DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 19–20.
Conjuntos y funciones. Principio de Inducción. Hoja 1

1 *Sea* $A = \{n : n \in I\!N, n \le 20\}$, $B = \{3n-1 : n \in I\!N\}$ *and* $C = \{2n+1 : n \in I\!N\}$. *Describir los conjuntos:*

i) $A \cap B \cap C$, *ii)* $(A \cap B) \setminus C$ *iii)* $(A \cap C) \setminus B$

2 *Mediante diagramas, identifica los siguientes conjuntos:*

i) $A \setminus (B \setminus A)$, *ii)* $A \setminus (A \setminus B)$, *iii)* $A \cap (B \setminus A)$
iv) Prueba que $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ *y que son conjuntos disjuntos 2 a 2.*

3 *Sea* I *un conjunto de índices y para cada* $i \in I$ *sea* A_i *un conjunto. Si* B *es otro conjunto demuestra que*

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

4 *Si* X *es un conjunto y* $A \subset X$, *el complementario de* A *en* X *se define como* $A^c = \{x \in X,\ x \notin A\}$.
Sea I *un conjunto de índices y para cada* $i \in I$ *sea* A_i *un conjunto tal que* $A_i \subset X$. *Demuestra las Leyes de De Morgan:*
i) $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$
ii) $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

5 *Sea* $f : A \to B$ *una función.*

i) Probar que si $E, F \subset A$ *entonces se tiene* $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ *y* $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$.

ii) Comprobar que si tenemos la función $f(x) = x^2$ *y definimos los conjuntos* $E = [-1, 0]$, $F = [0, 1]$ *se tiene* $f(E \cap F) \subsetneq f(E) \cap f(F)$.

iii) Probar que si además f *es inyectiva entonces se tiene* $f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$.
iv) Generaliza lo anterior para una familia arbitraria de conjuntos $E_i \subset A$, $i \in I$ *(conjunto de indices), probando que*

$$f(\cup_{i \in I} E_i) = \cup_{i \in I} f(E_i), \qquad f(\cap_{i \in I} E_i) \subset \cap_{i \in I} f(E_i)$$

y que si f *es inyectiva se da la igualdad en la última expresión.*

6 *Sean* A *e* B *son dos conjuntos y* $f : A \to B$ *una aplicación (o función). Si* $G \subset B$ *definimos la preimagen de* G *por* f *como*

$$f^{-1}(G) = \{x \in A,\ f(x) \in G\} \subset A.$$

Si $G, H \subset B$ *probar que entonces se tiene*

$$f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H), \qquad f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$$

Probar que para una familia arbitraria de conjuntos $C_i \subset B$, $i \in I$ *(conjunto de indices), se tiene*

$$f^{-1}(\cup_{i \in I} C_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(C_i), \qquad f^{-1}(\cap_{i \in I} C_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(C_i)$$

7 *Consideremos la función* $f(x) = 1/x^2$ *definida para* $x \neq 0$, $x \in I\!R$.
i) Si $E = \{x \in I\!R : 1 \le x \le 2\}$, *calcular la imagen de* E *mediante* f, *es decir* $f(E)$.
ii) Si $G = \{x \in I\!R : 1 \le x \le 4\}$, *calcular la imagen inversa de* G, *es decir* $f^{-1}(G)$.
Interpretar ambos resultados utilizando la gráfica aproximada de la función f.

8 *Con* $\mathbb{R}^+ = \{x \in I\!R,\ x > 0\}$, *¿es la aplicación* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *definida por* $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ *inyectiva? ¿Es suprayectiva?*

9 *Estudiar si las siguientes funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son inyectivas, suprayectivas, biyectivas. Calcular en cada caso el rango de la función:*

i) e^x *ii)* e^{-x} *iii)* $\operatorname{sen}(x)$ *iv)* $\cos(x)$ *v)* e^{-x^2} *vi)* $\frac{1}{1+x^2}$

10 *Encontrar una aplicación biyectiva entre* $A = \{x \in \mathbb{R},\ 2 < x < 3\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{R},\ 5 < x < 10\}$

11 *Comprueba que* $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ *es una biyección de* $\mathbb{R}$ *en* $I = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$.

A partir de este ejemplo construye una biyección entre $\mathbb{R}$ *e* $I = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

12 *Si dados dos conjuntos* A, B *existe una aplicación* $f\colon A \to B$ *sobreyectiva, probar que existe entonces una aplicación* $g\colon B \to A$ *inyectiva*

13 *Construye una biyección entre el conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$ *y*
i) El conjunto de los números naturales pares.
ii) El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$
iii) El conjunto de los cuadrados: $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$.
iv) El conjunto de los números naturales impares mayores que 10
v) El conjunto $A = \{n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$, *donde* $n_0 \in \mathbb{N}$ *es un número prefijado.*

14 *Probar que todo conjunto infinito de* $\mathbb{N}$ *es numerable.*

15 *Dar un ejemplo de una colección numerable de conjuntos finitos cuya unión no es finita.*

16 *Supongamos que* S *y* T *son conjuntos disjuntos.*
i) Demostrar que si S *es finito y* T *es numerable, entonces* $S \cup T$ *es un conjunto numerable.*
ii) Demostrar que si S *y* T *son numerables, entonces* $S \cup T$ *es un conjunto numerable.*
iii) Prueba el mismo resultado sin suponer que los conjuntos son disjuntos. Para ello, demuestra primero que si $A \subset B$, A *es un conjunto infinito y* B *es un conjunto numerable entonces* A *es numerable.*
Indicación: *Reducir al caso de que* $B = \mathbb{N}$ *y usar la Propiedad de Buen Orden de* $\mathbb{N}$.

17 *Un polinomio con coeficientes enteros de grado* $n \in \mathbb{N}$ *es una función* $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forma:*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_j \in \mathbb{Z}$ *para todo* $j = 0, 1, \ldots, n$ *y* $a_n \neq 0$. *Un número algebraico es un número real que es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros. Un número transcendente es un número real que no es algebraico.*

Se pide:
i) Probar que para n *fijo el conjunto* $\mathbb{P}_n = \{P_n$, *polinomio de grado* n *con coeficientes enteros*$\}$ *es un conjunto numerable.*
ii) Utilizando que un polinomio de grado n *tiene como máximo* n *raices reales, probar que el conjunto de números algebraicos es numerable y por tanto el conjunto de los números transcendentes es no numerable.*

18 *Probar que todo conjunto infinito de* $\mathbb{N}$ *es numerable.*

19 *Dado el conjunto* S *siguiente, escribir en detalle el conjunto* $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ *(el conjunto de las partes de* S*) y calcular el número de elementos que tiene:*

i) $S := \{1, 2\}$ *ii)* $S := \{1, 2, 3\}$ *iii)* $S := \{1, 2, 3, 4\}$

20 *Probar por inducción que si un conjunto* S *tiene* n *elementos entonces* $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ *tiene* 2^n *elementos. Concluir del Ejercicio 22 que para todo conjunto finito* $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ *tiene más elementos que* S.

21 *Demostrar que*
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$
Usando esto, deducir y demostrar una fórmula para la suma de los N primeros numeros pares y otra para la de los N primeros numeros impares.

22 *Probar por inducción lo siguiente:*
i) n^3+5n *es divisible por 6 para todo* $n \in I\!N$.
ii) $5^{2n}-1$ *es divisible por 8 para todo* $n \in I\!N$.
iii) $n < 2^n$ *para todo* $n \in I\!N$. *Halla todos los numeros naturales* n *que verifican* $n^2 < 2^n$.
iv) $2^n < n!$ *para todo* $n \in I\!N$, $n \geq 4$.

23 *Probar por inducción lo siguiente:*
i) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, *para todo* $n \in I\!N$.
ii) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *para todo* $n \in I\!N$.
iii) $1^3+2^3+\ldots n^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$ *para todo* $n \in I\!N$. *Relaciona este resultado con el del Ejercicio 21.*
iv) $2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n=\prod_{j=1}^{n} 2j=2^n n!$
v) $3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)=\prod_{j=1}^{n}(2j+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$
vi) $\sum_{i=0}^{n} z^i=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $z\neq 1$ *para todo* $n \in I\!N$.
vii) $\sum_{n=N}^{M} z^n=\frac{z^N-z^{M+1}}{1-z}$, $z\neq 1$ *para todo* $N,M \in I\!N$, *con* $M>N$.

24 *Los números combinatorios se definen como* $\binom{n}{j}=\frac{n!}{(n-j)!\,j!}$ *para* $j,n=0,1,\ldots$ *y con* $j\leq n$, *siendo* $k!=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\ldots 2\cdot 1$ *y con el convenio de que* $0!=1$. *Se pide,*
i) Calcular los números combinatorios para $0\leq j\leq n\leq 5$.
ii) Probar que para $0\leq j\leq n$, *se tiene* $\binom{n}{j}=\binom{n}{n-j}$.
iii) Probar que para $1\leq j\leq n-1$, *se tiene* $\binom{n}{j}=\binom{n-1}{j}+\binom{n-1}{j-1}$.
iv) Probar por inducción la fórmula conocida como el Binomio de Newton:
$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}\,y^j, \qquad \text{para todo } n \in I\!N.$$