Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2020-21

Sucesiones y series de funciones II. Hoja 13.

229 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua que verifica $f(x)=0$ para todo $x\notin(0,1)$ y $\displaystyle\int_0^1 f=1$. Definimos la sucesión de funciones:

$$f_n(x)=nf(nx),\qquad x\in\mathbb{R},\quad n=1,2,\ldots$$

Se pide probar lo siguiente:

i) Para todo $n\in\mathbb{N}$, la función f_n es nula fuera del intervalo $(0,\frac{1}{n})$.

ii) La función $f_n\in\mathcal{R}[0,1]$ y $\displaystyle\int_0^1 f_n=1$

iii) Identifica claramente la función $f_\infty(x)$ que es el límite puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$.

iv) ¿Converge la sucesión f_n uniformemente a la función f_∞ en $[0,1]$? ¿Lo hace en $(0,1]$? ¿Y en $[\varepsilon,1]$ para algún $0<\varepsilon<1$?

230 Sea la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\operatorname{sen}(\sqrt{n}x)$. Probar que la serie converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$. Si denotamos por $S(x)$ a la función dada por la serie, probar que S es derivable y dar una expresión de la derivada.

231 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales que verifican $a_n\to 0$ y $|\lambda_n|\to+\infty$. Consideremos la serie de funciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\operatorname{sen}(\lambda_n x)$$

Se pide probar lo siguiente:

i) Si la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge, entonces la serie de funciones converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$. En este caso, denotamos por $S(x)$ a la función dada por la serie.

ii) Si la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n$ converge absolutamente, entonces la función S es diferenciable en todo x. Dar una expresión para $S'(x)$.

iii) Probar que si $a_n=e^{-n}$ y $|\lambda_n|\le n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ entonces la función $S(x)$ es derivable de todos los órdenes.

232 Para las siguientes series de potencias, calcular el intervalo de convergencia y decidir si la serie converge o no (y qué tipo de convergencia presenta) en los extremos.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+1}}x^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^{2n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\quad (a,b>0)$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n$$

233 Analizar la convergencia de las siguientes series de funciones (estudiar el conjunto de números reales donde la serie es convergente y analizar si la convergencia es uniforme o no, etc):

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n, \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n(x)}{n^2}, \qquad f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

234 Calculad el límite puntual y estudiad la convergencia uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los intervalos que se mencionan:

a) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad x \in [0,1]$

c) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad x \in [0,1]$

d) $f_n(x) = e^{n(x-1)}, \quad x \in [0,1)$

e) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), \quad x \in (0,\infty)$

235 Calculad la serie en senos y cosenos del Ejercicio 225 (Series de Fourier) de las siguientes funciones periódicas, de periodo 2π e investigar si la serie de Fourier converge uniformemente:

a) $f(x) = x, \quad x \in [-\pi,\pi]$.

b) $f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi,\pi]$.

236 Calcular el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$, de grado n de las siguientes funciones. Estimar el resto de Lagrange y probar que la "Serie de Taylor" converge a la función en un intervalo de la forma $(-a,a)$. Estimar este valor a.

a) $f(x) = \sqrt{1-x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$