Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2020-21

Series numéricas. Hoja 11.

203 Utilizando la técnica de descomposición en fracciones simples probar que :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} = \frac{1}{\alpha+1}$, con $\alpha > 0$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

204 Probar que el carácter convergente o divergente de una serie no se ve afectado si cambiamos el valor de una cantidad finita de sus términos (aunque la suma puede variar). Es decir si $\{x_n\}$ y $\{\tilde{x}_n\}$ son dos sucesiones tales que $x_n = \tilde{x}_n$ para todo $n \geq N$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es convergente } \iff \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}_n \text{ es convergente}$$

205 Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$ es divergente pero la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ es convergente.

206 **(Criterio de Leibnitz)** Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente con $x_n > 0$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Probar que la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots$ es convergente.

(**Indicación**: probar que las "sumas parciales pares" s_{2n} forma una sucesión creciente, las "sumas parciales impares" s_{2n+1} forman una sucesión decreciente y ambas tienen el mismo límite).

207 Aplicar el criterio de Leibnitz para decidir la convergencia de las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

208 **(Criterio de condensación de Cauchy)** Sea $\{x_n\}$ una sucesión decreciente de términos estrictamente positivos. Si s_n es la suma parcial de los primeros n términos de la sucesión, probar que se tiene

$$\frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + \ldots 2^n x_{2^n}) \leq s_{2^n} \leq (x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + \ldots 2^{n-1} x_{2^{n-1}}) + x_{2^n}$$

Probar que esto implica que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ converge.

209 Aplicar el criterio de Condensación de Cauchy para decidir la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ para $p > 0$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ para $p > 0$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$.

210 Aplicar los criterios de convergencia de series para determinar la convergencia o no de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(n)}}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(\sqrt{2})^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$, g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

211 Estúdiese la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{\frac{n}{2}} n^2}$ de acuerdo al valor del parámetro $a > 0$.

212 Analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})$.

213 Calcular los valores $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie siguiente es "absolutamente convergente" y/o "condicionalmente convergente"

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\sqrt{n+1}} x^n$

214 Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Se pide,

a) Probar que la serie es convergente.

b) Probar que se tiene

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(**Indicación:** desarrollar la potencia por el binomio de Newton y comparar término a término con la suma).

c) Probar que se verifica: para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

(**Indicación:** desarrollar la potencia por el binomio de Newton, quedándose con los primeros n términos y comparar término a término con la suma).

d) Concluir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$