Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2020-21

Integración. Hoja 9.

171 Sea $I = [0, 2]$ y consideremos la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Consideremos la particiones $\mathcal{P}_1 = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{P}_2 = \{0, 0'5, 1, 1'5, 2\}$. Calcular la norma de cada partición y la suma de Riemann de la función f de acuerdo a las siguientes particiones marcadas:

i) $\dot{\mathcal{P}}_1$ con marcas los puntos centrales de cada intervalo.

ii) $\dot{\mathcal{P}}_1$ con marcas los puntos izquierda de cada intervalo, es decir $t_i = x_{i-1}$

iii) $\dot{\mathcal{P}}_2$ con marcas los puntos centrales de cada intervalo.

iii) $\dot{\mathcal{P}}_2$ con marcas los puntos derecha de cada intervalo, es decir $t_i = x_i$

172 Sea $I = [0, 1]$ y consideremos la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Consideremos la partición uniforme $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, es decir $x_k = \frac{k}{n}$ para $k = 0, 1, \dots n$. Calcular la norma de la partición y la suma de Riemann de la función f de acuerdo a las siguientes particiones marcadas:

i) $\dot{\mathcal{P}}$ con marcas los puntos centrales de cada intervalo.

ii) $\dot{\mathcal{P}}$ con marcas los puntos izquierda de cada intervalo.

iii) $\dot{\mathcal{P}}$ con marcas los puntos derecha de cada intervalo.

173 a) Sea la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1]$ y $f(x) = 1$ si $x \in (1, 2]$. Probar que $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ y calcular su integral.

b) Sea la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, \dots$ y $f(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$ con $x \neq \frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Probar que $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ y calcular su integral.

174 Probar que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b - a)$$

175 Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y existen dos sucesiones de particiones (marcadas) $\dot{\mathcal{P}}_n$ y $\dot{\mathcal{Q}}_n$ con $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| \to 0$ y $\|\dot{\mathcal{Q}}_n\| \to 0$, con $\lim_{n\to\infty} S(f, \dot{\mathcal{P}}_n) \neq \lim_{n\to\infty} S(f, \dot{\mathcal{Q}}_n)$, entonces $f \notin \mathcal{R}[a, b]$.

Aplicar esta caracterización para probar que la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

no es integrable Riemann.

176 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \frac{1}{x} & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \end{cases}$$

a) Si consideramos la partición uniforme $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y tomamos la partición marcada $\dot{\mathcal{P}}$ con las marcas t_i el punto central del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ probar que se tiene $S(f, \dot{\mathcal{P}}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Implica esto que $f \in \mathcal{R}[0, 1]$?

b) Probar que, a pesar de lo probado en el punto anteriro, $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$.

177 a) Supongamos $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos la función "trasladada"$f_\alpha : [a + \alpha, b + \alpha] \to \mathbb{R}$ definida por $f_\alpha(x) = f(x - \alpha)$. Usando particiones y la definición de integral, probar que $\int_a^b f = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f_\alpha$.

b) Supongamos $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Definimos la función $f^\alpha : [\alpha a, \alpha b] \to \mathbb{R}$ definida por $f^\alpha(x) = f(x/\alpha)$. Usando particiones y la definición de integral, probar que $\int_{a\alpha}^{b\alpha} f_\alpha = \alpha \int_a^b f$.

178 Probar que si una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ verifica que para todo $\varepsilon>0$ existe una cantidad finita de puntos $E_\varepsilon\subset[a,b]$ tal que $|f(x)|\le\varepsilon$ para todo $x\in[a,b]\setminus E_\varepsilon$, entonces $f\in\mathcal{R}[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b f=0$. Aplicar esta caracterización al primer ejercicio de esta hoja.

179 Aplicar la caracterización del ejercicio anterior para probar que $f\in\mathcal{R}[0,1]$ donde f es la función:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{I}\cap[0,1]\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\end{cases}$$

donde estamos asumiendo que la fracción $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible.

180 Supongamos que $f\in C^0[a,b]$ y que $f(x)\ge 0$ para todo $x\in[a,b]$. Probar que si $\int_a^b f=0$ (¿por qué existe la integral?) entonces $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$. Probar que la hipótesis de continuidad de f no se puede sustituir por $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

181 Probar que la función $g(x)=\sin(\frac{1}{x})$ para $x\in(0,1]$ y $g(0)=\alpha$ verifica $g\in\mathcal{R}[0,1]$ independientemente del valor de α.

182 Construir una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de forma que $f\in\mathcal{R}[c,b]$ para todo $c\in(a,b)$ y sin embargo $f\notin\mathcal{R}[a,b]$.

183 Si $f\in C^0[a,b]$, probar que existe $c\in[a,b]$ de forma que se tiene $\int_a^b f=f(c)(b-a)$ (Teorema del Valor Medio para Integrales).

184 Sea $f\in C^0[a,b]$ con $f(x)\ge 0$ para todo $x\in[a,b]$. Sea $M_n=\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$. Probar que $\lim_{n\to\infty}M_n=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$.

185 Sea $a>0$ y supongamos $f\in\mathcal{R}[-a,a]$. Probar:
a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^a f=2\int_0^a f$
b) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f=0$

186 Sea $f\in\mathcal{R}[a,b]$ y definamos $F(x)=\int_a^x f$ para $x\in[a,b]$. Sea $c\in(a,b)$. Evalúa las funciones

$$a)\ G(x)=\int_c^x f,\qquad b)\ H(x)=\int_x^b f,\qquad c)\ S(x)=\int_x^{\sin(x)} f$$

en términos de la función F. Asumiendo que $f\in C^0[a,b]$ calcular las derivadas de las tres funciones.

187 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y sea $c\in\mathbb{R}$. Definimos $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $g(x)=\displaystyle\int_{x-c}^{x+c} f$. Probar que g es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular la derivada.

188 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y L-periódica con $L>0$ (es decir, $f(x+L)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$). Probar que $\displaystyle\int_a^{a+L} f=\int_0^L f$ para todo $a\in\mathbb{R}$.

189 Probar que si $f\in\mathcal{R}[a,b]$ entonces $|f|\in\mathcal{R}[a,b]$ y se tiene

$$\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b |f|\le M(b-a)$$

donde $M=\sup\{|f(x)|;x\in[a,b]\}$

190 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Probar que si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ entonces $fg, |fg| \in \mathcal{R}[a,b]$. (**Indicación:** $fg = \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$).

Probar lo siguiente:

a) Si $t \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\int_a^b (tf \pm g)^2 \geq 0$.

b) Deducir de a) que se tiene $\displaystyle 2\left|\int_a^b fg\right| \leq t\int_a^b f^2 + \frac{1}{t}\int_a^b g^2$, para todo $t > 0$.

c) Minimizando en t el lado derecho de la desigualdad de b) probar que se obtiene

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$$

191 Probar que si A_n es un conjunto de medida cero para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto de medida nula. En particular $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es de medida cero.

192 (*) Construir una función $f \in \mathcal{R}[0,1]$ que sea discontinua en todos los puntos $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.