DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 20–21.
Funciones continuas. Hoja 5

103 *Sea* $D = \{\frac{1}{n}\}_n \cup (2,3) \cup (3,4] \cup \{5\} \subset \mathbb{R}$. *Determina todos los puntos de acumulación de* D.

104 *Usar la definición de límite para probar que*

i) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$, *ii)* $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$, *iii)* $\lim_{x\to -1} \frac{x}{1-x} = -\frac{1}{2}$,

105 *Probar que los siguientes límites no existen*

i) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *ii)* $\lim_{x\to 0}(x + sgn(x))$ *iii)* $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x^2})$ *iv)* $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

106 *Probar que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \ell.$$

107 *Calcular los siguientes límites*

i) $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$, *ii)* $\lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^2-t^2}{h}$, *iii)* $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$, *iv)* $\lim_{t\to 1} \frac{t-1}{\sqrt{t^2+3}-2}$, *v)* $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, *vi)* $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

108 *Calcular los siguientes límites*

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$, *ii)* $\lim_{z\to\infty} \frac{2z^3}{z^2+1}$, *iii)* $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$, *iv)* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$, *v)* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$, *vi)* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$, *vii)* $\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}$, *viii)* $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}$, *ix)* $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x(x+a)}-x$, *x)* $\lim_{t\to\infty} t(\sqrt{t^2+1}-t)$, *xi)* $\lim_{t\to\infty} (t+\sqrt[3]{1-t^3})$

109 *Calcular los siguientes límites*

i) $\lim_{x\to 0} (\frac{x+1}{2x+1})^{x^2}$, *ii)* $\lim_{x\to\infty} (\frac{x-1}{x+1})^x$, *iii)* $\lim_{x\to 0} (\frac{2+x}{3-x})^x$, *iv)* $\lim_{t\to\infty} (\frac{t}{t+1})^t$, *v)* $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$, *vi)* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$, *vii)* $\lim_{x\to 0} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$

110 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

i) Probar que cualquiera que sea $c \in \mathbb{R}$, *no existe* $\lim_{x\to c} f(x)$.
ii) Probar que para todo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *no existe* $\lim_{x\to c} xf(x)$ *y que* $\lim_{x\to 0} xf(x) = 0$

111 *Probar que* $\lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$ *no existe pero* $\lim_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x}) = 0$. *Probar de hecho que para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *con* $-1 \le \alpha \le 1$ *podemos construir una sucesión* $x_n \to 0$ *tal que* $\cos(\frac{1}{x_n}) \to \alpha$

112 *Sea* $D \subset \mathbb{R}$ *y* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función y* x_0 *un punto de acumulación de* D. *Supongamos que existe* $\lim_{x\to x_0} f(x) = m$.
i) Si $m > 0$ *probar que existe un* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in D \cap E(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}$ *se tiene* $f(x) > 0$.
ii) Si $m < 0$ *probar que existe un* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in D \cap E(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}$ *se tiene* $f(x) < 0$.
iii) ¿Se puede deducir algo semejante si $m = 0$*?*.

113 (Regla del Sandwich para funciones) *Sea* $D \subset \mathbb{R}$, x_0 *un punto de acumulación de* D *y* $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ *funciones tales que existe* $\delta_0 > 0$ *tal que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in E(x_0, \delta_0) \setminus \{x_0\}$$

y tales que existe $\lim_{x\to x_0} f(x) = m = \lim_{x\to x_0} h(x)$.

Demuestra que $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$.

114 *Siguiendo las notaciones del Problema 62,*
i) Sea $a > 0$. *Usando el Problema 91 probar que* $f(x) = a^x$ *es continua. Concluir que si* $g : D \to \mathbb{R}$ *es continua entonces* $f(x) = a^{g(x)}$ *es continua en* D.
ii) Usando el Problema 95 probar que $f(x) = x^a$ *es continua en* $(0, \infty)$. *Concluir que si* $g : D \to (0, \infty)$ *es continua entonces* $f(x) = g(x)^a$ *es continua en* D.
iii) Concluir que si $f : D \to (0, \infty)$ *y* $g : D \to \mathbb{R}$ *con continuas, entonces* $h : D \to \mathbb{R}$ *definida por* $h(x) = f(x)^{g(x)}$, $x \in D$, *es continua.*

115 *Justificar que* $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \cos(0)$ *y deducir que* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0 = \operatorname{sen}(0)$.

Deducir, usando fórmulas trigonométricas que $\cos(x)$ *y* $\operatorname{sen}(x)$ *son funciones continuas en* $\mathbb{R}$.

116 *Determinar los puntos de continuidad de las siguientes funciones*

i) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$, *ii)* $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$, *iii)* $h(x) = \dfrac{\sqrt{1 + |\sin(x)|}}{x}$ $(x \neq 0)$, *iv)* $f(x) = |x|$.

117 *Se dice que un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *es* **denso** *en* $\mathbb{R}$ *si todo intervalo abierto de* $\mathbb{R}$ *continene un punto de* A. *Demostrar*
i) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua y* $f(t) = 0$ *para todo* $t \in A$ *entonces* $f(t) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
ii) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuas y* $f(t) = g(t)$ *para todo* $t \in A$ *entonces* $f(t) = g(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
iii) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuas y* $f(t) \geq g(t)$ *para todo* $t \in A$ *entonces* $f(t) \geq g(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

118 *Si* $x \in \mathbb{R}$ *denotamos* $E(x)$ *la* **parte entera de** x, *es decir, el mayor entero que no supera a* x *y consideramos la funcion* $f(x) = x - E(x)$.
i) Encontrar los puntos en los que $f(x)$ *es continua y en los que no.*
ii) Encontrar el extremo inferior de los valores de $f(x)$ *sobre cualquier intervalo que tenga en su interior un número entero.*
iii) Encontrar el extremo superior de los valores de $f(x)$ *sobre cualquier intervalo que tenga en su interior un número entero.*
iv) Discutir si el infimo y/o el supremo de los apartados anteriores se alcanza o no.

119 *Estudia la continuidad de la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t^2 & \text{si } t \text{ es racional} \\ t^2 - 2 & \text{si } t \text{ es irracional} \end{cases}$$

120 *Sea la función*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ t & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Probar que f *es biyectiva y estudiar su continuidad.*

121 *Sea* $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $m \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, *un polinomio.*
i) Probar que si $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = 0$ *entonces* $P(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Idem si $\lim_{n\to\infty} P(x_n) = 0$ *donde* x_n *es una sucesion tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.
ii) Probar que si P *es acotado:* $|P(x)| \leq M$ *para cierta constante* $M > 0$ *y para todo* $x \in \mathbb{R}$, *entonces* $P(x)$ *es constante. Idem si la cota es válida sólo para* $x > 0$ *ó* $x < 0$.

122 *Estudia la continuidad de las funciones*

$f(x) = xE(\frac{1}{x}), \quad g(x) = (-1)^{E(\frac{1}{x})}, \quad h(t) = \frac{1}{1-e^{1/t}}, \quad j(t) = t\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{t})$

123 *Estudia la continuidad de las funciones*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}(x) & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}|\,\mathrm{sen}(x)| & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = x^\alpha\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}),\ x > 0,\ \alpha > 0$$

124 *i) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x)$ es racional para todo $x \in [a,b]$. ¿Qué puede decirse de f?.*

ii) Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y f es una función continua en $[a,b]$ tal que $f(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostrar que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

iii) Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y que existen los límites, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Probar que f es acotada: existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in M$.

iv) Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Demostrar que existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (un Máximo Absoluto).

v) Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua, probar que $f(I)$ es un intervalo.

Si ademas I es cerrado y acotado, probar que $f(I)$ también. ¿Cuales son los extremos de $f(I)$?

125 *Probar que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene por lo menos una raiz real.*

126 *i) Probar que la ecuación $x = \cos(x)$ tiene por lo menos una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$.*

ii) Probar que la función $f(x) = 2\ln(x) + \sqrt{x} - 2$ tiene una raiz en el intervalo $[1,2]$.

iii) Probar que el polinomio $P(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ tiene por lo menos dos raices reales.

127 *Demostrar que la ecuación*

$$\mathrm{tg}(x) = x$$

tiene infinitas raices.

128 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo.*

i) Probar si $f : I \to \mathbb{R}$ es monótona y $f(I)$ es un intervalo entonces f es continua.

ii) Si además de continua f es estríctamente monótona, probar que existe f^{-1} y que f^{-1} es continua y estríctamente monótona en su domínio.

iii) Probar que una función continua $f : I \to \mathbb{R}$, es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.

129 Logaritmos

Siguiendo las notaciones del Problema 62, sea $a > 0$ y $a \neq 1$.

i) Probar que $f(x) = a^x$ es continua, estrictamente monótona y que su imagen es $(0, \infty)$.

ii) Deducir que f es biyectiva sobre su imagen y que por tanto existe su inversa $f^{-1}(x) = \log_a(x)$, que se llama **función logaritmo en base** *a y que*

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

es continua, estrictamente monótona y $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

Si $a > 1$ probar que $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$.

Si $a < 1$ probar que $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$.

iii) Probar que $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ y que $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$.

Cuando $a = e$ se escribe $\ln(x) = \log_e(x)$ y se llama **logaritmo Neperiano**.

iv) Deducir que $a = e^{\ln(a)}$ y que por tanto $a^x = e^{\ln(a)x}$ y $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ para $x > 0$.

v) Deducir que si $a \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, $g(x) = x^a = e^{a\ln(x)}$ es continua y monótona en su dominio.

v) Deducir que si $f(x)$ es continua y $a > 0$, entonces $a^{f(x)}$ también lo es. Estudiar la continuidad de $f(x)^{g(x)}$ (supuesto $f(x) > 0$).

vi) Hacer el Problema 95 usando las herramientas de este.

130 *Sea* $D \subset \mathbb{R}$.
i) Una función $f : D \to \mathbb{R}$ *es de clase Lipschitz (o Lipschitziana) si existe una constante* $L > 0$ *tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in D.$$

Probar que si f *es Lipschitiana entonces* f *es uniformemente continua.*
ii) Una función $f : D \to \mathbb{R}$ *es de clase Hölder (o Hölderiana) si existen una constante* $L > 0$ *y* $\alpha \in (0, 1]$ *tales que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^{\alpha}, \quad x, y \in D.$$

Probar que si f *es Holderiana entonces* f *es uniformemente continua.*