base es el plano de la rotación.

  - **Simetría especular compuesta con traslación**: $\boxed{A_\phi = \emptyset}$

    De este modo, sabemos que $\sigma(\phi) = \{-1, 1, 1\}$, luego en una referencia ortonormal tenemos:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ a_2 & & I_3 & \\ a_3 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

    Se trata de una simetría especular compuesta con una traslación, cuyo vector de traslación está contenido en la dirección del plano que es base de la simetría.

Cónicas desde el punto de vista afín euclídeo

Sea $\mathbb{R}^2$ espacio afín euclídeo usual y la definición habitual de cónica, decimos que dos cónicas son afín-euclídeamente equivalentes si poseen la misma matriz respecto de sistemas de referencia **ortonormales** distintos:

$$C \equiv C' \Leftrightarrow M_R(C) = M_{R'}(C)$$

Es decir, hemos incluido una condición más fuerte porque exigimos que estos sistemas de referencia sean ortonormales.

Teorema

Toda cónica de $\mathbb{R}^2$ es afín-euclídeamente equivalente a una y sólo una de las siguientes:

Sean $a, b \in \mathbb{R} : 0 < a \leq b$

Elipse no degenerada:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
Hipérbola no degenerada:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
Parábola no degenerada	$x^2 - ay = 0$
Elipse degenerada:	$x^2 + y^2 = 0$
Hipérbola degenerada:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
Parábola simplemente degenerada:	$x^2 - a^2 = 0$
Parábola doblemente degenerada:	$x^2 = 0$

Los casos en los que hay un a y un b denotan que todas las cónicas que son afin-euclídeamente equivalentes a esas cónicas lo son **para unos valores concretos de a y b, pero no para todos** porque estos valores son los que determinan el radio (en elipses) o el ángulo (en hipérbolas degeneradas) y esto se debe conservar por la definición que hemos dado de espacio afín euclídeo.

Demostración:

Sea $R = \{p_0, B\}$ donde B es una base ortonormal, entonces consideramos:

$$0 = a_{11}x^2 + \ldots + a_{00} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00}$$

Ya dijimos en su momento que:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}) \text{ simétrica}$$

Luego puede considerarse como la matriz de un endomorfismo autoadjunto de forma que:

$$A_0 = M_B(\vec{\psi}), \ \vec{\psi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Por las características que acabamos de dar $\vec{\psi}$ es autoadjunto, luego por el Teorema Espectral:

$$\exists B' \text{ ortonormal } : A_0' = M_{B'}(\vec{\psi}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} : \sigma(A_0) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

Podemos convertir entonces esta matriz A_0 a la A_0' que hemos denotado a través del siguiente cambio de base:

$$A_0 = P^{-1}A_0'P = P^t A_0' P : P = M(B, B') \text{ ortogonal}$$

Luego retomando la ecuación inicial, tenemos que:

$$0 = a_{11}x^2 + \ldots + a_{00} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} =$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P^t A_0' P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{00}' = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} A_0' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{00}' =$$

$$= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_{01}'x' + 2a_{02}'y' + a_{00}'$$

Y ahora vamos a ver quienes son estos autovalores que hemos hallado. Desde luego debe ocurrir que $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ puesto que si no no estaríamos hablando de una cónica y, como en la demostración anterior de cónicas, podemos suponer que uno de los dos será positivo y asumir que este será λ_1 (multiplicando por -1 toda la ecuación en caso de que no se verifique).

- $\lambda_2 > 0$

  Completamos cuadrados y queda lo siguiente:

  $$\lambda_1(x' + \lambda_1^{-1}a_{01}')^2 + \lambda_2(y' + \lambda_2^{-1}a_{02}')^2 + a_{00}'' = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_{00}''$$

  Luego tenemos la siguiente distinción de casos:

  $$\begin{cases} a_{00}'' > 0 \Rightarrow C = \emptyset \\ a_{00}'' = 0 \Rightarrow C \text{ es elipse degenerada} \\ a_{00}'' < 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{\frac{-a_{00}''}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{-a_{00}''}{\lambda_2}} - 1 = 0 \Rightarrow C \text{ es elipse no degenerada} \end{cases}$$

- Para el resto de posibles valores de λ_2 se hace completamente análogo.