DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 20–21.
Los números reales y la propiedad de supremo. Hoja 3

47 *Probar que si* $A \subset \mathbb{R}$ *es acotado superiormente, entonces* $\alpha = \sup(A)$ *se caracteriza por que*
i) α *es una cota superior de* A
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $x \in A$ *tal que* $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.
Enunciar y demostrar una propiedad análoga para el infimo de un conjunto.

48 *Encuentra, en caso de que existan, el ínfimo y el supremo de los siguientes conjuntos:*
i) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 < 0\}$ *ii)* $B = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \geq x^2\}$ *iii)* $C = \{x \in \mathbb{R} : x < 1/x\}$
iv) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 5 < 0\}$ *v)* $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, *vi)* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$,
vii) $\{x \in \mathbb{R},\ x^2+x+1 \geq 0\}$, *viii)* $\{x \in \mathbb{R},\ x^2+x-1 < 0\}$, *x)* $\{x \in \mathbb{R},\ x < 0,\ x^2+x+1 \geq 0\}$,
xi) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

49 *Supongamos que* $E \subset F \subset \mathbb{R}$ *y* $E \neq \emptyset$.
i) Probar que si F *es acotado superiormente, entonces* E *tambien lo es y que* $\sup(E) \leq \sup(F)$.
ii) Probar que si F *es acotado inferiormente, entonces* E *tambien lo es y que* $\inf(F) \leq \inf(E)$.

50 *i) Usando el Problema 35, probar que todo conjunto finito de* $\mathbb{R}$ *contiene a su supremo y a su ínfimo.*
ii) Probar que si una cota superior pertenece al conjunto entonces esa cota es el supremo. Demostrar algo semejante para el ínfimo.
Notación: *Cuando el supremo (o el ínfimo) de un conjunto, pertenece al conjunto, se llama* **máximo** *del conjunto (respectivamente,* **mínimo***).*

51 *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}$ *y no vacios y acotados superiormente. Probar que*

$$\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$$

$$\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$$

y con un ejemplo muestra que en general no se da "=". Demostrar algo semejante para el ínfimo.

52 *Demostrar que si* $\mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ *entonces el ínfimo de este conjunto es* 0 *y deducir que si* $|a - b| < \varepsilon$ *para todo* $\varepsilon > 0$, *entonces* $a = b$.

53 *i) Probar que* $\inf\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = 0$ *y que por tanto para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon).$$

Indicación: *Usar que* $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
ii) Probar que para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$,

$$\frac{(-1)^n}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

54 *Demostrar que si* $a, x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, *verifican*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $x = a$.

55 *Probar que* $\sup\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$

56 *Si* $S = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$*, calcular* $\inf S$ *y* $\sup S$*.*

57 *Sean x e y números reales tales que $x > 1$, $y > 0$.*
i) Demostrar que existe un numero $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$y < x^n$$

Indicación: *Para $y < 1$ o $y = 1$ es fácil. Si $y > 1$ argumentar por reducción al absurdo. En este caso utiliza que si $0 < \varepsilon < x - 1$ entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $x^m + \varepsilon < x^{m+1}$.*
ii) Concluye la **Propiedad Arquimediana del producto***: existe un único $p \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$x^{p-1} \leq y < x^p \qquad (\text{ó} \quad x^{p-1} < y \leq x^p)$$

Indicación: *Para $y = 1$ es fácil. Para $y > 1$, usando i), considera el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N},\ y < x^n\}$ y usa el Buen Orden de $\mathbb{N}$. Para $0 < y < 1$ reducelo al caso anterior.*
iii) Concluye que

$$\mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [x^{p-1}, x^p)$$

(unión disjunta dos a dos).

Modifica ligeramente los argumentos anteriores para probar que

$$\mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} (x^{p-1}, x^p]$$

(unión disjunta dos a dos).

58 *Probar que si $\varepsilon > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{n_0} < \varepsilon$. Concluye que para todo $n \geq n_0$ tambien se tiene que $0 < 1/2^n < \varepsilon$.*

59 *Si $x \in \mathbb{R}$, probar que para todo $\varepsilon > 0$ existen $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tales que*

$$r_1 \in (x - \varepsilon, x), \quad r_2 \in (x, x + \varepsilon).$$

Concluir que de hecho hay infinitos números como r_1 y r_2. Hacer lo mismo para números irracionales.

60 *Sea $n \in \mathbb{N}$.*
i) Si n es par y $a > 0$ probar que entonces a tiene exactamente dos raices n-ésismas reales, una opuesta de la otra, que representamos por $\pm\sqrt[n]{a}$. Si además $0 \leq a_1 < a_2$ entonces $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$. Si $a < 0$ entonces no tiene raices n-ésismas reales.
ii) Si n es impar y $a \in \mathbb{R}$ probar que a tiene exactamente una raiz n-ésisma real, con el mismo signo que a. Si además $a_1 < a_2$ entonces $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$.
iii) Probar que si $a > 1$ entonces $\inf\{\sqrt[n]{a},\ n \in \mathbb{N}\} = 1$ y si $a < 1$ entonces $\sup\{\sqrt[n]{a},\ n \in \mathbb{N}\} = 1$.
iv) Probar que si $a, b > 0$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.
v) Probar que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

61 Exponentes enteros y racionales
i) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$a^m = \overbrace{a \cdots a}^{m}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = (\frac{1}{a})^m.$$

Probar que $a^n a^m = a^{n+m}$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Probar que $(a^n)^m = a^{nm}$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Probar que $(ab)^m = a^m b^m$ para todos $a, b \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$.

Probar que si $a > 1$ y $n < m$ entonces $a^n < a^m$ mientras que si $0 < a < 1$ y $n < m$ entonces $a^n > a^m$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$.

ii) Si $a>0$ *y* $n\in\mathbb{N}$*, definimos*

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},\quad a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$$

con $m\in\mathbb{Z}$*. Probar que* $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ *y que la definición de* $a^{\frac{m}{n}}$ *es consistente para todas las fracciones que representan al mismo número racional y por tanto* a^r *está bien definido para* $r\in\mathbb{Q}$*.*

Probar que $a^ra^s=a^{r+s}$ *para todos* $r,s\in\mathbb{Q}$ *y* $a^0=1$*. Probar que* $(a^r)^s=a^{rs}$ *para todos* $r,s\in\mathbb{Q}$*.*

Probar que $(ab)^r=a^rb^r$ *para todos* $a,b>0$ *y* $r\in\mathbb{Q}$*.*

iii) Si $a>1$ *y* $r<s$ *entonces* $a^r<a^s$ *mientras que si* $0<a<1$ *y* $r<s$ *entonces* $a^r>a^s$ *para todos* $r,s\in\mathbb{Q}$*.*

iv) Demuestra que si $0<a<b$ *y* $r\in\mathbb{Q}$ *y* $r>0$ *entonces* $a^r<b^r$ *mientras que si* $r<0$ *entonces* $a^r>b^r$*.*

62 La exponencial real

i) Probar que si $x\in\mathbb{R}$ *y llamamos* $I_x=\{r\in\mathbb{Q},\ r<x\}$ *y* $S_x=\{r\in\mathbb{Q},\ r>x\}$ *entonces estos conjuntos son no vacios y*

$$x=\sup I_x=\inf S_x.$$

ii) Concluir que si $a>1$ *y definimos para* $x\in\mathbb{R}$

$$a^x=\sup\{a^r,\ r\in I_x\}$$

entonces $a^x=\inf\{a^r,\ r\in S_x\}$ *y que si* $x\in\mathbb{Q}$ *esta definición coincide con la de la exponencial en el Problema 61.*

Probar que se tiene $a^xa^y=a^{x+y}$ *para todos* $x,y\in\mathbb{R}$*,* $a^0=1$ *y si* $x<y$ *entonces* $a^x<a^y$*.*

iii) Si $0<a<1$ *definimos*

$$a^x=\inf\{a^r,\ r\in I_x\}.$$

Prueba que $a^x=\frac{1}{(a^{-1})^x}$ *y* $a^{-1}>1$*. Obtén con esto que* $a^xa^y=a^{x+y}$ *para todos* $x,y\in\mathbb{R}$*,* $a^0=1$ *y si* $x<y$ *entonces* $a^x>a^y$*.*

Si $a=1$ *definimos* $1^x=1$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$*.*

iv) Probar que si $a>0$ *y* $x\in\mathbb{R}$ *entonces*

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x},\quad a^x=\frac{1}{(a^{-1})^x}.$$

v) Probar que $(a^x)^y=a^{xy}$ *para todos* $x,y\in\mathbb{R}$*.*

Indicación: *Prueba primero el caso* $x,y>0$ *y los demás redúcelos a este. A s vez, distingue los casos* $a>1$ *y* $0<a<1$*.*

vi) Probar que $(ab)^x=a^xb^x$ *para todo* $a,b>0$ *y* $x\in\mathbb{R}$*.*

Indicación: *Prueba primero el caso* $a,b>1$*. Reduce el caso* $0<a,b<1$ *a este. Para el caso* $a>1$ *y* $0<b<1$ *distingue los casos* $ab>1$ *y* $ab<1$*.*

vii) Probar que si $0<a<b$ *y* $x\in\mathbb{R}$*,* $x>0$ *entonces* $a^x<b^x$ *mientras que si* $x<0$ *entonces* $a^x>b^x$*.*

63 *Determinar los conjuntos*

i) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n},2+\frac{1}{n})$*,* *ii)* $\bigcup_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n},2+\frac{1}{n})$ *iii)* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}]$*,* *iv)* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}]$*,*
v) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n})$*,* *vi)* $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-n,n)$

64 *Sea* $\{(a_n,b_n),\ n\in\mathbb{N}\}$ *una familia de intervalos en* $\mathbb{R}$ *y sea* $a=\inf_n a_n$*,* $b=\sup_n b_n$*.*

i) Demostrar que $\bigcup_n(a_n,b_n)\subset(a,b)$

ii) Demostrar que si $(a_{n+1},b_{n+1})\supset(a_n,b_n)$ *entonces* $\bigcup_n(a_n,b_n)=(a,b)$

iii) Probar con un ejemplo que si $\alpha=\sup_n a_n$*,* $\beta=\inf_n b_n$*, en general no es cierto que* $\bigcap_n(a_n,b_n)=(\alpha,\beta)$ *aunque* $(a_{n+1},b_{n+1})\subset(a_n,b_n)$*.*