Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada
Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2020-21
Cálculo de integrales y aplicaciones de la integral. Hoja 10.

193 Calcular las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{\log(t)}{\sqrt{t}}dt$ *c)* $\displaystyle\int \tan(x)\sec^2(x)dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(z)\log(\cos(z))dz$ *e)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}dx$ *f)* $\displaystyle\int \arctan(\sqrt{u})du$

g) $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}dx$ *h)* $\displaystyle\int \frac{e^s-3e^{2s}}{1+e^s}ds$ *i)* $\displaystyle\int \frac{t}{at+b}dt$

j) $\displaystyle\int \sec^6(z)dz$ *k)* $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx$ *l)* $\displaystyle\int (2t+1)^8dt$

m) $\displaystyle\int \frac{a}{x^2+b^2}dx$ *n)* $\displaystyle\int \frac{z+1}{z^2+4z+5}dz$ ñ) $\displaystyle\int \frac{s}{s^4+a^4}ds$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x+1}dx$ *p)* $\displaystyle\int \frac{e^{4z}+e^z+1}{e^z}dz$ *q)* $\displaystyle\int \frac{t}{t^2-4t+1}dt$

r) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x+4}{x^3+9x}dx$ *s)* $\displaystyle\int \frac{4z^2-2}{(z^2+4)(z^2+9)}dz$ *t)* $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x)dx$

u) $\displaystyle\int axe^{bx}dx$ *v)* $\displaystyle\int t(\log(t))^2dt$ *w)* $\displaystyle\int \sqrt{z^2-2}dz$

x) $\displaystyle\int \sqrt{2+s^2}ds$ *y)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$ *z)* $\displaystyle\int z^2\sqrt{1+z^2}dz$

194 Estudiar la convergencia de las integrales impropias siguientes:

a) $\displaystyle\int_a^\infty e^{-x}dx$ *b)* $\displaystyle\int_a^\infty e^{-x^2}dx$ *c)* $\displaystyle\int_a^\infty P(x)e^{-x}dx$ ($P(x)$un polinomio)

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ *e)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$ *f)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^p}dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x)}{x^q}dx$ *h)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^s}dx \quad (s>0)$ *i)* $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{t(\log(t))^p}dt$

j) $\displaystyle\int_0^1 |\log(t)|^\alpha dt \quad (0<\alpha<1)$ *k)* $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$ *l)* $\displaystyle\int_0^1 \big(\ln(x)-\ln(1-x)\big)dx$

195 i) Probar que si $Q(x)$ es un polinomio, existe un $a\in\mathbb{R}$ tal que $Q(x)\neq 0$ para todo $x\geq a$.

ii) Estudiar cómo deben ser los grados de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ para que la integral $\displaystyle\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ sea convergente, con a como el apartado anterior.

196 Dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ se define su **Transformada de Laplace** como la función $F(s)$ donde

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

allí donde esté definida.

i) Calcular la Transformada de Laplace de las siguientes funciones $f(t) = 1$, $f(t) = t$, $f(t) = t^n$, $f(t) = \text{sen}(bt)$, $f(t) = \cos(bt)$ y probar que está definida para $s > 0$.

ii) Probar que si $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es integrable en el sentido de Riemann en $[0, c]$ para todo $c > 0$ y verifica $|f(t)| \leq Me^{at}$ para cierto $a \in \mathbb{R}$ entonces la Transformad de Laplace de f está definida para $s > a$.

197 Para $s > 0$ definimos la **Función Gamma de Euler** como la función

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

i) Demuestra que $\Gamma(s)$ converge para todo $s > 0$.

ii) Demuestra que $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ y que $\Gamma(n + 1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$.

198 El **área de la región** limitada entre las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con $g(x) \leq f(x)$ y $x \in [a, b]$ viene dada por

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

i) Hallar el area encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$

ii) Hallar el area encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

199 La **longitud de un arco** de la gráfica $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Si el arco viene dado parametricamente como la curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $t \in [\alpha, \beta]$ entonces

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

i) Hallar la longitud de arco de la curva $y = x^{3/2}$ entre dos puntos de abscisas $0 < a < b$.

ii) Hallar la longitud de un arco de la cicloide $x(t) = a(t - \text{sen}(t))$, $y(t) = a(1 - \cos(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$

200 El volumen de un cuerpo obtenido por revolución de la curva $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, alrededor del eje x es

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Si para cierto eje, as secciones del cuerpo transversales al eje tienen area $A(z)$ para $z \in [a, b]$ entonces el area del volumen es:

$$V = \int_a^b A(z)dz, \qquad \textbf{Principio de Cavallieri}$$

i) Hallar el volumen de la esfera obtenida al girar el circulo $x^2 + y^2 \leq R^2$ alrededor del eje x.

ii) Hallar el volumen del elipsoide obtenido al girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje x.

iii) Hallar el volumen de un cono de base circular de radio R y altura h. Probar que cualquier cono cuya base tenga area A (independientemente de la forma geométrica de la base) y de altura h tiene el mismo volumen. Calcular este volumen.

201 El area lateral de una superfice que resulta por revolucion de la curva $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, alrededor del eje x es

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

i) Hallar el área lateral de la esfera obtenida al girar el circulo $x^2 + y^2 \leq R^2$ alrededor del eje x.

ii) Se construye un espejo parabólico girando $y = A\sqrt{x}$, con $A > 0$ y $0 \leq x \leq a$, alrededor del eje x. Calcular la superficie del espejo.

202 Masa de una varilla. Una barra que ocupa el intervalo $[a, b]$ tiene densidad variable, $\rho(x)$ (gramos/cm) en el punto x. Sea $x_0, x_1, ..., x_N$ una partición de $[a, b]$ y sean $t_1, t_2, \ldots, t_N$ marcas de cada uno de los intervalos de la partición (es decir $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$). Comprueba que $\sum_{i=1}^N \rho(t_i)(x_i - x_{i-1})$ es una aproximación de la masa total de la barra y que la masa exacta debe venir dada por $\int_a^b \rho(x)dx$.

Centro de gravedad de una varilla. Supongamos que tenemos N partículas en el eje X situadas en los puntos $x_1, x_2, \ldots x_N \in [a, b]$. Si la masa de cada partícula es $m_1, m_2, \ldots, m_N$, entonces el centro de masas (centro de gravedad) del conjunto de las N partículas viene dado por la fórmula

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N x_i m_i$$

donde $M = \sum_{=1}^N m_i$ es la masa total.

Supongamos ahora que tenemos una varilla con densidad variable $\rho(x)$ que ocupa el intervalo $[a, b]$. Si hacemos una particion del intervalo [a, b] con los puntos$x_0, x_1, ..., x_N$ y tomamos $t_1, t_2, \ldots, t_N$ marcas de cada uno de los intervalos de la partición, una aproximación del centro de masas viene dado por

$$\bar{x} \sim \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N t_i\rho(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

de forma que en el límite podemos escribir

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)dx$$

i) Calcular la masa y centro de gravedad de una varilla que ocupa el intervalo [0, 2] y tiene por densidad $\rho(x) = 1 + x$.

ii) ¿Cuál es el centro de masas de una varilla que ocupa el intervalo $[-1, 1]$ y tiene una densidad $\rho(x) = 3 + cos(x)$?.