Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2020-21

Derivabilidad. Hoja 7.

En esta hoja de ejercicios hay algunos que son de Cálculo. Para tener ejemplos relevantes (yendo más allá de los polinomios y potencias de racionales) vamos a utilizar funciones como e^x, x^α (con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$), $\ln(x)$, funciones trigonométricas, etc.. Utilizaremos las propiedades conocidas de estas funciones (incluyendo sus derivadas) a pesar de que el estudio sistemático de estas funciones se hará más adelante. Los ejercicios en donde se pueden utilizar estas propiedades están marcados con el símbolo (*).

131 Usar la definición de derivada (con la formulación ϵ-δ) para calcular la derivada de las funciones siguientes en un punto arbitrario de su dominio de definición.
a) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, b) $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, c) $h(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$

132 Probar que la función $f(x) = x^{1/3}$ no es diferenciable en $x = 0$.

133 i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet, que está definida por $f(x) = 1$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ¿Es f derivable en algún punto?
ii) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $g(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que g es derivable en $x = 0$ y calcular $g'(0)$. ¿En qué puntos es la función g continua?
iii) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x) = x$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $h(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de h.

134 Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^n$ para $x > 0$ y $f(x) = 0$, para $x \leq 0$. ¿Para qué valores de n la función f es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$? ¿Para qué valores de n la función f' es continua en $x = 0$? ¿Para qué valores de n la función f' es derivable en $x = 0$?

135 Probar que la derivada de una función par es impar y la de una función impar es par. (**Observación:** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice par si verifica $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y se dice impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$)

136 (*) Determina los valores $r \in \mathbb{R}$ para los que la función $f(x) = x^r \sin(\frac{1}{x})$ (con $f(0) = 0$) tiene derivada en $x = 0$.

137 (*) Deriva y simplifica:
a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, b) $g(x) = \sqrt{5 - 2x + x^2}$, c) $h(x) = (\sin(x^k))^m$, con $m, k \in \mathbb{N}$.

138 (*) Sabiendo que la función $\tan(x)$ es una función estrictamente creciente en $(-\pi/2, \pi/2)$, calcula la derivada de la función inversa, que la denotamos por $f(y) = \arctan(y)$.

139 Para cada una de las funciones siguientes calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento/decrecimiento.
a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, b) $g(x) = 3x - 4x^2$, $x \in \mathbb{R}$, c) $h(x) = x^4 + 2x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$
d) $k(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, e) $l(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, f) $m(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$, $x > 0$.

140 Si a_1, a_2, $\ldots a_n$ son números reales, ¿Dónde se alcanza el valor mínimo de la función $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2$? Interpretar el resultado obtenido.

141 (*) Usar el Teorema del Valor Medio para probar:
a) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$,
b) $\dfrac{x-1}{x} < \ln(x) < x - 1$, $x > 1$ (Podeis usar que la derivada del $\ln(x)$ es $1/x$ para $x > 0$)

142 (*) a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^4 + x^4 \sin(1/x)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Probar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. Sin embargo la derivada de f toma valores positivos y negativos en todo entorno de 0.

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 2x^2 \sin(1/x)$ para $x \neq 0$ y $g(0) = 0$. Probar que g es derivable en $\mathbb{R}$, $g'(0) = 1$ y sin embargo la función g' toma valores negativos y positivos en todo entorno de 0.

143 Sea I un intervalo. Probar que si una función $f : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable y existe una contante L tal que $|f'(x)| \leq L$ para todo $x \in I$, entonces f es una función Lipschitz con constante de Lipschitz L.

144 Sea I un intervalo. Probar que si una función $f : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces la función es estrictamente creciente.

145 Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $h(x) = a$, $x < 0$, $h(x) = b$, $x > 0$ y $h(0) = c$, con $a \neq b$. Probar que no puede existir ninguna función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dar dos funciones f_1 y f_2 tales que $f_1'(x) = f_2'(x) = h(x)$ para todo $x \neq 0$ y tal que $f_1 - f_2$ no es una constante.

146 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables con $f(0) \leq g(0)$ y $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x > 0$. Probar que se tiene $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$.

147 (*) Evalúa los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^4}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin(x)}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(\ln(x))^2}$, g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x)$, h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$, con $\alpha > 0$ j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$, k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^x$, l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$, n) $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{x^c - c^x}{x^x - c^c}$, para $c > 0$

148 (*) Para las siguientes funciones, obtener el desarrollo de Taylor de grado n centrado en $x_0 = 0$, y una expresión para el resto:

a) e^x, b) $\sin(x)$, c) $\cos(x)$, d) $\ln(1-x)$, e) $\dfrac{1}{1-x}$,

Para las funciones de a), b) y c) probar que el resto del polinomio de Taylor de orden n converge a 0 cuando $n \to \infty$ para todo x_0 y x.

149 (*) Sea la función $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$ y $h(0) = 0$. Probar que h es continua en $x = 0$. Probar además que $h^{n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que el resto de Taylor centrado en $x_0 = 0$ y $x \neq 0$ no converge a 0 cuando $n \to \infty$.

150 (*) Si $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$ probar que se tiene

$$\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Usar esta desigualdad para aproximar $\ln(1'5)$ con un error menor de 0'01 y 0'001.

Utilizar esta desigualdad para probar que la serie armónica alternada (que sabemos que converge) lo hace a $\ln(2)$, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

151 (*) Calcular el número e con las primeras 7 cifras decimales correctas.

152 Supongamos que I es un intervalo y que la función $f : I \to \mathbb{R}$ satisface que es dos veces diferenciable en todo $x \in I$ y verifica $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Si $c \in I$, probar que la gráfica de f en I no está por debajo de la recta tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c))$.

153 Probar que la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$ tiene una raíz, que llamaremos r, en el intervalo $I = [2, 2'2]$. Si consideramos la sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por el método de Newton empezando con $x_1 = 2$, probar que se tiene $|x_{n+1} - r| \leq 0{,}7|x_n - r|^2$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} x_n = r$. Probar que x_4 coincide con r en las primeras 6 cifras decimales.

154 a) Probar que cualquier polinomio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ verificando $a_0 \cdot a_n < 0$ tiene por lo menos una raíz real. Además, si n es par, entonces tiene por lo menos dos raíces reales.
b) Probar que todo polinomio de grado par y coeficiente de mayor grado positivo alcanza el ínfimo.

Incluimos a continuación unos ejercicios extraídos de problemas de examen de años anteriores.

155 (*) Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Calcúlar $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Es la función derivada f' una función continua?.

156 Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable que verifica $f'(x) = 2xf(x)$ para todo $x \geq 0$ y $f(0) = 1$. Se pide:
i) Probar que se tiene $f(x) > 1$ para todo $x > 0$.
ii) Probar que de hecho también se tiene $f(x) \geq 1 + x^2$ para todo $x > 0$.
iii) Probar que la función f tiene por lo menos tres derivadas continuas y cálcular el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 0$. Calcúlese una expresión del resto de Lagrange.

157 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y con dos derivadas continuas. Supongamos que f tiene un mínimo relativo estricto en 0 y otro mínimo relativo estricto en 1 (**Observación:** no estamos asumiendo $f(0) = f(1)$). Se pide probar lo siguiente:

i) Existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f''(c) = 0$.

ii) Existe un punto $d \in (0, 1)$ tal que $f'(d) = 0$.

158 (1.5 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que tiene 3 derivadas continuas en todo $\mathbb{R}$ y que verifica $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ y $f'''(0) \neq 0$. Probar que f cambia de signo en $x = 0$, es decir existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (-\delta, 0)$, $y \in (0, \delta)$ entonces $f(x)f(y) < 0$.

159 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con dos derivadas continuas y que verifica que

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -2$$

Considera la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $G(x) = f(x^2)$. Se pide
i) Calcular el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ de orden 2 de G. (No es necesario calcular el resto de Lagrange).
ii) Probar que G tiene un extremo relativo en $x = 0$. Clasificar este extremo.
iii) Probar que existe un $\delta > 0$ tal que G es convexa en $(-\delta, \delta)$.

160 Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable. Supongamos que se tiene $f(0) = 1$ y se verifica

$$f'(x) = x f^2(x), \text{ para toda } x \in (-1, 1).$$

Se pide:

i) Probar que la función f es creciente en $[0, 1)$ y decreciente en $(-1, 0]$. Por tanto $f(x) \geq 1$ para todo $x \in (-1, 1)$.

ii) Probar que f tiene por lo menos dos derivadas continuas en $(-1, 1)$ y que f es una función convexa en $(-1, 1)$.

iii) Probar que $f(x) > 1$ para todo $x \in (0, 1)$.

161 i) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva con $f(a) < f(b)$. Probar que f es estrictamente creciente.

ii) Probar que la función $f(x) = x^7 + x - 1$ tiene una y solamente una raiz en $\mathbb{R}$.

162 Consideremos la función $f(x) = 2\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}x^2 - 3$. Se pide

i) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 0$ de la función f, dando también una expresión del resto de Lagrange.

ii) Probar que existe un $\delta > 0$ tal que la función f es convexa en el intervalo $(-\delta, \delta)$

163 Sea $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y con derivada continua. Supongamos además que S es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|S(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2\, S(\dfrac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Se pide:

i) Calcular $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) ¿Es la función derivada f' en general una función continua?. Imponer alguna condición sobre S que garantice que f' es continua.

(**Observación:** La función derivada f' se expresará en función de S y su derivada).

164 Sea $S : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable. Supongmos que existe $M > 1$ tal que $1 \leq S(x) \leq M$ para todo $x \geq 0$. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x) = \begin{cases} xS(\frac{1}{|x|}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Estudiar la derivabilidad de la función h. ¿Es derivable en $x = 0$? ¿Es derivable en $x \neq 0$? ¿Qué hipótesis pedirías a S para garantizar que h es derivable en $x = 0$?