Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2020-21

Estudio y representación de funciones. Máximos, mínimos, optimización. Hoja 8.

165 Resuelve los siguientes problemas de optimización:

(a) Divide un número positivo en dos sumandos de forma que su producto sea el mayor posible

(b) Con L metros de malla metálica hay que hacer un vallado rectangular usando como cuarta lado una pared. ¿Qué dimensiones tienen que tener los lados para que el area del terreno vallado sea máximo?

(c) Inscribir en una esfera de radio R

(c.1) un cilindro de volumen máximo.

(c.2) un cilindro que tenga la mayor superficie lateral posible.

(c.3) un cono de volumen máximo.

(d) De una hoja circular hay que cortar un sector tal que enrollado nos de un embudo con la mayor capacidad posible.

(e) Por un punto en $\mathbb{R}^2$ de coordenadas positivas pasa una recta que corta a los dos semiejes positivos. Encontar la recta para que el área sea mínima y determinar dicha área.

(f) Una persona tiene que ir de un punto A en la orilla de un río de anchura constante, h, y recto, a un punto B en la otra. Sabiendo que la velocidad con la que se mueve por la orilla es k veces la velocidad con la que nada (en linea recta) determinar el ángulo con el que debe cruzar el río para llegar lo antes posible.

(g) Hallar el punto de la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la recta tangente determina con los ejes coordenados en el primer cuadrante, un triangulo de área mínima.

(h) Calcular las dimensiones de una lata de refresco (cilindro de base circular) de volumen fijo V y que tenga la menor superficie. Hacerlo en los dos caso en el que el recipiente tiene tapa o no.

(i) Encontrar el área mínima de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir en una circunferencia dada. Comprobar que dicho triángulo es equilátero.

166 En el plano se traza una recta desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal y desde ahí otra al punto $(1, b)$, siendo $a, b > 0$. Demostrar que la longitud total es mínima cuando los ángulos de ambas rectas con el eje horizontal son iguales.

167 Una persona está observando desde el suelo, con un telescopio, un avión que se aproxima a una velocidad de 15 km/minuto y a una altura constante de 10 km. ¿A qué ritmo está variando el ángulo del telescopio cuando la distancia horizontal del avión a esa persona es de 36 km? ¿Y cuando el avión pasa por la vertical de esa persona?

168 Un caudal de agua fluye en un tanque cónico al ritmo constante de $3m^3/s$. El cono tiene 5 m de radio, 4 m de altura y está situado con el vértice hacia abajo. Sea $h(t)$ la altura del agua sobre el fondo en el instante t. Hallar $h'(t)$ (velocidad a la que sube el nivel del agua) y $h''(t)$ cuando el tanque está lleno hasta una altura de 2 m.

169 Probar que $f(x) = x^3 + 3x - m$ no tiene dos raices en $[0, 1]$ para ningún valor de m.

170 Representar gráficamente las siguientes funciones. Para ello estudiar: dominio de definición, simetrías (par, impar, periódica), cortes con los ejes, limites en la frontera del dominio, continuidad, derivabilidad, crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, máximos/mínimos/puntos de inflexión, asíntotas (verticales, horizontales, oblícuas).

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, b) $g(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$, c) $h(t) = \dfrac{\ln(|t|)}{t}$ d) $j(x) = e^{-x^2}$

e) $k(t) = e^{-at}\cos(bt)$ con $a > 0$, $b \neq 0$, f) $m(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$