ANÁLISIS DE VARIABLE REAL

Juan Diego Barrado Daganzo e Iker Muñoz Martínez
1º de Carrera

9 de octubre de 2024[1]

[1]Este documento se actualiza, para consultar las últimas versiones entrar en el enlace https://github.com/JuanDiegoBarrado/AnalisisDeVariableReal

QUIÉNES SOMOS

Somos un grupo de estudiantes de la Universidad Complutense de Madrid, concretamente del Doble Grado de Informática y Matemáticas que queremos compartir unos apuntes de calidad y, como mínimo, ordenados para que os sea más fácil llevar la asignatura al día (sobre todo a estudiantes de Doble Grado).

Estos apuntes son posibles gracias a la colaboración de más alumnos como tú que deciden aportar un granito de arena al proyecto. Puedes contribuir de la siguiente manera:

- Notificando erratas
- Modificando erratas
- Proponiendo mejoras
- Aportando ejemplos nuevos
- Aportando nuevas versiones

Para contribuir no tienes más que ponerte en contacto con juandbar@ucm.es o dejarnos un *Pull Request* en `https://github.com/JuanDiegoBarrado/AnalisisDeVariableReal`. Los detalles para que la contribución de todos sea lo más homogénea posible estarán en el fichero *Contribute.md* de dicho repositorio o, en caso de no aparecer correctamente, podéis poneros en contacto con el correo anteriormente mencionado.

Muchas gracias, esperamos que este documento te sea útil.

AGRADECIMIENTOS

Queremos dar las gracias a los profesores Aníbal Rodríguez y Jose María Arrieta, por ser los que impartieron la asignatura de *Análisis de Variable Real* durante la elaboración de estos apuntes y por los manuales de dichos profesores y del profesor Víctor Manuel Sánchez que nos han permitido contrastar adecuadamente los nuestros y entender adecuadamente los contenidos aquí expuestos.

Índice general

INTRODUCCIÓN A CONJUNTOS Y FUNCIONES

Este curso de análisis de variable real gira en torno a dos conceptos fundamentales: conjunto y funciones. Estos dos conceptos básicos de las matemáticas tienen que ser conocidos en profundidad y manejados con soltura, pues componen las piezas más pequeñas sobre las que se va a trabajar a lo largo del documento. Por ello, se ha generado este capítulo auxiliar al principio para poner en antecedentes a todos los lectores que no estén familiarizados con dichos elementos.

Definición 1.1 (Conjunto)
*Un **conjunto** es una colección o familia de objetos al que puede pertenecer o no un elemento cualquiera, pero no ambas simultáneamente. Las operaciones que podemos realizar con ellos son las siguientes:*

- *Inclusión:* $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
- *Equivalencia:* $A \equiv B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
- *Pertenencia:* $x \in A \Leftrightarrow A = \{..., x, ...\}$
- *Conjunto vacío:* $\emptyset = \{\} : \forall x \in \emptyset$
- *Intersección:* $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- *Unión:* $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- *Complemento:* $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- *Intersecciones múltiples: Sea I un conjunto de de índices y $\forall i \in I$*

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I : x \in A_i\}$$

- *Uniones múltiples: Sea I un conjunto de de índices y $\forall i \in I$*

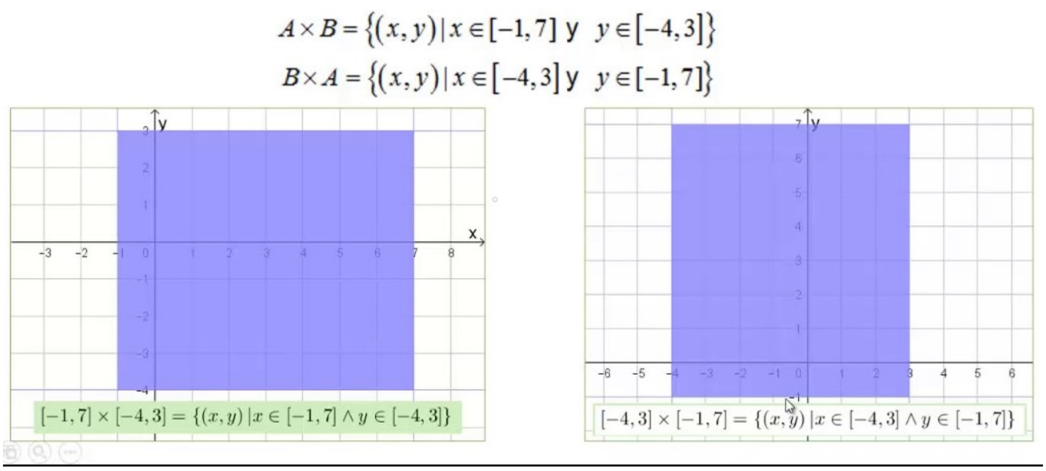
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I : x \in A_i\}$$

Definición 1.2 (Producto Cartesiano)
Sean A y B conjuntos no vacíos, llamamos par ordenado a una pareja donde $a \in A$ y $b \in B$:

$$(a, b) \neq (b, a) : a \in A \wedge b \in B$$

Por tanto, definimos el producto cartesiano como:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$



Definición 1.3 (Correspondencia)
Sean A y B conjuntos, definimos ***una correspondencia entre ambos*** *como un $C \subset A \times B$ tal que $\forall a \in A : \exists! b \in B : (a,b) \in C$, es decir, un conjunto formado por pares ordenados en los que cada elemento de A tiene un único elemento de B asociado.*

Observación 1.1:
La definición no obliga a que todo elemento tenga un correspondiente.

Definición 1.4 (Dominio y Rango)
Sea C una correspondencia entre A y B, definimos el ***dominio de C*** *como los elementos que poseen un correspondiente en B, es decir:*

$$dom(C) = \{a \in A : \exists b \in B : (a,b) \in C\}$$

Del mismo modo, definimos el ***rango o imagen de C*** *como los elementos de B que están emparejados con algún elemento de A, es decir:*

$$ran(C) = im(C) = \{b \in B : \exists a \in A : (a,b) \in C\}$$

Observación 1.2:
Si C es una correspondencia entre A y B y $(x,y) \in C$, es habitual referirse a $y \in B$ como la imagen de $x \in A$.

Definición 1.5 (Función)
Sea C una correspondencia entre A y B, la llamamos ***función o aplicación*** *si y sólo si $dom(f) = A$, es decir, si todo elemento de A tiene un correspondiente en B.*

$$f : A \to B$$

Observación 1.3:
A los conjuntos A y B se los suele llamar dominio y codominio respectivamente, además las definiciones de elementos de las correspondencias se pueden reducir a:

$$dom(f) = \{x \in A : \exists f(x) \in B\}$$

$$ran(f) = im(f) = \{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

Además, si observamos como la función trata a conjuntos completos, vemos que:

$$E \subset A \Rightarrow f(E) = \{\forall b \in B : \exists a \in E : b = f(a)\}$$

$$F \subset B \Rightarrow f^{-1}(F) = \{a \in A : f(a) \in F\}$$

es decir, la condición de función al aplicarse a elementos también afecta a conjuntos.

Definición 1.6 (Inyectividad)
Sean A y B conjuntos y $f : A \to B$ una función entre ambos, decimos que f es ***inyectiva*** *cuando no hay elementos de A con la misma imagen en B:*

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Para ello, es necesario que $card(A) \leq card(B)$

Observación 1.4:
En la práctica, para calcular si una función es inyectiva o no, tomaremos $f(x_1) = f(x_2)$ y si eso resulta en $x_1 = x_2$ entonces es inyectiva, si no, no.

También se puede coger un elemento y que pertenezca a la imagen, despejar x de $y = f(x)$ y ver si para un mismo y hay varios valores de x.

Ejemplo 1.1:
Tomamos la función $f(x) = x^2$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow & x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow & x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \text{ no es inyectiva}$$

Ejemplo 1.2:
Tomamos la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : f(x) = \frac{x^2}{1+x}$:

$$y \in im(f) \Rightarrow y = f(x) = \frac{x^2}{1+x} \Leftrightarrow x^2 - yx - y = 0$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y}}{2} \text{ pero como } \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y}}{2} < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}^+ \Rightarrow inyectiva$$

Ejemplo 1.3:
Supongamos estos dos conjuntos $E = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$, $G = \{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 4\}$ y la siguiente función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, entonces:

$$f(E)? \to 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \geq x \geq \frac{1}{4} = f(E)$$

$$f^{-1}(G)? \to 1 \leq y = f(x) = \frac{1}{x^2} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq |x| \geq \frac{1}{2} \begin{cases} 1 \geq x \geq \frac{1}{2} & \Rightarrow 1 \geq x \geq \frac{1}{2} \\ 1 \geq -x \geq \frac{1}{2} & \Rightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Definición 1.7 (Suprayectividad)
Sean A y B conjuntos y $f : A \to B$ una función entre ambos, decimos que f es ***suprayectiva o sobreyectiva*** *cuando todos los elementos de B son imágenes[1] de algún elemento de A, es decir:*

$$\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$$

Para ello, es necesario que $card(A) \geq card(B)$

Observación 1.5:
En la práctica, para calcular si una función es inyectiva o no, tomaremos $y = f(x)$ y despejaremos x, si y toma como posibles valores los mismos que los valores del codominio, es suprayectiva.

Ejemplo 1.4:
Tomamos la función $f(x) = x^2$:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow y \in (0, \infty)$$

Luego no es suprayectiva porque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

[1] Lo que se traduce en que $im(f) = B$

Definición 1.8 (Biyectividad)
*Sean A y B conjuntos y $f : A \to B$ una función entre ambos, decimos que f es **biyectiva** cuando es inyectiva y suprayectiva simultáneamente.*

Para ello, es necesario que $card(A) = card(B)$.

Observación 1.6:
No es difícil entre ver que la cantidad de elementos en los distintos conjuntos determinan en cierto modo (puesto que para conjuntos infinitos no podemos contarlos) la obtención o no de los calificativos anteriores. De este hecho se desprende que:

$$\text{Sea } f : A \to B \text{ suprayectiva} \Rightarrow \exists f : B \to A \text{ inyectiva}$$

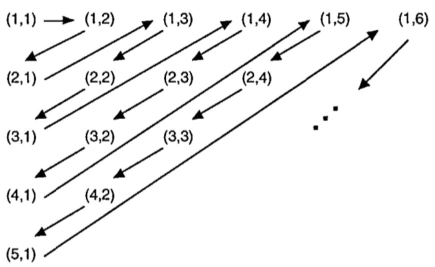
Definición 1.9 (Conjunto Numerable)
*Sea A un conjunto cualquiera, decimos que es **numerable**[2] cuando existe una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y dicho conjunto.*

Proposición 1.1
La unión numerable de conjuntos numerables es numerable:

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n \text{ es numerable} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ es numerable}$$

El producto cartesiano de conjuntos numerables es numerable:

$$f : \mathbb{N} \overset{biyec.}{\to} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ es numerable}$$



Teorema 1.1 (de Schöder-Berstein)
Sean A y B conjuntos, entonces:

$$\exists f : A \to B \text{ iny. y } \exists g : A \to B \text{ supra. } \Rightarrow \exists h : A \to B \text{ biy.}$$

Definición 1.10 (Composición de funciones)
*Sean A, B y C conjuntos y $f : A \to B$, $g : B \to C$ dos funciones, definimos la **composición de** f **con** g como la función:*

$$gof(a) = g\left(f(a)\right), \forall a \in A \Rightarrow gof : A \to C$$

Definición 1.11 (Conjunto $P(A)$)
Sea A un conjunto, definimos el conjunto partes de A como:

$$P(A) = \{D \subset A\}$$

es decir, aquel formado por todos los subconjuntos de A.

[2] Por ejemplo, $\mathbb{R}$ no es numerable

Ejemplo 1.5:
Sea $A = \{a, b, c\}$, entonces $P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$

Proposición 1.2
La función que relaciona A con su $P(A)$ inyectiva.

$$\begin{array}{rcl} f : A & \rightarrow & P(A) \ \textit{inyectiva} \Rightarrow card(A) \leq card(B) \\ a & \longmapsto & \{a\} \end{array}$$

Observación 1.7:
Concretamente para el conjunto vacío:

$$A = \emptyset \Rightarrow P(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow P(P(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Teorema 1.2 (de Cantor)
Sea A un conjunto cualquiera, entonces $\nexists f : A \rightarrow P(A)$ suprayectiva.

Demostración:
Supongamos que sí:

$$\begin{array}{rcl} \exists f : A & \rightarrow & P(A) \text{ suprayectiva} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Sea el conjunto $D = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ como $D \subset A \Rightarrow D \in P(A)$ y como f es suprayectiva $\Rightarrow \exists a \in A : f(a) = D$ Llegados este punto:

- Si $a \in D \Rightarrow a \notin f(a)$ pero $f(a) = D$ #
- Si $a \notin D \Rightarrow a \in f(a)$ pero $f(a) = D$ #

De este razonamiento se desprende que $\mathbb{N}$ es numerable pero $P(\mathbb{N})$ no lo es puesto que ser biyectivo a $\mathbb{N}$ supondría la existencia de alguna aplicación suprayectiva y como hemos demostrado no es cierto.

- Usando el axioma de elección $\rightarrow card(P(\mathbb{N})) \leq card(\mathbb{R})$
- Usando la hipótesis del continuo $\rightarrow card(P(\mathbb{N})) = card(\mathbb{R})$ □

Principio de Inducción

En este pequeño espacio aparte, vamos estudiar el concepto de la inducción matemática. Este modo de demostración, fundamental y básico no sólo en esta asignatura, está presente en multitud de demostraciones importantes y es muy útil para demostrar enunciados que hagan referencia a cantidades discretas, en las que interviene algún elemento natural arbitrario.

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, este conjunto posee una propiedad que se llama de Buen Orden que dice:

$$A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in A : \forall a \in A : m \leq a$$

Lo que quiere decir que siempre encontraremos en ese subconjunto A un elemento que podremos calificar como el *primero*.

Teorema 1.3 (Principio de Inducción)
Sea $S \subset \mathbb{N}$, entonces:

$$1 \in S \wedge (k \in S \Rightarrow k + 1 \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Demostración:
Supongamos que $S \subsetneq \mathbb{N}$ y que $A = \mathbb{N} \backslash S \neq 0$. Por la propiedad del Buen Orden:

$$\exists m \in A : \forall a \in A : m \leq a$$

Sin embargo, $m = 1 \notin A$ porque $1 \in S$, luego $m - 1 \in S \overset{Hip,2}{\Rightarrow} (m-1)+1 = m \in S$ #

O dicho de otra forma: si $1 \in S \Rightarrow 2 \in S \Rightarrow ... \Rightarrow \mathbb{N} = S \Rightarrow A = \mathbb{N} \backslash S = \mathbb{N} \backslash \mathbb{N} = \emptyset$ # □

Corolario 1.3.1
Supongamos que tenemos una propiedad que depende de un número natural: $k \in \mathbb{N} : P(k)$ y supongamos que $P(1)$ es cierto. Si $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ entonces $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.

Demostración:
Supongamos el conjunto S

- $1 \in S$
- $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

Los dos hechos anteriores según el principio de inducción implican que $S = \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$ □

NÚMEROS REALES

La gran mayoría de objetos matemáticos que se van a estudiar en el manual, de una forma u otra, trabajan en el conjunto de los números reales. Parece conveniente, en ese caso, que estudiemos qué propiedades tienen estos simplemente por cómo son, para poder aprovecharnos después de sus particularidades y características en nuestro favor.

El primero de los puntos a aclarar sería decidir qué entendemos cuando decimos "conjunto de los números reales". Los seres humanos han ido incrementando el edificio de las Matemáticas conforme han ido descubriendo elementos que no estaban descritos lo que se llamaba "Matemáticas" hasta ese momento. Un ejemplo que ilustra este hecho ocurrió en la Grecia Clásica. Los griegos sólo[1] utilizaban números racionales por considerarlos "perfectos" al estar basados en proporciones. Sin embargo, algo tan sencillo como el dibujo de un cuadrado de lado 1 ya ponía de manifiesto que dicho conjunto se quedaba corto para representar la totalidad de magnitudes "reales", pues la diagonal de dicho cuadrado medía $\sqrt{2}$, que no es racional.

Este ejemplo y muchos otros dan testimonio de que, a lo largo de la Historia, los seres humanos han ido descubriendo y creando hasta llegar a las Matemáticas que conocemos hoy y que siguen expandiéndose. En concreto, nosotros vamos a utilizar y considerar los conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, siendo cada uno:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ como el conjunto de los naturales
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ como el conjunto de los enteros, formados por los naturales, el 0 y los negativos.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$ como el conjunto de los racionales en los que cada número racional está representado por un conjunto de fracciones equivalentes: $\left[\frac{a}{b}\right] = \frac{m}{n} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$.
- $\mathbb{R}$ como el conjunto de los reales, formados por los irracionales y los racionales.
- $\mathbb{C} = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ como el conjunto de los números complejos.

En realidad, la definición "formal" de los números racionales es algo más compleja y la veremos más adelante, pero por lo pronto nos sirve simplemente saber que están compuestos por los racionales (que sí conocemos bien y fácilmente) y los irracionales, que son esos números algo más complicados de entender que han ido apareciendo después.

Dentro de este capítulo, tenemos varias secciones. La primera estará dedicada al estudio de las buenas propiedades que van a tener los números reales por la estructura algebraica que forma el conjunto de sus elementos, el segundo estará dedicado a hacer una mención especial a los números complejos porque como contienen a los reales a veces nos será útil tenerlos en cuenta y, por último, al supremo e ínfimo que van a ser elementos claves para cualquier conjunto que contenga números reales.

[1]Entendiendo los naturales y enteros como subcojuntos de los racionales, pues son fracciones de denominador 1.

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE $\mathbb{R}$

En esta, la primera sección, vamos a estudiar detenidamente tres características fundamentales de los números reales para el Análisis: su estructura algebraica de cuerpo, su orden total y sus propiedades métricas.

Aunque inicialmente no se entienda del todo qué significan tales propiedades, según se avance en la sección podremos observar que no estaremos haciendo más que cimentar y formalizar con una base sólida todas aquellas propiedades que dábamos por hecho y que ya utilizábamos cuando trabajábamos con números reales. Sin embargo, no está de más explicitar qué cosas podemos hacer **porque estamos en el conjunto de los reales**, pues por primera vez nos va a mostrar propiedades que otros conjuntos no tienen.

Estructura de cuerpo

La primera de las características mencionadas es la de *estructura de cuerpo*, pero ¿qué significa esto? Pues bien, cuando un conjunto junto con dos operaciones cumple ciertas propiedades, se dice que tiene **estructura de cuerpo**. Esto es lo que ocurre precisamente con el conjunto de los reales y las operaciones suma y producto.

La estructura de cuerpo es importante y "deseable" porque dota al conjunto que la posee de una serie de cualidades muy útiles para operar con elementos del conjunto usando las funciones mencionadas. A modo de ejemplo, normalmente cuando vemos una ecuación del estilo $a \cdot x = b$ uno responde inmediatamente que la solución es $x = a^{-1} \cdot b = b/a$. Sin embargo, implícitamente estamos asumiendo algunas cosas, como que siempre existe a^{-1}. Que todos los elementos tengan un inverso es una de esas propiedades deseables que nos proporciona la estructura de cuerpo. Cómo es posible que esto no sea verdad, en qué mundo puede ocurrir tal aberración, se preguntará más de uno. Por ejemplo, en el conjunto de las matrices. Si en la ecuación anterior a y b hubiesen sido matrices es posible que ya no hubiese existido a^{-1} y no hubiese habido solución. Y, como esta, hay muchas otras.

Lo primero es ver qué es un cuerpo y eso significa ver qué elementos lo forman, qué características tienen que cumplir estos elementos de forma individual y qué propiedades tiene que cumplir entre ellos.

Definición 2.1 (Suma)
Sea $\mathbb{K}$ un conjunto de números, definimos la operación ***suma*** *como*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\longmapsto a + b \end{aligned}$$

y, si el conjunto $(K, +)$ cumple las propiedades:

1. *Conmutativa:* $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a$
2. *Asociativa:* $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. *Elemento neutro:* $\exists 0_k \in \mathbb{K} : \forall a \in \mathbb{K} : a + 0_k = 0_k + a = a$
4. *Elemento opuesto:* $\forall a \in \mathbb{K} : \exists(-a) : a + (-a) = 0_k$

entonces decimos que $(K, +)$ es un ***grupo conmutativo****.*

Ejemplo 2.1:
Los conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ equipados con la suma habitual son grupos conmutativos, pero por ejemplo $\mathbb{N}$ no porque sólo cumple las dos primeras.

Definición 2.2 (Producto)
*Sea $\mathbb{K}$ un conjunto de números, definimos la operación **producto** como:*

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a,b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

y, si $(K, \cdot)$ cumple las propiedades:

1. *Propiedad conmutativa:* $\forall a, b \in \mathbb{K} : a \cdot b = b \cdot a$
2. *Propiedad asociativa:* $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. *Propiedad elemento neutro:* $\exists 1_k \in \mathbb{K} : \forall a \in \mathbb{K} : a \cdot 1_k = 1_k \cdot a = a$
4. *Propiedad elemento inverso:* $\forall a \in \mathbb{K} : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1_k$

*entonces decimos que $(K, \cdot)$ es un **grupo conmutativo**.*

Ejemplo 2.2:
Los conjuntos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ equipados con el producto habitual son grupos conmutativos, pero por ejemplo $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ no porque sólo cumplen las tres primeras.

Definición 2.3 (Cuerpo Conmutativo)
*Sea K un conjunto, $+$ la operación suma y $\cdot$ la operación producto, decimos que $(K, +, \cdot)$ es un **cuerpo conmutativo** si y sólo si verifica:*

- $(K, +)$ *es un grupo conmutativo*
- $(K, \cdot)$ *es un grupo conmutativo*
- *Propiedad distributiva:* $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = ab + ac$

Ahora que tenemos claro qué es un cuerpo conmutativo, estamos preparados para ver qué propiedades algebraicas nos ofrece a la hora de trabajar con sus elementos. Recordemos que muchas de las siguientes propiedades nos son familiares, pero no todos los conjuntos las poseen.

Proposición 2.1 (Propiedades de Cuerpo Conmutativo)
Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo conmutativo, se cumplen las siguientes propiedades:

1. ***El elemento neutro de la suma 0_K es único.***
2. ***El elemento neutro del producto 1_K es único.***
3. ***El elemento opuesto de $x \in \mathbb{K}$ es único y en particular $-(-x) = x$.***
4. ***El elemento inverso de $x \in \mathbb{K} \setminus \{0_K\}$ es único, en particular $(x^{-1})^{-1} = x$.***
5. $\forall x \in \mathbb{K} : x \cdot 0 = 0$***, por tanto, el 0 no tiene inverso.***
6. $x + a = a \Rightarrow x = 0$
7. $a \neq 0 \in \mathbb{K} \Rightarrow x \cdot a = a \Rightarrow x = 1$.
8. $\forall x \in \mathbb{K} : -x = (-1) \cdot x$.
9. ***Conocidos $a, b \in \mathbb{K}$, la ecuación $x + a = b$ tiene una única solución $x = b - a$.***
10. ***Si $a \neq 0$, la ecuación $a \cdot x = b$ tiene una única solución: $x = \frac{b}{a}$.***

11. ***Si*** $ab = ac$ ***y*** $a \neq 0 \Rightarrow b = c$.

12. ***Si*** $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ***o*** $b = 0$.

13. ***Si*** $a, b \neq 0 \Rightarrow \exists (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Demostración:

1. Supongamos que hay dos elementos neutros, e, e':

$$\begin{cases} e' + e = e & \text{si } e' \text{ es el elemento neutro} \\ e' + e = e' & \text{si } e \text{ es el elemento neutro} \end{cases} \Rightarrow e = e'$$

2. Supongamos que hay dos elementos neutros, e, e':

$$\begin{cases} e' \cdot e = e & \text{si } e' \text{ es el elemento neutro} \\ e' \cdot e = e' & \text{si } e \text{ es el elemento neutro} \end{cases} \Rightarrow e = e'$$

3. Supongamos que:

$$x + a = a \Leftrightarrow x + a + (-a) = a + (-a) \Leftrightarrow x + 0 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

4. Como $a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{K}$ y entonces:

$$x \cdot a = a \Leftrightarrow x \cdot a \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} \Leftrightarrow x \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

5. Supongamos que x_1, x_2 son ambos opuestos de x:

$$x_1 = 0 + x_1 = (x_2 + x) + x_1 = x_2 + (x + x_1) = x_2 + 0 = x_2$$

6. Supongamos que x_1, x_2 son inversos de x entonces:

$$x_1 = 1 \cdot x_1 = (x_2 \cdot x) \cdot x_1 = x_2 \cdot (x \cdot x_1) = x_2 \cdot 1 = x_2$$

7. Supongamos que:

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0 \Rightarrow 0 = x \cdot 0$$

8. Supongamos que:

$$0 = x \cdot 0 = x(1 + (-1)) = x + (-1)x \Rightarrow -x = (-1)x$$

9. Supongamos que:

$$x + a = b \Rightarrow (x + a) + (-a) = b + (-a) \Leftrightarrow x = b + (-a) = b - a$$

10. Supongamos que:

$$a \cdot x = b \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

11. Supongamos que:

$$ab = ac \Leftrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \Leftrightarrow a^{-1}a \cdot b = a^{-1}a \cdot c \Leftrightarrow b = c$$

12. Supongamos que:

$$\begin{cases} a = 0 & (a = 0 \vee b = 0) \equiv V \\ a \neq 0 & \exists a^{-1} \in \mathbb{K} : a^{-1}(ab) = 0 \cdot a^{-1} \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0) \equiv T \end{cases}$$

13. Para la primera parte, por la propiedad 12. si $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$.

    Demostrado que $ab \neq 0$, $ab \neq 0 \Rightarrow \exists (ab)^{-1}$

$$(a^{-1}b^{-1})(ab) = a^{-1}a \cdot b^{-1}b = 1 \Rightarrow (a^{-1}b^{-1}) = (ab)^{-1}$$

Propiedades de orden

Desde pequeños siempre hemos aprendido los números en cierto orden y hemos tenido claro qué cantidades eran "más pequeñas" y cuáles "más grandes". Esta propiedad de orden es importante porque permite hacer **comparaciones** y veremos que será muy importante en el resto del documento, casi siempre por medio de desigualdades.

La relación binaria que entendemos por relación de orden (y que denotaremos por $\leq$) es intrínseca de los números reales y ofrece esa capacidad de "comparar" valores reales entre sí. No obstante, primero definiremos lo que debe cumplir una relación cualquiera para ser considerada de "orden".

Definición 2.4 (Relación de orden y orden total)
*Sea R una relación binaria de un conjunto A en sí mismo, decimos que ésta es una **relación de orden** si y sólo si verifica las siguientes propiedades:*

- ***Reflexividad**:* $\forall x \in A : xRx$
- ***Antisimetría**:* $(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$
- ***Transitividad**:* $(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$

*y decimos que es una **relación de orden total** si y sólo si además verifica la siguiente propiedad:*

- ***Ordenación total**:* $\forall x, y \in A : (xRy) \vee (yRx)$

Cuando a un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se le agrega una relación de orden total como la definida por $\leq$, decimos que se trata de un cuerpo **totalmente ordenado**.

En el conjunto de los números reales, esta relación binaria es la definida por el operador $\leq$. En ese caso, como el conjunto de los números reales se trata de un cuerpo totalmente ordenado, es interesante estudiar cómo se comportan las operaciones que dotaban al conjunto de estructura de cuerpo (la suma y el producto) con respecto a la relación de orden $\leq$.

Proposición 2.2

1. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{K} : x + z \leq y + z$
2. $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0$

Muchas veces hablamos de números positivos o negativos, esto es, que $x > 0$ o $x < 0$. Sin embargo, no hemos definido qué significa el operador $<$, luego veamos a qué nos referimos cuando lo utilizamos, siempre en términos de la relación $\leq$ que dota de orden a los reales.

Definición 2.5 (Positividad y Negatividad)
Sea $x \in \mathbb{R}$ un número, decimos que dicho número es:

- ***Positivo**:* $x > 0 \Leftrightarrow (0 \leq x \text{ y } x \neq 0)$
- ***Negativo**:* $x < 0 \Leftrightarrow (-x) > 0$

Proposición 2.3
Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo conmutativo con una relación de orden $\leq$, se verifican las siguientes propiedades:

1. *Si* $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow a + b > 0$
2. *Si* $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow ab > 0$

3. *Si* $(a < 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow ab > 0$
4. *Si* $(a > 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow ab < 0$
5. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *decimos que* $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

Sea $(\mathbb{R}, \leq)$ *el cuerpo en cuestión, además se verifican las siguientes:*

1. *Si* $(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow a > c$
2. *Si* $a > b \Rightarrow a + x > b + x : \forall x \in \mathbb{R}$
3. *Si* $a \neq 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0$
4. ***Tricotomía del Orden****: Si* $a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a > 0) \vee (a < 0) \vee (a = 0)$
5. $1 > 0$
6. *Si* $(a > b) \wedge (c \geq d) \Rightarrow a + c > b + d$
7. *Si* $(a > b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac > bc$
8. *Si* $(a > b) \wedge (c < 0) \Rightarrow ac < bc$
9. *Si* $(a > 0) \Rightarrow (a^{-1} > 0)$
10. *Si* $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$

$$a < b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} \text{ \textit{pero también} } a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

11. *Si* $0 \leq a \leq \varepsilon : \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$
12. *Si* $ab > 0 \Rightarrow [(a > 0) \wedge (b > 0)] \vee [(a < 0) \wedge (b < 0)]$
13. *Si* $ab < 0 \Rightarrow [(a < 0) \wedge (b > 0)] \vee [(a > 0) \wedge (b < 0)]$
14. *Si* $(a > b > 0) \wedge (c > d > 0) \Rightarrow ac > bd$
15. *Si* $0 < a < b \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : (0 < a^n < b^n) \wedge (0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a})$
16. *Si* $(a > 1) \Rightarrow (\frac{1}{a} < 1)$ *y si* $(0 < a < 1) \Rightarrow (\frac{1}{a} > 1)$

Demostración:

1.
$$a > 0 \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow a + b \geq b \overset{Trans}{\Rightarrow} a + b \geq b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$$
$$\text{Si } a + b = 0 \Rightarrow 0 \geq b \geq 0 \Rightarrow b = 0 \ \# \Rightarrow a + b \neq 0 \Rightarrow a + b > 0$$

2.
$$(a \geq 0) \wedge (b \geq 0) \Rightarrow (a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow ab \geq 0$$
$$\text{Si } ab = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0) \ \# \Rightarrow ab \neq 0 \Rightarrow ab > 0$$

3.
$$(-a > 0) \wedge (-b > 0) \Rightarrow (-a)(-b) > 0 \Rightarrow (-1)a(-1)b = (-1)(-1)ab = ab > 0$$

4.
$$(a > 0) \wedge (-b) > 0 \Rightarrow a(-b) > 0 \Leftrightarrow a(-1)b = (-1)ab = (-ab) > 0 \Rightarrow ab < 0$$

1.
$$(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a \geq b) \wedge (b \geq c) \Rightarrow a \geq b \geq c \overset{Trans.}{\Rightarrow} a \geq c$$
$$\text{Si } a = c \Rightarrow (b \leq c) \wedge (c \leq b) \Rightarrow c = b \ \# \Rightarrow a > c$$

2.

$$a > b \Rightarrow a \geq b \Rightarrow a + x \geq b + x \Rightarrow a + x + (-x) \geq b + x + (-x) \Leftrightarrow a \geq b \; \# \Rightarrow a + x > b + x$$

3.

$$\begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow & a > 0 \Rightarrow a^2 > 0 \\ a \leq 0 \Rightarrow & a < 0 \Rightarrow a^2 > 0 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} a = 0 \Rightarrow & a = 0 \\ a \geq 0 \Rightarrow & a > 0 \\ a \leq 0 \Rightarrow & a < 0 \end{cases}$$

5.

$$1 = 1 \cdot 1 > 0 \text{ Porque el elemento neutro es positivo}$$

6.

Como $a > b \Rightarrow a + c > b + c$, y de modo paralelo: $c + b > d + b$. Luego: $\Rightarrow a + c > b + d$

7.

$$(a > b) \Rightarrow (a - b > 0), \text{ y como } (c > 0) \Rightarrow c(a - b) > 0 \Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow ac > bc$$

8.

$$(a > b) \Rightarrow (a - b > 0), \text{ y como } (-c) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-c)(a - b) > 0 \Rightarrow (-1)c(a - b) > 0 \Rightarrow c(a - b) < 0 \Rightarrow ac - cb < 0 \Rightarrow ac < bc$$

9.

$$a > 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$$

$$a^{-1} < 0 \Rightarrow 1 = a \cdot a^{-1} < 0 \; \# \Rightarrow a^{-1} > 0$$

10.

$$\text{Si } a \neq 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a > \varepsilon = \frac{a}{2} > 0 \; \# \Rightarrow a = 0$$

11.

$$\text{Tomamos } a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow b > 0 & \text{Si fuese } b < 0 \Rightarrow ab < 0 \; \# \\ a < 0 \Rightarrow b < 0 & \text{Si fuese } b > 0 \Rightarrow ab < 0 \; \# \end{cases}$$

12.

$$\text{Tomamos } a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow b < 0 & \text{Si fuese } b > 0 \Rightarrow ab > 0 \; \# \\ a < 0 \Rightarrow b > 0 & \text{Si fuese } b < 0 \Rightarrow ab > 0 \; \# \end{cases}$$

13.

$$\begin{cases} \text{Como } (a > b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac > bc \\ \text{Como } (c > d) \wedge (b > 0) \Rightarrow bc > db \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

14.

$$\text{Por la propiedad anterior } \Rightarrow a^2 < b^2 \Rightarrow a^3 < b^3 \overset{induccion}{\Rightarrow} a^n < b^n \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a < b^n \cdot a \Rightarrow b^n \cdot a \overset{?}{<} b^{n+1} \Rightarrow b^n \cdot a < b^n \cdot b \Rightarrow a < b, \text{ QED}$$

$$\text{Si } \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Rightarrow a \geq b \; \# \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

15.

$$a > 1 \Rightarrow a^{-1} \cdot a > 1 \cdot a^{-1} \Rightarrow 1 > \frac{1}{a}$$

$$(0 < a < 1) \Rightarrow a < 1 \Rightarrow a^{-1} \cdot a < 1 \cdot a^{-1} \Rightarrow 1 < \frac{1}{a}$$

Como ya hemos comentado, esta relación de orden tiene y tendrá consecuencias importantes en el resto del documento. A continuación, a modo de ejemplo, se muestran dos proposiciones que se valen de esta relación para demostrar ciertos resultados acerca de los números enteros.

Proposición 2.4
Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales y $\mathbb{Z}$ el de los enteros, podemos caracterizar los primeros como los enteros positivos

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \text{ y } \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\} = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$$

Demostración:
Como $1 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 1 \Rightarrow ...$, demostramos por inducción sobre n:

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$, $1 \in S$ porque $1 \geq 1$ y como $1 \geq 1 \Rightarrow 2 \geq 2$ entonces tenemos que para un elemento k del conjunto, otro $k+1$ también pertenece a él, en consecuencia por el principio de inducción: $\mathbb{N} = S$

Ahora sea $m \in \mathbb{Z} : m > 0$ probamos que es natural:

$$m \notin \mathbb{N} \Rightarrow (-m) \in \mathbb{N} \Rightarrow (-m) \geq 1 \text{ pero como } m > 0 \ \# \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

Proposición 2.5
Sean $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$n \leq m \leq n+1 \Rightarrow m = n \text{ o } m = n+1$$

Demostración:
Si $m \neq n$ y $m \neq n+1$, sea $k = m - n > 0$:

$$k = m - n > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N} \text{ pero como } n \leq m \leq n+1 \Rightarrow m - n <\leq 1 \Rightarrow k \leq 1$$

$$\text{pero como } m \neq n+1 \Rightarrow k \neq 1 \Rightarrow k < 1 \ \# \text{ Por ser natural k}$$

Desigualdades notables

A las expresiones donde la relación de orden $\leq$ se ve involucrada las llamamos **desigualdades**. En general, utilizaremos bastante las desigualdades para estudiar el resto de elementos del documento. De hecho, normalmente buscaremos demostrar que alguna cosa es "menor o igual" que otra y para ello es útil recordar ciertas desigualdades[2] poco evidentes, pero sorprendentemente ciertas.

Teorema 2.1 (Discriminante en ecuaciones)
Sean $a, b, c \in \mathbb{R} : a \neq 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, entonces:

- *Si* $\Delta < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = 0$
- *Si* $\Delta > 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- *Si* $\Delta = 0 \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R} : x = \frac{-b}{2a}$

Demostración:

$$ax^2 + bx + c = 0 \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ Q.E.D.

[2]En las demostraciones de las mismas, se da por hecho el resultado $\forall a \in \mathbb{R} : a > 0 \Rightarrow \exists x > 0 : x^2 = a$, o lo que es lo mismo, que la raíz cuadrada de un número positivo existe. Esto se demostrará más tarde, pero debe utilizarse para demostrar estas desigualdades.

- Si $\Delta < 0 \Rightarrow 0 < (x + \frac{b}{2a})^2 \neq \frac{\Delta}{4a^2} < 0$
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$ $\square$

Teorema 2.2 (Discrimintante en inecuaciones)
Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ donde $a > 0$, la inecuación $ax^2 + bx + c \geq 0$ y el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, entonces:

- *Si $\Delta \leq 0 \Rightarrow \forall x$ es cierto*
- *Si $\Delta > 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \wedge x \leq \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$*

Demostración:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \geq 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \geq 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 \geq \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Si $\Delta \leq 0 \Rightarrow 0 < (x + \frac{b}{2a})^2 \geq \frac{\Delta}{4a^2} < 0$
- Si $\Delta > 0 \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 \geq \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left((x + \frac{b}{2a}) + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left((x + \frac{b}{2a}) - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)$ $\square$

Teorema 2.3 (Desigualdad de Cauchy)
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$, entonces:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + ... + a_n^2) \cdot (b_1^2 + ... + b_n^2)$$

Además, la igualdad sólo ocurre cuando:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall i = 1, ...n : a_i = c \cdot b_i$$

Demostración:
Sea $F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + ... + (a_n - tb_n)^2 : t \in \mathbb{R}$, se observa que la función siempre cumple que "≥ 0" por ser suma de cuadrados. Desarrollando los binomios[3]:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) + t^2\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 = A - 2Ct + Bt^2$$

Para los casos[4] en los que $B > 0 \Rightarrow$:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4C^2 - 4AB \leq 0 \Leftrightarrow 4C^2 \leq 4AB \Leftrightarrow C^2 \leq AB$$

De este modo se ve fácilmente que para el caso de $C^2 = AB \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(c) = 0 \Rightarrow \forall i, a_i - c \cdot b_i = 0$ $\square$

Teorema 2.4 (Desigualdad de Minkovski)
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + ... + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2}$$

Además, la igualdad sólo ocurre cuando:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall i = 1, ..., n : a_i = c \cdot b_i$$

[3] Llamamos a cada cosa con una letra mayúscula para simplificar la demostración
[4] Es obvio que nunca puede ser menor que 0 pero para el caso $B = 0 \Rightarrow \forall i, b_i = 0$ y se ve fácilmente en la fórmula inicial que eso siempre es cierto

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)+\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\overset{Cauchy}{\leq}A+2\sqrt{A}\sqrt{B}+B=(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leq\sqrt{A}+\sqrt{B}$$

Concretamente para que se de el caso "=": $2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)=2\sqrt{A}+\sqrt{B}$ □

Propiedades métricas

La última de las propiedades mencionada es que en los números reales podemos **medir**, es decir, podemos definir una noción de distancia que describe cómo de cerca están unos valores de otros. Esta "distancia" será la que viene dada por el valor absoluto de la diferencia entre números (que es la métrica usual[5] en $\mathbb{R}$).

Definición 2.6 (Valor Absoluto)
Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, definimos la función $|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ***valor absoluto*** *como:*

$$|a|=\begin{cases}a & a\geq 0\\ -a & a<0\end{cases}$$

Y, de nuevo, nos disponemos a hacer el mismo desarrollo que en las secciones anteriores: vamos a estudiar qué propiedades tiene esta función con respecto a las operaciones de cuerpo y la relación de ordenación.

Proposición 2.6 (Propiedades del Valor Absoluto)

1. $|a|=0\Leftrightarrow a=0$
2. $|-a|=|a|:\forall a\in\mathbb{R}$
3. $|ab|=|a||b|:\forall a,b\in\mathbb{R}$
4. $\forall c\geq 0:|a|\leq c\Leftrightarrow -c\leq a\leq c$
5. $\forall a\in\mathbb{R}:-|a|\leq a\leq |a|$

Demostración:

1. Dada por la propia definición
2. Por definición: $max\{a,-a\}=max\{-a,-(-a)\}$
3. Para esta distinguimos casos:
   - Para $a=0$ o $b=0$, es inmediata porque $|ab|=|a|\cdot|b|=0\cdot|b|=0$
   - Para $a>0$, $b>0$ y $a,b\neq 0$: $|ab|=|a|\cdot|b|\Leftrightarrow ab=a\cdot b$
   - Para $a<0$, $b<0$ y $a,b\neq 0$:$|ab|=|a|\cdot|b|\Leftrightarrow -ab=-a\cdot(-b)\Leftrightarrow ab=a\cdot b$
   - Para $a>0$, $b<0$ y $a,b\neq 0$: $|ab|=|a|\cdot|b|\Leftrightarrow -ab=a\cdot(-b)$
4. $|a|=max\{a,-a\}\leq c\Leftrightarrow a\leq c$ y $-a\leq c\Leftrightarrow a\leq c$ y $a\geq -c\Leftrightarrow -c\leq a\leq c$
5. Demostrada la propiedad 4. , se trata de decir que $c=a$ □

[5]Existen más métricas en $\mathbb{R}$ con distintas propiedades (distintas formas de medir que modifican las distancias), pero en este curso nos limitaremos a utilizar la habitual.

Teorema 2.5 (Desigualdad triangular)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ números reales, entonces:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Demostración:
Tenemos que $-|a| \leq a \leq |a|$ y que $-|b| \leq b \leq |b|$, sumando ambas expresiones:

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \Leftrightarrow -(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|)$$

Corolario 2.5.1
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ números reales, entonces:

1. $||a| - |b|| \leq |a - b|$
2. $|a - b| \leq |a| + |b|$

Demostración:
1. Como $a = a - b + b \overset{Des.triang.}{\Rightarrow} |a| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| = c$.
   Del mismo modo, $b = b - a + a \Rightarrow |b| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow |b - a| = |a - b| \leq |b| - |a| \Rightarrow |a| - |b| \geq -|a - b| = -c$
   $$||a| - |b|| \leq c = |a - b|$$
2. $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$ □

El concepto de distancia es importante porque casi la totalidad de los conceptos posteriores (límites, supremos, continuidad, etc.) se basan, de forma intuitiva, en hablar en términos de "cerca" o "suficientemente cerca" y por eso es importante tener clara la definición de distancia, pues permite formalizar esa noción de "lejos" o "cerca" para que no haya lugar a equívoco.

Definición 2.7 (Distancia entre números)
*Sean $a, b \in \mathbb{R}$ números reales, definimos la **distancia entre** a **y** b como*

$$dist(a, b) = |a - b|$$

que además es una métrica en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.7 (Propiedades de la Distancia)
1. *$\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*
2. *$\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) = d(y, x)$*
3. *Propiedad triangular: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*

Demostración:
1. $d(x, y) = |x - y| \geq 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$
3. $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$ □

A modo de ejemplo de utilidades de la distancia, vamos a formalizar el concepto de intervalo y de entorno que tan habitualmente utilizamos en Matemáticas.

Definición 2.8 (Intervalos)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ donde $a < b$, definimos:

1. ***Intervalo abierto:*** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

2. ***Intervalo cerrado:*** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

3. ***Intervalo semiabierto o semicerrado:*** $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ *y viceversa.*

Observación 2.1:
El conjunto de los números reales se puede expresar como $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ y se suele representar en lo que conocemos como **Recta Real**.

Definición 2.9 (Entornos)
*Sea $a \in \mathbb{R}$ un número y $r \in \mathbb{R}$ una distancia, definimos un **entorno abierto** como el conjunto de números a distancia menor que r de un número central a:*

$$E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : dist(x, a) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\}$$

*Sea $a \in \mathbb{R}$ un número y $r \in \mathbb{R}$ una distancia, definimos un **entorno cerrado** como el conjunto de números a distancia menor o igual que r de un número central a:*

$$\bar{E}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : dist(x, a) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : a - r \leq x \leq a + r\}$$

NÚMEROS COMPLEJOS

Según se avanza en los cursos de Matemáticas, uno se va haciendo consciente de que los complejos son una compleción de los números reales y permiten resolver de forma más sencillas (o de forma única) problemas que involucran únicamente a los reales. En consecuencia, no está de más conocer unas nociones básicas sobre el cuerpo[6] de los números complejos y las propiedades del mismo para cuando sea necesario.

Definición 2.10 (Cuerpo de los Números Complejos)
*Sea $\mathbb{C} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2)\}$ el conjunto de los complejos, la operación $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$ y la operación $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $(a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$, definimos el **cuerpo de los números complejos** como la terna $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, que constituye un cuerpo conmutativo.*

Proposición 2.8 (Suma de Complejos)
La operación $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

posee las siguientes propiedades:

- *Conmutativa:* $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) = (a + c, b + d)$
- *Asociativa:* $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$
- *Elemento neutro:* $(0, 0) \to (a, b) + (0, 0) = (a, b)$
- *Elemento opuesto:* $(-a, -b) \to (a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$

*En resumen, $(\mathbb{C}, +)$ es un **grupo conmutativo**.*

[6]En este documento se va a dar una definición más simple del cuerpo $\mathbb{C}$ para no perder tiempo en ello y entrar directamente a estudiar sus propiedades.

Proposición 2.9 (Producto de Complejos)
La operación $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida como*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

posee las siguientes propiedades

- *Conmutativa:* $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$
- *Asociativa:* $((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$
- *Elemento neutro:* $(1, 0) \to (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$
- *Elemento inverso:* $(a, b)^{-1} \to (a, b) \neq 0 \Rightarrow \exists (a, b)^{-1} \in \mathbb{C} : (a, b) \cdot (a, b)^{-1} = (1, 0)$
- *Distributiva:* $(a, b)[(c, d) \cdot (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b)(e, f)$

En resumen, $(\mathbb{C}, \cdot)$ *es un* ***grupo conmutativo****.*

Proposición 2.10 (Producto por un Escalar)
La operación $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definida como:*

$$\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

posee las siguientes propiedades:

- *Conmutativa:* $\lambda(a, b) = (a, b)\lambda$
- *Asociativa:* $\lambda(\mu \cdot (a, b)) = (\lambda\mu) \cdot (a, b)$
- *Elemento neutro:* $1 \cdot (a, b) = (a, b)$
- *Distributiva:* $(\lambda + \mu)(a, b) = \lambda(a, b) + \mu(a, b)$
- *Distributiva:* $\lambda[(a, b) + (c, d)] = \lambda(a, b) + \lambda(c, d)$

Observación 2.2:
Hemos comentado que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ está incluido en el conjunto $\mathbb{C}$ de los complejos. Esto no ocurre de manera direta, pues los reales son escalares y los complejos "pares" tal y como los hemos definido. Cuando decimos que los reales están incluidos queremos decir que podemos identificarlos con un subconjunto de $\mathbb{C}$, que sería $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Si pensamos en dicha representación, la unidad real se identifica con $(1, 0)$, luego la unidad imaginaria sería razonable definirla como $(0, 1)$. Denotando por i a la misma, la definición del producto nos indica que $i^2 = (-1, 0) \in \mathbb{R}$ e identificando de vuelta el $(-1, 0)$ con el -1 es justo de donde surge la notación $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$, mucho más conocida.

Al utilizar esta nueva unidad, podemos escribir los números complejos $(a, b) \in \mathbb{C}$ ya no como pares sino como suma de su parte real e imaginaria, pues

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

de donde se obtiene la notación habitual $(a, b) = a + bi$ donde a constituye su **parte real** y b, **parte imaginaria**.

La interpretación de un número complejo como un par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ permite considerarlo como vector en lugar de como número complejo, siendo a y b sus coordenadas en el plano cartesiano. No obstante, hay otra forma de orientarse en el plano conocida como **coordenadas polares** que nos permiten caracterizar a un número complejo de forma alternativa.

Estas coordenadas polares vienen dadas por "la distancia que hay que andar desde el origen" o **módulo** y la "dirección" o **argumento** en la que habría que andar. Como podemos ver en la figura 2.1, esta manera también determina de modo único el vector al que nos queremos referir siempre y cuando $\theta \in [0, 2\pi)$.

Definición 2.11 (Módulo y argumento)
*Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ un número complejo, definimos su **módulo** como:*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

*Sea $\theta \in (0, 2\pi]$ un número real, decimos que es el **argumento**[7] **de** $z \neq 0$ si y sólo si:*

$$cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \qquad sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

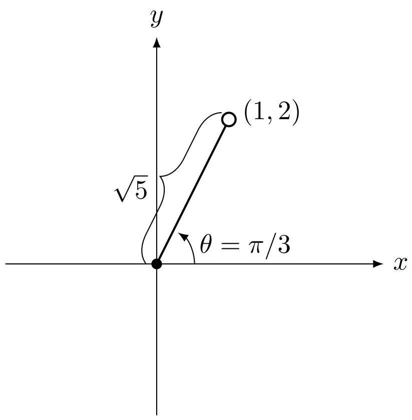


Figura 2.1: Representación del número complejo $1 + 2i$

Definición 2.12 (Conjugado)
*Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ un número complejo, definimos su **conjugado** como el número complejo $\bar{z} = a - bi$.*

Definimos una última forma de representar los números complejos cuya justificación excede este curso, pero que se emplea bastante por su comodidad y relación con la función exponencial.

Definición 2.13 (Exponencial compleja)
*Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, definimos la **exponencial compleja** como:*

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (cos(b) + i \cdot sen(b)) = e^a \cdot cos(b) + e^a \cdot i \cdot sen(b)$$

Por último, se presenta un resultado que permite estudiar las propiedades que tienen los números complejos en relación con estas distintas representaciones.

Proposición 2.11

- *Si $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{\theta i} = cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)$*
- *Si $z = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b$*
- *Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$*
  *En particular, $z \cdot (\frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}) = 1$, siendo lo del paréntesis **su inverso**.*
- *Si $\theta \in \mathbb{R} : |e^{i\theta}| = 1$*
- *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces: $e^{\alpha i} \cdot e^{\beta i} = e^{i(\alpha+\beta)}$*
- *Si $z \in \mathbb{C}$, entonces: $z = |z|e^{i\theta}$ donde θ es un argumento de z **(Forma polar)**.*
- *Si $z, \omega \in \mathbb{C}$ y escribimos ambos como: $z = |z|e^{i\alpha}$ y $\omega = |\omega|e^{i\beta}$, entonces: $z \cdot \omega = |z| \cdot |\omega| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$*

[7] Por convenio, el argumento siempre se empieza a medir desde el eje positivo de abcisas y en sentido antihorario.

Demostración:

1. $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$
2. ya está
3. Desarrollo directo:

$$e^{i\cdot\alpha} \cdot e^{i\cdot\beta} = (cos(\alpha) + i \cdot sen(\alpha))\,(cos(\beta) + i \cdot sen(\beta)) =$$
$$= (cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)) \cdot i\,(cos(\alpha)sen(\beta) + sen(\alpha)cos(\beta)) =$$
$$cos(\alpha+\beta) + i \cdot sen(\alpha+\beta) = e^{i\cdot(\alpha+\beta)}$$

4. El argumento de z verifica que $cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ y $sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$, lo que verifica que $a = |z|cos(\theta)$ y $b = |z|sen(\theta)$, con lo cual: $z = a + bi = |z|(cos(\theta) + sen(\theta) \cdot i) = |z|e^{i\theta}$
5. $z = |z|e^{i\alpha}$ y $\omega = |\omega|e^{i\beta}$, entonces: $z \cdot \omega = |z|e^{i\alpha} \cdot |\omega|e^{i\beta} = |z| \cdot |\omega| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$ □

Observación 2.3:
A modo de recopilación de los enunciados anteriores, hay 4 formas de representar un número complejo:

- Forma binomial: $a + bi$
- Forma trigonométrica: $|z|cos(\theta) + |z|sen(\theta)i$
- Forma polar: $|z|_\theta$
- Forma exponencial: $z = |z| \cdot e^{\theta \cdot i}$

Teorema Fundamental del Álgebra

El teorema fundamental del álgebra afirma que un polinomio tiene tantas raíces en $\mathbb{C}$ como grado. Esto es importante porque permite afirmar que en $\mathbb{C}$ se pueden calcular todas las raíces de un polinomio, no como en $\mathbb{R}$ donde, por ejemplo, el polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales.

Supongamos que tenemos un polinomio $P(z)$ con coeficientes complejos, decimos que el número $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(z)$ lo que es equivalente a decir que: $P(z) = (z - z_0)Q(z)$. Si z_0 es raíz de $P(z)$ m veces (lo que se denota por "ser raíz con multiplicidad m"), entonces esto quiere decir que $P(z) = (z - z_0)^m Q(z)$, donde $Q(z_0) \neq 0$.

El teorema dice que si tenemos un polinomio cualquiera de coeficientes complejos, siempre existe una raíz al menos.

$$f(x) \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$$

y su consecuencia directa es que cualquier polinomio descompone completamente en factores lineales. Esto quiere decir que, dado $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 : a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \wedge a_n \neq 0$, entonces $\exists z_0, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ y $\exists m_0, \cdots, m_k \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{k}(m_i) = n$ de manera que:

$$P(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m^k}$$

Raíces de números complejos

El Teorema Fundamental del Álgebra afirma que el polinomio $x^n - z$ tiene n raíces, o lo que es lo mismo, hay n raíces n-ésimas de z. Por tanto, a pesar de que $x^3 - 2$ sólo tiene como solución $\sqrt[3]{2}$ en $\mathbb{R}$ hay dos más y la pregunta es ¿cómo las calculamos?

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ en realidad lo que buscamos es un $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^n = z$. Si reescribimos ω en su forma exponencial como $\omega = r \cdot e^{i\theta}$ entonces debe ocurrir que $\omega^n = r^n \cdot e^{in\theta} = z = |z| \cdot e^{i\alpha}$, luego

$$\begin{cases} r^n = z & \Rightarrow r = \sqrt[n]{z} \\ e^{in\theta} = e^{i\alpha} & \Rightarrow \theta = \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \end{cases}$$

con $k = 0, 1, ..., n-1$.

SUPREMOS E ÍNFIMOS

En general, no sólo trabajaremos con el conjunto total de los números reales sino que en ocasiones manejaremos subconjuntos del mismo. Cuando estos subconjuntos están "delimitados", esto es, se encuentran dentro de algún intervalo concreto (finito por alguno de los dos lados) conviene estudiar una propiedad que hace único el conjunto de los números reales.

Para saber de qué se trata, observemos el conjunto de los números positivos $\mathcal{T}^+ := \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$. Notamos que cualquier número por debajo del 0 no pertenece al conjunto, luego el 0 hace de "frontera" de dicho conjunto por abajo. Sin embargo, atendiendo a la justificación *ningún número por debajo pertenece al conjunto* también podríamos decir que es "frontera" el -1, el $-1/2$, ... entonces ¿por qué es especial el 0? Porque es la "mejor frontera", es decir, es la más cercana al conjunto que no se deja ningún elemento fuera. Para demostrarlo, basta comprobar que cualquier otro valor cumple una de las dos siguientes alternativas:

- O es peor "frontera", que podría ser por ejemplo el caso de los negativos, pues el 0 sabemos que es frontera y está más cerca que cualquiera de ellos.
- O se deja algún elemento de $\mathcal{T}^+$, que es el caso de los positivos, pues cualquier $b > 0$ "frontera" verifica que $0 < b/2 < b$, es decir, se le escapa $b/2$.

Definición formal de supremo e ínfimo

El concepto del ejemplo anterior de la mejor "frontera", o hablando más formalmente, de la mejor *cota* es precisamente el que caracteriza la noción de lo que vamos a llamar supremo e ínfimo y es esencial por dos motivos: porque es una característica única que forma parte de la naturaleza de los números reales y porque permite formalizar el concepto del mayor o menor "más ajustado" de un conjunto.

Definición 2.14 (Cotas)
Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío, decimos que:

- *$M \in R$ es **cota superior** de A si y sólo si $\forall a \in A : a \leq M$.*
- *$m \in \mathbb{R}$ es **cota inferior** de A si y sólo si $\forall a \in A : m \leq a$.*

*y llamamos[8] conjunto **acotado superiormente o inferiormente** a los que tienen cota superior o inferior respectivamente.*

La definición anterior da un respaldo riguroso y preciso de lo que significa "no dejarse ningún valor fuera". En consecuencia, para poder hablar de ínfimo o supremo inequívocamente, queda definir qué significa eso de "no hay otra cota más cerca" ¿Cómo lo hacemos? De la misma manera que en el ejemplo del inicio de la sección: si estamos hablando de una cota superior, ser la mejor es que cualquier otra cota sea más "superior" que ella (el caso de cotas inferior sería análogo).

Definición 2.15 (Ínfimos y Supremos)
Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío, decimos que:

- *$S \in \mathbb{R}$ es **supremo** de A si y sólo si es cota superior y cualquier otra cota $M \in \mathbb{R}$ es mayor o igual que S.*
- *$s \in \mathbb{R}$ es **ínfimo** de A si y sólo si es cota inferior y cualquier otra cota es $m \in \mathbb{R}$ es menor o igual que s.*

[8] Cuando simplemente decimos que está acotado, estamos diciendo que lo está tanto superiormente como inferiormente.

y si $\sup A = S \in A$ *o el* $\inf A = s \in A$*, los llamamos* ***máximo y mínimo*** *respectivamente.*

Y, como ya no hay lugar a dudas sobre a qué nos referimos cuando decimos ínfimo y supremo, lo que toca es justificar que éstos existen y son únicos cuando trabajamos con conjunto acotados (pues si hay supremo o ínfimo ya son cotas para el conjunto). La primera no es un teorema sino que es uno de los axiomas fundamentales de las matemáticas, la existencia por contra sí que es demostrable con las herramientas que tenemos.

Teorema 2.6 (Axioma del supremo)
Sea $A \subset \mathbb{R}$ *un subconjunto no vacío y acotado superiormente, entonces existe el supremo.*

Observación 2.4:
Como hemos comentado, la propiedad anterior es una de las propiedades fundamentales del cuerpo de los números reales y lo diferencia de muchos otros. Por ejemplo, en $\mathbb{Q}$ el axioma no es cierto porque el conjunto: $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ está acotado tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{Q}$, pero su supremo $\sqrt{2}$ sólo[9] existe en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.12
Sea $A \subset \mathbb{R}$ *un subconjunto no vacío y acotado superiormente, entonces el supremo es único.*

Demostración:
Supongamos que $S_1 \neq S_2$ son ambos supremos de A, luego $S_1 < S_2$ o $S_1 > S_2$. Si suponemos que $S_1 < S_2$, como S_1 es cota superior de A y S_2 es supremo, $S_2 \leq S_1$ y por tanto llegamos a absurdo. El mismo argumento intercambiando S_2 por S_1 tiene el igual resultado. □

Observación 2.5:
A alguno puede molestarle que se haya demostrado demostrado existencia y unicidad únicamente para el supremo y ya no sólo para estas dos cuestiones, sino que en el resto del documento se suela hablar únicamente de supremo. El motivo es que un conjunto y su ínfimo se pueden transformar en otro conjunto y su supremo sin más que multiplicar todos los elementos involucrados por -1 (pues ya vimos que esto invierte las desigualdades), es decir, todo lo demostrado para supremos por extensión se puede considerar cierto para ínfimos.

Aunque la definición que hemos dado antes es muy lógica e intuitiva para formalizar lo que son estos dos conceptos, a la hora de trabajar con ella no queda muy claro cómo podemos demostrar que un candidato concreto es efectivamente supremo o ínfimo. Por eso, vamos a dar las siguientes caracterizaciones que se dejan manejar más fácilmente en la práctica.

Proposición 2.13 (Caracterización del supremo)
Sea $A \subset \mathbb{R}$ *un subconjunto no vacío y acotado superiormente, el número* $S \in \mathbb{R}$ *es supremo si y sólo si verifica las siguientes propiedades:*

1. $\forall y < S,\ \exists a \in \mathbb{A} : y < a \leq S$.
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : S - \varepsilon < a \leq S$.

Demostración:
1. Demostramos la doble implicación:
   - "$\Rightarrow$":
     Sea $y \in \mathbb{R} : y < S$, supongamos que no existe:
     $$\forall a \in A : a \leq y \vee S < a \Rightarrow \text{como S es cota superior} \Rightarrow a \leq y \Rightarrow y \text{ es cota superior } \#$$
     Porque si y es cota superior, $S \leq y$ luego absurdo.

[9] Veremos más adelante por qué hay infinitos racionales tan cerca como se quiera del valor $\sqrt{2}$.

- "$\Leftarrow$":
  Sea $M \in \mathbb{R}$ una cota superior de A, suponemos lo contrario a que $S \leq M$:
  Si $M < S \Rightarrow \exists a \in A : M < a \leq S$ #, porque si M es cota superior, no puede haber ningún elemento de A que sea mayor que él.

2. Supongamos que no: $\forall a \in A : a < S - \varepsilon \vee S < a$. Si $S < a \Rightarrow S$ no es supremo, por lo tanto # y si $S - \varepsilon > a : \forall a \in A \Rightarrow S - \varepsilon$ es supremo # □

Proposición 2.14
Sea $A \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset$ un conjunto acotado inferiormente, el número $s \in \mathbb{R}$ es ínfimo si y sólo si:

1. $\forall y > s,\ \exists a \in \mathbb{A} : s \leq a < y.$
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : s \leq a < s + \varepsilon.$

Demostración:
1. Demostramos la doble implicación:
   - "$\Rightarrow$":
     Sea $y \in \mathbb{R} : s < y$, si suponemos que no existe, entonces: $\forall a \in A : a < s \vee y \leq a \Rightarrow$ como s es cota inferior $\Rightarrow y \leq a \Rightarrow y$ es cota inferior de A $\Rightarrow y \leq s$ #.
   - "$\Leftarrow$":
     Sea $m \in \mathbb{R}$ una cota inferior de A, suponemos lo contrario a que $s \geq m$:
     Sea m cota inferior de A, si $s < m \Rightarrow \exists a \in A : s \leq a < m$ #, porque m es cota inferior.
2. Suponemos que:

$$\exists m \in \mathbb{R} : m \leq a : \forall a \in A \Leftrightarrow -m \geq -a \Leftrightarrow -m \text{ es cota superior de B} = \{-a : a \in A\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists S \text{ supremo de B} : -a \leq S \Rightarrow a \geq -S$$

   Aquí vemos que $-S$ es el ínfimo de A porque $-S$ es cota inferior de A y probamos que además es la mayor de las cotas inferiores, es decir, probamos $m \leq -S$:
   Sea m una cota inferior de A, $m \leq -S$, porque si no lo fuese: $-S < m \leq a \Rightarrow S > -m \geq -a \Rightarrow -m$ es cota superior de B, # porque S es el supremo de B. □

Observación 2.6:
Cuando un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío es no acotado, solemos denotarlo empleando $sup(A) = +\infty$ y $inf(A) = -\infty$.

Proposición 2.15
Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto real y $S \subset A$ un subconjunto suyo, entonces:

$$\sup S \leq \sup A \qquad\qquad \text{ínf } S \geq \text{ínf } A$$

Cuando avancemos en el documento veremos que el supremo y el ínfimo están muy presentes en el resto de capítulos (aunque sea de forma intrínseca), pero para ir abriendo boca e identificar la importancia que tiene vamos a ver que toman un papel crucial en aspectos tan básicos del Análisis como justificar que siempre existe la raíz enésima de un número.

Teorema 2.7 (de la existencia de raíces)
Sea $a \in \mathbb{R} : a > 0$ y $n \in \mathbb{N} : n \geq 2$, entonces $\exists! r > 0 : r^n = a$.

Demostración:
1. Demostramos primero la unicidad:
   Supongamos que hay 2: $r_1 \neq r_2$, podemos suponer entonces que: $r_1 < r_2 \Rightarrow r_1^n < r_2^n$ # porque $a < a$ es absurdo.

2. Demostramos la existencia:
Definimos el conjunto $A = \{x > 0 : x^n \leq a\}$, demostramos que $A \neq \emptyset$

$$\frac{a}{1+a} < a \text{ y del mismo modo: } \frac{a}{1+a} < 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{1+a}\right)^n < \frac{a}{1+a} < a \Rightarrow \frac{a}{1+a} \in A$$

Ahora vemos que A es acotado superiormente, para ello distinguimos dos casos:

- $a \leq 1 \Rightarrow M = 1$ es una cota superior de A porque si no lo fuese:
$$\exists x \in A : x > 1 \Rightarrow x^n > 1 \geq a \Rightarrow \#$$
- $a > 1 \Rightarrow M = a$ es cota superior de A, porque si no lo fuese:
$$\exists x \in A : x > a > 1 \Rightarrow x^n > a^n > a \Rightarrow \#$$

Al estar acotado superiormente, por la propiedad de supremo entonces: $\exists r = sup(A) > 0$.

3. Queda solo demostrar $r^n = a$, para ello suponemos que $r^n < a$ y que $r^n > a$ y en ambos casos debemos llegar a una contradicción.

- Caso: $r^n < a \Rightarrow \exists h > 0 : (r+h)^n < a$, donde cogemos un $0 < h < 1$:
$$(r+h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j} = r^n + h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j-1} \overset{h^x \leq 1}{\leq} r^n + h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j =$$
$$= r^n + h\left[(r+1)^n - r^n\right]$$
[10]
Ahora buscamos un h que satisfaga:
$$r^n + h\left[(r+1)^n - r^n\right] < a \Rightarrow h < \frac{a - r^n}{(r+1)^n - r^n}$$
Luego puedo elegir un $0 < h < \frac{a-r^n}{(r+1)^n - r^n}$ y $h < 1$, porque entre dos positivos hay infinitos números.
Como existe dicho valor de h, llegamos a una contradicción porque que $(r+h)^n < a$ implica que $r + h \in A$, pero no puede ser porque r es el supremo del conjunto y $r + h > r > x \in A = r + h \Rightarrow \#$.

- Caso: $r^n > a \Rightarrow \exists h > 0 : (r-h)^n > a$, tratamos ahora de demostrar por reducción al absurdo que $r - h$ es una cota superior, para llegar a una contradicción:
$$\exists x \in A : x > r - h \Rightarrow x^n \geq (r-h)^n \Rightarrow a \geq x^n \geq (r-h)^n > a$$
Para que dicha contradicción sea posible es necesario verificar que existe algún valor de h que verifica lo anterior, por lo que tomamos un $h : 0 < h < 1$, entonces:
$$(r-h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j (-h)^{n-j} = r^n + h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j (-1)^{n-j} h^{n-j-1} \geq$$
$$\overset{\text{todos } -}{\geq} r^n - h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j-1} \overset{h=1 \text{ resta más}}{\geq} r^n - h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j = r^n - h\left[(r+1)^n - r^n\right]$$
Ahora buscamos un h que satisfaga lo anterior:
$$r^n - h\left[(r+1)^n - r^n\right] > a \Leftrightarrow r^n - a > h\left[(r+1)^n - r^n\right] \Leftrightarrow 0 < h < \frac{r^n - a}{(r+1)^n - r^n} \text{ donde } h \leq 1$$
Por lo que al poder encontrar un h que satisfaga dicha expresión llegamos a una contradicción porque que $(r-h)^n > a$ implica que $r - h$ es cota superior de A, pero no puede ser porque r es el supremo del conjunto y $r - h$ sería una cota superior, inferior al supremo r. □

[10] $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j = [(r+1)^n - r^n]$, despejando el sumatorio de la expresión: $(r+h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j}$, cuando $h = 1$

Por último, vamos comentar un resultado debido a Cantor que nos será útil de vez en cuando en el resto del documento y que precisamente se apoya en las nociones de supremo e ínfimo que hemos comentado para su demostración.

Definición 2.16 (Intervalos Encajados)
*Sea F una familia de intervalos cerrados, es decir, $F = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $I_n = [a_n, b_n]$, decimos que es de **intervalos encajados** si y sólo si:*

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n > m : I_n \subset I_m$$

que también puede expresarse como:

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n$$

Teorema 2.8 (Principio de intervalos encajados de Cantor)
Sea $F = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos cerrados y encajados, entonces:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\xi, \eta] \neq \emptyset$$

donde $\xi = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\eta = inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración:
Llamamos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, veamos que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$:

$$\text{Si } n \geq m \Rightarrow I_n \subset I_m \Leftrightarrow [a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \Rightarrow a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$$

$$\text{Si } m > n \Rightarrow I_m \subset I_n \Rightarrow [a_m, b_m] \subset [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$$

Lo que demuestra que cualesquiera que sean los intervalos elegidos, el extremos izquierdo de uno de ellos siempre es menor que el extremos derecho del del otro.

Esto quiere decir que: $\forall n \in \mathbb{N} : b_m$ es cota superior del conjunto A, por lo que $\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi = sup(A)$, y además $\xi \leq b_m : \forall m \in \mathbb{N}$, pero esto mismo afirma que ξ es cota inferior de B, en consecuencia: $\exists \eta \in \mathbb{R} : \eta = inf(B)$ y además, $\xi \leq \eta$.

Veamos que: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\xi, \eta] \neq \emptyset$:

- "$\subset$":

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Leftrightarrow a_n \leq x \leq b_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ es cota superior de A} \Rightarrow x \geq \xi \\ x \text{ es cota inferior de B} \Rightarrow x \leq \eta \end{cases} \Rightarrow x \in [\xi, \eta]$$

- "$\supset$":

$$x \in [\xi, \eta] \Leftrightarrow a_n \leq \xi \leq x \leq \eta \leq b_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq x \leq b_n \Rightarrow x \in [a_n, b_n] = I_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

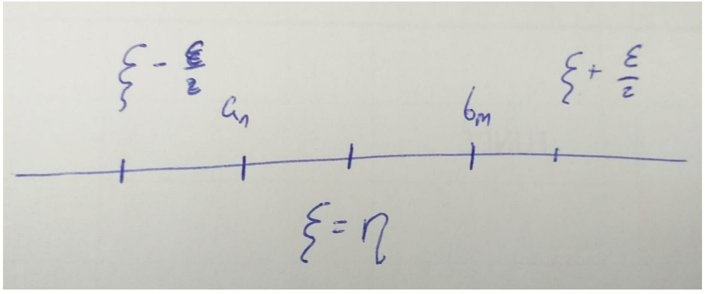
Observación 2.7:
Del teorema anterior deducimos que $\xi \leq \eta$.

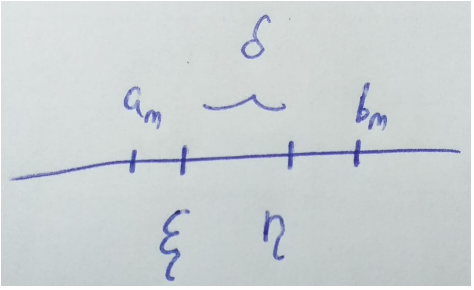
Corolario 2.8.1
Sea $F = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos cerrados y encajados, entonces[11]:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ es un único número} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : l(I_n) < \varepsilon$$

[11] Si $I = [a, b]$, entonces su longitud es $l(I) = b - a$

Demostración:
Por el teorema demostrado: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\xi, \eta]$, por lo que es un único número $\Leftrightarrow \xi = \eta$:

- "$\Rightarrow$":
$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \wedge \xi = sup(A) \overset{Prop.Sup}{\Rightarrow} \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a_n \leq \xi$$
Pero como además, $\xi = \eta = inf(B)$:
$$\exists m \in \mathbb{N} : \xi \leq b_m < \xi + \frac{\varepsilon}{2}$$


    - Ahora, si $n \geq m \Rightarrow I_n \subset I_m \Leftrightarrow a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$, entonces:
    $$l(I_n) = b_n - a_n \leq b_m - a_n \leq \xi + \frac{\varepsilon}{2} - a_n < \xi + \frac{\varepsilon}{2} - \xi + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
    - Por último, si $n < m \Rightarrow I_m \subset I_n \Leftrightarrow a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$, entonces:
    $$l(I_m) = b_m - a_m < \xi + \frac{\varepsilon}{2} - a_m \leq \xi + \frac{\varepsilon}{2} - a_n < \xi + \frac{\varepsilon}{2} - \xi + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
- "$\Leftarrow$": supongamos que $\xi < \eta$


$$\xi < \eta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi < \eta \leq b_n \Rightarrow l(I_n) = b_n - a_n \geq \eta - a_n \geq \eta - \xi = \delta > 0 \Rightarrow \ \#$$
Por que entonces decimos que los intervalos no son de la longitud que queramos porque tiene que ser mayores que un valor δ determinado. □

Observación 2.8:
Si los intervalos no son cerrados, el teorema no es cierto pues, por ejemplo, si consideramos la familia $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ $n \in \mathbb{N}$ de intervalos abiertos, vemos que son encajados
$$x \in I_{n+1} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) = I_n$$
pero su intersección es vacía porque
$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : 0 < x < \frac{1}{n} \Rightarrow \nexists x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$
debido a que los naturales no tienen cota superior.

Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

En la anotación de pie de página de la página 23, se comentaba que, escogido cualquier número real, podemos encontrar un racional tan cerca como queramos del mismo. Esta propiedad se cumple no sólo para los racionales sino también para los irracionales y es lo que se conoce como **densidad** de estos conjuntos en el conjunto de los reales.

Este concepto tiene relevancia porque nos da la certeza de que siempre habrá ciertos individuos *tan cerca como queramos* de un valor real y esto cobra especial importancia cuando se habla de límites y continuidad.

En lo que sigue de subsección, vamos a desarrollar una serie de resultados que progresivamente van a construir el conjunto de herramientas que usaremos para terminar demostrando la propiedad que da nombre al apartado.

Teorema 2.9 (Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$)
Para todo $x \in \mathbb{R}$ positivo, existe $n \in \mathbb{N}$ mayor que él, es decir, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

Demostración:
Supongamos lo contrario, $\exists x > 0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x \Rightarrow \exists S = sup(\mathbb{N})$, entonces por ser supremo: $\exists m \in \mathbb{N} : S - 1 < m \leq S \Rightarrow S < m + 1$, pero como $m + 1 \in \mathbb{N}$ es absurdo. $\square$

Observación 2.9:
Conocer que el conjunto de los naturales no está acotado superiormente nos va a dar alas para cuando se nos pregunte por las cotas de conjuntos donde se involucren variables enteras, pues en muchas ocasiones bastará con llegar al absurdo de que los naturales están acotados para demostrar lo que queramos.

Teorema 2.10 (Propiedad Arquimediana del producto)
Sean $x, y \in \mathbb{R} : x > 1,\ y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} : x^n > y$, incluso:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : y > 0,\ x > 1 : \exists! n \in \mathbb{N} : x^n < y \leq x^{n+1}$$

Demostración:
Supongamos que no:

$\exists y > 0, x > 1 : \forall n \in \mathbb{N} : y > x^n \Rightarrow \{x^n\}$ es acotado sup. $\Rightarrow \exists \sup = S \Rightarrow S - \varepsilon < x^m \leq S : \forall \varepsilon > 0 : \exists m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

Si soy capaz de encontrar un epsilon que verifique que $x^m + \varepsilon < x^{m+1}$ entonces ya tendría una contradicción porque como $S < x^m + \varepsilon < x^{m+1}$ tendríamos una potencia que sería mayor que el supremo.

$$\Rightarrow S < x^m + \varepsilon < x^{m+1} \Rightarrow \varepsilon < x^{m+1}(x - 1)$$

Si escogemos un $\varepsilon < x - 1 \Rightarrow \varepsilon > 0$ entonces lo anterior se verifica, así que como sí que existe un ε positivo que cumple que $x^m + \varepsilon < x^{m+1}$ tenemos una contradicción. $\square$

Proposición 2.16

1. *Si $x < 0 \in \mathbb{R}$, entonces $\exists m \in \mathbb{Z} : m < x$, es decir, que $\mathbb{Z}$ no está acotado inferiormente.*
2. *Si $x, y \in \mathbb{R} : x, y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} : y < nx$.*
3. *Si $x > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$*
4. *Si $x > 0$, entonces $inf\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$*
5. *Si $x < 0$, entonces $sup\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$*

6. *Si* $x > 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! n \in \mathbb{N} : n-1 \leq x < n$*, en otras palabras:*

$$[0,\infty) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [n-1,n)$$

7. *Análogamente, si* $x > 0$*, entonces* $\exists! n \in \mathbb{N} : n-1 < x \leq n$*, en otras palabras:*

$$(0,\infty) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (n-1,n]$$

8. *Si* $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : m-1 \leq x < m$*, en otras palabras:*

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}} [m-1,m)$$

9. *Análogamente, si* $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : m-1 < x \leq m$*, en otras palabras:*

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}} (m-1,m]$$

10. *Si* $x > 0$ *y* $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : (m-1)x \leq y < mx$*, en otras palabras:*

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}} [(m-1)x, mx)$$

11. *Análogamente, si* $x > 0$ *y* $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : (m-1)x < y \leq mx$*, en otras palabras:*

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}} ((m-1)x, mx]$$

Demostración:

1. $$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \overset{P.A.}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : -x < n \Leftrightarrow x > -n \in \mathbb{Z}$$

2. $$\frac{y}{x} > 0 \overset{P.A.}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \frac{y}{x} < n \Leftrightarrow y < nx$$

3. $$\frac{1}{x} > 0 \overset{P.A.}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{x} < n \Leftrightarrow x > \frac{1}{n}$$

4. $$0 \text{ es cota inferior de } \left\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = A \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{n} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists inf(A) = s \geq 0$$
$$\text{Si } s > 0 \Rightarrow 0 < s \leq \frac{x}{n} \Leftrightarrow n \leq \frac{x}{s} \Rightarrow \# \text{ porque los naturales no tiene cota superior}$$

5. $$0 \text{ es cota superior de } \left\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = A \Rightarrow 0 \geq \frac{x}{n} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists sup(A) = S \leq 0$$
$$\text{Si } S < 0 \Rightarrow S \geq \frac{x}{n} \Rightarrow \frac{x}{S} \geq n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \# \text{ porque los naturales no tiene cota superior}$$

6. Si $x > 0$, sea $A = \{m \in \mathbb{N} : x < m\} \neq \emptyset$, entonces por la propiedad de Buen Orden, A tiene un primer elemento definido como $n \in A$, que implica que $x < n$
$$\begin{cases} n = 1 & \Rightarrow 0 \leq x < 1 = n \\ n \neq 1 & \Rightarrow n-1 \notin A \Leftrightarrow n-1 \leq x < n \end{cases}$$
Ahora demostramos la unicidad:
$$k \in \mathbb{N} : k-1 \leq x < k \Rightarrow \begin{cases} k-1 \notin A \\ k \in A \end{cases} \Rightarrow k \text{ es el primer elemento} \Rightarrow k = n$$
Ahora demostramos la doble inclusión para demostrar que la unión de esos intervalos es el otro:

- "$\supset$"

$$\forall n \in \mathbb{N} : [n-1, n) \subset [0, \infty) \Leftrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n) \subset [0, \infty)$$

- "$\subset$"

$$x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow x \in [0, 1) \\ x > 0 & \Rightarrow \exists! n \in \mathbb{N} : [n-1, n) \end{cases} \Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n)$$

Por último hay que ver que son disjuntos dos a dos:

$$n, m \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow n < m \Rightarrow n+1 \leq m \Rightarrow n \leq m-1 \Rightarrow [n-1, n) \cap [m-1, m) \neq \emptyset$$

Esto es así porque $x \in [n-1, n) \Rightarrow x < n$ y $x \in [m-1, m) \Rightarrow x \geq m+1$, todo implica que $m - 1 < n$ #

7. Análoga a la anterior.

8. $$x \geq 0 \Rightarrow \exists! n \in \mathbb{N} : n-1 \leq x < n$$

   $$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow \exists! n \in \mathbb{N} : n-1 < -x \leq n \Leftrightarrow -n \leq x < -(n-1) \Leftrightarrow m-1 = -n \leq x < -n+1 = m$$

   El resto de la demostración es como en los puntos anteriores

9. Igual que antes

10. $$\frac{y}{x} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : m-1 \leq \frac{y}{x} < m \Rightarrow (m-1)x \leq y < mx$$

Teorema 2.11 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)
Sean $a, b \in \mathbb{R} : a < b$, entonces $\exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$, es decir:

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

y de hecho hay infinitos.

Demostración:
Llamamos a $h = b - a > 0$, por la propiedad arquimediana, $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < h$ y además, $\exists m \in \mathbb{Z} : m \leq a \cdot n < m + 1$. Entonces ocurre que:

$$a < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + h = b$$

Con lo cual el número racional que buscábamos es $r = \frac{m+1}{n}$. □

Teorema 2.12 (Densidad de los Irracionales en $\mathbb{R}$)
Si $a, b \in \mathbb{R} : a < b$, entonces $\exists x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : a < x < b$, en otras palabras:

$$(a, b) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

Demostración:

$$a < b \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : \frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow a < \sqrt{2} r < b$$

Y es fácil ver que $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. □

Definición de la exponencial real

El concepto de ínfimo y supremo es tan esencial que aparece en cuestiones absolutamente básicas desde el punto de vista analítico, como por ejemplo la exponencial.

Si uno se pregunta que significa a^2, evidentemente hallará como respuesta que se trata de $a \cdot a$. Si se complica un poco la pregunta, el valor $a^{3/2}$ será interpretado como $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$. Pero si uno se pregunta a sí mismo qué es lo que queremos decir cuando decimos a^π probablemente se quede sorprendido consigo mismo por haber usado con asiduidad la exponencial y no enteder a qué se refiere tal expresión.

Para poder definir lo que significa la expresión a^x siendo $a, x \in \mathbb{R}$, primero debemos entender que

$$x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = \text{ínf}\{r \in \mathbb{Q} : r > x\}$$

para después definir la exponencial real como

$$a^x = \sup\{a^r : r < x\} = \text{ínf}\{a^r : r > x\}$$

Lógicamente en este pequeño argumentario hemos omitido gran cantidad de pasos importantes: demostraciones de las operaciones con potencias y de los resultados para raíces, demostración de la coherencia de la definición con las versiones para x entero y racional... No obstante, la disquisición anterior sirve como ejemplo para justificar la importancia que tienen conceptos tan sencillos como son el supremo y el ínfimo.

SUCESIONES Y SERIES

No es raro que algunos de nosotros hayamos visto en algún momento de nuestra vida algún ejercicio de completar la secuencia como el siguiente:

$$1, 1/2, 1/4, 1/8, ???$$

Si prolongamos esta secuencia de forma indefinida tendremos lo que se conoce como una *sucesión* numérica. Sin embargo, las sucesiones no tienen por qué seguir ningún patrón concreto: la secuencia $1, 3, 27, -1, -2, \ldots$ también corresponde a una sucesión. Las series, a su vez, veremos que no son más que sucesiones en las que cada término es una suma acumulada a la que se le ha añadido algo más, pero todo a su tiempo.

Las sucesiones y las series son una parte muy importante del curso porque están presentes en cosas muy básicas (la definición de la exponencial real), pero facilitan y fundamentan cosas más complejas (como la caracterización de la continuidad de las funciones reales). Además, también tiene gran interés en ser estudiadas como un fin en sí mismo. Multitud de situaciones de la vida real se rigen por sucesiones númericas y conocer las virtudes y defectos de la mismas nos permite trasladar el conocimiento a todas estas áreas.

SUCESIONES

Como ya hemos comentado al inicio del capítulo, el primero de los nuevos objetos matemáticos que vamos a estudiar son las sucesiones. Una sucesión de elementos de un conjunto es una lista infinita y numerada de elementos del mismo que se puede entender como una función "discretizada". El término discretizada se utiliza porque, a diferencia de sus primas hermanas las funciones reales donde el término x puede tomar cualquier valor real, en nuestro caso la variable se denotará n para indicar que sólo puede tomar valores enteros, esto es, discretos.

Definición 3.1 (Sucesión)
Sea M un conjunto no vacío, definimos una ***sucesión de elementos***[1] ***de*** *M como una función:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to M \\ n &\longmapsto x_n \end{aligned}$$

y la denotaremos por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$

Si nos fijamos la notación anterior es muy adecuada, pues, a pesar de tratarse de una función, en el fondo estamos determinando una lista numerada de elementos que se escribiría de la siguiente manera:

$$\{f(1), f(2), f(3), \ldots\} \Leftrightarrow \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

[1] Si $M = \mathbb{R}$ entonces decimos que se trata de una **sucesión numérica**.

Cuando ya hemos diseñado con exactitud el nuevo objeto matemático ¿qué es lo que toca hacer? Efectivamente, describir como se comporta dicho objeto con respecto a las operaciones habituales que nos parece razonable hacer sobre el mismo. En nuestro caso, como se trata de sucesiones numéricas, lo suyo sería describir cómo se comportan las sucesiones con respecto a las operaciones que constituyen el cuerpo de los reales.

Definición 3.2 (Operaciones con sucesiones numéricas)
Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ dos sucesiones numéricas, definimos las operaciones entre ellas de la siguiente manera:

- ***Suma**: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$*
- ***Producto por un escalar**: Sea $a \in \mathbb{R} : a \cdot \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a \cdot x_n\}_{n=1}^{\infty}$*
- ***Producto de sucesiones**: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$*
- ***Cociente de sucesiones**: $\frac{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}{\{y_n\}_{n=1}^{\infty}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$*

Observación 3.1:
Como hemos reducido las operaciones entre sucesiones a operaciones entre sus elementos igualmente numerados, éstas heredan las propiedades que tenían los números reales con estas operaciones (asociativa, distributiva, ...).

Lo relevante de este asunto, aunque a priori no se entienda de momento del todo, es que esta definición confiere a las sucesiones numéricas de estructura de **espacio vectorial** y para quien haya estudiado Álgebra Lineal permite utilizar los enunciados de esta disciplina para trabajar con sucesiones.

Convergencia

Si retomamos la sucesión de la introducción del capítulo podemos ver que conforme los valores de n aumentan, es decir, conforme avanzamos en la sucesión los elementos de la misma cada vez son más próximos a 0.

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

Esta aproximación hacia un valor es lo que conocemos como *convergencia* o *límite* de una sucesión. Sin embargo y como todo, precisamos una definición formal para clarificar que significa eso de "acercarse". Para ver esta necesidad de formalismos, ¿serías capaz de decir si la siguiente sucesión converge? ¿A qué valor?

$$\frac{1}{1}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, \dots$$

Definición 3.3 (Convergencia)
*Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión numérica, decimos que ésta **converge o tienen límite en** $l \in \mathbb{R}$ si y sólo si:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) = E(l, \varepsilon) = |x_n - l| < \varepsilon$$

y lo denotaremos por $x_n \xrightarrow{n \to \infty} l$ o $\lim_{n \to \infty} x_n = l$.

Vamos a desentrañar bien qué quiere decir la definición anterior utilizando como ejemplo la sucesión $\{1/2^n\}_{n=0}^{\infty}$ del capítulo. Como intuitivamente sabemos que el límite es 0, el enunciado dice que para cualquier ε que escojamos existirá un término de la sucesión a partir del cual todos los demás estén dentro del entorno $E(0, \varepsilon)$.

Por tanto, si por ejemplo escogemos $\varepsilon = 1/15$ vemos que el n_0 a partir del cual todos los $n \geq n_0$ están dentro del entorno es el $n_0 = 4$ porque el $1/2^4 = 1/16$ es el primer término que está dentro

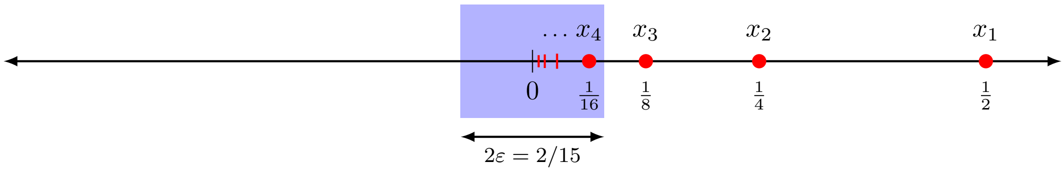


Figura 3.1: Representación de la convergencia de la sucesión $\{1/2^n\}_{n=1}^{\infty}$.

y a partir del cual TODOS los términos de la sucesión nunca vuelven a estar más lejos de $1/15$ unidades. Esto que se ha hecho para $\varepsilon = 1/15$ se puede hacer para cualquier valor que se desee y de nuevo encontraremos otro término de la sucesión que caerá dentro del intervalo, etc. Es lo que decíamos intuitivamente de “acercarse infinitamente”.

Observación 3.2:
Nótese que la sucesión de la introducción del subapartado no converge ni a 0 ni a 1 ni a ambos a la vez. Si escogemos 0 como límite, siempre tendremos términos (los impares que van al 1) que no estarán dentro de su entorno $E(0, \varepsilon)$ y análogamente ocurre con el 1. Claramente no podemos tomar los dos límites a la vez porque se nos escapan, por un motivo u otro, los términos que convergen al otro valor.

Este hecho de que no pueda haber varios límites porque si la sucesión se acerca infinitamente a uno necesariamente no puede acercarse también infinitamente al otro (porque si no ambos límites estarían infinitamente cerca, es decir, serían el mismo) no es algo aislado. Es precisamente lo que demuestra la *Unicidad del límite*.

Proposición 3.1 (Unicidad del límite)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente, entonces el límite de convergencia es único.

Demostración:
Supongamos que existen dos:

$$\exists l_1, l_2 : \lim_{n\to\infty} x_n = l_i$$

Como son dos números reales $l_1 < l_2$, tomamos $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$, con esto sabemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : |x_n - l_1| < \varepsilon$ y también $\exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall n > m_0 : |x_n - l_2| < \varepsilon \Rightarrow n \geq max\{n_0, m_0\} \Rightarrow x_n \in E(l_1, \varepsilon) = (l_1 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) \wedge x_n \in E(l_2, \varepsilon) = (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$, estos conjuntos deben ser disjuntos pensando en el dibujo mental, así se ve que: $l_1 + \varepsilon \leq l_2 - \varepsilon$ concretamente $=$ porque $2\varepsilon = l_2 - l_1 \Rightarrow \#$ □

En la figura 3.1, podemos observar un dato curioso: toda la sucesión salvo un número finito de términos cabe en un intervalo centrado en el límite. Esto quiere decir que la gran mayoría de la sucesión está acotada (porque cabe en el intervalo) y el resto de términos que no caben es un conjunto finito, luego podemos escoger el mayor distancia tenga al límite y entonces TODA la sucesión cabe en ese intervalo grande. Por tanto, los términos de una sucesión convergente forman un conjunto acotado.

Proposición 3.2 (Acotamiento por convergencia)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión convergente, entonces $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$, es decir, está acotada.

Demostración:
Sabemos que l es el límite de la sucesión así que sabemos que $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon$. Tomamos $\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < 1 \Rightarrow |x_n| - |l| \leq |x_n - l| < 1 \Rightarrow |x_n| \leq 1 + l : \forall n \geq n_0$$

Demostrado los valores de $n \geq n_0$, tenemos que demostrar que se cumple para $n = 1, 2, 3, ..., n_0 - 1$, que como es un conjunto finito podemos decir que uno de ellos es el mayor de todos y en consecuencia $\exists \tilde{M} > 0 : |x_n| \leq \tilde{M} : \forall n = 1, 2, ..., n_0 - 1$.

De este modo, nuestro número $M = max\{\tilde{M}, 1 + l\}$ □

Observación 3.3:
El recíproco, es decir, que un conjunto de términos de una sucesión que esté acotado debe converger, no es cierto y para verlo vamos a poner un contraejemplo. Tomemos la sucesión $\{x_n = (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ y supongamos que existe un l al que converge, es decir, tal que:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon$$

Si n es par, $|1-l| < \varepsilon$ y si n es impar, $|-1-l| < \varepsilon$. Tomando entonces $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se tiene que $|1-l| < \frac{1}{2}$ y $|-1-l| < \frac{1}{2}$, luego $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap (\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}) = \emptyset$ así que es absurdo.

Hasta ahora no lo hemos hecho, pero realmente la única forma que tenemos por el momento de calcular los límites de una sucesión es con la propia definición que es, cuanto menos, engorrosa. Una forma de facilitar las cosas sería saber si las operaciones entre sucesiones se pueden extender a los límites que estas tengan porque, de serlo, reduciría el cálculo de límites de sucesiones complejas al cálculo en sucesiones más sencillas y luego simplemente operar.

Proposición 3.3 (Operaciones con sucesiones convergentes)
Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ sucesiones convergentes a x e y respectivamente, entonces:

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $x+y$
$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y$$
2. *Si* $a \in \mathbb{R}$, *entonces* $a \cdot \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $a \cdot x$
$$\lim_{n\to\infty} a \cdot x_n = a \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a \cdot x$$
3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $x \cdot y$
$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = x \cdot y$$
4. *Si* $x \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq 0 : x_n \neq 0$ *y entonces* $\frac{\{y_n\}_{n=1}^{\infty}}{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ *converge a* $\frac{y}{x}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{y}{x}$$
5. $\{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $|x|$
$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| = |x|$$

Demostración:

1. Queremos ver que para $\forall \varepsilon > 0 : |(x_n + y_n) - (x+y)| < \varepsilon$:
$$|(x_n + y_n) - (x+y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$
Para ello sabemos que como $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0^1 : \forall n \geq n_0^1 : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ y que $\exists n_0^2 : \forall n \geq n_0^2 : |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, pero hay que garantizar que esto ocurra eligiendo el elemento correcto:
$$n_0 = max\{n_0^1, n_0^2\} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \wedge n \geq m_0 \Rightarrow |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$$
Porque $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$.

2. Suponiendo[2] $a \neq 0$ y sea $\varepsilon > 0$ queremos probar que $|ax_n - ax| < \varepsilon$:
$$|a \cdot x_n - a \cdot x| = |a \cdot (x_n - x)| = |a| \cdot |x_n - x|$$
$$\Rightarrow |a| \cdot |x_n - x| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$
Pero como sabemos que sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|a|}$, entonces:
$$|a| \cdot |x_n - x| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

[2] $a = 0 \Rightarrow 0 \cdot \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty} = 0$

3. Sea $\varepsilon > 0$, queremos probar que $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$:

   $|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - xy + x_n y - x_n y| = |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|$

   Por la proposición anterior como x_n es convergente, es acotada así que $\exists M > 0 : |x_n| \leq M : \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que:

   $$|x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| < M|y_n - y| + |y||x_n - x|$$

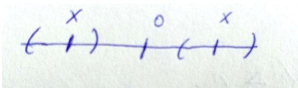
   De este modo como si $y = 0$, entonces:

   $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{M} \Rightarrow M|y_n - y| + |y||x_n - x| = M|y_n - y| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

   Si $y \neq 0$, entonces:
   $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0^1 : \forall n \geq n_0^1 : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|}$ y que $\exists n_0^2 : \forall n \geq n_0^2 : |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow n_0 = max\{n_0^1, n_0^2\} \Rightarrow \forall n \geq n_0 :$

   $$M|y_n - y| + |y||x_n - x| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |y|\frac{\varepsilon}{2|y|} = \varepsilon$$

4. Como hemos probado el producto, basta probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$.
   Como $x \neq 0$:

   $$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$$
   $$\text{Sea } \varepsilon = \frac{|x|}{2} \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \frac{|x|}{2}$$
   $$\text{Vemos que } |x| - |x_n| \leq |x_n - x| < \frac{|x|}{2} \Rightarrow |x| - \frac{|x|}{2} \leq |x_n| : \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow 0 < \frac{|x|}{2} \leq |x_n|$$

   Con esto queda probado que a partir de un cierto índice, los $|x_n|$ son distintos de 0, por lo que puedo decir que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$ es correcto.
   Veamos ahora que $x_n \neq 0, \forall n \geq n_0 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$:

   $$\text{Sea } \varepsilon > 0 \Rightarrow |\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}| = |\frac{x - x_n}{x \cdot x_n}| = \frac{|x - x_n|}{|x||x_n|}$$

   Antes habíamos probado que $0 < \frac{|x|}{2} \leq |x_n| \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Con lo cual para $n \geq n_0$:

   $$\frac{|x - x_n|}{|x||x_n|} \leq \frac{2|x - x_n|}{|x|^2}$$

   Ahora si $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : |x_n - x| < \frac{|x|^2}{2} \cdot \varepsilon$, con lo cual si tomamos como $n_0^1 = \{n_0, N_0\}$ se dan las dos condiciones por lo que:

   $$n \geq n_0^1 \Rightarrow \frac{2|x - x_n|}{|x|^2} < \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{|x|^2}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

5. Sea $\varepsilon > 0$ queremos medir $||x_n| - |x||$, pero sabemos que:

   $$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon$$

   Esto último porque sabemos que dado $\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $\square$

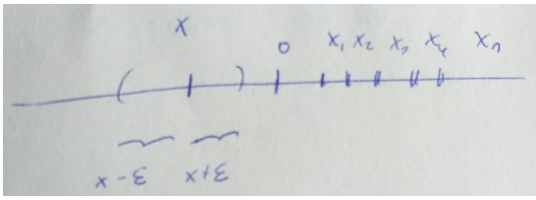
Al igual que tenía sentido preguntarse por el comportamiento de la convergencia ante las operaciones algebraicas de $\mathbb{R}$, tiene sentido preguntarse por su comportamiento ante las propiedades de *orden total* que vimos en el capítulo anterior. Esta vez, no nos servirán tanto (aunque también) para conocer la convergencia, sino para acotar dicha convergencia.

Proposición 3.4 (Convergencia y Orden)
Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ sucesiones convergentes a $x, y \in \mathbb{R}$ respectivamente, entonces:

1. *Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$*
2. *Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \Rightarrow x \leq y$*
3. *Si $\exists a, b \in \mathbb{R}$: y $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq x \leq b : \forall n \in \mathbb{N}$*
4. ***Regla del sandwich**: Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n$ y $x = y$, entonces cualquier sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ que verifique $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq z_n \leq y_n$ es convergente a $x(= y)$.*

Demostración:

1. Si $x < 0$, entonces $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$, cogemos por tanto un epsilon tal que el extremo derecho sea negativo: $x + \varepsilon < 0$, con lo cual $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Rightarrow x_n < x + \varepsilon < 0 \Rightarrow \#$



□

2. Sea $z_n = y_n - x_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que z_n converge a $y - x \Rightarrow y - x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x$
3. Sea $z_n = x_n - a \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$, esta converge a $x - a \overset{1.}{\geq} 0$ y sea $w_n = b - x_n$, esta converge a $b - x \geq 0$, en consecuencia: $b \geq x \geq a \Rightarrow x \in [a, b]$
4. Definimos como $w_n = y_n - x_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$, como converge a $y - x \Rightarrow y - y = 0$, luego el límite es 0. Ahora medimos la distancia entre z_n y x_n:

$$0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n \Rightarrow \{z_n - x_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\infty}{\to} 0 : \forall \varepsilon > 0$$

Esto puede hacerse porque estaba verificado que w_n tendía a cero: dado $\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : w_n < \varepsilon \Rightarrow z_n - x_n < \varepsilon$. Con lo cual si tomamos:

$$z_n = (z_n - x_n) + x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (z_n - x_n) + \lim_{n\to\infty} x_n = 0 + x = x$$

Con respecto a estas relaciones de orden que hemos analizado, falta por observar un caso particular que se produce cuando la sucesión toma valores cada vez más grandes o cada vez más pequeños de forma continuada, es decir, cuando trabajamos con sucesiones que siempre crecen o decrecen.

Definición 3.4 (Monotonía)
*Una sucesión de números de reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, se llama **monótona creciente**[3] si y sólo si:*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$$

*Una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, se llama **monótona decreciente**[4] si y sólo si:*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \leq x_n$$

[3]Decimos que es estrictamente creciente si la desigualdad es estricta
[4]Decimos que es estrictamente decreciente si la desigualdad es estricta

Con la definición que hemos dado hay una cosa que parece casi evidente: si tenemos una sucesión creciente[5] y acotada superiormente esta se va a ir "aplastando" cada vez más hacia esa cota superior. Más concretamente, la *mejor cota* es sobre la que se aplastará cada vez más la sucesión, lo cual motiva el siguiente enunciado.

Proposición 3.5

*Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona creciente y acotada superiormente, entonces es convergente al **supremo** de los elementos de la sucesión.*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow \wedge \text{ es acotada superiormente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} = \sup\{x_n : \forall n \in \mathbb{N}\}$$

*Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente, entonces es convergente al **ínfimo** de los elementos de la sucesión.*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow \wedge \text{ es acotada inferiormente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \inf\{x_n : \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Demostración:

1. $$\text{Acotada superiormente} \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : x_n \leq M : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists l = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

   Por ser supremo, si $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n_0 \in N : l - \varepsilon < x_{n_0} \leq l$, así que:

   $$\forall n \geq n_0 \Rightarrow l - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq l \Rightarrow x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

   No hay contradicción por que aunque nunca se encuentren más allá de l, lo escrito no es mentira y en consecuencia cumplen las premisas de convergencia.

2. $$\text{Por ser acotada inferiormente} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} : m \leq x_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists l = \inf\{x_n : \forall n \in \mathbb{N}\}$$

   Por ser ínfimo, si $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n_0 \in N : l \leq x_{n_0} < l + \varepsilon$, así que:

   $$\forall n \geq n_0 \Rightarrow l < x_n \leq x_{n_0} < l + \varepsilon \Rightarrow x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

   Del mismo modo que antes, se cumplen las premisas de convergencia sin mentir en ningún punto. □

Divergencia

Cuando una sucesión no converge a ningún valor concreto no podemos decir directamente que no converge, hay ciertas diferencias que obligan a hilar un poco más fino. Veamos un ejemplo, si consideramos la sucesión $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ claramente podemos decir que no converge a ningún valor porque simplemente salta de 1 a -1 todo el rato sin saber qué ocurrirá según $n \to \infty$. En contraposición, la sucesión $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ es cierto que no converge a ningún valor *real*, pero ciertamente podríamos decir que está "converge" a ∞ conforme avanza n.

Lo mismo podríamos decir utilizando de ejemplo otra sucesión para $-\infty$ y el caso es que a "converger" a $\pm\infty$ es lo que precisamente conocemos como *divergencia*.

Definición 3.5 (Divergencia)

*Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión numérica decimos que ésta **diverge o tiende a** ∞[6] si y sólo si:*

$$\forall M > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \geq M$$

y lo denotamos por $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

[5] Lo mismo podría decirse de una sucesión decreciente con cota inferior.

[6] Del mismo modo, la definición para la divergencia a menos infinito viene dada por $\forall M > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \leq -M$

Justo antes de empezar con la divergencia hicimos un comentario acerca de la convergencia de sucesiones monótonas que no están acotadas. Una pregunta que nos pudo surgir es la siguiente: ¿y si la sucesión es creciente, pero no está acotada? En ese caso lo que ocurre es que la sucesión crece indefinidamente, es decir, se hace infinitamente grande (pues de lo contrario si habría cota).

Teorema 3.1 (Divergencia y Monotonía)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión numérica, entonces*

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$ *y no acotada superiormente* $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$
2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$ *y no acotada inferiormente* $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Demostración:

1. Sea $M > 0$ como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada superiormente, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : M \leq x_{n_0}$. Si $n \geq n_0 \Rightarrow M \leq x_{n_0} \leq x_n$
2. Sea $M > 0$ como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada inferiormente, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : -M \geq x_{n_0}$. Si $n \geq n_0 \Rightarrow -M \geq x_{n_0} \geq x_n$ □

Corolario 3.1.1
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión numérica, si es divergente entonces no es acotada.*

Nuestros pasos se encaminan a presentar otro enunciado, esta vez incluyendo la divergencia como posibilidad, que nos permita trabajar con los límites con las operaciones permitidas entre sucesiones para simplificar los cálculos. No obstante, primero hay que solucionar un asunto delicado y es que no existe ∞^{-1}, es decir, que dividir por sucesiones divergente de momento no está permitido.

Proposición 3.6
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión numérica, entonces:*

1. *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$
2. *Si* $x_n > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$
3. *Si* $x_n < 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$

Demostración:

1. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ y sea $\varepsilon > 0$, tenemos que probar que $|\frac{1}{x_n} - 0| < \varepsilon$:

$$\text{Sea M} = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n > \frac{1}{\varepsilon} = M \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$$

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ y sea $\varepsilon > 0$, tenemos que probar que $|\frac{1}{x_n} - 0| < \varepsilon$:

$$\text{Sea M} = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n < \frac{-1}{\varepsilon} = -M \Rightarrow \frac{-1}{x_n} < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$$

2. Sea $M > 0$ queremos probar que $\frac{1}{x_n} > M$ de un índice en adelante:

$$\text{Sea } M > 0, \text{ tomamos } \varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n| = x_n < \varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{x_n}$$

3. Sea $M > 0$, queremos probar que $\frac{1}{x_n} < -M$ de un índice en adelante:

$$\text{Sea } M > 0, \text{ tomamos } \varepsilon = \frac{1}{M} > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n| = -x_n < \varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x_n} < -M$$

De esta manera, ya estamos preparados para poder definir cómo se comporta el nuevo elemento $\pm\infty$ con respecto a las operaciones habituales con números reales. Hemos preferido dar este resultado como definición para ahorrar tiempo con demostraciones, pero pensando en que se operan sucesiones cuando operamos sus límites se entiende perfectamente el porqué de cada una de las propiedades.

Definición 3.6 ($\mathbb{R}$ ampliado)
Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, definimos como $\mathbb{R}$ ***ampliado*** *a*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

y extendemos las operaciones habituales de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

1. *Sea $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces $x + \infty = \infty$.*
2. *Sea $x \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$, entonces $x \cdot \infty = \infty$.*
3. *Sea $x \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$, entonces $x \cdot \infty = -\infty$.*
4. *Sea $x \in (0, \infty)$, entonces $\frac{\infty}{x} = \infty$.*
5. *Sea $x \in (-\infty, 0)$, entonces $\frac{\infty}{x} = -\infty$.*
6. *Sea $\infty \leq y$, entonces $y = \infty$.*

Observación 3.4 (Indeterminaciones):
Es importante destacar que en la definición anterior se han excluido ciertas situaciones que se pueden dar en la práctica por las transformaciones algebraicas que utilicemos, concretamente:

$$\boxed{\infty - \infty} \qquad \boxed{0 \cdot \infty} \qquad \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \qquad \boxed{\frac{\infty}{0}}$$

Estas son las conocidas **indeterminaciones** y precisamente llevan ese nombre porque al operar sucesiones dichos límites no siempre se obtiene los mismos resultados y dependen en su totalidad del caso concreto que observemos.

Pues ahora sí, ya tenemos el resultado que nos da la seguridad de poder operar con los límites (esta vez ampliados) tal y como lo veníamos haciendo hasta ahora, eso sí, sin perder de vista las indeterminaciones que se nos han presentado y que no están contempladas como operaciones válidas en $\overline{\mathbb{R}}$

Proposición 3.7 (Operaciones con límites infinitos)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ dos sucesiones convergentes a $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ respectivamente, entonces:

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$
2. *Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to\infty}(a \cdot x_n) = a \cdot x$*
3. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$
5. *Si $x_n \leq y_n \Rightarrow x \leq y$*

Por último, vamos a añadir un par de resultados que simplifiquen la labor de determinar cuál es el límite de la sucesión que tenemos entre manos y que hasta ahora no se habían dado porque no teníamos definida ni la divergencia ni las operaciones entre límites de $\overline{\mathbb{R}}$.

Teorema 3.2 (Criterio del Cociente y la Raíz)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión numérica, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$$

Cabe destacar que el caso en que dichos límites sean exactamente 1 no aporta ningún tipo de información acerca de la convergencia de la sucesión.

Ejemplo 3.1:
Consideremos la sucesión $\{\frac{1}{n^p}{}_{n=1}^{\infty}$ donde $p > 0$ y comprobemos que converge a 0:

$$1 \leq n < n+1 \Rightarrow n^p < (n+1)^p \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p} \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow \{x\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$$

Como es una sucesión decreciente o converge a su ínfimo porque está acotada o diverge a $-\infty$. Desde luego, está acotada por el valor 0 y precisamente es el ínfimo del conjunto de sus términos:

$$\exists \alpha,\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{n^p} : \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n^p \leq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow n \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \#$$

Llegamos a absurdo porque ya comentamos en el teorema 2.9 que los naturales no están acotados superiormente.

Ejemplo 3.2:
Consideremos en este ejemplo la sucesión $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $r \in \mathbb{R}$ haciendo una distinción de casos:

- $r = 0$

  Este caso es muy sencillo, pues la base de la potencia es siempre el 0 y éste elevado a cualquier potencia sigue siendo 0, es decir, $x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

- $r = 1$

  De nuevo, y por el mismo motivo que antes, este caso es muy sencillo porque 1 elevado a cualquier potencia permanece siendo 1, es decir, $x_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

- $0 < r < 1$

  Este caso si requiere de mayor precisión. Primero vemos que la sucesión es decreciente pues las potencias de un valor entre 0 y 1 cada vez son más pequeñas:

  $$r^{n+1} < r^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} < x_n \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$$

  Además, como la sucesión está acotada inferiormente por el 0 su límite es el ínfimo, que de nuevo vuelve a ser este valor:

  $$\exists \alpha,\ 0 < \alpha \leq r^n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{r^n} = \left(\frac{1}{r}\right)^n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \#$$

  Y llegamos a contradicción porque el valor $\frac{1}{r}$ es mayor estrictamente a 1 y el conjunto de valores $\{x^n : x > 1 \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado por el teorema 2.10.

- $r > 1$

  En este caso, tenemos una sucesión creciente de valores, pues:

  $$r^{n+1} > r^n \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$$

  y por la observación que hemos hecho sobre el absurdo final del caso anterior, sabemos de sobra que el conjunto $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotado para $x > 1$, luego $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$.

- $-1 < r < 0$

  En este caso, si tomamos la sucesión en valor absoluto ésta converge a 0 porque vuelve a ser el caso $0 < r < 1$ ya resuelto antes:

$$0 < |r| < 1 \Rightarrow 0 \leq |r^n| = |r|^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |r^n| \leq \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |r^n| = 0$$

  Sin embargo, esto último quiere decir que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : ||r^n|| < \varepsilon$$

  y como $||r^n|| = |r^n|$ tenemos entonces que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

- $r = -1$

  Este caso es el de la sucesión que ha salido en algún ejemplo $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ que no hace más que saltar de un valor a otro entre pares e impares, por lo que no converge a ninguno de ellos.

- $r < -1$

  En este caso, los términos de la sucesión se hacen infinitamente grandes en valor absoluto, por lo que lo lógico sería pensar que la posible convergencia es a ∞, pero como alterna todo el rato entre positivos y negativos cuando cambia paridad en el índice, no podríamos decidirnos entre si es $+\infty$ o $-\infty$.

  Para dar una demostración un poco más formal, vamos a utilizar algo que veremos a continuación en el apartado Subsucesiones:

$$\begin{cases} x_{2k} = r^{2k} = (r^2)^k \overset{n\to\infty}{\to} \infty \\ x_{2k+1} = r^{2k+1} = r^{2k} \cdot r \overset{n\to\infty}{\to} -\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} r^n$$

Ejemplo 3.3:
Consideremos ahora la sucesión $\{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty}$ donde $a > 0$ que en cualquier caso converge a 1:

- $a = 1$

  Ocurre de forma similar al ejemplo anterior, como la raíz de cualquier orden de 1 vuelve a ser 1, el límite es 1, es decir, $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

- Si $a > 1$

  En este caso pasa al contrario de lo que pasaba en el mismo caso para la potencia en lugar de la raíz, la sucesión es decreciente:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$$

  Y como una sucesión decreciente converge a su ínfimo o diverge a $-\infty$, basta con probar ínfimo de dicha sucesión es el 1:

$$\exists m : 1 < m \leq \sqrt[n]{a} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^n \leq a : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \#$$

  porque ya hemos dicho que el conjunto $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotado si $x > 1$.

- $0 < a < 1$

  Para este último caso, vamos a hacer la demostración utilizando las propiedades de operaciones entre límites de sucesiones convergentes:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1}$$

  porque ya hemos probado que $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ converge a 1 al ser $\frac{1}{a} > 1$.

Ejemplo 3.4:
Vamos a probar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, viendo que

$$n \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1+k_n : k_n > 0 \Rightarrow n = (1+k_n)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k_n^j \geq 1+\binom{n}{2} k_n^2 = 1+\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-1 \geq \frac{n(n+1)}{2} \cdot k_n^2 \Leftrightarrow 0 \leq k_n^2 \leq \frac{2}{n} \overset{ReglaSandwich}{\Rightarrow} k_n^2 \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow k_n \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1+k_n \overset{n\to\infty}{\to} 1+0 = 1$$

Se observa que en la desigualdad a partir del sumatorio me he quedado solo con los sumandos de $j = 0$ y $j = 2$ por lo que se cumple la desigualdad mostrada.

Teorema 3.3 (Criterio de Stoltz)
Sea una $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión estrictamente creciente y divergente a infinito y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ otra sucesión cualquiera, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Demostración:
Sea $m, n \in \mathbb{N} : m < n$, entonces escribimos:

$$x_n = x_m + (x_n - x_m) = x_m + x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_m = x_m + \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

Como $y_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ podemos suponer que $y_n > 0 : \forall n$, con lo cual si dividimos entre y_n:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_m}{y_n} + \frac{1}{y_n} \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{x_m}{y_n} + \frac{1}{y_n} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(x_k - x_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} \cdot (y_k - y_{k-1})$$

- Supongamos ahora que $l \in \mathbb{R}$: hacemos lo mismo $x_n = l \cdot y_n$, con lo cual queda:

$$l = \frac{l \cdot y_m}{y_n} + \frac{1}{y_n} + \sum_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \cdot l$$

Ahora vemos que:

$$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_m - l \cdot y_m}{y_n} + \frac{1}{y_n} \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - l \right) \cdot (y_k - y_{k-1})$$

Y si tomamos el valor absoluto:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \left| \frac{x_m - l \cdot y_m}{y_n} \right| + \frac{1}{y_n} \sum_{k=m+1}^{n} \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - l \right| \cdot (y_k - y_{k-1})$$

Dado $\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_0$, entonces:

$$\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} - l \right| < \varepsilon \overset{m=n_0}{\Rightarrow} \forall n \geq n_0 : \left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \left| \frac{x_{n_0} - l y_{n_0}}{y_n} \right| + \frac{1}{y_n} \sum_{k=n_0+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$\left| \frac{x_{n_0} - l y_{n_0}}{y_n} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n} \right) \overset{1-\lambda<1}{\leq} \left| \frac{x_{n_0} - l y_{n_0}}{y_n} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \overset{y_n\to\infty}{\Rightarrow} \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 : \left| \frac{x_{n_0} - l y_{n_1}}{y_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora este n_1 podemos suponerlo $n_1 \geq n_0$ porque si no cogeríamos el más grande de ambos para que se verificasen ambas cosas, con lo cual:

$$\left| \frac{x_{n_0} - l y_{n_0}}{y_n} \right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- Supongamos ahora que $l = \infty$, entonces dado $M > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_0$, tenemos:

$$\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k}\right| > 2M \overset{m=n_0}{\Rightarrow} \forall n \geq n_0 : \frac{x_n}{y_n} \geq \frac{x_{n_0}}{y_n} + 2M\frac{1}{y_n}\cdot \sum_{k=n_0+1}^{n}(y_k - y_{k-1}) = \frac{x_{n_0}}{y_n} + 2M\frac{1}{y_n}\cdot(y_n - y_{n_0}) =$$

$$= 2M + \frac{x_{n_0} - 2My_{n_0}}{y_n} = 2M + \frac{x_{n_0}}{y_n} - 2M\frac{y_{n_0}}{y_n} \overset{y_n \to \infty}{\Rightarrow} \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 : \frac{x_{n_0}}{y_n} - 2M\frac{y_{n_0}}{y_n} \geq -M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2M + \frac{x_{n_0}}{y_n} - 2M\frac{y_{n_0}}{y_n} \geq M$$

- Supongamos ahora que $l = -\infty$, entonces la sucesión $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifica que:

$$\frac{-x_{n+1} - (-x_n)}{y_{n+1} - y_n} = \frac{-(x_{n+1} - x_n)}{y_{n+1} - y_n} \to \infty \Rightarrow \frac{-x_n}{y_n} \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$$

<u>Observación</u> 3.5:
El recíproco es completamente falso, pues podemos escoger como contraejemplo a las sucesiones $x_n = (-1)^n$ y $y_n = n$. Estas dos sucesiones verifican la consecuencia, pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

y aun así no verifican la condición del teorema porque

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(-2)(-1)^n}{1} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n$$

<u>Ejemplo</u> 3.5:
Sea $x_n = n$ y $y_n = 2^n$, entonces:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1}{2^{n+1} - 2^n} = \frac{1}{2^n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

<u>Ejemplo</u> 3.6:
Sea $p > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$:

- Caso $\alpha \leq 0$:

$$\alpha \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = \frac{1}{(1+p)^n \cdot n^{-\alpha}} \leq \frac{1}{(1+p)^n} \to 0 \overset{ReglaSandwich}{\Rightarrow} SI$$

- Caso $\alpha > 0$: sea $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha < k$, demostramos que: $\frac{n^k}{(1+p)^n} \to 0$ porque como $0 \leq \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} \leq \frac{n^k}{(1+p)^n}$ por la regla del sandwich quedaría probado.

  Si elegimos un $n > k$:

$$(1+p)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j \overset{j=k}{\geq} \binom{n}{k} p^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} p^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ términos}} \cdot \frac{p^k}{k!}$$

  Ahora si $n > 2k \Rightarrow -k > \frac{-n}{2}$, por lo que el factor más pequeño de los k factores que había antes que es $n-k+1$ vemos que es: $n - k + 1 \geq n - \frac{n}{2} + 1 \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$

$$(1+p)^n \geq ... \geq \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ términos}} \cdot \frac{p^k}{k!} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^k \cdot \frac{p^k}{k!} = n^k \cdot \frac{p^k}{2^k k!} = n^k \cdot C$$

$$\frac{n^\alpha}{(1+p)^n} \leq \frac{n^\alpha}{n^k \cdot C} = \frac{1}{n^{k-\alpha}} \to 0 \overset{ReglaSandwich}{\Rightarrow} SI$$

Subsucesiones

En ocasiones, el estudio de una sucesión se entiende mejor eliminando índices o cogiendo algunos valores de esa lista ordenada. Este concepto de sucesión más pequeña a partir de una sucesión es lo que conocemos por *subsucesión*. A priori, parece que el estudio de dicho elemento nos ofrece una visión más reducida de lo que ocurre con la sucesión, pero precisamente esta simplificación es la que en muchos casos ofrece resultados sorprendentes.

Definición 3.7 (Subsucesión)
*Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$, se define una **subsucesión** de la misma como*

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...\} : n_k < n_{k+1}$$

*es decir, es un conjunto de **subíndices ordenados crecientemente** que forman una nueva sucesión más pequeña.*

Ejemplo 3.7:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\} \to \{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 8, 12, ...\}$$

Seguro que en alguno de los ejemplos anteriores (o en ejercicios de clase) alguno habremos pensado: "Con los términos pares podría demostrar esto o lo otro y con los impares aquello también". Pues esa predisposición a "partir" la sucesión en otras subsucesiones que funcionan mejor es, para algunas cuestiones, una forma de facilitar el trabajo. En esa línea, presentamos los siguientes teoremas.

Proposición 3.8
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, ésta converge a $l \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\forall \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} l$.

Demostración:

- "$\Leftarrow$": Casi obvio porque $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de sí misma
- "$\Rightarrow$": Sea $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión, entonces:

  $$\text{Sea } \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon$$

  Como $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente, entonces:

  $$\exists k_0 : n_{k_0} \geq n_0 \Rightarrow \forall k \geq k_0 : n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = l$$

Proposición 3.9
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión numérica, ésta es no acotada superiormente[7] *si y sólo si $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$.*

Demostración:

- "$\Leftarrow$": si $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$, entonces:

  $$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_0 : x_{n_k} > M \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ no acotada superiormente}$$

  Si lo fuese, entonces: $\exists K > 0 : x_n < K : \forall n \in \mathbb{N}$ y por tanto $K > x_{n_k} : \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \#$.

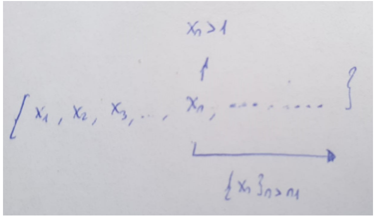
- "$\Rightarrow$":

  Para entender lo que vamos a hacer, si no es acotada superiormente entonces tenemos que dado una $M > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : x_n > M$, por ejemplo vemos que para $M = 1, \exists n_1 : \forall n \geq n_1 : x_{n_1} > 1$, para $M = 2, \exists n_2 : \forall n \geq n_2 : x_{n_2} > 2$, ..., dado $M = k \in \mathbb{N}, \exists n_k : \forall n \geq n_k : x_{n_k} > k$. Es decir, en el fondo PARECE que estamos construyendo una subsucesión donde cada término es mayor que un natural, pero no es del todo correcto porque no nos aseguramos de que el conjunto de los subíndices que hemos escogido sean estrictamente crecientes.

  Sea $M = 1$, entonces:

  $$\exists n_1 \in \mathbb{N} : x_{n_1} > 1 \Rightarrow \{x_n\}_{n>n_1} \text{ no acotada sup.}$$

[7] Y ocurre de forma análoga para acotadas inferiormente con $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$.



Y este conjunto no estaría acotado porque si no toda la sucesión sería acotada superiormente y estamos suponiendo que no.

Ahora, sea $M = 2$:

$$\exists n_2 > n_1 : x_{n_2} > 2 \Rightarrow \{x_n\}_{n>n_2} \text{ no acotado sup.}$$

Es decir, hemos buscado este n_2 dentro del intervalo que me quedaba más alla de x_{n_1}

Ahora, sea $M = 3$:

$$\exists n_3 > n_2 : x_{n_3} > 3 \Rightarrow \{x_n\}_{n>n_3} \text{ no acotado sup.}$$

Por inducción se demuestra que $M = k \in \mathbb{N} : \exists n_k > n_{k-1} : x_{n_k} > k$. Por tanto, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$ porque dado $M > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} : k_0 > M \Rightarrow x_{n_{k_0}} > k_0 > M \overset{k\geq k_0}{\Rightarrow} x_{n_k} > k > k_0 \geq M$ □

Teorema 3.4 (de Bolzano-Weirstrass)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ una sucesión acotada, entonces $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión convergente.

Demostración:
Supongamos que $a \leq x_n \leq b : \forall n \in \mathbb{N}$, utilizamos la siguiente notación: si J es un intervalo y $n \in \mathbb{N}$, llamamos $I(J, n) = \{m \in \mathbb{N} : m > n : x_m \in J\}$, es decir, son los índices mayores que n de manera que x_m pertenece al conjunto.

En el fondo lo que vamos a hacer es partir el intervalo en dos, quedando dos posibles intervalos J. Entonces, en uno de esos dos, el conjunto $I(J, n)$ es infinito, es decir, hay infinitos índices. Y la construcción la vamos a hacer por inducción.

Sea $n_1 = 1$, para $J = [a, \frac{a+b}{2})$ o $J = (\frac{a+b}{2}, b]$ el conjunto $I(J, 1)$ es infinito, porque si no el conjunto formado por los índices de ambas posibilidades sería finito y hay infinitos índices. Llamamos J_1 a ese intervalo y llamamos n_2 al primer elemento de $I(J_1, n_1)$, por lo que: $n_2 > n_1 = 1$.

Hacemos de nuevo lo mismo en J_1 tomándolo como nuevo intervalo del enunciado y dividiendo J_1 por su punto medio, quedando dos intervalos. En alguna de las dos mitades $I(J, n_2)$ es infinito. A esa mitad la llamamos J_2 y llamamos n_3 al primer elemento del conjunto $I(J_2, n_2)$ y por eso: $n_3 > n_2 > n_1 = 1$. Y de nuevo partimos J_2 por la mitad y seguimos...

Es decir, que por inducción construimos $\forall k \in \mathbb{N} : J_k \subset J_{k-1}$ donde $I(J_{k-1}, n_{k-1})$ es infinito y n_k es el primer elemento del mismo y por tanto $n_k > n_{k-1}$, por inducción se demuestra fácil.

Con ello hemos construido una familia de intervalos encajados $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ y por el **teorema de intervalos encajados de Cantor** sabemos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k \neq \emptyset$ y de hecho es un único número: $\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k = \{\varphi\}$ porque la longitud de J_k es $l(J_k) = \frac{b-a}{2^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Veamos que $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a φ ya que $\varphi \in J_k : \forall k$ y por construcción, como n_k es el primer elemento de $I(J_{k-1}, n_{k-1})$, entonces:

$$x_{n_k} \in J_{k-1} \wedge \varphi \in J_{k-1} \Rightarrow |x_{n_k} - \varphi| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}} \Rightarrow \text{Sea } \varepsilon > 0 : \exists k_0, \forall k \geq k_0 : |x_{n_k} - \varphi| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}} < \varepsilon$$

Sucesiones de Cauchy

Supongamos que tenemos una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ que converge a $l \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De este modo, sabemos que para $n, m \geq n_0$ entonces $|x_n - x_m| = |x_n - l + l - x_m| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir, como ambos elementos de la sucesión están dentro del intervalo de centro el límite, la distancia entre ambos es menor que ese intervalo.

Obviando la parte de la convergencia inicial, las sucesiones cuyos términos a partir de un cierto índice están suficientemente cerca unos de otros (todos de todos) tienen nombre propio y es lo que conocemos como *sucesiones de Cauchy*.

Definición 3.8 (Sucesión de Cauchy)
*Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión, se dice que es una **sucesión de Cauchy** si y sólo si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

es decir, si la distancia entre cualesquiera de sus términos a partir de uno concreto es menor que el ε prefijado.

Proposición 3.10
Las sucesiones convergentes son sucesiones de Cauchy.

Demostración:
Precisamente el razonamiento inicial de este apartado demuestra este enunciado. □

Proposición 3.11
Si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy, entonces es acotada[8]*.*

Demostración:
Tomamos $\varepsilon = 1 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |x_n - x_m| < 1$. En particular, $m = n_0$ y $n \geq n_0$:

$$|x_n| - |x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| < 1 \Rightarrow |x_n| \leq |x_{n_0}| + 1$$

Es decir, que todos los índices mayores de n_0 están acotados por el valor $|x_{n_0}| + 1$. Ahora hay que ver los índices que no están comprendidos en la cantidad anterior: $\{|x_1|, \cdots, |x_{n_0-1}|\}$, pero como este es un conjunto finito, también está acotado por lo que escogiendo el máximo de ambas cotas, acota a todos los elementos de la sucesión. □

Teorema 3.5 (Completitud de $\mathbb{R}$)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión[9] *de Cauchy, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.*

Demostración:
Como la sucesión es de Cauchy, es acotada y entonces tiene una subsucesión convergente por el Teorema de Bolzano-Wiestrass, es decir, $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a $l \in \mathbb{R}$. Esto implica que: dado $\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 : |x_{n_k} - l| < \varepsilon$.

Veamos ahora que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a l:

Dado $\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 : |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ y como es de Cauchy $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists k > k_0 : n_k \geq n_0$$

[8] Pero el recíproco no es cierto!!!, puede ser acotada pero no convergente
[9] Este resultado es falso en los números $\mathbb{Q}$

Porque si no todos los subíncides posteriores a k_0 de la subsucesión estarían acotados y entonces no serían estrictamente crecientes. Entonces, si $n \geq n_0$, medimos esta distancia:

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - l| \leq \underbrace{|x_n - x_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_{n_k} - l|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Porque como $k \geq k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ y como $n, n_k \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$

Por tanto, dado un $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 \Rightarrow n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon$ □

Límite inferior y superior de una sucesión

Muchas veces tenemos sucesiones que no convergen a ningún valor concreto, pero que siempre oscilan entre varios valores posibles, por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. Es cierto que dicha sucesión no converge, pero si podemos encontrar un conjunto acotado que contenga los posibles límites de cada subsucesión convergente. La cota superior e inferior de este conjunto son precisamente las que corresponden a las nociones de *límite superior e inferior*.

Definición 3.9
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión acotada y denotamos* $N \in \mathbb{N}$*, entonces definimos las sucesiones:*

$$a_N = \inf\{x_n : n \geq N\} \qquad\qquad b_N = \sup\{x_n : n \geq N\}$$

donde $\{a_N\}_{N=1}^{\infty} \uparrow$ *y* $\{b_N\}_{N=1}^{\infty} \downarrow$.

La monotonía de cada una es algo sencillo de ver. Sin embargo, lo realmente relevante de ambas es que el primer término de cada una acota a la otra y una siempre es mayor o igual que la otra, es decir:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_1 \leq a_N \leq b_N \leq b_1$$

Por tanto, tenemos dos sucesiones monótonas y acotadas, luego el límite de ambas existe y es justo a dicho límite de cada una a lo que conocemos como límite inferior y superior de una sucesión.

Definición 3.10 (Límite Inferior y Superior)
Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión acotada y* $\{a_N\}$ *y* $\{b_N\}$ *sus sucesiones superior e inferior, definimos el* ***límite superior e inferior*** *de la sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *como:*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} a_N$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} b_N$$

Proposición 3.12
Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión numérica, ésta converge si y sólo si su límite superior e inferior coinciden y ambos son el límite de la sucesión.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = l$$

Demostración:

- "$\Leftarrow$":

$$\forall N \in \mathbb{N} : a_N \leq x_N \leq b_N \Rightarrow a_N \xrightarrow{n\to\infty} l \leq x_N \leq n_N \xrightarrow{n\to\infty} l \Rightarrow x_N \xrightarrow{n\to\infty} l$$

- "$\Rightarrow$":

Sea $l = \lim x_n$, entonces:

$$\forall\varepsilon>0:\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0:|x_n-l|<\varepsilon\Rightarrow l-\varepsilon<x_n<l+\varepsilon\Rightarrow l-\varepsilon\leq a_{n_0}\leq b_{n_0}\leq l+\varepsilon\overset{N\geq n_0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow l-\varepsilon\leq a_{n_0}\leq a_N\leq b_N\leq b_{n_0}\leq l+\varepsilon\Rightarrow l-\varepsilon\leq a_{n_0}\leq a_N\leq l\leq b_N\leq b_{n_0}\leq l+\varepsilon\Rightarrow\begin{cases}|a_N-l|<\varepsilon\\|b_N-l|<\varepsilon\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_N=l=\lim_{n\to\infty}b_N$$

Proposición 3.13
Sea $s\in\mathbb{R}$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ una sucesión numérica, entonces:

$$\limsup_{n\to\infty}x_n<s\Rightarrow\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0:x_n<s$$

Demostración:
Si tenemos que $\lim\{b_n\}\downarrow=l\Rightarrow\forall\varepsilon>0:\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0:|b_n-l|<\varepsilon$ y en este caso podemos decir que $b_n-l<\varepsilon$. Ahora si vemos que $s>l$, entonces si escogemos $\varepsilon=|s-l|=s-l$, entonces por la defnción de límite debe ocurrir que $b_n-l<s-l\Rightarrow b_n<s$ a partir de un cierto n_0. □

Proposición 3.14
Sea $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ una subsucesión convergente, entonces su límite se encuentra entre el superior e inferior de la sucesión global.

$$\liminf x_n\leq\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\leq\limsup x_n$$

Demostración:

$$\forall k\in\mathbb{N}:a_{n_k}\leq x_{n_k}\leq b_{n_k}\Rightarrow a\leq x_0\leq b$$

Proposición 3.15
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ una sucesión numérica, entonces existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ subsucesión convergente al límite inferior y $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ subsucesión convergente al superior.

Demostración:
Puede parecer que ya está demostrado en la propia definición de las sucesiones a_N y b_N, pero en estos casos los índices no están ordenados, por lo que no son subsucesiones. Si suponemos que a es el límite de inferior, entonces sea $\varepsilon_1=1$ ocurre que $\exists n_1\in\mathbb{N}:a_1\leq x_{n_1}<a+1$ y por inducción podemos construir la siguiente sucesión: sea $\varepsilon_k=\frac{1}{k}:\exists n_k>n_k-1:a_{n_{k-1}}\leq x_{n_k}\leq a_{n_{k-1}}+\varepsilon_k$, por lo que se construye $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que $a_{n_{k-1}}\leq x_{n_k}\leq a_{n_{k-1}}+\frac{1}{k}$ que vemos que por la regla del sandwich tiende a lo dicho. □

Observación 3.6:
Con ello queda probado que, si definimos el conjunto $L=\{x_0\in\mathbb{R}:\exists\{x_{n_k}\},\ x_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}x_0\}$ de todos los puntos de $\mathbb{R}$ para los que existe alguna subsucesión convergente, entonces podemos redefinir ambos límites como:

$$\liminf_{n\to\infty}x_n=\inf L \qquad \limsup_{n\to\infty}x_n=\sup L$$

Límites en el exponente

Hasta ahora hemos demostrado que el límite se distribuye razonablemente en la suma y el producto de sucesiones. Sin embargo, una propiedad útil y que aún no hemos demostrado sería saber si también ocurre lo mismo con la exponencial, es decir, ¿si $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$ y $y_n\xrightarrow{n\to\infty}y$ la sucesión $x_n^{y_n}\xrightarrow{n\to\infty}x^y$?

Teorema 3.6 (Exponencial de exponente variable)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

Demostración:
Veamos primero que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, entonces esto ocurre:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow \Rightarrow a^{x_n} < a^{x_{n+1}} < a^x \Rightarrow \{a^{x_n}\} \uparrow$$

Además como $a^x > a^{x_n} : \forall n \in \mathbb{N}$, entonces está acotada, por lo que existe el supremo y además este es el límite de dicha sucesión. En consecuencia, por ser cota superior $a^x \geq \xi$ donde $\xi = \sup\{a^{x_n}\}$. Por la definición que se dió de exponencial real, el supremo de a^{x_n} es a^x por ser $x_n \in \mathbb{R}$.

Visto el caso de una función monótona, para una función cualquiera se tiene que como $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow a_N \xrightarrow{n\to\infty} x \xleftarrow{n\to\infty} b_N$ siendo ambos los límites superiores e inferiores descritos en el apartado anterior, así que como $\{b_N\} \downarrow$ y $\{a_N\} \uparrow$:

$$a_N \leq x_N \leq b_N \Rightarrow a^{a_N} \xrightarrow{n\to\infty} a^x \leq a^{x_N} \leq a^{b_N} \xrightarrow{n\to\infty} a^x \Rightarrow a^{x_N} \xrightarrow{N\to\infty} a^x$$

Teorema 3.7 (Exponencial de base variable)
Sea $r \in \mathbb{Q}$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^r = x^r$$

Demostración:
Comenzamos con el mismo razonamiento que para la demostración anterior, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$ que converge a x y $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$x_n \leq x_{n+1} \leq x \Rightarrow \sqrt[m]{x_n} \leq \sqrt[m]{x_{n+1}} \leq \sqrt[m]{x} \Rightarrow \{\sqrt[m]{x_n}\} \uparrow$$

Como es creciente y está acotada por $\sqrt[m]{x}$, su supremo existe y es el límite de dicha sucesión, en consecuencia, por ser cota superior $\xi \leq \sqrt[m]{x}$ donde $\xi = \sup\{\sqrt[m]{x_n}\}$. Veamos que el caso "$<$" no es posible:

$$\sqrt[m]{x_n} \leq \xi < \sqrt[m]{x} \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \leq \xi^m < x \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow \xi^m \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow \xi^m = x \Rightarrow \xi = \sqrt[m]{x}$$

En consecuencia, como $\{a_N\} \uparrow$ y $\{b_N\} \downarrow$, podemos acotar a cualquier sucesión convergente por esas dos y así demostrarlo para $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cualquiera que converja a x.

$$a_N \leq x_N \leq b_N \Rightarrow \sqrt[m]{a_N} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[m]{x} \leq \sqrt[m]{x_n} \leq \sqrt[m]{b_N} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[m]{x} \Rightarrow \sqrt[m]{x_N} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[m]{x}$$

De ello se puede deducir, contando con la demostración anterior que si $m \in \mathbb{Q}$ entonces se cumple la proposición dada (contando con lo demostrado en la proposición anterior a este apartado). $\square$

Los dos teoremas anteriores nos han demostrado que si fijamos la base o el exponente, entonces se sigue verificando la expresión en el límite. Sin embargo, esto no demuestra que cuando AMBAS partes son variables la expresión en el límite sea la misma.

Teorema 3.8 (Exponencial de base y exponente variable)
Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones convergentes a $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$ respectivamente, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a^x$$

Demostración:
Para esta demostración necesitamos elaborar un poco el terreno la demostración final. Primero de todo tenemos que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^x = a^x$, cuya demostración utilizando las técnicas y resultados anteriores es trivial. Es fácil demostrar, teniendo en cuenta la definición de exponencial

real que se dió, que si $x > 0 \Rightarrow a^x = \sup\{b^x : b < a\} = \text{ínf}\{c^x : a < c\}$ y del mismo modo que si $x < 0 \Rightarrow a^x = \text{ínf}\{b^x : b < a\} = \sup\{c^x : a < c\}$. Del mismo modo, es sencillo demostrar por casos que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona convergente a x y a_n es monótona convergente a a, entonces $\text{lím}_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a^x$ con lo que basándonos en estos resultados tenemos que contando como z_N la sucesión que tiende al límite inferior y y_N la del superior:

$$z_N \leq a_N \leq y_N \Rightarrow z_N^{z'_n} \leq a_N^{z'_n} \leq a_N^{x_n} \leq a_N^{y'_n} \leq y_N^{y'_n} \Rightarrow z_N^{z'_n} \xrightarrow{n\to|\infty} a^x \leq a_N^{x_N} \leq y_N^{y'_n} \xrightarrow{n\to|\infty} a^x \Rightarrow a_N^{x_N} \xrightarrow{n\to|\infty} a^x$$

SERIES NUMÉRICAS

Hasta ahora, por muy grande que haya podido ser, las sumas que hemos realizado siempre han sido sumas de tipo finito, pero alguno podría preguntarse ¿qué ocurre si sumamos infinitos términos? Esta idea es precisamente la que hay detrás de las series numéricas, que consisten fundamentalmente en calcular hacia que valor converge una suma cuando está se va haciendo infinita.

Sin embargo, como hemos dicho, hasta ahora sólo sabemos sumar cantidades de tipo finito, luego ¿cómo planteamos una operación que involucra infinitos términos? Pues como hacemos casi siempre que encontramos algún concepto que involucra de algún modo el "infinito": los límites. La posible solución sería calcular la suma hasta término $1-$ésimo, $2-$ésimo, $3-$ésimo, ... y considerarlos como términos de una sucesión. ¿Cuál será entonces la suma de los infinitos términos? Pues el límite de convergencia de dicha sucesión.

Definición 3.11 (Serie numérica)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión numérica, se define la ***serie numérica*** *asociada como la sucesión de sumas parciales:*

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ donde } s_n = x_1 + x_2 + \dots x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

y decimos que ésta es ***convergente*** *si y sólo si converge la sucesión de sumas parciales, es decir:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Observación 3.7:
Para la convergencia, e insisto que exclusivamente para la convergencia, las series pueden "empezar" en $n = 0$, $n = 2$ o $n = \gamma$ porque al fin y al cabo si la serie converge, empezar un poco más adelante no es tan importante. Esto se debe a que la suma hasta ese índice de comienzo será finita y, como la que hemos escogido será convergente, la suma de ambas cantidades será finita, luego la sucesión desde el índice inicial es convergente en consecuencia.

Ejemplo 3.8:
Tomamos la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ de forma que la sucesión de las sumas parciales tiene la forma $s_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Calculamos la suma finita hasta n para conocer el término general de la sucesión s_n:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2}\cdot s_n &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ s_n - \frac{1}{2}\cdot s_n &= \frac{1}{2}\cdot s_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \\ s_n &= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

y de este modo podemos calcular el límite de la misma para conocer la convergencia de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2$$

Criterios de convergencia

En ocasiones, como en el ejemplo anterior, será sencillo incluso calcular el valor concreto del límite de convergencia de una serie, pero en general no siempre será tan fácil. En su lugar, optaremos por determinar cuando una serie es o no convergente para que, en caso de requerirlo, perdamos nuestro tiempo calculando el límite (si existe) a través de otros métodos matemáticos que aproximen o den idea de dicho límite.

Teorema 3.9
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie convergente[10], *entonces la sucesión de términos que se suman tiende a* 0, *es decir:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Demostración:
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente si y sólo si $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = L$ donde $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Por tanto, si tomamos estas dos sucesiones se verifica que:

$$\begin{cases} s_n \to L \\ s_{n-1} \to L \end{cases} \Rightarrow x_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = L - L = 0$$

Observación 3.8:
El teorema anterior simplemente nos indica que, en caso de que la serie converja, la sucesión de términos que se van sumando tiene que "ir haciéndose más pequeña", pero esto no significa que la sucesión de sumas parciales sea cada vez más pequeña.

Ejemplo 3.9:
Veamos una serie de ejemplos para poner en práctica lo explicado hasta ahora:

1. Consideremos la sucesión $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Como $x_n = n$ y el límite de esta sucesión de términos no es 0, la serie es divergente.

2. Consideremos la sucesión $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ cuyo término general de las sumas parciales es de la siguiente forma:

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impar} \\ 1 \text{ si } n \text{ par} \end{cases}$$

   y como la sucesión de sumas parciales no es convergente, la serie no es convergente.

3. Para comprobar que el recíproco no es cierto, tomamos de ejemplo la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ llamada la serie armónica. La sucesión de sumas parciales claramente es una sucesión creciente y siempre positiva, pero además cuando desarrollamos los sucesivos términos observamos las siguientes

[10] Es habitual encontrar la notación $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$ para denotar que algo es convergente (también es usual en integrales)

desigualdades:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1+\frac{1}{2}\\
s_3 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\\
s_4 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1\\
&\vdots\\
s_8 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2}\\
&\vdots\\
s_{16} &= 1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{16} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&\vdots\\
s_{2^5} &= s_{2^4}+\frac{1}{2^4+1}+\dots\frac{1}{2^4+2^4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Por tanto, es razonable pensar que la posible regla de inducción sea:

$$s_{2^n} > 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2} = 1+\frac{n-2}{2}$$

así que para demostrarlo:

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\dots+\frac{1}{2^n+2^n} \overset{HI}{>} 1+\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}} = 1+\frac{n-2}{2}+\frac{2^n}{2^{n+1}} = 1+\frac{n-1}{2}$$

En consecuencia, sabemos que $s_{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, pero sabíamos $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ era monótona creciente y acabamos de ver que hay una subsucesión divergente, luego es $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es no acotada, que junto a creciente implica divergente.

Teorema 3.10 (Criterio de Cauchy)
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie numérica, ésta es convergente si y sólo la sucesión de sumas parciales es de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq N : |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Es decir, para el caso de las series esto quiere decir que:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq N : \left|\sum_{m+1}^{n} x_k\right| < \varepsilon$$

Demostración:
Si la serie en valor absoluto converge, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > m > N \Rightarrow |\sum_{m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon$$

Pero es fácil ver la siguiente desigualdad:

$$\left|\sum_{m+1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon \overset{Cauchy}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es convergente}$$

Ejemplo 3.10:
Como contraejemplo ejemplo para el recíproco se tiene la serie armónica alternada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que converge a $\ln(2)$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ que es la serie armónica diverge.

Corolario 3.10.1
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie numérica cuyos términos no son todos necesariamente positivos, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \textit{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ converge}$$

Teorema 3.11 (Criterio de comparación)
Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ dos sucesiones numéricas que verifican que $\exists K \in \mathbb{N} : \forall n \geq K : 0 \leq x_n \leq y_n$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \textit{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ converge} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \textit{ diverge}$$

Demostración:
Si la serie es convergente, entonces ocurre que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : n \geq m \geq M \Rightarrow \sum_{m+1}^{n} y_k < \varepsilon$$

Por tanto, si escogemos $M' = \text{mín}\{M, K\}$ entonces para $n > m \geq M'$ ocurre que:

$$0 \leq \sum_{m+1}^{n} x_n \leq \sum_{m+1}^{n} y_n < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es convergente}$$

Teorema 3.12 (Criterio de comparación en el límite)
Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes que verifican que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n, y_n \geq 0$, entonces si definimos

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

tenemos el siguiente criterio:

- $0 < r < \infty$
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \textit{ converge}$$
- $r = 0$
$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \textit{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ converge}$$
- $r = \infty$
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \textit{ converge}$$

Demostración:
Suponiendo que el límite es $r \neq 0$, entonces por la definición se verifica que:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}r > 0 \Rightarrow \exists K' \in \mathbb{N} : n \geq K' \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n} - r| < \frac{1}{2}r : n \geq K' \Leftrightarrow \frac{1}{2}r < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}r : n \geq K'$$

Si tomamos $\tilde{K} = \text{máx}\{K, K'\}$, entonces:

$$n \geq \tilde{K} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}ry_n < x_n < \frac{3}{2}ry_n$$

Supongamos en primer lugar que Σy_n es convergente, entonces:

$$\sum \frac{3}{2}y_n \text{ convergente} \overset{\text{Comparación}}{\Rightarrow} \sum x_n \text{ converge}$$

Por otro lado, si $\sum x_n$ converge, entonces:

$$\sum x_n \text{ convergente} \overset{\text{Comparación}}{\Rightarrow} \sum \frac{1}{2} y_n \text{ converge} \Rightarrow \sum y_n \text{ converge}$$

Supongamos ahora que $r = 0$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K' : n \geq K' \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n}| < \varepsilon$$

De nuevo, tomando $\tilde{K} = \max\{K, K'\}$ y $n \geq \tilde{K}$, entonces:

$$0 < \frac{x_n}{y_n} < \varepsilon \Rightarrow 0 < x_n < \varepsilon y_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum y_n \text{ converge } \Rightarrow \Sigma x_n \text{ converge}$$

Convergencia absoluta y condicional

Ahora que ya hemos visto lo que son las series y qué significa que estas converjan, vamos a matizar un poco cómo es esta convergencia. Aunque se trate de sumas, podemos estar sumando algún término negativo que en lugar de "aportar" a la suma esté restando valor a la misma, es decir, que puede que si tomásemos en valor absoluto los términos que se van sumando la serie no converja, pero gracias a que algunos "restan" la serie original si converja. Estos dos tipos de convergencia, son precisamente los que dan lugar a las dos clases de convergencia que existen la *convergencia absoluta* y la *convergencia condicional*.

Definición 3.12 (Convergencia Absoluta y Condicional)
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie numérica, decimos que ***converge absolutamente o es absolutamente convergente*** *si y sólo si la serie de los valores absolutos es convergente, es decir:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ abs. conv.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \textit{ conv.}$$

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie numérica, decimos que ***converge condicionalmente o es condicionalmente convergente*** *si y sólo si es convergente pero no absolutamente convergente, es decir:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ cond. conv.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \textit{ div. y } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ conv.}$$

Observación 3.9:
Si una serie es convergente, necesariamente debe ser o absolutamente convergente o condicionalmente convergente. Esto es así porque la convergencia absoluta es un hecho más fuerte que la de convergencia a secas, pues la una implica a la otra por el Corolario 3.10.1 y, en consecuencia, las series que convergen absolutamente son un subconjunto de las series convergentes. Como su complementario son las que son condicionalmente convergentes y éstas también son subconjunto de las convergentes, queda demostrado que si se es convergente se es la una o la otra.

Teorema 3.13 (Criterio de la Raíz y del Cociente)

- ***Criterio de la raíz:***

  Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión numérica, entonces:

  - $\exists r \in (0,1) : \forall n \geq K : |x_n|^{\frac{1}{n}} \leq r \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *abs. conv.*
  - $\exists K \in \mathbb{N} : \forall n \geq K : |x_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *div.*

En la práctica, utilizamos su corolario para poder determinar la convergencia en las series:

$$\exists r \in \mathbb{R} : r = \lim_{n\to\infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} \begin{cases} 0 \le r < 1 & \Rightarrow \sum x_n \textit{ abs. conv.} \\ r > 1 & \Rightarrow \sum x_n \textit{ div.} \\ r = 1 & \Rightarrow ??? \end{cases}$$

- ***<u>Criterio del cociente</u>*:**

  Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión numérica tal que* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0$*, entonces:*

  - $\exists r \in (0,1) : \forall n \ge K : \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \le r \Rightarrow \sum x_n$ *abs. conv.*
  - $\exists K \in \mathbb{N} : \forall n \ge K : \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \ge 1 : \forall n \ge K \Rightarrow \sum x_n$ *div.*

  En la práctica, utilizamos su corolario para poder determinar la convergencia en las series:

$$\exists r \in \mathbb{R} : r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \Rightarrow \begin{cases} 0 < r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ abs. conv.} \\ r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ div.} \\ r = 1 \Rightarrow ??? \end{cases}$$

<u>Demostración</u>:

- Criterio de la raíz:

  El primer punto del criterio es equivalente a decir que $|x_n| \le r^n : \forall n \ge K$, pero ocurre que:

$$0 \le r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n \text{ es convergente} \overset{\text{Comparación}}{\Rightarrow} \Sigma|x_n| \text{ es convergente}$$

  El segundo punto es trivial, porque:

$$|x_n|^{\frac{1}{n}} \ge 1 : \forall n \ge K \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es divergente}$$

- Criterio del Cociente:

  Para empezar, si consideramos el primer punto tenemos que $|x_{n+1}| \le r|x_n| : \forall n \ge K$, luego vemos que para los sucesivos términos:

$$\begin{cases} |x_{k+1}| \le r|x_k| \\ |x_{k+2}| \le r|x_{k+1}| \le r^2|x_k| \\ \vdots \\ |x_{k+m}| \le r^m|x_k| : \forall m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

  Luego podemos reescribir que:

$$|x_{k+m}| \le r^{k+m} \underbrace{\frac{|x_k|}{r^k}}_{a} : \forall m = 0, 1, 2, \dots$$

  Y si consideramos la sucesión a partir del término $k-esimo$ tenemos que:

$$|x_n| \le ar^n : \forall n \ge k$$

  Pero $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ es convergente, y por el criterio de comparación $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente

  Si consideramos ahora el segundo punto tenemos que $|x_{n+1}| \ge |x_n| : \forall n \ge K$, luego entonces:

$$\Rightarrow |x_n| \ge |x_k| : \forall n \ge K : x_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ diverge}$$

Teorema 3.14 (Criterio de la integral)
Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función que verifica las siguientes condiciones:

- $f \in R[0, \infty)$
- $f(x) \geq 0$
- $f \downarrow$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

entonces decimos que:

$$\int_0^\infty f(x)\ dx \ \textit{converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ \textit{converge}$$

Demostración:
La demostración y explicación de este resultado se encuentra en el tema dedicado a las integrales, concretamente en la sección Integrales Impropias. □

Teorema 3.15 (Criterio de Leibnitz)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión numérica que verifica:

- $\forall n \in \mathbb{R} : x_n > 0$
- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$
- $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

entonces se cumple que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n \ \textit{es convergente}$$

Demostración:
Sea $s_n = x_1 - x_2 + \ldots + (-1)^{n+1} x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} x_k$. Vamos a tomar la sucesión de los pares:

$$s_{2n} = \underbrace{x_1 - x_2}_{\geq 0} + \underbrace{x_3 - x_4}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{x_{2n-1} - x_{2n}}_{\geq 0} \geq 0$$

Además, también se verifica que:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{x_{2n+1} - x_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n} \Rightarrow \{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$$

Incluso es acotada:

$$s_{2n} = x_1 \underbrace{- x_2 + x_3}_{\leq 0} \underbrace{- x_4 + x_5}_{\leq 0} - \underbrace{\ldots + x_{2n-1}}_{\leq 0} - x_{2n} \leq x_1 - x_{2n} \leq x_1$$

Como es una sucesión acotada y creciente:

$$\exists L = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

Ahora vamos a ver las sucesión de los impares:

$$s_{2n+1} = \underbrace{x_1 - x_2}_{\geq 0} + \underbrace{x_3 - x_4}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{x_{2n-1} - x_{2n}}_{\geq 0} + x_{2n+1} \geq 0$$

Del mismo modo:

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} \underbrace{-x_{2n+2} + x_{2n+3}}_{\leq 0} \leq s_{2n+1} \Rightarrow \{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$$

Y también ocurre que:

$$s_{2n+1} \geq 0 \Rightarrow \exists L' = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

En consecuencia, probamos ahora que ambos límites coinciden:

$$s_{2n} = s_{2n-1} - x_{2n} \Rightarrow L = L' + 0 \Rightarrow L = L'$$

Por tanto, ahora podemos concluir que entonces el límite de la serie es el propio L porque al ser límite de la subsucesión de los términos pares e impares ocurre:

$$\begin{cases} \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow |s_{2n} - L| < \varepsilon \\ \varepsilon > 0, \exists N' : \forall n \geq N' \Rightarrow |s_{2n+1} - L| < \varepsilon \end{cases}$$

Si escogemos como constante $\bar{N} = \text{máx}\{N, N'\}$, entonces se tiene que cumple ambas definiciones simultáneamente:

$$n \geq \bar{N} \Rightarrow \begin{cases} |s_{2n} - L| < \varepsilon & n = 2k \\ |s_{2n+1} - L| < \varepsilon & n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow \forall k \geq \bar{N} : |s_k - L| < \varepsilon$$

Teorema 3.16 (Criterio de Condensación de Cauchy)
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$ una sucesión decreciente, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 0$ y $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n} \text{ converge}$$

Demostración:
Sea $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, tomamos por ejemplo s_{16}:

$$s_{16} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + \ldots + x_{16}$$

Acotamos la suma parcial superiormente:

$$s_{16} = x_1 + \underbrace{x_2 + x_3}_{\leq x_2 + x_2} + \underbrace{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}_{\leq 4x_4} + \underbrace{x_8 + \ldots +}_{\leq 8x_8} x_{16} \leq x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + 2^3 x_{2^3} + x_{2^4}$$

Luego por inducción podemos concluir que:

$$s_{2^n} \leq x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + \ldots + 2^{n-1} x_{2^{n-1}} + x_{2^n}$$

Acotamos la suma parcial inferiormente:

$$s_{16} = x_1 + x_2 + \underbrace{x_3 + x_4}_{\geq 2x_4} + \underbrace{x_5 + x_6 + x_7 + x_8}_{\geq 4x_8} + \underbrace{x_9 + \ldots + x_{16}}_{\geq 8x_{16}} \geq x_1 + x_2 + 2x_{2^2} + 2^2 x_3 x_{2^3} + 2^3 x_{2^4} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}2x_{2^2} + \frac{1}{2}2^2 x_3 x_{2^3} + \frac{1}{2}2^3 x_{2^4} = \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + +2^3 x_3 x_{2^3} + +2^4 x_{2^4})$$

Así que tenemos acotada por arriba y por abajo la subsucesión de los términos que son potencia de 2:

$$\frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + +2^3 x_3 x_{2^3} + +2^4 x_{2^4}) \leq s_{2^4} \leq x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + +2^3 x_3 x_{2^3} + +2^4 x_{2^4}$$

Demostrado para todos por inducción se tiene que:

$$\frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + \ldots + 2^n x_{2^n}) \leq s_{2^n} \leq x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + \ldots + 2^n x_{2^n}$$

Si consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$, entonces la subsucesión de $\{s_n\}$ formada por los términos x_{2^n} está acotada por esta serie. De este modo, si esta converge, entonces la subsucesión $\{s_{2^n}\}$ está acotada y, por tanto, la sucesión $\{s_n\}$ converge. De forma análoga, si la sucesión $\{s_n\}$ converge, entonces la subsucesión $\{s_{2^n}\}$ converge y como esta acota a la serie que habíamos definido multiplicada por un medio, entonces la serie converge. □

Observación 3.10:
Este criterio resulta muy útil para decidir la convergencia de sucesiones en las que intervengan logaritmos, pues al tener $\ln(n)$ y sustituir $\ln(2^k)$ podemos sacar k fuera para que nos quede una expresión más sencilla.

FUNCIONES CONTINUAS

Ya hemos visto en el capítulo Introducción a conjuntos y funciones lo que significa el término *función*: una correspondencia entre elementos de dos conjuntos a los que cada elemento de partida le corresponde un único elemento en la llegada. Sin embargo, si no añadimos más información al respecto, podemos trabajar con funciones muy distintas que se dejarán manejar peor o mejor. Por ejemplo, si observamos las funciones de la Figura 4.1 ¿cuál de las dos nos parece más amable para trabajar con ella? Lógicamente la de la izquierda, pero ¿por qué?

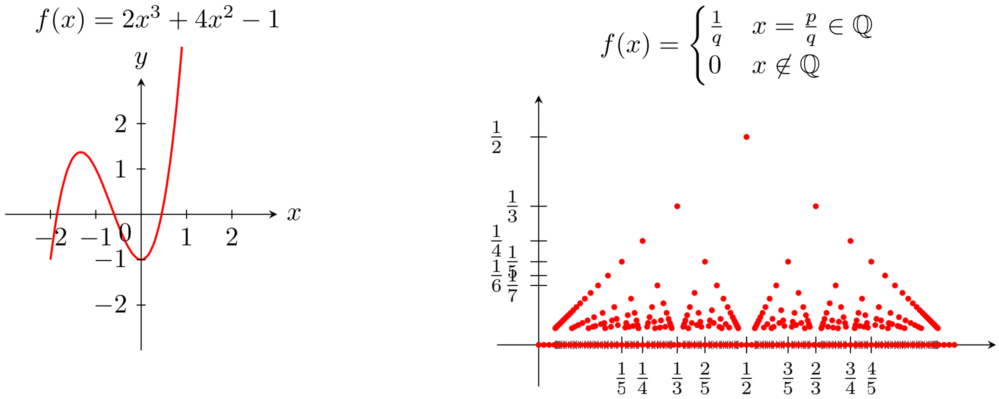


Figura 4.1: Representación de la función $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 1$ y la función de Thomae.

Lo que diferencia a ambas funciones es que la de la izquierda es continua en todo su dominio y la de la derecha lo es[1] sólo en los irracionales. Al fin y al cabo, la continuidad es una condición de regularidad que establece que "lo que pasa cerca del punto es lo que vale la función en el punto", de ahí el interés en trabajar con este tipo de funciones, pues lo que tiene algún tipo de regularidad se puede estudiar y analizar.

CONCEPTO DE LÍMITE

La primera parte de la definición informal de continuidad que hemos comentado en la introducción era "lo que pasa cerca del punto". La noción de *límite* viene a formalizar esta idea de "lo que pasa cerca" y, para entender mejor a qué nos referimos, vamos a ver el ejemplo de la Figura 4.2.

Si escogemos valores de x cada vez más cercanos al 0, las imágenes de dichos valores se acercarán cada vez más a -1. Decimos en ese caso que el límite en 0 es -1 porque hacia donde *tienden* las imágenes cuando la variable x *tiende* hacia 0. Además, se ha escogido concretamente esa función

[1] La demostración es apta para este curso, pero se omite por ser la función de Thomae solamente un medio para la introducción del capítulo.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 4x^2 - 1 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

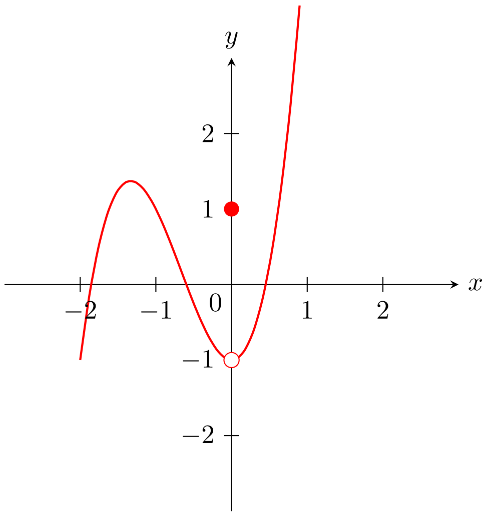


Figura 4.2: Ejemplificación del concepto de límite.

para hacer evidente que no se corresponde con el valor que toma la función en el 0 y esto es muy importante. *Límite* es un término que hace referencia a la *vecindad* de un punto, pero que prescinde completamente de la información de la función en dicho punto.

Para entrar ya en materia, lo primero que vamos a hacer es dar unas nociones ínfimas de topología y, después, podremos entrar de lleno en la definición formal de límite (pues hasta ahora todo ha sido de forma imprecisa) y en las propiedades de esta función.

Topología fundamental

La topología es una rama más amplia de las matemáticas que se centra, de forma muy simplificada y no completa, en clasificar qué papel juegan los subconjuntos (incluyendo puntos) dentro del total. Por ejemplo, saber si un conjunto es abierto, cerrado, si hay puntos tan cerca como se quiera unos de otros...

En nuestro caso, sólo precisamos de la topología para entender bien qué son las nociones de *punto de acumulación* y *punto aislado*, pues nos servirán para establecer cuando "siempre hay valores cerca" y así asegurarnos de que hablar de límites, continuidad, etc., que son nociones que involucran "mirar cada vez más cerca", tienen sentido, pues hay puntos donde mirar.

Definición 4.1 (Punto de Acumulación)
*Sea $D \subset \mathbb{R}$, decimos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto de acumulación de D** si y sólo si:*

$$\forall \delta > 0 : \exists d \in D : d \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

y denotamos por D' al conjunto[2] de puntos de acumulación de D.

La definición anterior aunque sea confusa no viene a decir otra cosa sino que cualquier entorno alrededor de x_0 contiene otros puntos del conjunto (sin contar con x_0), luego también podemos verlo como:

$$D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

Es decir, en los puntos de acumulación da igual cuán cerca o lejos estrechemos el cerco sobre el punto que siempre vamos a encontrar, tan cerca como queramos, a otro punto del mismo conjunto que él. Son puntos que, en cierta manera, "nunca están solos".

[2]Nótese que $D' \not\subseteq D$.

Observación 4.1:
Aunque no parezca relevante, para formalizar esa idea de "puntos que nunca están solos", es importante no tener en cuenta al propio punto del conjunto. Observemos el ejemplo de la Figura 4.3 que representa el conjunto $D = (0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$.

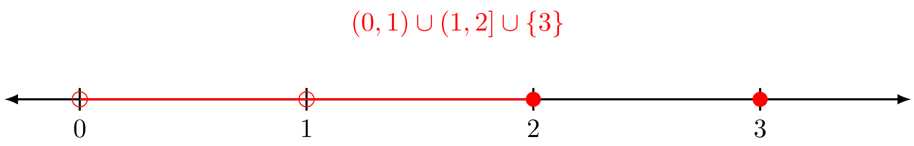


Figura 4.3: Importancia de la exclusión del propio punto en la definición de acumulación.

Si permitiésemos tener en cuenta el propio punto para la definición, diríamos que el 3 es de acumulación, pero salta a la vista que ese punto sí es de los que están "solos" en el conjunto.

Parece lógico entonces decir que cuando un punto no es de acumulación entonces sí es de esos que está "solo" o, como dice la definición formal, *aislado*.

Definición 4.2 (Punto Aislado)
Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, decimos que es un ***punto aislado*** *de D si no es de acumulación:*

$$\exists \delta > 0 : D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) = \emptyset$$

Y, de nuevo, seguimos el patrón habitual en matemáticas: tras una definición rigurosa que formaliza el concepto formulamos una caracterización más manejable para trabajar con ella. La idea de ser un punto que no está aislado es que podemos "saltar" de punto en punto del conjunto hacia él, acercándonos tanto como queramos sin llegar a él, es decir, podemos hacer sucesiones.

Proposición 4.1
Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, entonces:

$$x_0 \in D' \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ y } \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0$$

Demostración:

- "$\Rightarrow$":

  Como sabemos que es un punto de acumulación, entonces tomamos $\delta = \frac{1}{n} : \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $D \cap \left((x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \backslash \{x_0\}\right) \neq \emptyset$. Esto implica que:

  $$\exists x_n \in D : x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) : x_n \neq x_0 \Rightarrow 0 \overset{x_n \neq x_0}{<} |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \overset{ReglaSandwich}{\Rightarrow} \lim_{n \to \infty} |x_n - x_0| = 0 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (x_n - x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

- "$\Leftarrow$":

  Como sabemos que existe dicha sucesión entonces sabemos que siendo $\delta > 0$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y podemos decir además que como $x_n \neq x_0$, entonces:

  $$x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} \overset{x_n \in D}{\Rightarrow} D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \neq \emptyset$$

Definición formal de límite

Ya hemos contado al inicio de la sección por donde iban a ir los tiros en la definición de límite: el valor al que se acercan las imágenes si nos vamos acercando al punto. Sin embargo, la formalización invierte, en cierta manera, la sucesión de eventos que hemos descrito. En lugar de "me acerco al punto y miro a dónde se acercan las imágenes" opta por "me acerco a la imagen y miro si hay un entorno alrededor del punto que esté tan cerca".

Definición 4.3 (Límite de una Función)
*Sea $D \subset \mathbb{R}$ no nulo, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real y $x_0 \in D'$, decimos que $l \in \mathbb{R}$ es el **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** x_0 si y sólo si:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

y lo denotamos por $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Para desgranar mejor la definición que hemos dado y ligarla con lo que hemos dicho al inicio del apartado, vamos a observar la Figura 4.4. Lo que hacemos es seguir estos pasos:

1. Escogemos un entorno alrededor del límite de radio ε (banda azul).
2. Buscamos un entorno alrededor del punto de radio δ (banda amarilla).
3. Verificamos que el conjunto de las imágenes está dentro del entorno alrededor del límite (banda verde contenida en banda azul).

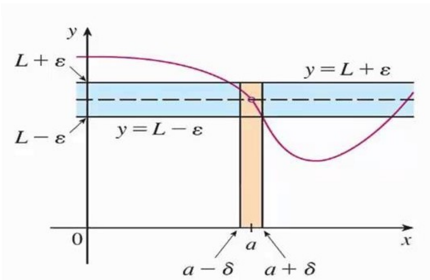


Figura 4.4: Representación de la definición formal de límite.

La definición de límite dice que, si existe el límite, los pasos descritos anteriormente se van a poder realizar: para cada entorno alrededor del límite, podremos encontrar un entorno alrededor del punto cuyas imágenes caigan dentro del entorno alrededor del límite.

Observación 4.2:
Una forma un poco más visual y completamente equivalente de escribir la definición de límite que se ha dado es utilizando valores absolutos

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in D \text{ y } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

donde la desigualdad estricta $0 < |x - x_0|$ implícitamente implica que $x \neq x_0$.

Alguno puede que se haya asustado al ver la definición de límite y encontrar tan enrevesado o complicado lo que en cursos anteriores siempre fue tan sencillo. Sin embargo, es importante tener una definición formal fuerte y rigurosa sobre la que cimentar toda la teoría posterior. Además, para trabajar luego con el concepto, ya hemos explicado que se suele hacer otra cosa siempre después de dar una definición complicada...

Proposición 4.2 (Caracterización del Límite)
Sea $D \subset \mathbb{R}$ no nulo, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real y $x_0 \in D'$, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D,\ x_n \neq x_0 : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} l$$

Demostración:
Comprobamos que se dan ambas implicaciones:

- “$\Rightarrow$”:

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ y $x_n \neq x_0 : \forall n \in \mathbb{N}$ y tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, veamos que $f(x_n) \xrightarrow{x_n\to\infty} l$:
Como sabemos que l es el límite, entonces:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0, \text{ entonces } \exists\delta > 0 : x \in D \cap ((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \overset{x_n\neq x_0}{\Rightarrow} x_n \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\} \overset{x_n\in D}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow x_n \in D \cap ((x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x_n) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Leftrightarrow |f(x_n)-l| < \varepsilon$$

- "$\Leftarrow$": supongamos que l no es el límite:

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0 : \exists x \in D \cap ((x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}) : f(x) \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Leftrightarrow |f(x)-l| > \varepsilon$$

Entonces tomamos ahora $\delta = \frac{1}{n}$, entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in D \cap \left((x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})\backslash\{x_0\}\right) : |f(x_n) - l| > \varepsilon$$

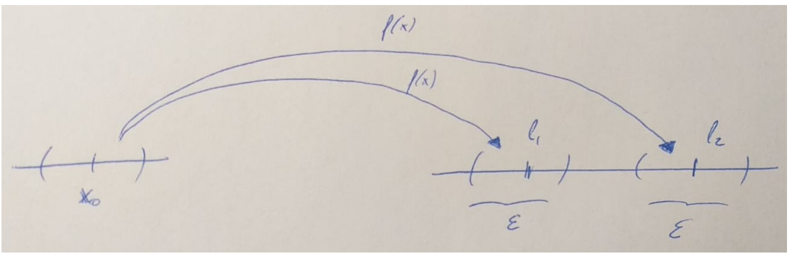
Entonces los números anteriores forman una sucesión que: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \neq x_0 : \forall n \in \mathbb{N} :$ $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, pero $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} l \Rightarrow \#$ □

Esta caracterización recupera en parte la idea de "si nos acercamos al punto, las imágenes se acercan al límite", gracias a las sucesiones. Sin embargo, la clave está en que esto tiene que ocurrir para cualquier forma de acercarse, es decir, a través de cualquier sucesión.

A partir de ahora, lo que vamos a hacer es copiar de manera idéntica lo que se hizo en el apartado de Convergencia. Demostrar que el límite es único, las operaciones que se pueden hacer con el límite, ampliar las operaciones a $\overline{\mathbb{R}}$... En definitiva, trabajar el concepto para que luego el cálculo de límites sea más algebraico y se simplifique todo.

Teorema 4.1 (Unicidad del límite)
Sea $D \subset \mathbb{R}$ no nulo, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real y $x_0 \in D'$, entonces si existe el límite este es único.

Demostración:
Supongamos que hay dos l_1 y l_2 que son distintos, por lo que $l_1 < l_2$, entonces:



En el fondo no estamos haciendo más que demostrar que si dichos entornos son disjuntos no se puede cumplir porque las funciones no pueden asignar dos imágenes al mismo punto del dominio.

Tomamos $\varepsilon = \frac{l_2-l_1}{2}$, lo que implica que:

$$\exists\delta_1 > 0 : x \in D \cap ((x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$$

$$\exists\delta_2 > 0 : x \in D \cap ((x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$$

Si tomamos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces:

$$x \in D \cap ((x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon) \cap (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$$

Y es fácil probar que: $(l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon) \cap (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon) \neq \emptyset$ □

Teorema 4.2 (Operaciones con Límites)
Sea $D \subset \mathbb{R}$no nulo, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales con límites $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ *y* $x_0 \in D'$*, entonces:*

1. $\lim_{x\to x_0}(g(x) + f(x)) = m + l$
2. $\lim_{x\to x_0}(a \cdot f(x)) = a \cdot l$
3. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$
4. *Si* $m \neq 0$*, entonces:* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

Demostración:

1. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un δ de manera que $|f(x) + g(x) - (l + m)| < \varepsilon$:
$$|f(x) + g(x) - (l + m)| = |f(x) - l + g(x) - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m|$$
Por saber como hipótesis que los límites de ambas funciones son l y m, entonces:
$$\text{Dado } \varepsilon > 0 : \begin{cases} \exists\delta_1 > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists\delta_2 > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$
Luego si tomamos como $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que se verifican ambas cosas:
$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. Queremos probar que dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar un δ que cumpla que $|af(x) - al| < \varepsilon$:
$$|af(x) - al| = |a| \cdot |f(x) - l|$$
Como sabemos que l es el límite de $f(x)$, entonces
$$\text{Dado } \varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$
Luego se tiene que:
$$\text{Dado } \varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |a| \cdot |f(x) - l| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

3. Sea $\varepsilon > 0$, queremos buscar un $\delta > 0$ de manera que $|f(x)g(x) - lm| < \varepsilon$:
$$|f(x)g(x) - lm| \overset{\pm f(x)m}{=} |f(x)\,(g(x) - m) + (f(x) - l)\,m| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l|$$
Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$:
$$\text{Dado } \varepsilon_0 = 1 : \exists\delta_0 : \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta_0 \\ x \in D \end{cases} \Rightarrow |f(x) - l| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |l| + 1 = M$$
Luego se tiene:
$$|f(x)| \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l| \leq M \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l|$$
Ahora tenemos dos casos:
   - $m \neq 0$:
   Entonces, como l y m son ambos límites de sendas funciones:
   $$\begin{cases} \exists\delta_1 > 0 : x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2|m|} \\ \exists\delta_2 > 0 : x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2M} \end{cases}$$
   Por lo tanto, sea $\delta = min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$:
   $$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow M \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2} + |m| \cdot \frac{\varepsilon}{2|m|} = \varepsilon$$

- $m = 0$:
$$M \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l| = M \cdot |g(x) - m|$$
Por lo que como m es límite:
$$\text{Dado } \varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : \begin{cases} x \in D \\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \end{cases} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{M}$$
Por lo tanto, sea $\delta = min\{\delta_0, \delta_1\}$:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow M \cdot |g(x) - m| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

4. Como $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, basta con probar que $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$. Para ello queremos probar que dado un $\varepsilon > 0$, entonces $\exists \delta > 0$ de manera que $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$:
$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{m - g(x)}{g(x) \cdot m} \right| = \frac{|g(x) - m|}{|g(x)| \cdot |m|}$$
Como $m \neq 0$, tomamos $\varepsilon_0 = \frac{|m|}{2}$, por lo tanto:
$$\exists \delta_0 > 0 : \begin{cases} x \in D \\ 0 < |x - x_0| < \delta_0 \end{cases} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{|m|}{2} \Leftrightarrow |m| - |g(x)| \leq |g(x) - m| < \frac{|m|}{2} \Rightarrow \frac{|m|}{2} < |g(x)| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|}$$
Con lo cual, dado $\varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : \begin{cases} x \in D \\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \end{cases} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon \cdot |m|^2}{2}$, por tanto, sea $\delta = min\{\delta_0, \delta_1\}$:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \begin{cases} x \in D \\ 0 < |x - x_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow \frac{|g(x) - m|}{|g(x)| \cdot |m|} < \frac{2}{|m|^2} \cdot |g(x) - m| < \frac{2}{|m|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot |m|^2 = \varepsilon$$

Definición 4.4 (Límites en $\bar{\mathbb{R}}$)
Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real, ampliamos la definición de límite para $\overline{\mathbb{R}}$ en base a las siguientes definiciones:

1. *Si $x_0 \in D'$, decimos que:*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \geq M$$

2. *Si $x_0 \in D'$, decimos que:*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \Rightarrow f(x) < -M$$

3. *Si $D = (a, \infty)$ y $a, l \in \mathbb{R}$ decimos que:*
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

4. *Si $D = (-\infty, a)$ y $a, l \in \mathbb{R}$ decimos que:*
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

5. *Si $D = (a, \infty)$, decimos que:*
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists k > 0 : x > k \Rightarrow f(x) > M$$

6. Si $D=(a,\infty)$, decimos que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0 : \exists k>0 : x>k \Rightarrow f(x) < -M$$

7. Si $D=(-\infty,a)$, decimos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0 : \exists k>0 : x<-k \Rightarrow f(x) > M$$

8. Si $D=(-\infty,a)$, decimos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0 : \exists k>0 : x<-k \Rightarrow f(x) < -M$$

Proposición 4.3 (Recaracterización de límite)
Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función numérica y $x_0, l \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} l$$

Observación 4.3:
Esta recaracterización, esta vez para el límite ampliado, de nuevo vuelve a ser vía sucesiones. Esto permite saber que las reglas de cálculo[3] de límites siguen siendo válidas, excepto las denominadas **indeterminaciones** $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ y $\frac{0}{0}$ para las que no se puede afirmar nada (habrá que calcular los límites de otra forma salvando dichas expresiones).

CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

En la introducción del capítulo hemos aclarado que la idea informal de continuidad es la de que los valores de la función "cerca" del punto coinciden con el valor de la función en el punto. La parte de "cerca" ha quedado zanjada y formalizada en la noción de límite que hemos desarrollado en el capítulo anterior. Por tanto, para conseguir formalizar el término *continuidad en un punto* es necesario que articulemos todo. ¿Qué puede querer decir que el valor de la función cerca coincida con el valor de la función en el punto? Efectivamente, que el propio límite sea la imagen del punto donde estamos estudiando la continuidad.

Definición 4.5 (Continuidad en un punto)
Sea $D\subset\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, entonces decimos que f es continua en x_0 si y sólo si

$$\forall\varepsilon>0 : \exists\delta>0 : x\in D\cap(x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$$

La continuidad en un conjunto se traduce en la continuidad en cada uno de sus puntos.

Es importante remarcar una cosa y para ello vamos a volver a fijarnos en las dos funciones de la Figura 4.1 de la introducción del capítulo. A veces tenemos la mala costumbre de tomar las explicaciones informales que se dan a modo de intuición como teoremas mismos. Con lo que hemos ido explicando, uno podría pensar: "Una función continua es aquella que se pinta sin levantar el lápiz del papel", es decir, que si hay "saltos" entre los puntos que están cerca entonces no puede ser continua ahí. Sin embargo, en la función de Thomae (a la derecha en la misma figura) hemos dicho que en los irracionales sí es continua y, recordemos, siempre hay racionales tan cerca como se quiera de un irracional (por ser real), luego tenemos infinitos saltos tan cerca como queramos y, aún así, la función es continua en esos valores.

Proposición 4.4 (Caracterización de la continuidad)
Sea $D\subset\mathbb{R}$ no nulo, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real y $x_0 \in D'$, entonces:

[3] Suma de límites, producto, diferencia...

1. f *cont. en* $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. f *cont. en* $x_0 \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$

Demostración:

1. - "$\Rightarrow$": inmediato porque si todos los números de ese entorno van a parar a x_0, entonces esos mismos puntos menos x_0 van a parar a $f(x_0)$, luego cumple la definición de límite.
   - "$\Leftarrow$":

   $$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

   Es decir, partiendo de que es el límite se cumple que todos los números en el intervalo cumplen la definición de función continua menos el x_0, por lo tanto vamos a ver que ocurre en ese caso:

   $$x = x_0 \Rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon \Rightarrow \text{ también lo verifica}$$

2. Es también inmediata porque ya demostramos que para la definición de límite se cumplía lo de las sucesiones convergentes al mismo, pero añadíamos que la condición era que $x \neq x_0$ por lo que si tomamos la sucesión con $x = x_0$ entonces es fácil ver que se verifica la convergencia de sucesiones hacia $f(x_0)$. □

Observación 4.4:
En la caracterización de continuidad que hemos dado, se ha pedido que $x_0 \in D'$, pero en la definición formal de continuidad basta con que $x_0 \in D$. Llegados a este punto, uno se habrá fijado además que en la definición formal se permite considerar a x_0 entre esos puntos del conjunto cuya imagen cae cerca de $f(x_0)$. Juntando estas dos cosas vemos que lo único que puede estropear la continuidad son los puntos cercanos ¡pues la imagen de x_0 siempre estará cerca de $f(x_0)$, concretamente a distancia 0!, es decir, que si x_0 es un punto aislado **la función es continua[4] trivialmente.**

Viendo el paralelismo que existe entre la definición de continuidad y la definición de límite, no es de extrañar que podamos extrapolar muchos de los resultados para estos últimos a la continuidad de funciones.

Teorema 4.3 (Operaciones con Continuidad)
Sea $D \subset \mathbb{R}$ no nulo, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $x_0 \in D'$, entonces:

1. $h(x) := f(x) + g(x)$ *es continua en* x_0.
2. $h(x) := a \cdot f(x)$ *es continua en* x_0.
3. $h(x) := f(x) \cdot g(x)$ *continua en* x_0.
4. $h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ *es continua en* x_0 *si* $g(x_0) \neq 0$.

y, en consecuencia, podemos decir que el conjunto $C(D)$ de funciones continuas en D es un espacio vectorial.

Demostración:

1. Sale de las propiedades de los límites:

   $$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow f \cdot g \text{ continua en} D$$

   El resto igual

2. Si $f, g \in C(D) \Rightarrow f + g \in C(D) \wedge a \cdot f \in C(D) : \forall a \in \mathbb{R}$ La comprobación es trivial. □

[4]Sin embargo, en la caracterización se ha pedido que $x_0 \in D'$ porque para poder hablar de límite es necesario dicha condición, esto es, la caracterización se centra en los puntos donde no es trivial la continuidad.

Corolario 4.3.1

Sea $D \subset \mathbb{R}$ no nulo y $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polinomio en $\mathbb{R}$, siempre es una función continua.

Demostración:
Basta con probar que $f_0(x) = 1$ y $f_1(x) = x$ son continuas.

$$f_0(x) = 1 \wedge x_0 \in D: \text{ Dado } \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_0(x) - f_0(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

$$f_1(x) = x \wedge x_0 \in D: \text{ Dado } \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta = \varepsilon \text{ lo cumple}$$

Y con lo probado antes de que todas las funciones continuas si se suman o se multiplican dan funciones continuas, queda probado que todos los polinomios son continuos. □

Proposición 4.5 (Continuidad de la Composición)

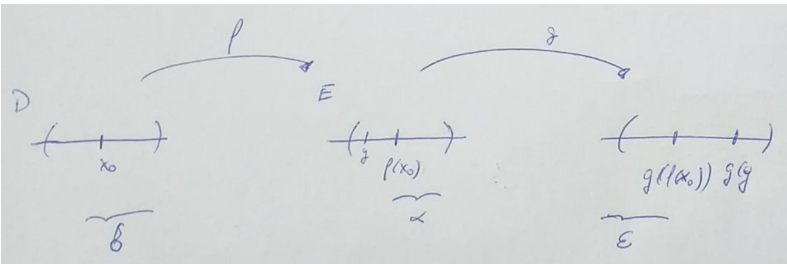
Sea $D, E \subset \mathbb{R}, f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(D) \subset E$, entonces:

1. *Si $x_0 \in D$, f es cont. en x_0 y g es cont. en $f(x_0)$, entonces:*
$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ cont. en } x_0$$

2. *Si f es continua en D y g en E, entonces $g \circ f$ continua en D*

Demostración:

1. Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ de manera que todos los elementos de D en el intervalo de δ vayan a parar al de ε:
$$g \text{ continua en } f(x_0) \Rightarrow \exists \alpha > 0 : \forall y \in E : |y - f(x_0)| < \alpha \Leftrightarrow |g(y) - g(f(x_0)| < \varepsilon$$
$$f \text{ continua en } x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha$$



□

Por lo que tenemos que:
$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\underbrace{f(x)}_{\in E} - f(x_0)| < \alpha \Leftrightarrow |y - f(x_0)| < \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

2. Es la demostración de 1. pero aplicada a todo $x_0 \in D$, es decir, ocurre la 1. pero en todos los puntos de D.

3. Podemos hacer la demostración del apartado 1 pero por sucesiones:
$$\text{Sea } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \overset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow} f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0) \overset{g \text{ cont.}}{\Rightarrow} g(f(x_n)) \xrightarrow{n\to\infty} g(f(x_0)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g \circ f \text{ cont. en } x_0$$

Proposición 4.6

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e inyectiva (entonces biyectiva sobre $f(I)$), entonces:
$$\exists f^{-1} : f(I) \longrightarrow I \text{ continua}$$

Demostración:

- Supongamos primero que el intervalo es cerrado y acotado: $I = [a, b]$ y sea $y_0 \in f(I) = D$, escogemos una sucesión convergente a un número de la imagen, entonces: sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$: $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y_0$. Veamos que $f^{-1}(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f^{-1}(y_0)$:

$$\text{Sea } x_n = f^{-1}(y_n) \text{ y } x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \text{ y } x_0 \in I$$

Por el **Teorema de Bolzano-Wierstrass**, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene subsucesiones convergentes. Cojamos una cualquiera, sea $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsución que converge a $l \in [a, b]$, entonces $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} l$ y como f es continua, entonces $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(l)$, por lo tanto:

$$\underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} \xrightarrow{k\to\infty} f(l) \Leftrightarrow y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{f(l)}_{y_0} \Rightarrow \underbrace{y_0}_{f(x_0)} = f(l) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0) = f(l) \overset{Biyec.}{\Rightarrow} x_0 = l$$

Veamos que efectivamente $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, hemos demostrado que cualquier subsución convergente de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0, pero no hemos demostrado que todas converjan. Supongamos que hay una que no converge:

$$\exists \delta > 0 \wedge \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset I : |x_{n_k} - x_0| > \delta$$

Es decir, hay términos de la sucesión que no se acercan a x_0, pero como la subsución está acotada por pertenecer a I, entonces por el teorema de **Bolzano-Wierstrass** posee alguna subsución convergente y, por lo demostrado antes, esa subsución de la subsución converge a x_0:

$$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ posee subsucesion convergente} \Rightarrow \text{converge a } x_0 \Rightarrow \#$$

Esto es cierto porque si la subsución convergente, aunque sea subsución de la subsución también lo es de la sucesión inicial, por lo que cumple lo demostrado antes para la subsucesiones convergentes. Además al probar esto, ese hecho contradice la premisa de no ser convergente a x_0

- Si I es un intervalo cualquiera, sea $y_0 \in f(I)$ y sea $x_0 = f^{-1}(y_0)$ podemos encontrar SIEMPRE $a, b \in \mathbb{R} : x_0 \in [a, b] \in I$ y entonces podemos volver al caso anterior. □

Definición 4.6 (Límites Laterales)
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces:

1. *Si $x_0 \in (a, b]$, decimos que $l \in \mathbb{R}$ es el **límite por la izquierda de f en** x_0 si y sólo si:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2. *Si $x_0 \in [a, b)$, decimos que $l \in \mathbb{R}$ es el **límite por la derecha de f en** x_0 si y sólo si:*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Proposición 4.7
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces:

1. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n < x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} l$
2. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n > x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} l$
3. *$f(x_0^-)$ y $f(x_0^+)$ si existen son únicos.*

Demostración:

1. - "$\Rightarrow$":

     Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n < x_0 : \forall n \in \mathbb{N}$. Sabemos porque es límite que dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, pero como sabemos que la sucesión converge a x_0, entonces dado $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$

   - "$\Leftarrow$":

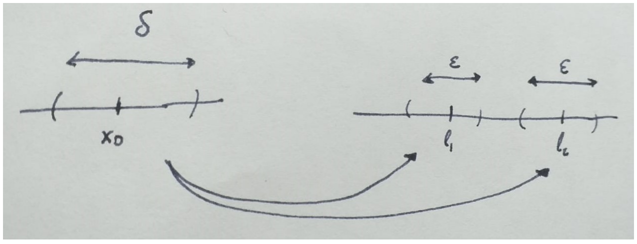
     Si l no es $f(x_0^-) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in (x_0 - \delta, x_0) : |f(x) - l| \geq \varepsilon$. Vamos a construir una sucesión que se acerca por la izquierda y cuyas imágenes no convergen a l para todo ε.

     $$\delta = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall \delta = \frac{1}{n} : \exists x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0\right) : |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$$

     Vemos que tenemos una sucesión de manera que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ porque cuando $n \to \infty \Rightarrow |x_0 - \frac{1}{n}| < \varepsilon$, es decir, cuanto más grande es n, más cerca del límite están los números de la sucesión, pero sus imágenes no convergen a l por haberla escogido así: $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} l$, luego $\#$.

2. Análogo a la anterior

3. La misma demostración que para la unicidad del límite, se trata de coger un ε de manera que los entornos de l_1 y l_2 sean disjuntos.



□

Teorema 4.4 (Caracterización de la continuidad)
Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$, entonces:

1. $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = l$
2. *f es continua en x_0* $\Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$

Demostración:

1. - "$\Rightarrow$":

     $$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

     Y ya está porque si los números de ese intervalo lo cumplen, entonces los números del intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$ también.

   - "$\Leftarrow$":

     $$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists \delta_1 > 0 : x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \exists \delta_2 > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$$

     Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces:

     $$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2. Demostrado porque para ser continua el límite tiene que ser igual a $f(x_0)$ y para que exista el límite tiene que ser igual a él los límites laterales. □

Definición 4.7 (Discontinuidades)
Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$, si f no es continua en x_0, entonces:

- *Existen $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$:*
  - ***Discontinuidad evitable**: $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, pero distintos a $f(x_0)$*
  - ***Discontinuidad de salto**: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$*
    - ***Salto finito**: $f(x_0^-), f(x_0^+) < \infty$.*
    - ***Salto infinito**: $f(x_0^-) > \pm\infty$ o $f(x_0^+) > \pm\infty$.*
- *No existe alguno de los dos límites laterales:*
  - ***Discontinuidad esencial**: $\nexists f(x_0^-)$ o $\nexists f(x_0^+)$*

Definición 4.8 (Límites Laterales en $\bar{\mathbb{R}}$)
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces:

- *Si $x_0 \in (a, b]$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) \geq M$$

- *Si $x_0 \in (a, b]$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < -M$$

- *Si $x_0 \in [a, b)$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \geq M$$

- *Si $x_0 \in [a, b)$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) < -M$$

Proposición 4.8
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces:

- *Si $x_0 \in (a, b)$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \wedge \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$$

- *Si $x_0 \in (a, b)$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

- *Si $x_0 \in (a, b]$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b) : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 : x_n < x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

- *Si $x_0 \in (a, b]$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b) : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 : x_n < x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} -\infty$$

- *Si $x_0 \in [a, b)$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b) : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 : x_n > x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

- *Si $x_0 \in [a, b)$, decimos que:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b) : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 : x_n > x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} -\infty$$

Teoremas fundamentales de funciones continuas

Dijimos en su momento que la continuidad aportaba unas ciertas condiciones de regularidad que permitían estudiar y analizar exhaustivamente a las mismas. Los teoremas que presentamos en este apartado son fruto precisamente de esta regularidad y son algunas de las muestras de la importancia de las funciones continuas en el Análisis matemático.

Teorema 4.5 (de Wierstrass)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces:

- *Es acotada:* $\exists M > 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$
- *Se alcanzan el máximo y el mínimo:* $\exists c, d \in [a, b] : \begin{cases} f(c) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \\ f(d) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \end{cases}$

Demostración:

1. Supongamos que no es acotada superiormente (y el inferiormente es análogo):
$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$
Entonces tenemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ y por el teorema de Bolzano-Wiestrass: $\exists\{x_{n_k}\}$ convergente (a x_0) y como f es continua entonces $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$, por lo probado en teoremas anteriores, y teníamos que $f(x_{n_k}) > n_k$ que converge a infinito, luego $\#$.
2. Como está acotado, su supremo existe: $S = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y su ínfimo $I = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, entonces[5] como es supremo:
$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : S - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq S$$
Esto forma una sucesión de números. Como sabemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$, entonces por el Teorema de Bolzano-Wierstrass, tenemos que $\exists\{x_{n_k}\}$ que converge (a d) por lo que tenemos que $f(x_{n_k})$ converge a $f(d)$ y como $f(x_n)$ converge a S, entonces $f(d) = S$. □

Observación 4.5:
Se puede anotar como observación que cuando la función no es continua esto es falso y del mismo modo cuando el intervalo es abierto no ocurre.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{donde } x \in [-1, 1] \Rightarrow \text{ no acotada}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{donde } x \in (0, 1) \Rightarrow \text{ no alcanza su máximo y su mínimo}$$

Teorema 4.6 (de Bolzano)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Demostración:
Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces sea $A = \{t \in [a, b] : f(t) < 0\}$ tenemos que $a \in A$ y b es cota superior de A y, en consecuencia, existe el supremo que llamaremos $\exists \sup(A) = c$. Entonces existe una sucesión de puntos de A que converge a su supremo porque $\forall n \in \mathbb{N} : \exists t_n \in A : c - \frac{1}{n} < t_n \leq c$, es decir, $\exists\{t_n\} \subset A : t_n \xrightarrow{n\to\infty} c$. Como f es continua, entonces $f(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(c) \Rightarrow f(c) \leq 0)$ y ahora probamos que $f(c) = 0$.

Si $f(c) < 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 : \forall x \in (c - \delta, c + \delta) : f(x) < 0 \Rightarrow (c - \delta, c + \delta) \subset A$, lo que contradice que $c = \sup A \Rightarrow \# \Rightarrow f(c) = 0 \Rightarrow c \in (a, b)$ porque $f(a) \neq 0$ y $f(b) \neq 0$. □

[5]Hacemos la del supremo porque la del ínfimo es análoga

Teorema 4.7 (del valor intermedio)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que[6] $A = f(a)$ *y* $B = f(b)$, *entonces:*

$$\forall C \in (A,B) : \exists c \in (a,b) : f(c) = C$$

es decir, que una función continua alcanza todos los valores intermedios entre dos de sus imágenes.

Demostración:
Llamamos $g(x) = f(x) - C$ de manera que $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y es continua. Es fácil ver que:

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - C = A - C \\ g(b) = f(b) - C = B - C \end{cases} \Rightarrow \text{ signos distintos } \stackrel{Bolzano}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b) : g(c) = 0$$

Proposición 4.9
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces $f([a,b])$ es un intervalo cerrado y acotado, formado por el ínfimo y el supremo de las imágenes.

Demostración:
Por el teorema de Wiestrass, hemos visto que:

$$\exists c, d \in [a,b] : \begin{cases} f(c) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ f(d) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \end{cases}$$

En particular, $\forall x \in [a,b]$ tenemos que:

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \Rightarrow f([a,b]) \subset [f(c), f(d)]$$

Veamos ahora " $\supset''$:

Sea $y \in [f(c), f(d)]$ suponiendo que es distinto de $f(c)$ y $f(d)$ como $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ continua por el teorema de valores intermedios, entonces $\exists x \in [c,d] : f(x) = y \Rightarrow y \in f([c,d]) \subset f([a,b])$. □

Proposición 4.10
Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, si $f : I \to |\mathbb{R}$ y es continua, entonces $f(I)$ es un intervalo.

Demostración:
Sea $\alpha, \beta \in f(I)$, veamos que $[\alpha, \beta] \subset f(I) \Rightarrow f(I)$ es un intervalo: Teniendo en cuenta lo primero podemos asegurar que $\exists a, b \in I : \alpha = f(a) \wedge \beta = f(b)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a < b \Rightarrow [a,b] \subset I$ y como $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces si $y \in [\alpha, \beta]$ tenemos que $\exists c \in [a,b] \subset I : f(c) = y \in f(I)$. □

Continuidad uniforme

La definicion de continuidad vista es: supongamos que tenemos $f : D \to \mathbb{R}$ donde $D \subset \mathbb{R}$ de manera que f es continua en D, es decir:

$$\forall x \in D : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Esto quiere decir que una vez fijo el x, para cualquier ε escogido, siempre podemos encontrar un δ de manera que se cumpla lo que sigue.

La aproximación que ofrecemos en este subapartado es completamente distinta: elegimos el ε primero y encontramos un δ que nos vale para cualesquiera dos puntos que estén a dicha distancia.

[6] Para el enunciado del teorema se ha supuesto que $A < B$ pero es indiferente para el resultado.

Definición 4.9 (Continuidad uniforme)
Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función, decimos que es ***uniformemente continua en*** *D si y sólo si:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Se ve, por tanto, que ponemos de manifiesto que escogido un ε cualquiera, siempre podemos encontrar un δ de manera que para todos los x e y que estén a distancia menor que δ sus imágenes están lo suficientemente cerca.

Observación 4.6:

1. Si f es uniformemente continua en D, también es continua en D.
2. El recíproco es falso:

Ejemplo 4.1:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$ es continua pero no uniformemente continua. Esto es así porque sea $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ y $x, x+\delta$ entonces tenemos que: $|f(x) - f(x+\delta)| = |x^2| - (x+\delta)^2 = \delta|\delta + 2x|$. Si dado el delta yo escojo un x de manera que $\delta + 2x > \frac{1}{\delta}$, entonces $\delta|\delta + 2x| > 1$, por lo que no es uniformemente continua porque hemos encontrado un x que no satisface la propiedad.

Teorema 4.8
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces es uniformemente continua en un intervalo cerrado y acotado.

Demostración:
Supongamos que f no es uniformemente continua, entonces $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta$ y $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Para $\delta = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}$, entonces $\exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Pero entonces tenemos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in [a, b]$ y por el teorema de Bolzano-Wierstrass, $\exists \{x_{n_k}\}$ subsucesión convergente a $l \in [a, b]$ de manera que $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow |x_{n_k} - y_{n_k}| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}) \overset{n\to\infty}{\Leftrightarrow} y_{n_k} \to l + 0 = l$

Pero por otro lado, las imágenes están lejos porque como f es continua, entonces $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(l)$ y $f(y_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(l)$, pero tenemos que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq 0$ y es absurdo porque cuando se tiende a infinito tenemos que $|l - l| = 0 < \varepsilon \Rightarrow \#$. □

Funciones Monótonas

Cabe destacar y mencionar en este capítulo una serie de funciones muy relevantes: las funciones monótonas. Vamos a estudiar que propiedades ofrece la monotonía y por qué son tan importantes en el estudio del análisis de variable real.

Definición 4.10 (Función Monótona)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, decimos[7] *que es:*

- ***Monótona Creciente:*** $\forall x, y \in [a, b] : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- ***Monótona Decreciente:*** $\forall x, y \in [a, b] : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Teorema 4.9
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente[8]*, entonces:*

- $\forall x \in (a, b) : \exists f(x^-)$ *y* $f(x^+) : f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$

[7] Le añadimos el sobrenombre de **estricta** si la desigualdad es estricta
[8] Con las decrecientes ocurre de forma análoga.

- $\begin{cases} f(x^-) = \sup\{f(t) : t < x\} \\ f(x^+) = \text{ínf}\{f(t) : t > x\} \end{cases}$
- $\forall x, y \in (a,b) : x < y \Rightarrow f(x^+) \leq f(y^-)$

Demostración:
Sea $x \in (a,b)$, $A_x = \{f(t) : t < x\}$ y $B_x = \{f(t) : t > x\}$ donde $t \in [a,b]$. Como f es monótona creciente:

$$\begin{cases} \text{Si } t < x \quad f(t) \leq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es cota superior de } A_x \\ \text{Si } x < t \quad f(x) \leq f(t) \Rightarrow f(x) \text{ es cota inferior de } B_x \end{cases} \Rightarrow \exists \xi = \sup A_x \text{ y } \exists \eta = \text{ínf } B_x$$

Veamos ahora que $\xi = f(x^-)$:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists t_1 < x : \xi - \varepsilon < f(t_1) \leq \xi$$

Pero como la función es monótona creciente entonces si escogemos un t, de manera que $t_1 < t < x \Rightarrow \xi - \varepsilon < f(t_1) < f(t) < \xi$.

En síntonía con lo anterior, sea $\delta = x - t_1 > 0$ tenemos que si $t \in (x - \delta, x) \Rightarrow f(t) \in (\xi - \varepsilon, \xi) \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ que es precisamente la definición de límite por la izquierda, con lo que queda probado que $\xi = f(x^-)$.

Ahora probamos que $\eta = f(x^+)$:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists t_2 > x : \eta < f(t_2) \leq \eta + \varepsilon$$

Del mismo modo, sea $\delta = t_2 - x$, si escogemos un t de manera que $x < t < t_2 \Rightarrow \eta \leq f(t) \leq f(t_2) < \eta + \varepsilon \Rightarrow t \in (x, x + \delta) \Rightarrow f(t) \in (\eta, \eta + \varepsilon) \subset (\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$ que es precisamente la definición de límite por la derecha, con lo que queda probado que $\eta = f(x^+)$.

Si $x < y$, entonces sea $t : x < t < y$. Sabemos que $f(x^+) \leq f(t)$ y como también $f(t) \leq f(y^-)$, entonces tenemos que $f(x^+) \leq f(t) \leq f(y^-)$. □

Observación 4.7:
El teorema se mantiene en $x = a$ y $x = b$ contando con que no existe el límite por la izquierda y por la derecha respectivamente. En consecuencia, podemos decir que las funciones monótonas solo tienen discontinuidades de salto.

Teorema 4.10
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona, entonces el conjunto de discontinuidades es, a lo sumo, ***numerable****.*

Demostración:
Supongamos que f es creciente[9]. Llamamos $D = \{x \in (a,b) : f \text{ es discontinua}\}$, sabemos también que f es discontinua $\Leftrightarrow f(x^-) < f(x^+)$, entonces $\forall x \in D : \exists q_x \in \mathbb{Q} : f(x^-) < q_x < f(x^+)$. Entonces tenemos $s : D \to \mathbb{Q}$ donde a cada $x \to q_x$. Veamos que esta aplicación es inyectiva, por que sabemos que una función es siempre suprayectiva sobre su imagen y demostrar la inyectividad supone poder establecer una biyección con los naturales. Si $x_1 < x_2 \Rightarrow s(x_1) = q_{x_1} < f(x_1^+) \leq f(x_2^-) < q_{x_2} = s(x_2)$, por lo que es numerable. □

Proposición 4.11
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces:

1. *f es inyectiva si y sólo si f es estrictamente monótona.*
2. *$f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b]$ es continua, estrictamente monótona y biyectiva si f es inyectiva.*

[9] Con las decrecientes pasa lo mismo

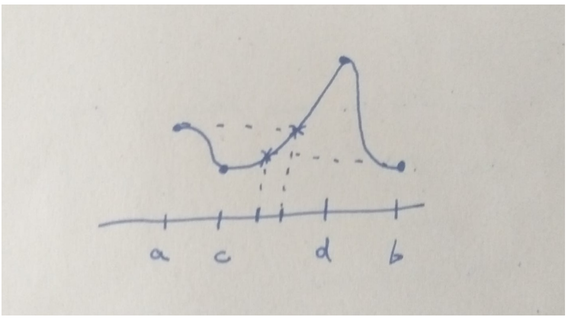
Demostración:

1. Vemos la doble implicación:

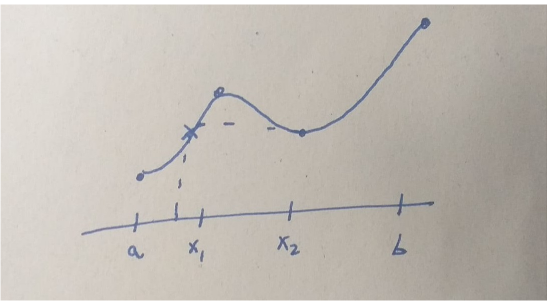
    - "$\Leftarrow$":

    $$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f \text{ inyectiva}$$

    - "$\Rightarrow$": Sea f continua e inyectiva, como $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$ donde $f(c) = \inf\{f(t) : t \in [a,b]\}$ y $f(d) = \sup\{f(t) : t \in [a,b]\}$. Además como f es inyectiva, $f(c) \neq f(d)$ porque si fuese iguales la función sería constante lo cual es absurdo, esto implica que $f(c) < f(d) \Rightarrow c \neq d$.
    Supongamos que $c < d$, vamos a ver que necesariamente $c = a$, $d = b$ y que f es estrictamente creciente.

    Supongamos que no, es decir, $a < c \Rightarrow f(c) < f(a) < f(d)$. Por el teorema de valores intermedios algún punto entre c y d tomará el valor de $f(a)$, por lo que $\exists t \in (c,d) : f(t) = f(a) \Rightarrow$ no es inyectiva luego $\#$.
    Supongamos que $d < b$, vamos a ver que necesariamente $d = b$ y que f es estrictamente creciente. Supongamos que no, es decir, $d < b \Rightarrow f(c) < f(b) < f(d)$. Por el teorema de valores intermedios algún punto entre c y d tomará el valor de f(b), con lo cual $\exists t \in (a,b) : f(t) = f(b) \Rightarrow \#$ porque la hipótesis es que era inyectiva. Por lo que $a = c$ y $d = b$.

    Con lo cual y viendo el dibujo, sabiendo que $a = c$ y que $b = d$, entonces veamos que es estrictamente creciente: supongamos que no $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ y $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq a$ porque es el ínfimo de las imágenes y además también $x_2 \neq b$ por el mismo motivo. Con lo cual, $f(a) < f(x_2) < f(x_1)$. En consecuencia, por el teorema de valores intermedios en $[a, x_1] : \exists t \in (a, x_1) : f(t) = f(x_2) \Rightarrow \#$ porque es inyectiva, con lo cual: $f(x_1) < f(x_2)$ y es estricta la desigualdad porque si fuese igual, no se cumpliría la inyectividad.
    Si tenemos el otro caso, en el que $c > d$, vamos a probar que $a = d$ y $c = b$ y que f es estrictamente decreciente. Si $a < d$, entonces $f(c) < f(a) < f(d)$, entonces por el teorema de valores intermedios $\exists t \in (d,c) : f(t) = f(a) \Rightarrow \#$. Si $c < b$, entonces de la misma manera ocurre por el teorema de valores intermedios que $f(c) < f(b) < f(d) \Rightarrow \exists t \in (c,d) : f(t) = f(b) \Rightarrow \#$.
    Con lo cual, sabiendo que $a = d$ y que $b = c$, entonces veamos que es estrictamente decreciente: supongamos que no $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ y $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq a$ porque es el supremo de las imágenes y además también $x_2 \neq b$ por el mismo motivo. Con lo cual, $f(b) < f(x_1) < f(x_2)$. En consecuencia, por el teorema de valores intermedios en $[x_2, b] : \exists t \in (x_2, b) : f(t) = f(x_1) \Rightarrow \#$ porque es inyectiva, con lo cual: $f(x_1) > f(x_2)$ y es estricta la desigualdad porque si fuese igual, no se cumpliría la inyectividad.

2. Como lo anterior ya está demostrado, solo falta demostrar que la inversa también es estrictamente monótona. Sabemos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona. Ahora para hacer un caso[10] suponemos que f es estrictamente creciente. Si $x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, si $y_1, y_2 \in f([a, b]) = [f(c), f(d)]$ y además $y_1 < y_2$, entonces sabemos por ser inyectiva que $\exists! x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = y_1 < f(x_2) = y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$ porque si fuese $x_1 > x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Rightarrow f^{-1}$ es estrictamente creciente. □

Continuidad de funciones elementales

Como hemos visto que la suma, el producto y la composición de funciones continuas respeta la continuidad, si tenemos un buen alijo de funciones simples que se haya demostrado que sean continuas tendremos entonces una herramienta muy potente para demostrar que cualquier función lo es. Bastará con descomponerla en otras más pequeñas relacionadas entre sí por operaciones que respeten la continuidad.

Teorema 4.11 (Regla del Sandwich para funciones)
Sea $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ y $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ dos funciones que verifican que :

- $\forall delta_0 > 0 : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = m$
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = m$

entonces se tiene que:

$$\overbrace{f(x)}^{\xrightarrow{x \to x_0} m} \leq g(x) \leq \overbrace{h(x)}^{\xrightarrow{x \to x_0} m} \Rightarrow g(x) \xrightarrow{x \to x_0} m$$

Demostración:
Considerando que ambas funciones "tapa" tienden a m tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - m| < \varepsilon$$

Luego si dado un $\varepsilon > 0$, cogemos $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ tenemos que:

$$m - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < m + \varepsilon \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$$

Teorema 4.12 (Continuidad de la exponencial)
Sean $f : D \to (0, \infty)$ y $g : D \to \mathbb{R}$, entonces la función:

$$\begin{aligned} h : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)^{g(x)} \end{aligned}$$

es una función continua.

Demostración:
Para demostrar esta proposición vamos a demostrar pequeños resultados intermedios:

$$f(x) = a^x \text{ es continua} \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to} f(x)$$

Como vimos en el tema de sucesiones, el límite se puede pasar al exponente así que se tiene que: $f(x_n) = a_n^x \xrightarrow{n \to \infty} a^x \Rightarrow f$ es continua. Por el teorema que dice que la composición de funciones continuas es continua, se tiene que: $f(x) = a^{g(x)}$ es continua.

[10] El caso decreciente es análogo

Del mismo modo, tenemos que $f(x) = x^a$ es continua porque por el mismo razonamiento: $f(x_n) = x_n^a \xrightarrow{n\to\infty} x^a$, luego se cumple. En consecuencia, tenemos que por la composición: $f(x) = g(x)^a$ es continua.

Basta con ver que al ser estas dos funciones continuas, la composición de ambas: $h(x) = f(x)^{g(x)}$ es continua. $\square$

Teorema 4.13

La funciones trigonométricas seno y coseno, es decir, $\sin x$ *y* $\cos x$ *son funciones continuas.*

Teorema 4.14 (Continuidad del logaritmo)

Sea $a \in \mathbb{R}$ *un número positivo, definimos el* ***logaritmo en base*** a *como la función inversa a la exponencial, es decir:*

$$\begin{aligned} log_a x : (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a^x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Además observamos las siguientes propiedades:

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 0 \to -\infty$

Demostración:
Como ya demostramos que $f(x) = a^x$, era continua, monótona e inyectiva y también estaba demostrado que toda función es sobreyectiva sobre su imagen, vemos que la inversa existe: a esta es a la que denominamos *logaritmo*. Veamos que su dominio es $(0,\infty)$:

Si $a > 1$, entonces $\lim_n \to \infty a^n = \infty$ y $\lim_n \to \infty a^- n = 0$, por lo que la imagen siempre es positiva. Como $\mathbb{R}$ es un intervalo, sabemos que la imagen de un intervalo por una función continua es de nuevo un intervalo lo que implica que $f(\mathbb{R}) \subset (0,\infty)$ y como las imágenes de antes tendían a 0 y a ∞ necesariamente la imagen es $(0,\infty)$. El caso de que $0 < a < 1$ es análogo. En consecuencia, imagen de a^x es el dominio de la función inversa.

Para las propiedades, tal y como hemos definido el logaritmo este representa el exponente al que debe elevarse la base para que pueda ser x, con lo cual $a^{\log_a x} = x$ así que:

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{log_a x} \cdot a^{log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y} \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

El resto de propiedades se demuestran de forma análoga. $\square$

CÁLCULO DIFERENCIAL

En este capítulo desarrollamos otro de los temas centrales del cálculo y el análisis matemático: la derivación. El problema surge del estudio de cambios en el valor de la función ante cambios infinitesimales de la entrada de la misma. Además, dicho concepto se relaciona íntimamente con las curvas y rectas tangentes a distintas superficies y con la optimización de funciones a través de máximos y mínimos.

DERIVABILIDAD

En esta primera parte vamos a desarrollar toda la teoría necesaria para comprender el concepto de derivada, saber cómo operar con él y qué propiedades tiene para luego poder aplicar los resultados de forma eficiente.

Concepto de Derivada

El objetivo principal es ver cómo se comporta el cociente $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ cuando x es muy próximo a c. Es decir, dado un punto c cualquiera, queremos cuantificar cuánto varía la imagen por f con respecto a la que nos da $f(c)$ cuando los puntos que observamos están a una distancia infinitesimal.

Definición 5.1 (Derivabilidad)
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función donde I es un intervalo y $c \in I$, decimos que es ***derivable o diferenciable en*** c *si y sólo si $\exists L \in \mathbb{R}$ que verifica:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

En este caso[1] *decimos que L es la derivada de f en c y escribimos $f'(c) = L$.*

Observación 5.1:
Esta definición es equivalente a la siguiente: si definimos la función $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ donde $x \in I \backslash \{c\}$ entonces podemos redefinir la derivada como:

$$f \text{ es derivable en } c \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to c} \varphi(x) = L$$

Esta caracterización es importante porque hemos visto y trabajado la demostración de la existencia o no de un límite y el cálculo de los mismos, por lo que en ocasiones puede facilitarnos el trabajo usar esta alternativa en vez de la definición.

[1] Cabe destacar que c puede ser un extremo del intervalo y que además c debe pertenecer al dominio porque debemos poder calcular $f(c)$.

Ejemplo 5.1:
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$, luego hay que estudiar $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{x^2-c^2}{x-c} = x + c$, luego tenemos que $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 2c$.

Veamos el mismo ejemplo con la definición, nuestro candidato es $f'(c) = 2c$, la pregunta es si dado $\varepsilon > 0$, puedo encontrar un δ de manera que se cumpla al definición?, veamos:

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - 2c\right| = \left|\frac{x^2-c^2}{x-c} - 2c\right| = |x+c-2c| = |x-c| < \delta \Rightarrow \delta < \varepsilon$$

Luego bastaría con escoger un delta de manera que este sea menor que el epsilon dado.

Proposición 5.1
Si f es derivable en c, entonces la derivada es única.

Demostración:
f es derivable en c si y sólo si $\lim_{x\to c} \varphi(x)$ y como el límite es único, en consecuencia, la derivada debe ser un único valor. □

Definición 5.2 (Función Derivada)
*Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo I, definimos la **función derivada** como:*

$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ c &\to f'(c) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2:
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ como hemos visto antes.

Teorema 5.1
Si f es derivable en c, entonces f es continua en c.

Demostración:
Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \in \mathbb{R}$, vemos que si $x \neq c$, entonces $f(x) - f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c)$, pero sabemos que $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ y que además $\lim_{x\to c} x - c = 0$. Esto implica que

$$\exists \lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot \lim_{x\to c}(x-c) = f'(c)\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = f(c) \Rightarrow f(x) \text{ continua en } c$$

Observación 5.2:
Sin embargo, en general el recíproco no es cierto, es decir, existe funciones continuas que no son derivables en algún punto de su dominio.

Ejemplo 5.3:
Sea $f(x) = |x|$ tenemos que f es continua en $x = 0$ porque es continua en $\mathbb{R}$. Veamos que no es derivable en 0 ¿$\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$?:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Luego no es derivable

Interpretación geométrica de la derivada

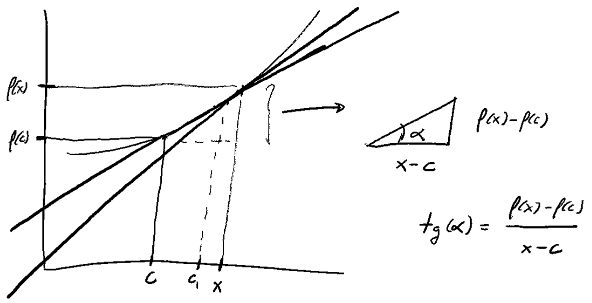
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función real y $c, a \in I$ puntos de su dominio, vamos a estudiar el valor de la pendiente[2] de la recta que pasa por $(cf, (c))$ y $(a, f(a))$.

$$m = \frac{f(a) - f(c)}{a - c}$$

Pero nos preguntamos ¿qué cambios sufrirá dicho valor si variamos el punto a?. Para ello, vamos a tomar a, como una variable, es decir, x, quedando el valor anterior como:

$$m = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

De este modo, para cada valor de x tendremos el valor de la pendiente de la recta que une ambos puntos y ahora nos surge otra nueva pregunta: ¿qué pasará si escojo valores de x cada vez más cercanos a c o, lo que es lo mismo, si $x \to c$? La respuesta visualmente es sencilla:



La recta, como pasa cada vez por dos puntos que están más próximos, tiene una pendiente más ajustada a la curva por el punto c. Cuando pasamos al límite, estamos diciendo que estamos "tomando $x = c$" y, en consecuencia, tenemos una recta tangente a c en ese punto.

Criterios de Derivabilidad

Una vez definido y estudiado el concepto de derivada, es necesario entender cómo se relaciona este nuevo elemento matemático con las operaciones habituales de funciones sobre todo para saber en qué casos se conserva.

Teorema 5.2 (Operaciones con Derivabilidad)
Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivables en $c \in I$, se tiene que:

1. *La función $f + g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:*

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

2. *La función[3] $\alpha \cdot f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:*

$$(\alpha \cdot f)'(c) = \alpha \cdot f'(c)$$

3. *La función $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:*

$$(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

[2] A pesar de darse esta explicación geométrica, en ningún caso intervendrá en cualesquiera de las demostraciones posteriores puesto que prevalece la definición de derivada dada

[3] $\alpha \in \mathbb{R}$

4. La función[4] $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ *es derivable en* c *y:*

$$\left(\frac{f(c)}{g(c)}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$$

Demostración:
Los dos primeros aparatados son muy sencillos.

3.

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{(f(x) - f(c))g(c) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x-c} =$$
$$= \lim_{x\to c} \frac{(f(x) - f(c))g(c) + f(c)(g(x) - g(c))}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c}g(c) + f(c)\frac{g(x) - g(c)}{x-c} =$$
$$= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

4. Completamente análoga utilizando el truco usado en la 3. □

Corolario 5.2.1
Sean $f_1, f_2, ..., f_n : I \to \mathbb{R}$ *funciones derivables en* $c \in I$*, entonces:*

1. $(f_1 + ... + f_n)'(c) = f_1'(c) + ... + f_n'(c)$
2. $(f_1 \cdot ... \cdot f_n)'(c) = f_1'(c)f_2(c) \cdot ... \cdot f_n(c) + ... + f_1(c) \cdot ... \cdot f_{n-1}(c) \cdot f_n'(c)$

Demostración:
1. Trivial por la demostración de la suma simple

2. Supongamos cierta la proposición para n, lo demostramos para $n+1$:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n \cdot f_{n+1})' = (g \cdot f_{n+1})' = g'(c)f_{n+1}(c) + g(c)f_{n+1}'(c) =$$
$$= (f_1'(c) \cdot f_2(c) \cdot ... \cdot f_n(c) + ... + f_1(c) \cdot f_2(c) \cdot ... \cdot f_n'(c))\, f_{n+1}(c) + (f_1(c) \cdot ... \cdot f_n(c))f_{n+1}' =$$
$$= f_1'(c) \cdot f_2(c) \cdot ... \cdot f_n(c) \cdot f_{n+1}(c) + ... + f_1(c) \cdot f_2(c) \cdot ... \cdot f_n'(c)f_{n+1}(c) + f_1(c) \cdot ... \cdot f_n(c)f_{n+1}'$$

Ejemplo 5.4:
Si tenemos $f(x) = x^n = x \cdot x \cdots x$, entonces tenemos que por el corolario tenemos que: $f'(x) = 1 \cdot x \cdot ... \cdot x + ... + x \cdot ... \cdot x \cdot 1 = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1}}_{n \text{ veces}} = n \cdot x^{n-1}$

Con lo cual, podemos verlo en un caso general diciendo que $g(x) = f(x)^n$, por lo que $g'(c) = n \cdot f'(c) \cdot f(c)^{n-1}$.

Lema 5.1 (de Caratheodery)
Sea $f : I \to \mathbb{R}$*, es derivable en* $c \in I$ *si y sólo si* $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ *continua en* c *de manera que* $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) : \forall x \in I$ *de forma que* $f'(c) = \varphi(c)$*.*

Demostración:
- $\Rightarrow$:

  Si f es derivable en c, entonces $\varphi = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & x \neq c \\ f'(c) & x = c \end{cases}$. Vemos que φ es continua en c puesto que $\lim_{x\to c}\varphi(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = \varphi(c)$. Además se tiene que $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c)$ cuando $x \neq c$, pero vemos que si $x = c$, entonces $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) \Leftrightarrow 0 = \varphi(x) \cdot 0$, luego ocurre siempre.

[4] $g(c) \neq 0$

- $\Leftarrow$:

  Si tenemos que $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continua en c y $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) : x \in I$, entonces $x \neq c \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \varphi(x)$ y como $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \varphi(x) = \varphi(c)$, como el límite existe entonces f es derivable en c y $f'(c) = \varphi(c)$. □

Teorema 5.3 (Regla de la Cadena)
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en $c \in I$, siendo $f(I) \subset J$ y $g : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en $d = f(c) \in J$, entonces $g \circ f(x)$ es derivable en c y:

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

Demostración:
Por el lema que acabamos de probar $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c si existe una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continua en c y se verifica que $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) : x \in I$ y del mismo modo $g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en d si existe una función $\psi : J \to \mathbb{R}$ continua en d de manera que se cumple que $g(z) - g(d) = \psi(z)(z - d) : z \in J$.

En particular, si $z = f(x) : x \in I$, entonces podemos decir que

$$g(f(x)) - g(d) = \psi(f(x))(f(x) - \underbrace{d}_{f(c)})$$

Pero aplicando la otra condición tenemos que:

$$g(f(x)) - g(d) = \psi(f(x))\varphi(x)(x - c)$$

Por tanto, si llamamos $\chi(x) = \psi((f(x))\varphi(x) : x \in I$, tenemos que $(g\circ f)(x)-(g\circ f)(c) = \chi(x)(x-c)$, por lo que solo queda probar que esta función es continua en c, puesto que por el lema anterior, si fuese continua entonces sería derivable en c.

Como esta función es producto de dos, entonces es continua si ambos factores son continuos. Sabemos que φ es continua en c, f es continua en c porque es derivable en c y ψ es continua en d se tiene que: $\psi \circ f$ es continua en c por composición de funciones continuas. Del mismo modo, por ser producto de funciones continuas se tiene que $(\psi \circ f) \cdot \varphi$ es continua en c y esto último determina que $g \circ f$ es derivable en c y además $(g \circ f)'(c) = \chi(x) = \psi((f(c))\varphi(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$. □

Teorema 5.4 (Derivada de la función inversa)
Sea I un intervalo, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua, inyectiva[5], derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces:

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

Además, en general, podemos expresar la derivada de la función inversa como:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Demostración:
Si f es derivable en c, por el lema anterior se tiene que $\exists\varphi : I \to \mathbb{R} : f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) : \forall x \in I$.

Primero vemos que $\varphi(x) \neq 0$ porque :

$$\begin{cases} x \neq c \text{ y } \varphi = 0 & \Rightarrow f(x) - f(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(c) \Rightarrow \# \text{ pq f inyectiva} \\ x \neq c \text{ y } \varphi(c) = f'(c) \neq 0 & \Rightarrow x - c = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot (f(x) - f(c)) : \forall x \in I \end{cases}$$

[5] Se probó en su momento que la inyectividad, implicaba biyectividad sobre su imagen, es decir, $\exists f^{-1} : f(I) \to I$

El segundo caso es cierto en particular para $x = g(y) : y \in J$ por lo que si sustituimos $g(y)$ tenemos que:

$$g(y) - g(d) = \frac{1}{\varphi(g(y))} \cdot (f(g(y) - f(g(d))) = \frac{1}{\varphi(g(y))} \cdot (y - d)$$

Como g es continua porque f lo es y además φ es continua en $g(d) = c$, entonces $\varphi \circ g$ es continua y por el lema de Caratheory se tiene que g es derivable en d y además

$$g'(d) = \frac{1}{\varphi(g(d))} = \frac{1}{f'(g(d))}$$

Observación 5.3:
Una buena forma de recordarlo es que:

$$f^{-1} \circ f = id \Leftrightarrow g(f(x)) = x \Leftrightarrow g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Si $y = f(x)$ entonces:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Ejemplo 5.5:
Sea $y = x^m : x > 0$ tenemos una función definida de forma que $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, por lo que hemos demostrado se tiene que $g(y) = \sqrt[m]{y}$, luego sabemos que $g'(y) = \frac{1}{f'(x))}$ pero como quiero expresar las cosas en términos de y, sabemos que $y = x^m$, luego se tiene que $g(y) = \frac{1}{mx^{m-1}} = \frac{1}{\frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1}} = \frac{1}{\frac{1}{m} \sqrt[m-1]{y}}$

Sea $y = sen(x)$, sabemos que $y' = cos(x)$ y la función inversa del seno se llama el $x = arcsen(y)$, de forma que según lo visto: $(arcsen(y))' = \frac{1}{(sen(x))'} = \frac{1}{cos(x)}$, entonces si $y = sen(x)$ y también tenemos $cos(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)}$, luego sustituyendo en lo anterior:

$$(arcsen(y))' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Hemos comentado que las derivadas tienen múltiples aplicaciones y una de ellas es ser indicador del crecimiento o decrecimiento de una función. La idea intuitiva es que si las derivadas son las pendientes de las rectas tangentes, pendientes positivas indicarán crecimiento de funciones y las pendientes negativas decrecimiento.

Esta propiedad además permite caracterizar los puntos que son máximos o mínimos relativos, pues basta ver cómo crece o decrece la función a izquierda o derecha de estos puntos para verificarlo, por ejemplo, un máximos será aquel punto intermedio entre una etapa de crecimiento y una de decrecimiento.

Teorema del Valor Medio

En este primer apartado vamos a estudiar todos los puntos relativos a crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Cabe destacar el Teorema del Valor Medio, en algunos sitios mencionado como *Teorema Fundamental del Cálculo Diferencial* por la gran relevancia de sus resultados en múltiples áreas en las que las derivadas se ven involucradas.

Definición 5.3 (Extremos relativos)
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ decimos[6] *que tiene en $c \in I$ un:*

[6] Lo llamamos estricto si la desigualdad $f(x) \geq$ ó $\leq f(c)$ es estricta, en ambos casos **Y SE CAMBIA LA CONDICIÓN A** $0 < |x - c| < \delta$

- ***Máximo Relativo***: $\exists\delta > 0 : \forall x \in I : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c)$.
- ***Mínimo Relativo***: $\exists\delta > 0 : \forall x \in I : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(c)$.

Definición 5.4 (Punto Interior)
Sea $I \subset \mathbb{R}$, decimos que $c \in I$ es un ***punto interior de*** *I si y sólo si:*

$$\exists\delta_0 > 0 : (c - \delta_0, c + \delta_0) \subset I$$

Denotamos por $\mathring{I}$ al conjunto de puntos interiores de I.

Ejemplo 5.6:
En particular, si I es un intervalo $I = [a, b]$, entonces $(a, b) \in \mathring{I}$.

Teorema 5.5 (Caracterización de los extremos relativos)
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función con un extremo relativo en $c \in \mathring{I}$, si f es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.

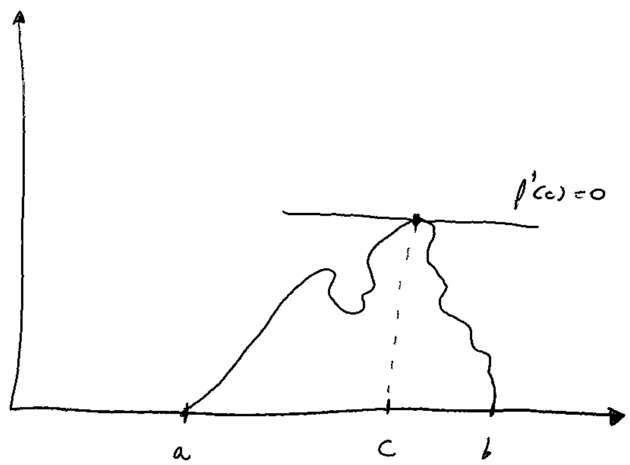
Demostración:
Si f es derivable en c, entonces $\exists \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \Rightarrow \exists \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \exists \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Supongamos que c es un máximo[7], entonces $\exists\delta_0 > 0 : |x - c| < \delta_0 \Rightarrow f(x) \leq f(c)$, por lo tanto tenemos que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \begin{cases} \leq 0 & \text{si } c < x < c + \delta_0 \Rightarrow \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \\ \geq 0 & \text{si } c - \delta_0 < x < c \Rightarrow \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$$

Teorema 5.6 (de Rolle)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces:

$$f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Demostración:
Puede ser que la función sea constante 0, cuyo caso no estudiaremos por la trivialidad de su veracidad.



[7] Con el mínimo se hace exactamente igual

En caso contrario, $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) \neq 0$. En primer lugar, supongamos que $f(x_0) > 0 \Rightarrow 0 < f(x_0) \leq \max f(x) : x \in [a,b]$ y como f es continua, entonces el máximo se alcanza por lo que $\exists c \in [a,b] : f(c) = \max f(x) > 0 \Rightarrow c \in (a,b) : c \in \mathring{I} \Rightarrow f'(c) = 0$ por ser máximo relativo.

El caso menor es análogo. □

Teorema 5.7 (del valor medio)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración:
Definimos la siguiente función $\psi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) - (f(x) - f(a))$. Vemos que reordenando las cosas tenemos:

$$\psi(x) = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)}_{polinomio} - f(x)$$

Como ψ es suma de funciones continuas y derivables, es continua y derivable. Además vemos que $\psi(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (a-a) + f(a) - f(a) = 0$ y que $\psi(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a) + f(a) - f(b) = 0$ por lo que nos encontramos en las condiciones del teorema de Rolle, es decir:

$$\exists c \in (a,b) : \psi'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observación 5.4:
Imponiendo las condiciones particulares del teorema de Rolle, este último engloba al anterior. A grandes rasgos viene a decir que existe un punto en el intervalo cuya recta tangente es precisamente una recta paralela a la que atraviesa $f(a)$ y $f(b)$.

Teorema 5.8
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $\mathring{I}$, entonces:

1. *f es creciente si y sólo si $f'(x) \geq 0 : \forall x \in \mathring{I}$*
2. *f es decreciente si y sólo si $f'(x) \leq 0 : \forall x \in \mathring{I}$*

Demostración:

1.
   - $\Rightarrow$

     Supongamos que f es creciente. Sea $c \in \mathring{I}$, entonces $\exists \delta > 0 : (c-\delta, c+\delta) \subset I$. Podemos ver que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 : \forall x \in I : x \neq c$ porque si es negativo denominador y numerador son negativos (en cuyo caso el cociente es positivo) y porque si son positivos ya ocurre trivialmente, así que ocurre que $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$
   - $\Leftarrow$

     Supongamos que $f'(x) \geq 0 : \forall x \in \mathring{I}$. Sean $x_1 < x_2 : x_1, x_2 \in I$. Sabemos que f es continua en I por lo que es continua en $[x_1, x_2]$) y además f es derivable en I por lo que es derivable en (x_1, x_2). Por el teorema del valor medio se tiene que $\exists c \in (x_1, x_2) : f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ y vemos que por hipótesis $f'(c) \geq 0$
2. Completamente análoga al punto 1. □

Corolario 5.8.1
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I y derivable en $\mathring{I}$, entonces:

- $\forall x \in \mathring{I} : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *estrictamente creciente*
- $\forall x \in \mathring{I} : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *estrictamente decreciente*

Y el recíproco es falso, por ejemplo, $f(x) = x^3$

Demostración:
Si $x_1 < x_2$ como hemos hecho en la demostración del teorema anterior, aplicamos el teorema del valor medio a f en $[x_1, x_2]$. Del mismo modo, el apartado 2 es totalmente análogo. □

Observación 5.5:
Podríamos llegar a pensar que sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I y derivable en $\mathring{I}$ se tiene que si en un punto la derivada es estrictamente positiva implica que en los alrededores de ese punto la función es creciente, es decir:

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f'(x) \geq 0$$

Lo que queremos decir es que si x está muy cerca de x_0 entonces su derivada tiene que ser positiva, es decir:

$$0 < f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{si } x > x_0 \\ f(x) < f(x_0) & \text{si } x < x_0) \end{cases}$$

Pero esto es completamente falso puesto que existen funciones que a pesar de ser derivables, continuas y en un punto crecientes, no se puede especificar ningún intervalo alrededor de ese punto que mantenga el crecimiento.

Ejemplo 5.7:
Sea la función

$$f : \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Vemos que es continua en $x \neq 0$ por composición de funciones continuas, pero ¿es continua en 0?:

$$\lim_{x \to 0} x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Vemos que

$$\left| x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x + 2x^2 \xrightarrow{x \to 0} 0 \Rightarrow x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \to 0} 0$$

Ahora nos preguntamos ¿f es derivable?, vemos fuera de $x = 0$ como es composición de funciones derivables es derivable y concretamente es:

$$f'(x) = 1 + 4x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 1 + 4x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Veamos ahora la derivada en 0:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 + 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 + 0 = 1$$

Con lo cual, $f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$. Por lo tanto tenemos que a pesar de que la derivada en 0 es positiva, ocurre que para cualquier intervalo que escojamos alrededor de 0 existen puntos donde la función crece y decrece, porque puedo escoger sucesiones que convergen a 0 pero cuya derivada es negativa y otras cuya derivada es positiva, por lo que no puedo afirmar nada sobre un intervalo alrededor de 0.

Proposición 5.2
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) > 0$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0,\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$$

Por tanto, podemos deducir[8] *que:*

$$\begin{cases} x \in (x_0, x_0+\delta) \cap I & \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x \in (x_0-\delta, x_0) \cap I & \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

Demostración:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Tomamos $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0$, luego:

$$\exists \delta > 0 : 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \frac{f'(x_0)}{2} \Rightarrow \frac{-f'(x_0)}{2} < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) < \frac{f'(x_0)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{3}{2} f'(x_0)$$

Observación 5.6:
Lo que estamos diciendo es que si la derivada en un punto es positiva, entonces hay un entorno alrededor de dicho punto donde la función queda por debajo a la izquierda y queda por encima a su derecha del punto.

Esto no asegura que la derivada sea positiva, por lo tanto creciente, en un entorno alrededor del punto donde es positiva, sino más bien viene a afirmar que toda la parte derecha supera la imagen del punto y toda la izquierda no la supera.

Teorema 5.9
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua[9] *en $c \in \mathring{I}$ y derivable en $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$, entonces:*

$$\forall x \in (c, c+\delta) : f'(x) \geq 0 \ y\ \forall x \in (c-\delta, c) : f'(x) \leq 0 \Rightarrow c \text{ mínimo relativo}$$

$$\forall x \in (c, c+\delta) : f'(x) \leq 0 \ y\ \forall x \in (c-\delta, c) : f'(x) \geq 0 \Rightarrow c \text{ máximo relativo}$$

Demostración:
Sea $x \in (c, c+\delta)$, por el teorema del valor medio tenemos que:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(z) : z \in (c, x) \subset (c, c+\delta) \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(c)$$

De modo análogo, se tiene que sea $x \in (c-\delta, c)$, por el teorema del valor medio tenemos que:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(z) : z \in (x, c) \subset (c-\delta, c) \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(c)$$

Lo que en conjunto implica que sea cual sea x de ese intervalo, $f(x) \geq f(c)$, luego c es un mínimo relativo.

La demostración del máximo es completamente análoga. $\square$

[8] Ocurre de modo análogo cuando $f'(x_0) < 0$
[9] Cabe destacar que no se pide en ningún momento para aplicar este criterio que c sea derivable.

Teorema 5.10 (de Darboux)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable, la derivada toma todos los valores intermedios entre $f'(a)$ y $f'(b)$, es decir:

$$\forall k \in (f'(a), f'(b)) \text{ o } (f'(b), f'(a)) : \exists c \in (a,b) : f'(c) = k$$

Demostración:
Supongamos $f'(a) < k < f'(b)$ y llamamos $g(x) = kx - f(x)$ y por ser diferencia de funciones continuas y derivables, entonces lo es en $[a,b]$. Entonces tenemos que $\exists c \in [a,b] : g(c) = \max g(x) : x \in [a,b]$ por el Teorema de Wiestrass. Veamos que:

$$g'(a) = k - f'(a) \overset{k>f'(a)}{\Rightarrow} g'(a) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in (a, a+\delta) \Rightarrow g(x) > g(a)$$

Del mismo modo:

$$g'(b) = k - f'(b) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in (b-\delta, b) \Rightarrow g(x) > g(b)$$

Luego $c \neq a$ y $c \neq b$, por lo que $c \in (a,b)$ y $g'(c) = 0 \Rightarrow 0 = g'(c) = k - f'(c) \Rightarrow f'(c) = k$

El otro caso es completamente análogo a lo anterior. □

Observación 5.7:
Si f' fuese continua, este teorema es trivial por el teorema del valor intermedio aplicado a $f'(x)$, pero el teorema no pide la condición de continuidad de la misma.
Observación 5.8:
Una consecuencia muy interesante de este teorema es que la función derivada puede no ser continua, pero en ningún caso puede tener saltos. Como concepto intuitivo, podemos decir que la discontinuidad posible que tienen es que oscile demasiado (como ocurre con $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$).

DIBUJO

Aplicaciones del Teorema del valor Medio

Aproximaciones

Vamos a aproximar, por ejemplo, la raíz de 105. Sabemos que $\sqrt{100} = 10$ y que $\sqrt{121} = 11$ luego el número que buscamos debe estar entre 10 y 11. Entonces sea $f(x) = \sqrt{x}$ aplicamos el teorema del valor medio entre 100 y 105:

$$\exists c \in (100, 105) : f'(c) = \frac{f(105) - f(100)}{105 - 100} = \frac{\sqrt{105} - \sqrt{100}}{5}$$

Y también sabemos que $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$, luego se tiene que $\sqrt{105} = 10 + 5f'(c)$. Si como hipótesis teníamos que $10 < c < 11$ es fácil llegar a que $\underbrace{10 + \frac{5}{22}}_{\simeq 10{,}227} < \sqrt{105} < \underbrace{10 + \frac{1}{4}}_{\simeq 10{,}25}$.

Desigualdades

Vamos a probar que $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \geq 1 + x$. Es evidente que $1 = e^0$ así que tomamos $f(x) = e^x$ luego por el teorema del valor medio se tiene que:

- $x > 0$
$$\exists c \in (0, x) : e^c = f'(c) = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \Rightarrow e^x - 1 = xe^c \overset{c>0}{\Rightarrow} e^x - 1 = xe^c > x \Rightarrow e^x > 1 + x$$
- $x < 0$
$$\exists c \in (x, 0) : e^c = f'(c)\frac{e^x - e^0}{x - 0} \Rightarrow e^x - 1 = xe^c$$
Como $0 < e^c < 1$ y $x < 0$, entonces $xe^x > x \Rightarrow e^x > 1 + x$
- $x = 0$
$$e^0 = 1 + 0$$

Regla de L'Hopital

Otro resultado notablemente importante es la regla de L'Hopital, pues simplificó el cálculo de límites bastante complejos a través de la derivación.

Para comprender la idea subyacente, supongamos $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de manera que $f(a) = 0 = g(a)$ y $g'(a) \neq 0$, entonces puedo transformar el límite del cociente como sigue:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Por tanto, si también pedimos que f y g sean derivables en a:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

L'Hôpital 1

Sea $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ donde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f y g derivables en (a, b) con $g'(x) \neq 0 : \forall x \in (a, b)$. Supongamos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$, si existe el $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Demostración

Se basa en el siguiente resultado:

Teorema del valor medio de Cauchy

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos que $g'(x) \neq 0 : \forall x \in (a, b)$, entonces $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Es fácil ver que si cogemos $g(x) = x$ recuperamos el enunciado que hemos visto del Teorema del valor Medio.

Demostración:

Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a)) \cdot (f(x) - f(a))$. De nuevo vemos que por ser suma de funciones continuas y derivables, F es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y además $(g(x) - g(a)) \neq 0$ porque por el teorema de valor medio ocurriría que $g(b) = g(a) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : g'(c) = 0 \Rightarrow \#$ porque hemos dicho que $g'(x) \neq 0$.

Además ahora tenemos que $F(b) = F(a) = 0$, por lo que por el Teorema de Rolle tenemos que $\exists c \in (a, b) : F'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Volviendo a la demostración inicial, vamos a ver el caso en que $L \in \mathbb{R}$. Por la definición de límite tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists c \in (a, b) : x \in (a, c) \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| \Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon$$

Vamos a escoger $a < \alpha < \beta < c$, entonces vemos que $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ y cumplen las hipótesis del Teorema visto antes, así que:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} : u \in (\alpha, \beta)$$

FALTA ALGUNA COSILLA DE EXPLICACIÓN

Entonces si $a < \alpha < \beta < c$, se tiene que:

$$L - \varepsilon < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \varepsilon$$

Vamos a fijar β y vamos a acercar α cada vez más a a, por lo tanto podemos pasar al límite cuando $\alpha \to a$:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} \xrightarrow{\alpha \to a^+} \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$$

FALTA EXPLICACIONES IMPORTANTES DE MOVER PARÁMETROS

Como $L - \varepsilon < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} < L + \varepsilon$ cuando $\alpha \to a^+$ tenemos que:

$$L - \varepsilon \leq \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq L + \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(\beta)}{g(\beta)} - L \right| < \varepsilon : \forall a < \beta, c$$

Luego precisamente esto es la definición de límite:

$$\lim_{\beta \to a^+} \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$$

Para cambiar la demostración para que sea $L \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces:

CAMBIA COSAS QUE NO HE VISTO.

L'Hôpital 2

Sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivables en (a, b), supongamos que $g'(x) \neq 0 : \forall x \in (a, b)$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$, entonces:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

<u>Demostración</u>:

La demostración es muy parecido a lo anterior y se deja para mirar en los libros en caso de no saber hacerla.

Ejemplos de aplicación del Teorema de L'Hôpital

Supongamos que $\lim_{x \to \infty} e^{-x} \cdot x^2$, es fácil ver que nos queda una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ porque se puede reescribir $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$. Como se cumplen las hipótesis de L'Hopital podemos hacer:

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \cdot x^2 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Supongamos que $\lim_{x \to \infty} \frac{ln(x)}{x}$ que de nuevo nos queda la indeterminación de $\frac{\infty}{\infty}$, como se cumplen las hipótesis digo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Veamos el caso $\lim_{x \to \infty} e^{-\alpha \cdot x} \cdot x^n$, la pregunta es saber si habrá valores de α o de n para los que pasen cosas distintas (¿quién gana?):

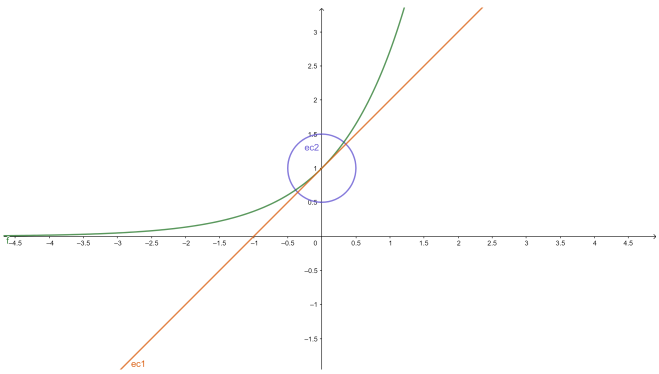
$$\lim_{x \to \infty} e^{-\alpha x} x^n = \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^{\alpha x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{n \cdot x^n}{\alpha e^{\alpha x}} = \cdots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{\alpha^n e^{\alpha x}} = 0$$

OTROS RESULTADOS

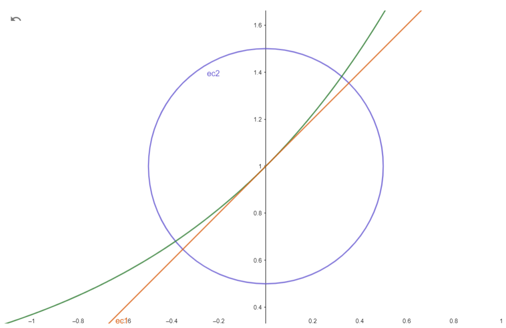
Por último, vamos a mencionar un par enunciados muy importantes, consecuencia de la teoría desarrollada a lo largo de todo el capítulo. Es muy destacable sobre todo el *Teorema de Taylor* por su repercusión en la sección **??** y por la cantidad de aplicaciones que tiene en general.

Teorema de Taylor

Supongamos que tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un hecho difícil de adivinar, pero sencillo de entender es que la recta tangente es la que mejor aproxima a la función en un punto:



Incluso ampliando, vemos que de todas las rectas posibles que atraviesan ese punto, la tangente es la que más "se parece" a la función que tenemos:



Y, en consecuencia, surge la siguiente pregunta ¿cuál será el polinomio de grado 2 que mejor aproxime a f?, y todavía más en general, ¿cuál será el polinomio de grado n que mejor aproxima a la función f?.

Una de las ideas más razonable desde un principio es pensar en el polinomio de grado 2 que verifique:

$$p(x_0) = f(x_0) \qquad\qquad p'(x_0) = f'(x_0) \qquad\qquad p''(x_0) = f''(x_0)$$

Y viendo las condiciones que imponemos, también es razonable querer escribir el polinomio en cuestión $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ en términos de x_0 o, mejor dicho, centrado en x_0, es decir:

$$p(x; x_0) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2$$

Ahora basta con determinar los coeficientes b_i imponiendo las condiciones iniciales sobre dicho polinomio:

$$\begin{cases} p(x_0) = b_0 + 0 + 0 = b_0 = f(x_0) & \Rightarrow b_0 = f(x_0) \\ p'(x_0) = b_1 + 2b_2(x_0 - x_0) = b_1 = f'(x_0) & \Rightarrow b_1 = f'(x_0) \\ p''(x_0) = 2b_2 = f''(x_0) & \Rightarrow b_2 = \frac{f''(x_0)}{2} \end{cases}$$

Luego el polinomio queda como

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Por tanto, es razonable pensar que, en el caso general, concluimos que el único polinomio de grado n tal que $p_n(x_0) = f(x_0)$, $p_n'(x_0) = f'(x_0)$, ..., $p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ es precisamente el polinomio de Taylor que vamos a definir.

Definición 5.5 (Polinomio de Taylor)
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función cuyas derivadas $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ existen y son continuas en I, definimos su ***polinomio de Taylor de grado*** *n como:*

$$p_n(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Observación 5.9:
Habría que comprobar que la definición que se ha dado cumple que $p_n(x_0) = f(x_0)$, $p_n'(x_0) = f'(x_0)$, ..., $p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Teorema 5.11 (de Taylor)
Sea $I = [a, b]$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función cuyas $f, f', f'', ..., f^{(n)}$ existen y son continuas en I y $f^{(n+1)}$ existe en $\mathring{I}$, entonces[10] $\forall x_0 \in [a, b]$:

$$\forall x \in I : f(x) = p_n(x; x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{\textit{Resto de Lagrange } (R_n)}$$

Donde $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$ y, por tanto, depende de x_0, x, n, f.

Demostración:
Definimos la función $F(t)$ con $t \in I$ de la siguiente forma:

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{f''(t)}{2}(x - t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - x_0)^n \right] = f(x) - p_n(x; t)$$

Vemos entonces que ocurre que $F(x) = f(x) - f(x) = 0$, que $F(x_0) = f(x_0) - p_n(x; x_0)$ y que además es continua y derivable. Veamos su derivada:

$$F'(t) = -\left[\cancel{f'(t)} + \cancel{f''(t)(x - t)} \cancel{- f'(t)} + \cancel{\frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2} + \cancel{\frac{f''(t)}{2!}2(x - t)}(-1) + \cancel{\cdots} + \frac{f^{(n-1)}(t)}{n!}(x - t)^n \right]$$

$$= -\frac{f^{(n-1)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

Se va todo con todo porque es como una suma telescópica, cada término se anula con el siguiente al siguiente menos el último que se queda sin pareja para irse.

Ahora vamos a definir otra función que llamaremos $G(t) = (x - t)^{n+1}$ y ahora vamos a aplicar el Teorema del valor medio de Cauchy porque G es derivable y su derivada es distinta de 0 en cualquier valor de t:

$$\exists c \in (x_0, x) \vee (x, x_0) : \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Rightarrow \frac{F(x_0)}{G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Rightarrow F(x_0) = G(x_0)\frac{F'(c)}{G'(c)} =$$

$$= (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{-f^{(n+1)}(c)(x - c)^n}{-1 \cdot n!(n+1)(x - c)^n} \Rightarrow f(x) - p_n(x; x_0) = R_n$$

Observación 5.10:
Como observación, si escogemos $n = 0$ entonces quedaría como $f(x) = p_n + R_n = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$ que es justamente el Teorema del Valor Medio, así que podemos considerar que este teorema es como una generalización del teorema del Valor Medio.

[10] El resto de Lagrange el error que existe entre la aproximación del polinomio de Taylor y la función requerida

Aplicaciones del Teorema de Taylor

Veamos el caso de $f(x) = e^x$, ocurre que $f'(x) = e^x$ y en particular $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = e^x$, si tomamos $x_0 = 0$, entonces $f(0) = 1 = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0)$ y el polinomio de taylor queda como:

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n}_{p_n(x;0)} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x;0)}$$

¿Pero para qué sirve esto? Pues vamos a aproximar el número e:

$$x = 1 \Rightarrow e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

Ahora como c depende de n dando valores vamos a obtener sucesivas aproximaciones cada vez más refinadas:

$$0 < e - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Con lo cual despejando e y ya que lo tenemos acotado, podemos dar valores de n cada vez más grandes para que quede más acotado.

Ejemplo 5.8:
¿Qué valor tiene que tomar n para aproximar e con un error menor que 10^5?

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^5 \Rightarrow n > 8$$

Proposición 5.3

Sea I un intervalo, $x_0 \in \mathring{I}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\exists f, f', f'', ..., f^{(n)}$ son continuas en un entorno de x_0. Si $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces:

- *n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ es mínimo relativo estricto*
- *n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ es máximo relativo estricto*
- *n es impar, entonces el punto no es ni máximo ni mínimo*

Demostración:
Por el Teorema de Taylor:

$$f(x) = p_{n-1}(x;x_0) + R_{n-1}(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

Por las hipótesis de que todas las derivadas menos la enésima son nulas tenemos que:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

Lo importante es pensar ahora que ocurre realmente cuando la x se asemeja mucho a la x_0. Como $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces si $f^{(n)}(x_0) > 0$ como $f^{(n)}$ es continua en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces $\exists \delta' < \delta : \forall x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') : f^{(n)}(x) > 0$.

Entonces para $0 < |x - x_0| < \delta'$, entonces puedo escoger el $c \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \Rightarrow f^{(n)}(c) > 0$, de forma similar ocurre que $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f^{(n)}(c) < 0$ así que volviendo a $f(x)$:

- n par y $f^{(n)}(x_0) > 0$ para $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n}_{>0} \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow x_0 \text{ mínimo}$$

- n par y $f^{(n)}(x_0) < 0$ para $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n}_{<0} \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow x_0 \text{ máximo}$$

- n impar

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n}_{???}$$

Como ahora $f^{(n)}(c)$ es fijo el término que no podemos determinar el signo que toma lo demás y en consecuencia no puede ser máximo ni mínimo. □

Proposición 5.4
El polinomio de Taylor aproxima a la función mejor que cualquier otro polinomio, es decir, sea $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f, f'', ..., f^{(n)}, f^{(n+1)}$ son continuas y $x_0 \in \mathring{I}$. Si llamamos $Q_n(x)$ a cualquier otro polinomio de grado $\leq n$, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - p_n(x; x_0)|}{|f(x) - Q_n(x)|} = 0$$

Demostración:

$$f(x) - p_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Como en particular es continua en un entorno de x_0, lo anterior va a estar acotado. Fijamos un $\delta_0 > 0 : [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \in I$ y si $M_{n+1} = \text{máx}\,|f^{(n+1)}(x)|$ donde $|x - x_0| < \delta$. Es decir, que llamo M_{n+1} a la máxima derivada del orden $n + 1$ de las x en ese entorno alrededor de x_0.

Por tanto:

$$x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \Rightarrow c \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \Rightarrow |f^{(n+1)}(c)| \leq M_{n+1}$$

Y en consecuencia:

$$x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \Rightarrow |f(x) - p_n(x; x_0)| \leq \underbrace{\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}}_{cte}|x - x_0|^{n+1}$$

Por otro lado, si $p_n(x; x_0) = p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n$ y $Q_n(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots + q_n(x - x_0)^n$ como deben ser distintos:

$$Q_n \neq p_n \Rightarrow \exists i_0 \in \{0, ..., n\} : p_{i_0} \neq q_{i_0} \wedge p_i = q_i : \forall i < i_0$$

Por tanto:

$$p_n(x; x_0) - Q_n(x) = (p_{i_0} - q_{i_0})(x - x_0)^{i_0} + (p_{i_0+1} - q_{i_0+1})(x - x_0)^{i_0+1} + \cdots + (p_n - q_n)(x - x_0)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n(x; x_0) - Q_n(x) = (p_{i_0} - q_{i_0})(x - x_0)^{i_0}\left(1 + \frac{p_{i_0+1} - q_{i_0+1}}{p_{i_0} - q_{i_0}}(x - x_0) + \cdots + \frac{p_n - q_n}{p_{i_0} - q_{i_0}}(x - x_0)^{n-i_0}\right)$$

Como todos los términos de dentro del paréntesis excepto el uno van a 0, entonces podemos escoger un delta de manera que sean más pequeños que $\frac{1}{2}$:

$$\delta_1 < \delta_0 : |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{p_{i_0+1} - q_{i_0+1}}{p_{i_0} - q_{i_0}}(x - x_0) + \cdots + \frac{p_n - q_n}{p_{i_0} - q_{i_0}}(x - x_0)^{n-i_0}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Entonces para tratar de acotarlo:

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |p_n(x; x_0) - Q_n(x)| = |p_{i_0} - q_{i_0}||x - x_0|^{i_0}\underbrace{|1 + \cdots|}_{\geq \frac{1}{2}} \geq \frac{|p_{i_0} - q_{i_0}|}{2}|x - x_0|^{i_0}$$

Entonces para los $|x-x_0|<\delta_1$ tenemos dos estimaciones, queremos ver esto:

$$|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow \frac{|f(x)-p_n(x;x_0)|}{|f(x)-Q_n(x)|}$$

Por un lado:

$$|f(x)-Q_n(x)| = |f(x)-Q_n(x)+p_n(x;x_0)-p_n(x;x_0)| \geq |p_n(x;x_0)-Q_n(x)|-|f(x)-p_n(x;x_0)| \geq$$

$$\geq \frac{|p_{i_0}-q_{i_0}|}{2}|x-x_0|^{i_0} - \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

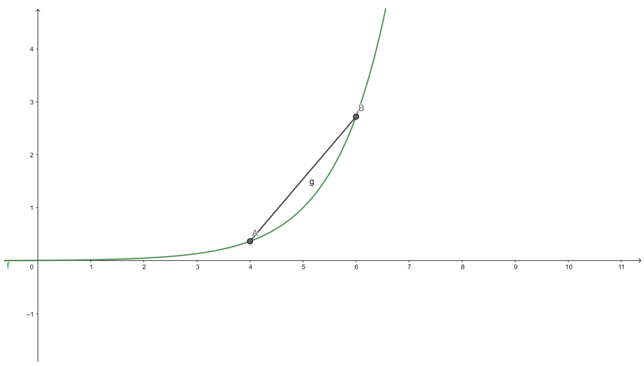
Y esto último es siempre positivo porque cuando $x\to x_0$ el término $n+1$ se hace pequeño mucho más rápido que el término i_0 (la demostración es sacar factor común). Pues con numerador y denominador acotado puedo escribir que:

$$= \frac{|f(x)-p_n(x;x_0)|}{|f(x)-Q_n(x)|} \leq \frac{\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}}{|x-x_0|^{i_0}\left(\frac{|p_{i_0}-q_{i_0}|}{2}-\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n-i_0+1}\right)} = \frac{\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n-i_0+1}}{\frac{|p_{i_0}-q_{i_0}|}{2}-\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n-i_0+1}}$$

Y es trivial ver que cuando $x\to x_0$ el denominador tiende a una constante y el numerador tiende a 0, luego el resultado de pasar al límite es 0 por la regla del sandwich (porque ese cociente es positivo). □

Convexidad y Concavidad

De forma intuitiva, decimos que una función es convexa cuando tiene la forma de "una sonrisa" y ocurre siempre que los dos puntos de la función en un intervalo I la gráfica de la función quedan por arriba o por debajo de la recta.



Definición 5.6 (Convexidad)
Sea $f: I\to\mathbb{R}$, decimos que es ***convexa*** *si*[11] *y sólo si:*

$$\forall x_0,x_1\in I : \forall t\in(0,1) : f(tx_0+(1-t)x_1) \leq f(x_0)+(1-t)f(x_1)$$

Para ver la interpretación que le podemos dar a dicha definición, supongamos que tenemos $x_0,x_1\in I$ tal que $x_0<x_1$, sin pérdida de generalidad, y $t\in(0,1)$. Veamos que siempre $tx_0+(1-t)x_1\in(x_0,x_1)$:

$$tx_0+(1-t)x_1 = x_0-x_0+tx_0+(1-t)x_1 = x_0+\underbrace{(1-t)(x_1-x_0)}_{>0} \Rightarrow x_0 \leq tx_0+(1-t)x_1 \leq \underbrace{x_0+(x_1-x_0)}_{=x_1}$$

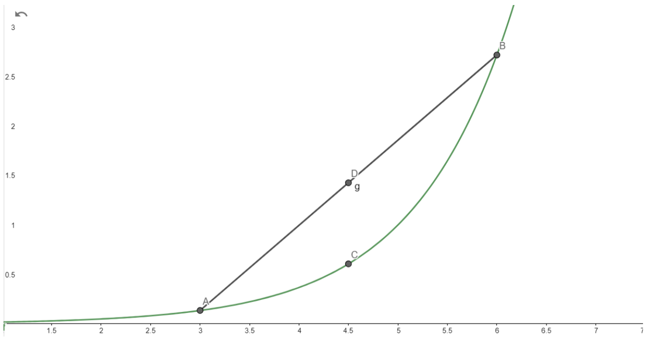
[11] Para los valores de $t=0$ y $t=1$ la desigualdad es trivial

Además cabe destacar que cualquier punto entre ambos puntos se puede escribir de esta forma tomando un cierto valor de t:

$$z \in (x_0, x_1) \Rightarrow z = x_0 + \frac{z - x_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = x_0 + \frac{z - x_1 + x_1 - x_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) =$$

$$= x_0 + (1 - \underbrace{\frac{x_1 - z}{x_1 - x_0}}_{=t})(x_1 - x_0) = x_0 + (1 - t)(x_1 - x_0)$$

A la expresión $tx_0 + (1-t)x_1 : t \in (0,1)$ se le denomina combinación lineal convexa de x_1 y x_2.



En el fondo, lo que decimos es que la proyección del punto sobre la recta siempre está por encima de la imagen cuando nos encontramos en un intervalo de convexidad.

Teorema 5.12 (Caracterización de la Convexidad)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto, una función con dos derivadas en I. La función f es convexa en I si y sólo si $\forall x \in I : f''(x) > 0$.

Demostración:

- $\Leftarrow$:

  Para poder demostrarlo vamos a demostrar este resultado:

  $$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

  Fijamos x_0 y x_1 de I y $t \in (0,1)$. Sea $z = tx_0 + (1-t)x_1$ vamos a hacer un desarrollo de Taylor de orden 1 centrado en z:

  $$f(x) = f(z) + f'(z)(x - z) + \frac{f''(c)}{2}(x - z)^2$$

  Luego tenemos que:

  $$\begin{cases} f(x_0) = f(z) + f'(z)(x_0 - z) + \frac{f''(c_0)}{2}(x_0 - z)^2 \\ f(x_1) = f(z) + f'(z)(x_1 - z) + \frac{f''(c_1)}{2}(x_1 - z)^2 \end{cases}$$

  En ambos casos el resto de Lagrange es positivo y, en consecuencia, como se cumple que es positivo para todos los $c \in (x_0, z)$ o $c \in (z, x_1)$. Por tanto ahora tenemos:

  $$\begin{cases} f(x_0) \geq f(z) + f'(z)(x_0 - z) \\ f(x_1) \geq f(z) + f'(z)(x_1 - z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tf(x_0) \geq tf(z) + tf'(z)(x_0 - z) \\ (1-t)f(x_1) \geq (1-t)f(z) + (1-t)f'(z)(x_1 - z) \end{cases} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \geq f(z) + f'(z)(\underbrace{tx_0 + (1-t)x_1 - z}_{=0}) \Rightarrow tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \geq f(tx_0 + (1-t)x_1)$$

- $\Rightarrow$:

  Supongamos que f es convexa y $a \in I$, lo que vamos a ver es:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Esto lo asumimos como cierto. Veamos ahora que como a es el punto medio de $a+h$ y $a-h$ para cualquier h, entonces se puede expresar como combinación lineal convexa de ambos puntos:

$$a = \frac{1}{2}(a-h)+\frac{1}{2}(a+h) \overset{Convexa}{\Rightarrow} f(a) \leq \frac{1}{2}f(a-h)+\frac{1}{2}f(a+h) \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(a-h)+\frac{1}{2}f(a+h)-2f(a) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}f(a-h) + \frac{1}{2}f(a+h) - 2f(a)}{h^2} \geq 0 \Rightarrow f''(a) = \lim > 0$$

Falta solo demostrar la parte que hemos usado de $f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$. Si definimos $\psi(h) = f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)$ entonces vemos que es continua y derivable porque las que la componen lo son. Ahora calculamos, aplicando L'Hopital, el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} = \cancel{\lim_{h \to 0} \frac{f''(a+h) - f''(a-h)}{2}}$$

Pero esto no puede hacerse porque no podemos asumir que la segunda derivada sea continua, en su caso vamos a proceder a hacer esto:

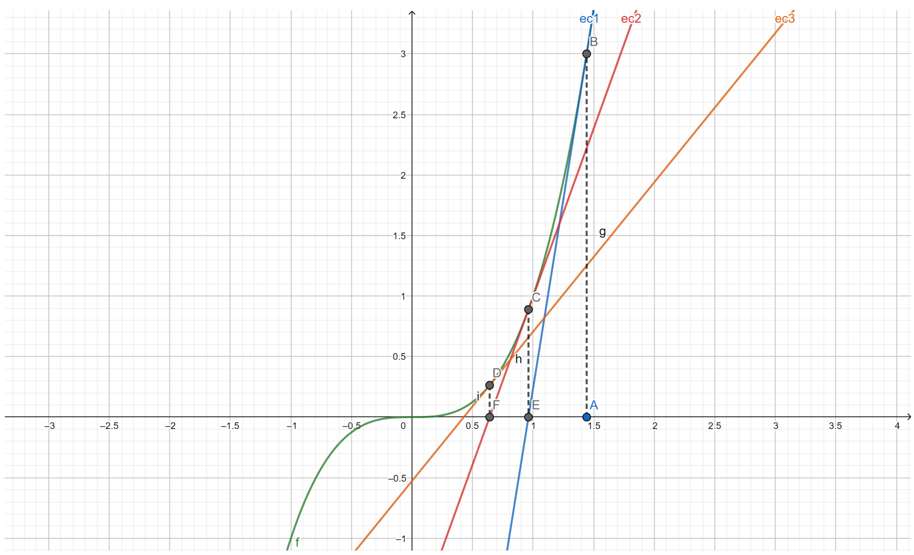
$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) + f'(a) - f'(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f'(a) - f'(a-h)}{h}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f''(a) + f''(a)\right) = f''(a)$$

Observación 5.11:
La manera intuitiva de ver que este teorema tenía que ser cierto es que $f''(x) > 0$ implica que $f'(x)$ es creciente en ese intervalo y vimos que la interpretación geométrica de la derivada era la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. Por tanto, las rectas tangentes van siendo cada vez más pronunciadas y eso es lo que es la idea de convexidad.

Método de Newton para calcular raíces de f(x)

Si calculamos la recta tangente a la función en un punto cercano a una raíz, vemos que esta corta cerca de la raíz. Si hacemos lo mismo con los sucesivos puntos de corte de cada una de las tangentes, los puntos de corte cada vez se aproximan más a la raíz que buscamos aproximar.



Indudablemente, este método puede fallar si no nos encontramos suficientemente cerca de la raíz porque puede ocurrir que uno de los cortes caiga justo en un punto cuya derivada es 0 y en ese caso la recta tangente no cortaría al eje en ningún punto.

Para ver la relación entre un punto y el siguiente, estudiamos la recta tangente: $y - f(x') = f'(x')(x - x')$ y x'' es tal que $(x'', 0)$ está en la recta así que:

$$0 - f(x') = f'(x')(x'' - x') \Leftrightarrow \frac{-f(x')}{f'(x')} = x'' - x'$$

Es decir, tenemos una sucesión de puntos para realizar las sucesivas iteraciones del algoritmo y que cada vez están más cerca de la raíz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Teorema 5.13
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que verifica:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$ *(signos distintos)*
- $|f'(x)| \geq m > 0$
- $\forall x \in [a, b] : |f''(x)| \leq M$

entonces podemos afirmar que $\exists r! \in (a, b) : f(r) = 0$ y $\exists \delta > 0 : [r - \delta, r + \delta] \subset [a, b]$ tal que:

$$\forall x_0 \in [r - \delta, r + \delta] \Rightarrow \begin{cases} \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [r - \delta, r + \delta] \\ |x_{n+1} - r| \leq K \cdot |x_n - r|^2 \qquad \textit{tal que } K = \frac{M}{2m} \\ x_n \xrightarrow{n \to \infty} r \end{cases}$$

<u>Demostración</u>:
Lo primero, por el Teorema de Bolzano se cumple que $\exists r \in (a, b) : f(r) = 0$, además $f'(x) \neq 0 : \forall x \in [a, b]$ por suponer que la derivada es mayor que m y entonces por el Teorema de Rolle, la raíz es única.

Sea $x' \in (a, b)$ vamos a hacer el desarrollo de Taylor centrado en x':

$$f(z) = f(x') + f(x')(z - x') + \frac{f''(c)}{2}(z - x')^2$$

Entonces tenemos ahora que si $z = r$, ocurre que:

$$0 = f(x') + f'(x')(r - x') + \frac{f''(c)}{2}(r - x')^2 \Leftrightarrow -\frac{f(x')}{f'(x')} + x' - r = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(x')}(r - x')^2$$

$$\underbrace{x' - \frac{f(x')}{f'(x')}}_{=x''} - r = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x')}(x' - r)^2 \Rightarrow |x'' - r| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{f''(c)}{f'(x')}\right| |x' - r|^2 \leq \underbrace{\frac{M}{2m}}_{=K} |x' - r|^2$$

Sea $\delta > 0 : [r - \delta, r + \delta] \subset (a, b)$ y $K \cdot \delta < 1$. Entonces si $x' \in [r - \delta, r + \delta] \Rightarrow |x'' - r| \leq K \underbrace{|x' - r|}_{\leq \delta} \cdot |x' - r| \leq |x' - r|$. Lo que quiere decir que la distancia de x'' a r es menor que la que había con respecto a x' y, en consecuencia, $x'' \in [r - \delta, r + \delta]$.

Y esto me permite ahora definir por inducción la sucesión de manera que:

$$x_0 \in [r - \delta, r + \delta] \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} : \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [r - \delta, r + \delta]$$

Y por último veamos que la sucesión converge a la raíz:

$$|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2 = K|x_n - r| \cdot |x_n - r| \leq K\delta \cdot |x_n - r|$$

Es fácil ver que como $K\delta < 1$ las sucesivas distancias se van haciendo más pequeñas de manera que cada vez está todo más junto, luego:

$$|x_1 - r| \leq K\delta|x_0 - r|$$

$$|x_2 - r| \leq K\delta \cdot |x_1 - r| \leq (K\delta)^2|x_0 - r|$$

$$|x_n - r| \leq (K\delta)^n|x_0 - r| \Rightarrow x_n - r \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} r$$

Además la convergencia de esta sucesión es muy rápida, llamemos al error de la aproximación $e_n = |x_n - r|$, luego $e_{n+1} \leq Ke_n^2 \Rightarrow Ke_{n+1} \leq (Ke_n)^2$ luego si suponemos que en la primera iteración el error es de 10^{-1}, tenemos:

$$Ke_1 = 10^{-1} \Rightarrow Ke_2 = 10^{-2} \Rightarrow Ke_3 = 10^{-4} \Rightarrow Ke_4 = 10^{-8}$$

Ejemplo 5.9:
Veamos por ejemplo el método para calcular la raíz $\sqrt{2}$ de la función $f(x) = x^2 - 2$.

Es notable que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, que $\forall x \in [1,2] : f'(x) \geq 2$ y $f''(x) = 2$ luego estamos en las condiciones del Teorema:

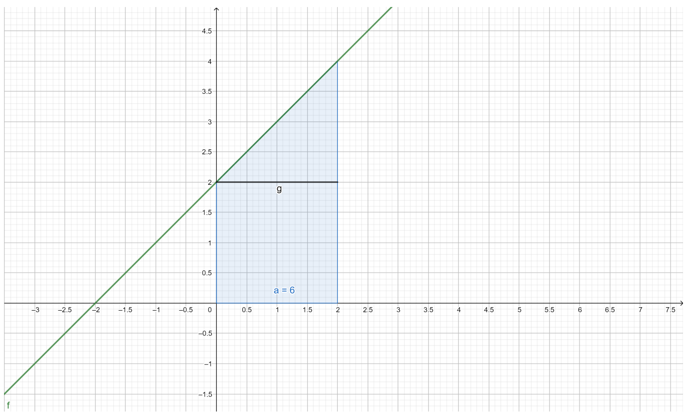
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

Comenzamos con $x_1 = 1$, entonces $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{17}{12}$ y así podemos seguir aproximando hasta conseguir el error deseado.

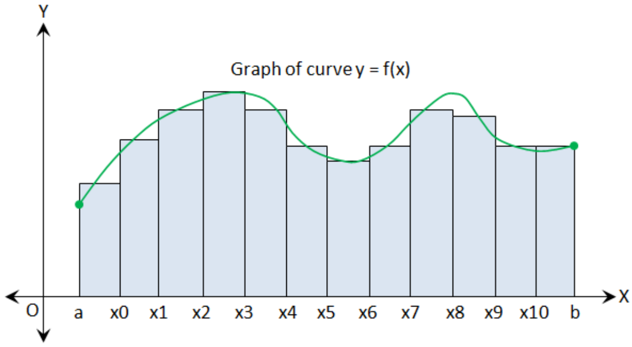
CÁLCULO INTEGRAL

Si bien la derivación abordaba problemas como las rectas tangentes a funciones, el cálculo de máximos y mínimos y problemas de optimización entre otras cosas, las integrales resuelven un problema fundamental como es el cálculo de áreas, es decir, conocer el área bajo la curva de una función.

Cuando las cosas son rectas, poseemos métodos geométricos (como la triangularización) para poder dividir el problema en otros más pequeños que sí se resolver y luego unir todas las áreas.



El problema viene cuando encontramos funciones que no son rectas, sino que describen curvas y no somos capaces de poder aplicar estos métodos. Una forma de aproximar este tipo de áreas es dividir el eje x en segmentos y hallar el rectángulo de cada uno de los segmentos. Sumándolas todas tenemos una aproximación más o menos buena cuanto en función de la pequeñez de esos segmentos.



Como cada vez que disminuyo la base de los rectángulos, la aproximación es mejor, la suma de las áreas converge a su valor real cuando la longitud del segmento tiende a 0. Dicho concepto representa la idea de dividir en infinitos trozos para que los rectángulos aproximen lo mejor posible el área bajo la curva.

TEORÍA DE LA INTEGRACIÓN

Pasando un poco a la definición más formal, tenemos que definir primero qué es eso de hacer rectángulos y dividir trozos. Lo haremos a través del concepto de partición de un conjunto.

Definición 6.1 (Partición y Norma)
Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo, definimos una ***partición*** *suya como un conjunto de puntos de dicho intervalo que lo dividen en segmentos más pequeños:*

$$\wp = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

DIBUJO

Del mismo modo, se define la ***norma de la partición*** *como la mayor amplitud entre los subsegmentos generados:*

$$||\wp|| = \text{máx}\{x_i - x_{i-1}\}$$

Definición 6.2 (Particiones Marcadas y Equiespaciadas)
Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\wp$ una partición del mismo, decimos que es una ***partición uniforme o equiespaciada*** *si y sólo si todos los subsegmentos tienen la misma longitud:*

$$\wp = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} : x_i = a + i \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=||\wp||}$$

Además, decimos que es ***partición marcada o etiquetada*** *y lo denotamos por $\mathring{\wp}$ si y sólo si existe un conjunto de puntos $\forall i = 1, ..., n : \exists! t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (uno por intervalo) a los que llamaremos marcas.*

Definición 6.3 (Suma de Riemann)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\mathring{\wp} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} : \exists! t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ una partición marcada, definimos la ***Suma de Riemann de f en $\mathring{P}$*** *como:*

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

es decir, es el área formada por los rectángulos cuya base son los segmentos que hemos definido y cuya altura es la imagen de la marca escogida.

Definición 6.4 (Integral de Riemann)
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, decimos[1] *que es* ***integrable en el sentido de Riemann*** *y lo denotamos por $f \in R[a, b]$ si y sólo si $\exists L \in \mathbb{R}$ de forma que:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathring{\wp} : ||\wp|| < \delta : |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \varepsilon$$

Al valor $L \in \mathbb{R}$ mencionado anteriormente lo llamaremos la ***integral de f entre a y b*** *y lo denotaremos por:*

$$L = \int_a^b f(x)\ dx$$

Al conjunto de funciones integrables Riemann en el intervalo $[a, b]$ lo denotamos por $R[a, b]$.

[1] En definitiva, lo que decimos es que si en esa Suma de Riemann, hacemos que n sea muy grande para que la norma sea muy pequeña, entonces su distancia al número L es muy pequeña.

Teorema 6.1
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y $\exists L \in \mathbb{R}$ su integral, entonces dicha integral es única.

Demostración:
Supongamos que existen dos L y L' que verifican la definición, por lo que:

$$\begin{cases} \varepsilon > 0 : \exists \delta : ||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 : \exists \delta' : ||\mathring{\wp}|| < \delta' \Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L'| < \varepsilon \end{cases}$$

Luego tomando una partición de forma que $||\wp|| < \min\{\delta, \delta'\}$ tenemos que:

$$\begin{cases} |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \varepsilon \\ |S(f, \mathring{\wp}) - L'| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow |L-L'| = |L-S(f,\mathring{\wp})+S(f,\mathring{\wp})-L'| \leq |L-S(f,\mathring{\wp})|+|S(f,\mathring{\wp})-L'| < 2\varepsilon \Rightarrow L = L'$$

Ejemplo 6.1:
Supongamos que $f(x) = k \in \mathbb{R}$ definida en $[a, b]$. Tenemos pues que si definimos una partición marcada de la forma que lo hemos estado haciendo antes, entonces:

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(t_i)}_{=k}(x_i - x_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = k \cdot (b - a)$$

Con lo cual esta tiene que ser la integral porque si elijo $L = k(b - a) \Rightarrow S(f, \mathring{\wp}) - L = 0 < \varepsilon : \forall \varepsilon$.

Ejemplo 6.2:
Con otro ejemplo, supongamos que $f(x) = x$ definida en $[0, 1]$. Vemos que si tomamos la partición de forma que las marcas sean el punto medio $t_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, entonces se tiene que:

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Pero en este caso no hemos probado todavía que la integral sea este valor porque hemos impuesto que las marcas sean unas concretas, sin embargo, sí prueba que la integral, de existir, debe ser $L = \frac{1}{2}$ porque como se debe cumplir para todas, para la que hemos hallado este es su valor.

Ahora si escogemos $\mathring{\wp}$ una partición marcada cualquiera vamos a calcular la suma de Riemann y probar que está cerca de $\frac{1}{2}$:

$$S(f, \wp) - \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$$

Tomando ahora valores absolutos:

$$\left|S(f, \wp) - \frac{1}{2}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|t_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right|(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i - x_{i-1}) = \delta \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \delta$$

Por lo tanto, volviendo a la definición:

$$\delta = \varepsilon > 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ||\wp|| < \delta \Rightarrow |S(f, \wp) - \frac{1}{2}| < \delta = \varepsilon$$

Criterios de Integrabilidad

Teorema 6.2

Sea $g \in R[a,b]$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que coincide con g excepto en una cantidad finita de puntos que llamaremos $\{c_0, \cdots, c_n\}$, entonces:

$$f \in R[a,b] \ y \ \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$$

Demostración:
La demostración basta hacerla para un punto puesto que luego por inducción podemos extenderlo a n puntos.

Supongamos que $\forall x \in [a,b] \backslash \{c\} : f(x) = g(x)$. Sea $\mathring{\wp} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} : \exists! t_i \in [x_i, x_{i-1}]$ que serán las marcas. Vamos a analizar como puede afectar el punto c a la suma de Riemann, hay dos posibles casos: que c se encuentre en uno de los intervalo o que sea el extremo de uno de los intervalos. En el primer caso solo afecta a uno de los intervalo de la suma de Riemann y en el segundo puede llegar afectar a 2 si fuese marca de ambos intervalos. Entonces poniéndonos en el peor de los casos, que afectase a dos, vemos que:

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

Distinguimos los sumandos "raros" de los demás:

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + f(t_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + f(t_{i_0+1})(x_{i_0+1} - x_{i_0}) + \sum_{i=i_0+2}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

Como en todos los intervalos menos en los afectados por c la f y la g coinciden, ocurre que $f(t_i) = g(t_i)$ en todos esos intervalos "normales", así que podemos escribirlo en función de $S(g, \mathring{\wp})$ pero en los términos "raros" tendremos que restar $g(t_\lambda)$ porque lo sumamos en el primer término:

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i - x_{i-1})}_{=S(g,\mathring{\wp})} + \left(f(t_{i_0}) - g(t_{i_0})\right)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + \left(f(t_{i_0+1}) - g(t_{i_0+1})\right)(x_{i_0+1} - x_{i_0}) \Rightarrow$$

Restamos $L = \int_a^b g$ a ambos lados de la igualdad:

$$\Rightarrow S(f, \mathring{\wp}) - L = S(g, \mathring{\wp}) - L + \left(f(t_{i_0}) - g(t_{i_0})\right)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + \left(f(t_{i_0+1}) - g(t_{i_0+1})\right)(x_{i_0+1} - x_{i_0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L| \leq |S(g, \mathring{\wp}) - L| + |f(c) - g(c)| \cdot ||\mathring{\wp}|| + |f(c) - g(c)| \cdot ||\mathring{\wp}||$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta_1 \Rightarrow |S(g, \mathring{\wp}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Del mismo modo, con el mismo $\varepsilon > 0$ escogemos un $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4|f(c)-g(c)|} > 0$. En consecuencia, $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ conlleva que:

$$||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2|f(c) - g(c)| \cdot \frac{\varepsilon}{4|f(c) - g(c)|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así que ya queda demostrado para un único punto.

Después por inducción tenemos que si tenemos $g \in R[a,b]$ y $f \in R[a,b] \backslash \{c_1, c_2\}$, entonces construimos $h \in R[a,b] \backslash \{c_1\}$. Por o probado $\int_a^b g = \int_a^b h = \int_a^b f$. Así que el argumento por inducción se ve claro. □

Teorema 6.3

Sea $f \in [a,b] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \begin{cases} \alpha & x \in [a,c) \\ \beta & x \in [c,b] \end{cases}$, entonces $f \in R[a,b]$ y ocurre:

$$\int_a^b f = \alpha(c-a) + \beta(b-c)$$

Demostración:
Sea $\mathring{\wp}$ una partición marcada de forma que $\mathring{\wp} = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$. De nuevo el punto c puede quedar en el interior o en uno de los extremos de los intervalos de la partición. Veamos que:

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + f(t_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + f(t_{i_0+1})(x_{i_0+1} - x_{i_0}) + \sum_{i=i_0+2}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha(x_i - x_{i-1}) + \underbrace{f(t_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + f(t_{i_0+1})(x_{i_0+1} - x_{i_0})}_{=\varphi} + \sum_{i=i_0+2}^{n} \beta(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \alpha(x_{i_0-1} - a) + \varphi + \beta(b - x_{i_0+1}) \Rightarrow$$

Ahora vamos a restar nuestro candidato a integral y vamos a medir esa distancia:

$$|S(f, \mathring{\wp}) - L| = |\alpha(x_{i_0-1} - a) + \varphi + \beta(b - x_{i_0+1}) - \alpha(c - a) - \beta(b - c)| =$$

$$= \left| \alpha \underbrace{(x_{i_0} - c)}_{\leq 2||\mathring{\wp}||} + \beta \underbrace{(c - x_{i_0-1})}_{\leq 2||\mathring{\wp}||} + \varphi \right| \leq \alpha \cdot 2||\mathring{\wp}|| + \beta \cdot 2||\mathring{\wp}|| + (|f(t_{i_0})| + |f(t_{i_0-1})|)\, ||\mathring{\wp}|| \leq$$

Los términos α y β están acotados por el máximo entre ambos y los $f(t_\lambda)$ son o α o β por lo que si acotamos los 3 por encima tenemos que:

$$\leq 6 \max\{|\alpha|, |\beta|\}||\wp||$$

Por lo tanto:

$$\forall \varepsilon > 0 : \delta = \frac{\varepsilon}{6 \max\{|\alpha|, |\beta|\}} : ||\wp|| < \delta \Rightarrow |S(f, \wp) - L| \leq 6 \max\{|\alpha|, |\beta|\}||\wp|| \leq 6 \max\{|\alpha|, |\beta|\} \frac{\varepsilon}{6 \max\{|\alpha|, |\beta|\}} = \varepsilon$$

Observación 6.1:
Lo que viene a explicar este teorema, aunque no sea de forma general, es que las discontinuidades de salto no son un impedimento para la integrabilidad.

Teorema 6.4 (Acotamiento por integrabilidad)
Toda función $f \in R[a, b]$ es acotada, es decir:

$$\exists M > 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$$

Luego, las discontinuidades de salto infinito o esenciales impiden la integrabilidad.

Demostración:
Por ser integrable se tiene que:

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \varepsilon$$

Antes de nada, como se cumple para todo ε, vamos a fijar $\varepsilon = 1$ y, en consecuencia, δ quedará fijo, convirtiéndose ambos en constantes.

Para demostrarlo, vamos a escoger una partición conveniente de forma que nos sea fácil calcular las cosas. Primero, nuestra partición va a cumplir que sea $n \in \mathbb{N} : ||\mathring{\wp}|| = \frac{b-a}{n} < \delta$ y en consecuencia cada punto de la partición es $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} : i = 0, 1, ..., n$. Del mismo modo, dado $x \in [a, b]$ entonces $\exists i_0 : x \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, y de esta forma vamos a escoger las marcas de la partición de la siguiente forma $\wp_x = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ donde $t_i = x_i$ para $i \neq i_0$ pero $t_{i_0} = x$ y de forma que $||\mathring{\wp}_x|| = \frac{b-a}{n} < \delta$. Con esta partición veamos que:

$$S(f, \mathring{\wp}_x) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i \neq i_0} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + f(x)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{n}{b-a}\cdot \left[S(f,\wp_x) - \sum_{i\neq i_0} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right] \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{n}{b-a}\cdot \left[|S(f,\wp_x)| + \sum_{i\neq i_0} |f(x_i)| \cdot \frac{b-a}{n} \right] \leq *$$

La suma de Rieman se puede acotar porque:

$$|S(f,\mathring{\wp}_x)| = |S(f,\wp_x) - L + L| \leq \underbrace{|S(f,\wp_x) - L|}_{\varepsilon=1} + |L| < 1 + |L|$$

Con lo cual, si meto el término de i_0 de nuevo en el sumatorio, obviamente eso tiene que ser más grande que no meterlo, con lo que la desigualdad queda:

$$* \leq \frac{n}{b-a}\left[1 + |L| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \frac{b-a}{n} \right] = M$$

Es decir, todo lo que queda al final es un único valor constante que no de depende de nada, con lo cual lo podemos llamar M y queda demostrado. □

Teorema 6.5 (Operaciones con Integrabilidad)
Si $f, g \in R[a,b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $kf \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b kf = k\int_a^b f$
2. $f + g \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
3. $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Demostración:

1. Si $\mathring{\wp}$ es una partición marcada entonces ocurre que $S(kf,\wp) = \sum_{i=1}^n (kf)(t_i)(x_i - x_{i-1}) = k\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = kS(f,\wp)$
2. Es fácil ver que $S(f+g,\wp) = S(f,\wp) + S(g,\wp)$. A su vez, como f y g son integrables tenemos que:
$$\varepsilon > 0 : \begin{cases} \delta_1 > 0 : ||\wp|| < \delta_1 \Rightarrow \left| S(f,\wp) - \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta_2 > 0 : ||\wp|| < \delta_2 \Rightarrow \left| S(g,\wp) - \int_a^b g \right| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$
Ahora si escogemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ si $||\wp|| < \delta$ entonces se tiene que:
$$\left| S(f+g,\wp) - \int_a^b f - \int_a^b g \right| = \left| S(f,\wp) + S(g,\wp) - \int_a^b f - \int_a^b g \right| \leq \left| S(f,\wp) - \int_a^b f \right| \left| S(g,\wp) - \int_a^b g \right| < \varepsilon$$
3. También es sencillo ver que $S(f,\mathring{\wp}) \leq S(g,\mathring{\wp})$:
$$\varepsilon > 0 : \begin{cases} \delta_1 > 0 : ||\wp|| < \delta_1 \Rightarrow \left| S(f,\wp) - \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta_2 > 0 : ||\wp|| < \delta_2 \Rightarrow \left| S(g,\wp) - \int_a^b g \right| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$
Ahora si escogemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ si $||\wp|| < \delta$ entonces se tiene en particular que:
$$\begin{cases} \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,\mathring{\wp}) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \\ \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} < S(g,\mathring{\wp}) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,\mathring{\wp}) \leq S(g,\mathring{\wp}) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g + \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Definición 6.5 (Función Característica)
*Sea $A \subset I = [a,b]$, definimos la **función característica** como:*

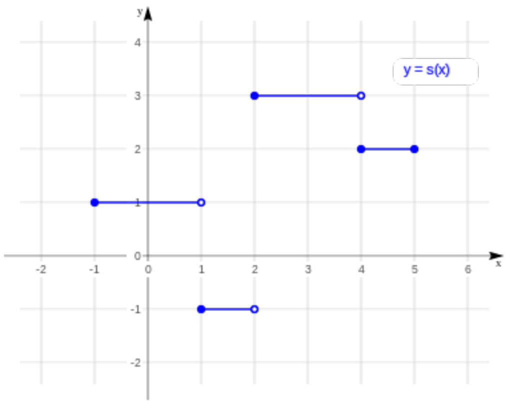
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Observación 6.2:
Si $c \in (a,b)$, entonces $\chi_{[c,b]} \in R[a,b]$ porque es una función de las que probamos que tenían saltos y eran integrables, además:

$$\int_a^b \chi_{[c,b]}(x)\ dx = b - c$$

Definición 6.6 (Función Escalera)
*Sea $I = [a,b]$ y $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$, y denotamos por $I_i = [c_{i-1}, c_i]$, por tanto, $I = \cup_{i=1}^n I_i$ de forma que $I_i \cap I_j = \emptyset : i \neq j$. De esta forma, definimos una **función escalera** $\alpha(x)$ como:*

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1 & I_1 \\ \alpha_2 & I_2 \\ \vdots & \\ \alpha_n & I_n \end{cases}$$



De hecho podemos escribir:

$$\alpha(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{I_i}(x) = \int_a^b \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (c_i - c_{i-1})$$

Observación 6.3:
Y además ocurre que $\alpha(x) \in R[a,b]$ porque las funciones características son integrables, los α son constantes y además a pesar de que puede haber intervalos con ambos extremos abiertos o no cerrados por ambos lados, como cuando una función se diferencia de otra sigue siendo integrable con la misma integral, entonces aún así sigue siendo integrable.

Teorema 6.6 (Criterio de Cauchy)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, la función $f \in R[a,b]$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 : ||\mathring{\wp}|| \ y\ ||\mathring{\mathcal{Q}}|| < \eta \Rightarrow \left| S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \right| < \varepsilon$$

Demostración:

- $\Rightarrow$:

$$f \in R[a,b] \Rightarrow \varepsilon > 0 : \begin{cases} \exists \delta > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f,\mathring{\wp}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \delta' > 0 : ||\mathring{\mathcal{Q}}|| < \delta' : |S(f,\mathring{\mathcal{Q}}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

Tomando como $\eta = \text{mín}\{\delta, \delta'\}$:

$$\Rightarrow |S(f,\mathring{\wp}) - S(f,\mathring{\mathcal{Q}})| = |S(f,\mathring{\wp}) - L + L - S(f,\mathring{\mathcal{Q}})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

- $\Leftarrow$:

En primer lugar, necesitamos un candidato a L, por lo que vamos a obtenerlo. Sea $\mathring{\wp}_n$ una partición marcada equiespaciada con $t_i = x_i$. Ocurre que $||\mathring{\wp}_n|| = \frac{b-a}{n}$. Sea $s_n = S(f,\mathring{\wp}_n) \Rightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y vamos a probar que esta sucesión es de Cauchy porque el posible límite al que converja, tendrá que ser necesariamente nuestro candidato a integral:

Dado $\varepsilon > 0$ podemos escoger un $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $n_0 > \frac{b-a}{\eta}$ siendo η el asociado a ε, con lo cual de esta forma la norma de P_{n_0} va a ser menor que η y para cualquier P_n con $n \geq n_0$ también se va a verificar esto. Por tanto, puedo afirmar:

$$n,m \geq n_0 \Rightarrow \frac{b-a}{n}, \frac{b-a}{m} < \eta \Rightarrow ||\mathring{\wp}_n||, ||\mathring{\wp}_m|| < \eta \Rightarrow |s_n - s_m| = |S(f,\mathring{\wp}_n) - S(f,\mathring{\wp}_m)| < \varepsilon$$

Lo que implica que la sucesión $\{s_n\}$ es de Cauchy, así que $\exists L = \text{lím}_{n\to\infty} s_n$ y este debe ser mi candidato a integral.

Es decir, que por un lado ocurre que:

$$\varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 : |S(f,\mathring{\wp}) - S(f,\mathring{\mathcal{Q}})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otro lado, sea $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{b-a}{n_0} < \eta$. La partición concreta que habíamos definido $\mathring{\wp}_{n_0}$ verifica que $||\mathring{\wp}_{n_0}|| < \frac{b-a}{n_0} < \eta$. Además como $\text{lím}_{n\to\infty} s_n = L \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \Rightarrow |s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Con lo cual tomando el mayor de los dos se tiene que $\tilde{n} = \text{máx}\{n_0, n_1\}$ ocurre:

$$||\wp_{\tilde{n}}|| < \eta$$

Y también se verifica:

$$|s_{\tilde{n}} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Con lo cual ocurre que:

$$|S(f,\wp) - L| = |S(f,\wp) - S(f,\wp_{\tilde{n}}) + S(f,\wp_{\tilde{n}}) - L| \leq |S(f,\wp) - S(f,\wp_{\tilde{n}})| + |s_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

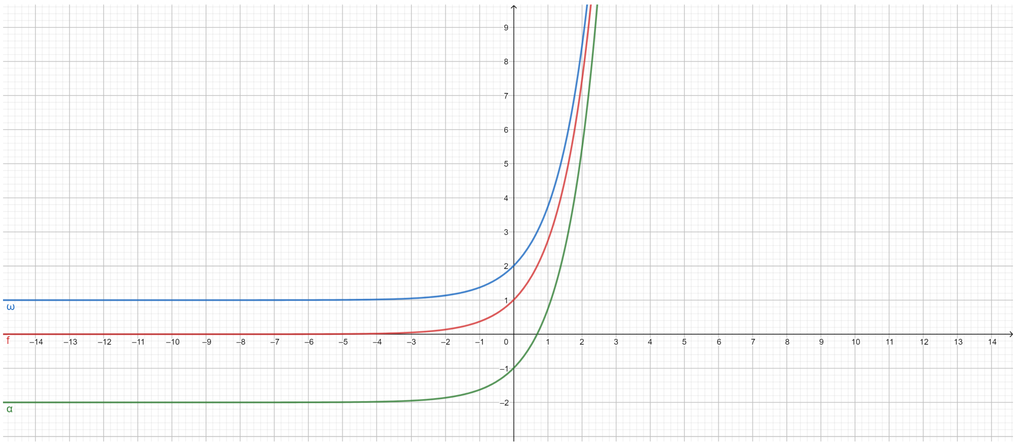
Observación 6.4:
Este teorema aporta un criterio muy potente **que no requiere de tener candidato a integral** para poder afirmar que es integrable o no.

Teorema 6.7 (Criterio del Sandwich)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, la función $f \in R[a,b]$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \alpha_\varepsilon, \omega_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R} : \alpha_\varepsilon, \omega_\varepsilon \in R[a,b] : \alpha_\varepsilon \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) : \forall x \in [a,b]$$

Además, ambas funciones auxiliares deben verificar que:

$$\int_a^b \omega_\varepsilon(x) - \alpha_\varepsilon(x)\ dx < \varepsilon$$



Demostración:

- $\Rightarrow$:

  Si $f \in R[a,b]$ basta con tomar $\alpha_\varepsilon = \omega_\varepsilon = f$ para cualquier ε por lo que se deduce que trivialmente se verifican las premisas

- $\Leftarrow$:

  Tenemos que $\alpha_\varepsilon \in R[a,b]$, entonces:

  $$\varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta_1 \Rightarrow \left| S(f, \mathring{\wp}) - \int_a^b \alpha_\varepsilon \right| < \varepsilon$$

  Del mismo modo, como $\omega_\varepsilon \in R[a,b]$, entonces:

  $$\varepsilon > 0 : \exists \delta_2 > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta_2 \Rightarrow \left| S(f, \mathring{\wp}) - \int_a^b \omega_\varepsilon \right| < \varepsilon$$

  Denominamos $\eta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y definimos $\mathring{\wp}$ y $\mathring{\mathcal{Q}}$ dos particiones marcadas de forma que $||\mathring{\wp}||, ||\mathring{\mathcal{Q}}|| < \eta$ se tiene que por un lado:

  $$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < S(\alpha_\varepsilon, \mathring{\wp}) < \int_a^b \alpha_\varepsilon + \varepsilon$$

  Y por otro:

  $$\int_a^b \omega\varepsilon - \varepsilon < S(\omega\varepsilon, \mathring{\wp}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon$$

  Asímismo, como $\alpha_\varepsilon < f(x) < \omega_\varepsilon$, entonces:

  $$S(\alpha_\varepsilon, \mathring{\wp}) < S(f, \mathring{\wp}) < S(\omega_\varepsilon, \mathring{\wp}) \Rightarrow \int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < S(\alpha_\varepsilon, \mathring{\wp}) < S(f, \mathring{\wp}) < S(\omega_\varepsilon, \mathring{\wp}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon$$

  De la misma forma se pueden aplicar estos razonamientos a $\mathring{\mathcal{Q}}$ por lo que se tiene que:

  $$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < S(\alpha_\varepsilon, \mathring{\mathcal{Q}}) < S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) < S(\omega_\varepsilon, \mathring{\mathcal{Q}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon$$

  Por tanto ahora por el Criterio de Cauchy se tiene que si multiplicamos una de las desigualdades por -1 y después sumamos obtenemos:

  $$-\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) - 2\varepsilon \leq S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \leq \int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) + 2\varepsilon$$

  Y como por hipótesis teníamos la relación entre la integral de la diferencia de α_ε y ω_ε entonces:

  $$-3\varepsilon \leq -\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) - 2\varepsilon \leq S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \leq \int_a^b \omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon + 2\varepsilon < 3\varepsilon \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \left| S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \right| < 3\varepsilon$$

  Luego por el Criterio de Cauchy es integrable □

Observación 6.5:
Para poder demostrar la integrabilidad de funciones más patológicas se suele usar este teorema y una muy buena práctica para poder acotarla como queramos puede ser utilizar las funciones escalera que definimos para que cuadre todo como queramos.

Proposición 6.1 (Criterios de no integrabilidad)
Son unas condiciones suficientes para afirmar que una función no es integrable:

- *Si existe una sucesión de particiones marcadas* $\mathring{\wp}_n$ *de forma que* $||\mathring{\wp}_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *y* $S(f, \mathring{\wp}_n) \not\to l$, *entonces* $f \notin R[a,b]$.
- *Si existen dos sucesiones de particiones marcadas* $\mathring{\wp}_n$ *y* $\mathring{\mathcal{Q}}_n$ *de forma que* $S(f, \mathring{\wp}) \xrightarrow{n\to\infty} L_1$ *y* $S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{n\to\infty} L_2$ *pero* $L_1 \neq L_2$, *entonces* $f \notin R[a,b]$.

Demostración:
- Por el criterio de Cauchy, la sucesión de número reales $s_n = S(f, \mathring{\wp}_n)$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto es convergente y la afirmación que hemos dado contradice dichos postulados.
- Del mismo modo, se contradicen las hipótesis del Criterio de Cauchy ya que la sucesión no puede tener dos límites distintos por la unicidad del límite. □

Teorema 6.8
Dadas las siguientes definiciones:

- $R[a,b]$ *como el conjunto de funciones integrables de Riemann.*
- $C[a,b]$ *como el conjunto de funciones continuas.*
- $C^1[a,b]$ *como el conjunto de funciones continuas y cuya derivada también es continua.*
- $C^k[a,b]$ *como el conjunto de funciones continuas y cuyas derivadas hasta la* $k-$*-ésima son continuas.*
- $B[a,b]$ *como al conjunto de funciones acotadas.*
- $M[a,b]$ *como el conjunto de funciones monótonas.*

Las funciones continuas también son integrables:

$$C[a,b] \subset R[a,b]$$

Las funciones monótonas también son integrables:

$$M[a,b] \subset R[a,b]$$

Demostración:
Sea $f \in C[a,b]$, como $[a,b]$ es cerrado y acotado, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$, luego:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Por lo tanto, si escogemos $\frac{\varepsilon}{b-a}$ entonces:

$$\exists \delta : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Podemos ahora escoger $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{b-a}{n_0} < \delta$ y con ese número vamos a hacer una partición uniforme en la que cada punto de la partición viene definido por: $c_i = a + i\frac{b-a}{n_0}$ con $i = 0, 1, \cdots, n_0$.

Ahora, dado un $[c_{i-1}, c_i]$ vamos a denotar:

$$\begin{cases} f_i = \text{mín}\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\} \\ f^i = \text{máx}\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\} \end{cases}$$

Por tanto si $x \in [c_{i-1}, c_i]$, se tiene que $f_i \leq f(x) \leq f^i$ por definición y existen ambos valores porque por ser continuas se alcanza el máximo y el mínimo.

FALTA EXPLICACIÓN CON DIBUJO

De este modo, escogemos[2]

$$\alpha_\varepsilon = \begin{cases} f_i & x \in [c_{i-1}, c_i) : i = 0, 1, \cdots, n_0 - 1 \\ f_{n_0} & x \in [c_{n_0-1}, c_{n_0}] \end{cases}$$

Y de forma análoga tomamos:

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} f^i & x \in [c_{i-1}, c_i) : i = 0, 1, \cdots, n_0 - 1 \\ f^{n_0} & x \in [c_{n_0-1}, c_{n_0}] \end{cases}$$

Estas dos funcione son del tipo que hemos definido como "función escalera" por lo que ya sabemos que son integrables.

No es difícil ver que por como están construidas, ambas funciones anteriores verifican que: $\forall x \in [a, b] : \alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon$, solo falta ver que la integral de la diferencia es pequeña para que quede demostrado por el Teorema del Sandwich:

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n_0} f_i \cdot (c_i - c_{i-1})$$

$$\int_a^b \omega_\varepsilon(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n_0} f^i \cdot (c_i - c_{i-1})$$

$$\int_a^b \omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n_0} (f^i - f_i)(c_i - c_{i-1})$$

Como cada f_i es el máximo valor que toma la función en algún punto del intervalo, puedo expresarlo como $f(u_i)$, es decir, el valor de la función en ese punto y con f_i ocurre de modo análogo:

$$f^i = \text{máx}\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\} = f(u_i) \text{ para cierto } u_i \in [c_{i-1}, c_i]$$

$$f_i = \text{mín}\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\} = f(v_i) \text{ para cierto } v_i \in [c_{i-1}, c_i]$$

Luego ocurre con ambos que:

$$f^i - f_i = |f^i - f_i| = |f(u_i) - f(v_i)| \overset{|u_i - v_i| \leq \frac{b-a}{n_0} < \delta}{<} \frac{\varepsilon}{b-a} : \forall i = 1, 2, \cdots, n_0$$

Eso ocurre así porque como es uniformemente continua, si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

En consecuencia, se tiene que:

$$\int_a^b \omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n_0} (f^i - f_i)(c_i - c_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^{n_0} (c_i - c_{i-1})}_{=b-a} = \varepsilon$$

Demostración de que las monótonas también los son:

[2]Partimos esta función en dos trozos para asegurarnos de que los intervalos donde escogemos las cosas sean disjuntos y de este modo no halla problemas (por eso distinguimos el último)

Sea f monótona creciente (el caso decreciente es análogo), es decir, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, definimos la partición uniforme $\wp = \{a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b\}$.

De este modo, construimos de nuevo:

$$\alpha_\varepsilon = \begin{cases} f(c_{i-1}) & x \in [c_{i-1}, c_i) : i = 1, ..., n_0 - 1 \\ f(c_{n_0-1}) & x \in [c_{n_0-1}, c_{n_0}] \end{cases}$$

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} f(c_i) & x \in [c_{i-1}, c_i) : i = 1, ..., n_0 - 1 \\ f(c_{n_0}) & x \in [c_{n_0-1}, c_{n_0}] \end{cases}$$

Es decir, en este caso estamos tomando siempre el valor de la función en el punto de la derecha o de la izquierda en cada una de cada uno de los intervalos.

Se verifica trivialmente entonces se cumple que $\forall x \in [a, b] : \alpha(x) \leq f(x) \leq \omega(x)$. Vemos entonces de nuevo, la integral de la diferencia:

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n_0} f(c_{i-1}) \cdot (c_i - c_{i-1}) = \frac{b-a}{n_0} \cdot (f(c_0) + \cdots + f(c_{n_0-1}))$$

$$\int_a^b \omega_\varepsilon(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n_0} f(c_i) \cdot (c_i - c_{i-1}) = \frac{b-a}{n_0} \cdot (f(c_1) + \cdots + f(c_{n_0}))$$

$$\int_a^b \omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon = \frac{b-a}{n_0}(f(c_0) + f(c_{n_0})) = \frac{b-a}{n_0} \cdot (f(b) - f(a))$$

Con lo cual como esa diferencia es constante y ese valor es menor que delta, puedo tomar un delta lo suficientemente pequeño como para que no importe esa constante. □

Observación 6.6:
Hemos visto que $R[a, b] \subset B[a, b]$, del mismo modo ocurre que $C^k[a, b] \subset C^1[a, b] \subset C[a, b]$.

Hemos visto que las funciones continuas son integrables y las que no lo son, en función del número y tipo de discontinuidades que posean pueden serlo o no. Este criterio otorga una herramienta muy potente para poder caracterizar una función integrable Rieman.

El concepto de medida es complejo y bastante extenso por lo que no ahondaremos mucho en él. A priori para nosotros, la medida de un intervalo (a, b) es el real $b - a$, pero lo que realmente nos interesa es la noción de medida de un conjunto, concretamente la medida nula de un conjunto, es decir, cuando decimos que un conjunto "no mide nada".

Definición 6.7 (Conjunto de Medida Nula)
Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que es de medida nula si se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \textit{cantidad numerable de intervalos } (a_k, b_k) : \forall k = 1, 2, \cdots : \begin{cases} A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \\ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon \end{cases}$$

Observación 6.7:
En base a esta definición podemos detectar los siguientes conjuntos que poseen medida nula:

- **Un punto** posee medida nula

$$\{a\} \subset \{a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\} \Rightarrow medida(\{a\}) \leq medida\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

- Una **cantidad finita de puntos** posee medida nula

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \Rightarrow A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \left(a_i - \frac{\varepsilon}{2N}, a_i + \frac{\varepsilon}{2N}\right)$$

$$\sum_{1}^{N} \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon$$

- Una **cantidad numerable de puntos** posee medida nula

  Supongamos que tenemos una cantidad numerable de puntos $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces podemos meter cada punto en un intervalo que sea $I_i = \left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$ cuya medida es concretamente $\frac{\varepsilon}{2^i}$.

  De este modo se verifica que:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = \varepsilon$$

Teorema 6.9 (de Lebesque de Integración)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $D(f)$ el conjunto de puntos de discontinuidad de la función, entonces:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow D(f) \textit{ es de medida nula}$$

Proposición 6.2 (Operaciones con Medida Nula)

- *Si $D \subset C$ y C es de medida nula, entonces D es de medida nula.*
- *Si tenemos $C_1, ..., C_n$ una cantidad finita de conjuntos de medida nula, entonces:*

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i \textit{ es de medida nula}$$

- *Si tenemos una cantidad numerable de conjuntos de medida nula, entonces la medida de la unión de todos es nula.*

$$\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \textit{ de medida nula } \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \textit{ es de medida nula}$$

Proposición 6.3 (Integrabilidad de la composición)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función $f \in R[a, b]$ y $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua que verifica $f[a, b] \subset [c, d]$, entonces la función $\varphi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verifica $\varphi \circ f \in R[a, b]$.

Demostración:

Si f es continua en c, como φ es continua, $\varphi \circ f$ es continua en c. Dicho de otro modo, la composición solo puede ser discontinua donde lo es f:

$$[a, b] \setminus D_f \subset [a, b] \setminus D_{\varphi \circ f} \Leftrightarrow D_{\varphi \circ f} \subset D_f$$

Por tanto, al ser $f \in R[a, b]$, D_f es de medida nula y, en consecuencia, $D_{\varphi \circ f}$ es de medida nula. Si demostramos que es acotada, por el criterio de Lebesque entonces es integrable. Ver que es acotada es sencillo, puesto que $f \in R[a, b]$ es acotada por ser integrable y φ es también es acotada por ser continua, por tanto, la composición de ambas si que está acotada. □

Ejemplo 6.3:

Supongamos que $f \in R[a, b]$:

- ¿$|f(x)| \in R[a,b]$ es integrable?

  La respuesta es que sí porque es la función f compuesta con la función $g(x) = |x|$ que sabemos que es continua.

- ¿$f^a(x)$ donde $a \in \mathbb{R}$ es integrable?

  La respuesta vuelve a ser afirmativa por ser la exponencial continua

- ¿$f, g \in R[a,b]$ $f \cdot g$ es integrable?

  Sí, porque $f + g \in R[a,b]$, del mismo modo $(f+g)^2 \in R[a,b]$ y en consecuencia sabemos que $\frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2 = f \cdot g \in R[a,b]$

- ¿La parte positiva $f^+(x) = \varphi(f(x))$ donde $\varphi(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$?

  Por supuesto que sí porque φ es una función continua.

- ¿La función valor máximo $M(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ que denotamos por $M(x) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$?

  Sí lo es porque la suma es integrable y la diferencia también que junto con el valor absoluto ya hemos dicho que sí.

Aditividad de la Integral

Proposición 6.4 (Aditividad de la Integral)
Sea $[a,b]$ un intervalo y $c \in [a,b]$, entonces:

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c] \text{ y } f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b]$$

Además, la integral es aditiva:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Demostración:

- $\Rightarrow$:

  Supongamos que $f \in R[a,b]$, entonces se tiene que por el Criterio de Cauchy:

  $$\forall \varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 : \forall \mathring{P}, \mathring{Q} : ||\mathring{P}||, ||\mathring{Q}|| < \eta \Rightarrow |S(f, \mathring{P}) - S(f, \mathring{Q})| < \varepsilon$$

  Vamos a definir dos particiones en el trozo que nos interesa

  $$\varepsilon > 0 : \text{sea } \eta > 0 \text{ el de } [a,b] \text{ y sean } \mathring{P}_1, \mathring{Q}_1 \text{ de } [a,c] : ||\mathring{P}_1||, ||\mathring{Q}_1|| < \eta$$

  y vamos a definir una única complementaria en el otro trozo

  $$\mathring{R} = \{c = r_0 < \cdots < r_n = b\} \text{de } [c,b] : t_i \in [r_{i-1}, r_i]$$

  De forma que uniendo la complementaria con una de las dos que hemos construido se tenga una partición del segmento total:

  $$\begin{cases} \mathring{P}_1 \cup \mathring{R} = \mathring{P} \\ \mathring{Q}_1 \cup \mathring{R} \cup \mathring{Q} \end{cases} \Rightarrow ||\mathring{P}||, ||\mathring{Q}|| < \eta$$

  Por un lado tenemos entonces que si nos referimos a la suma de Riemann del conjunto:

  $$S(f, \mathring{P}) = S(f, \mathring{P}_1) + S(f, \mathring{R})$$

  $$S(f, \mathring{Q}) = S(f, \mathring{Q}_1) + S(f, \mathring{R})$$

  Por tanto, como la función es integrable en el intervalo completo al ser iguales ambas cosas, la diferencia de ambas particiones de uno de los intervalos también es menor que ε:

  $$|S(f, \dot{P}_1) - S(f, \dot{Q}_1)| = |S(f, \mathring{P}_1) + S(f, \mathring{R}) - S(f, \mathring{Q}_1) - S(f, \mathring{R})| = |S(f, \mathring{P}) - S(f, \mathring{Q})| < \varepsilon$$

- $\Leftarrow$:
  LA DEJA PARA NOSOTROS. □

Proposición 6.5

1. *Sea $f \in R[a,b]$ y $a < c < d < b$, entonces $f \in R[c,d]$ y la integral verifica:*
$$\int_c^d f = \int_a^d f - \int_a^c f$$
2. *Sea $\mathring{P} = \{a = c_0 < \cdots < c_n = b\}$ partición en el intervalo $[a,b]$, entonces:*
$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{c_{i-1}}^{c_i} f \right)$$
3. *Sea $f \in R[a,b]$ y $\alpha, \beta \in [a,b] : \alpha < \beta$, entonces:*
$$\int_\beta^\alpha f = - \int_\alpha^\beta f$$
4. *La integral en un punto es nula:*
$$\int_\alpha^\alpha f = 0$$

Demostración:

1. Por el Teorema anterior podemos demostrar que $f \in R[a,d]$, escogiendo ahora un punto intermedio entre a y d que llamaremos c, por el Teorema anterior tenemos de nuevo que $f \in R[c,d]$.
2. Lo tenemos demostrado para uno solo, por lo que podemos aplicar inducción para extenderlo al número **finito** de veces que queramos.
3. Por definición
4. Trivial □

Teorema 6.10

Sea $f \in R[a,b]$ y $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ cualesquiera[3]*, entonces:*
$$\int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f = \int_\alpha^\gamma f$$

Demostración:
Este resultado que acabamos de ver es equivalente a decir:
$$\int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f + \int_\gamma^\alpha f = 0$$

Por lo que vamos a tratar de demostrar esto

Denotamos por $L(\alpha, \beta, \gamma) = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f + \int_\gamma^\alpha f$ y vamos a distinguir casos:

- Si alguna de las parejas coincide, es decir, $\alpha = \beta$ o $\alpha = \gamma$ o $\beta = \gamma$, entonces este resultado es trivial.

[3]Es notable destacar que no hemos impuesto ningún tipo de orden entre estos número para realizar dicha afirmación.

- Si los tres son distintos y remarcamos que NO sabemos el orden:

$$L(\alpha,\beta,\gamma) = L(\beta,\gamma,\alpha) = L(\gamma,\alpha,\beta)$$

Como estas permutaciones son las mismas, vamos a estudiar las otras 3 posibles permutaciones distintas:

$$L(\beta,\alpha,\gamma) = \int_\beta^\alpha f + \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta = -\int_\alpha^\beta f - \int_\gamma^\alpha f - \int_\beta^\gamma f = -\int_\alpha^\beta f - \int_\beta^\gamma f - \int_\gamma^\alpha f = -L(\alpha,\beta,\gamma)$$

Pero de nuevo, si realizo permutaciones circulares sobre este resultado, entonces ocurre que:

$$L(\beta,\alpha,\gamma) = L(\alpha,\gamma,\beta) = L(\gamma,\beta,\alpha)$$

Es decir, que tres coinciden y las otras tres también coinciden y unas son las otras pero cambiando el signo, por tanto, si demostramos que una de ellas es 0, todas lo serán.

$$L(\beta,\alpha,\gamma) = L(\beta,\gamma,\alpha) = L(\gamma,\alpha,\beta) = -L(\beta,\alpha,\gamma) = -L(\alpha,\gamma,\beta) = -L(\gamma,\beta,\alpha)$$

Aunque no sabemos el orden, en alguna de las permutaciones se tendrá el orden que poseen los números elegido y esa demostración ya hemos visto que es cierta, por tanto, siendo uno 0, todos los demás son 0.

$$\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow L(\alpha < \beta < \gamma) = 0 \Rightarrow L(\beta,\alpha,\gamma) = \cdots = -L(\gamma,\beta,\alpha) = 0$$

Teorema Fundamental del Cálculo

La integrabilidad permite determinar si merece la pena gastar el tiempo en calcular o no una integral, pero ¿quién es la integral? En ocasiones, el cálculo de este valor por medio de la definición se vuelve sumamente complejo y no es práctico a la hora de llevarlo a cabo.

Una de las claves del desarrollo matemático moderno ha sido el enunciado de este Teorema porque es la llave que conecta la derivación con la integración y que otorga un pilar sobre el que apoyarse para poder calcular la integral de infinitud de funciones de forma "sencilla".

Teorema 6.11 (Regla de Barrow)
Sea $f \in R[a,b]$, supongamos que $\exists F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) de forma que $\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = f(x)$, entonces se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Demostración:
Sea $\mathcal{P} = \{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$ una partición uniforme de $[a,b]$ de forma que $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), i = 1, ..., n$. Antes de escoger las marcas veamos que:

$$F \in \mathcal{C}[x_{i-1}, x_i] \text{ derivable en } (x_{i-1}, x_i)$$

Por el Teorema del Valor medio tenemos que:

$$\exists c_i \in (x_{i-1}, x_1) : \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$$

Y justamente estas van a ser las marcas de nuestra partición:

$$\mathring{\mathcal{P}}_n = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b : t_i = c_i\}$$

En consecuencia, al calcular la suma de Riemann tenemos que:

$$S(f, \mathring{\mathcal{P}}_n) = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(c_i)(x_i - x_{i-1})}_{F(x_i)-F(x_{i-1})} = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + ... + F(x_n) - F(x_{n-1}) =$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

Pero como $f \in \mathcal{R}[a,b]$, entonces:

$$\lim_{x \to \infty} S(f, \mathring{\mathcal{P}}_n) = \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Porque como $S(f, \mathring{\mathcal{P}}_n) = F(b) - F(a)$ es fijo, entonces al converger a la integral, necesariamente el valor constante es la integral. □

Corolario 6.11.1

Sea $f \in R[a,b]$ y supongamos que $\exists F \in C[a,b] : F'(x) = f(x) : \forall x \in [a,b] \setminus E$ donde E es un conjunto finito de puntos, entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Es decir, que tras extraer una cantidad finita de puntos sigue siendo cierta la regla de Barrow y la integral es la misma.

Demostración:
Aplicamos la regla de Barrow en $[c_{i-1}, c_i] : i = 1, 2, ..., n+1$:

Se puede aplicar esto porque F es continua y entonces lo es en cada pequeño intervalo. Además como coincide en todos los puntos dentro de ese pequeño intervalo tenemos: $F \in \mathcal{C}[c_i, c_{i-1}]$: $F'(x) = f(x) : \forall x \in (c_i, c_{i-1})$, luego podemos decir que:

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f = F(c_i) - F(c_{i-1})$$

Por la aditividad de la integral podemos decir que:

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f = \sum_{i=1}^{n+1} F(c_i) - F(c_{i-1}) = F(c_{n+1}) - F(c_0) = F(b) - F(a)$$

Definición 6.8 (Integral Indefinida)

*Sea $f \in R[a,b]$, definimos la **integral indefinida con base** a como la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$F(z) = \int_a^z f$$

Teorema 6.12

Sea $f \in R[a,b]$ y denotando por F su integral indefinida de base a, entonces $F \in C[a,b]$ y F es Lipschizt[4] *con constante*[5] *de Lipschizt:*

$$M = \sup\{|f(x)|\} : x \in [a,b]$$

Además, el ser Lipschiztiana implica:

$$|F(z) - F(w)| \leq M|z - w| : z, w \in [a,b]$$

Demostración:
Sean $z, w \in [a,b]$ dos puntos distintos, supongamos en primer lugar que $a \leq w < z \leq b$, entonces:

$$\begin{cases} F(z) = \int_a^z f \\ F(w) = \int_a^w f \end{cases} \Rightarrow F(z) - F(w) = \int_a^z f - \int_a^w f = \int_a^z f + \int_w^a f = \int_w^z f$$

[4]Suelen denotarse por $C^{0,1}[a,b]$

[5]Este supremo existe porque por ser integrable sabemos que está acotada y por tanto posee supremo.

Entonces:

$$|F(z) - F(w)| = \left|\int_w^z f\right|$$

Pero como sabemos que la función f está acotada por ser integrable:

$$-M \leq f(x) \leq M \Rightarrow$$

Y además por la monotonía de la integral:

$$\underbrace{\int_w^z -M}_{-M(z-w)} \leq \int_w^z f \leq \underbrace{\int_w^z M}_{M(z-w)}$$

Luego:

$$|F(z) - F(w)| = \left|\int_w^z f\right| \leq M|z-w|$$

Ahora si suponemos que $a \leq z < w \leq b$ el razonamiento es completamente simétrico cambiando los roles de z y w en lo que hemos hecho antes, por tanto, lo que queda es que:

$$|F(z) - F(w)| \leq M|z-w|$$

Pero esto es lo mismo que lo de antes, por lo que queda porbado que F es una función Lipstchiziana y por tanto $F \in C[a,b]$. $\square$

Teorema 6.13 (Fundamental del Cálculo)
Sea $f \in R[a,b]$ continua en $c \in [a,b]$, entonces la función F es derivable en c y además:

$$F'(c) = f(c)$$

Demostración:
Sabemos que f es continua en c, lo que quiere decir que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{si } \underset{x\in[a,b]}{|x-c|} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$$

Para probar que F es derivable y que la derivada en c es $f(c)$, vamos a demostrar que:

$$|z-c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(z) - F(c)}{z-c} - f(c)\right| < \varepsilon :$$

Veamos que:

$$F(z) - F(c) = \int_a^z f - \int_a^c f = \int_c^z f$$

Vamos a suponer en primer lugar que $c < z < c + \delta$, como $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$ y la integral conserva estas desigualdades tenemos que:

$$(f(c) - \varepsilon)(z-c) = \int_c^z (f(c) - \varepsilon) < \underbrace{\int_c^z f(x)\,dx}_{F(z)-F(c)} < \int_c^z (f(c) + \varepsilon) = (f(c) + \varepsilon)(z-c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(c) - \varepsilon < \frac{F(z) - F(c)}{z-c} < f(c) + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{F(z) - F(c)}{z-c} - f(c) < +\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{F(z) - F(c)}{z-c} - f(c)\right| < \varepsilon : c < z < c + \delta$$

Y el razonamiento para $c - \delta < z < c$ es completamente análogo y queda demostrado por tanto que la derivada de la integral es la función de la que partíamos. $\square$

Observación 6.8:
Entre las consecuencias más importantes de este teorema tenemos que:

$$F(z) = \int_a^z f \Rightarrow \frac{d}{dz}\left(\int_a^z f\right)(c) = f(c)$$

Además si $f \in C[a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y se tiene que $F'(z) = f(z)$ para todo z en el intervalo y por eso podemos afirmar que:

$$\frac{d}{dz}\int_a^z f = f(z)$$

Es decir, que derivada de la función integral es la propia función por lo que son operaciones inversas.

CÁLCULO DE INTEGRALES

A pesar de que durante todo el capítulo hemos estado definiendo y matizando el concepto de integral y sentando las bases para diferenciar que funciones son integrables y cuáles no, aún no hemos definido herramientas o procedimientos para calcular dicha integral. Esta sección va dedicada precisamente al cálculo numérico de las mismas y a dar criterios de convergencia para las impropias.

Métodos de integración

Vamos a ver las principales técnicas más sencillas para calcular integrales cuando la integración no es directa, esto es, cuando conocemos directamente la primitiva de la función a integrar.

Teorema 6.14 (Cambio de Variable)
Sean $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f \in C^0(I)$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi \in C^1(J)$ y de modo que $\varphi(J) \subset I$ y $\alpha, \beta \in J$, entonces:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx$$

Demostración:
Lo primero de todo, es sencillo ver que lo que estamos diciendo está bien definido porque el producto de estas funciones es continuo por las características que tienen y hemos demostrado que las funciones continuas son integrables.

Definimos la función $F(u) = \int_{\varphi(\alpha)}^u f(x)\ dx : \forall u \in I$, de este modo sabemos que $F'(u) = f(u)$ con lo cual, F es una primitiva de f porque es la integral indefinida de base $\varphi(\alpha)$ tal y como la denotamos.

Consideramos ahora esta función:

$$H(t) = F(\varphi(t)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)\ dx : \forall t \in J$$

De este modo vemos que por la Regla de la Cadena:

$$H'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Si empleamos la Regla de Barrow, entonces:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = H(\beta) - H(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - \underbrace{F(\varphi(\alpha))}_{=0} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx$$

Ejemplo 6.4:
En la práctica, este tipo de resultado se usa del siguiente modo. Supongamos que queremos calcular:

$$\int_0^2 2tsen(t^2)\ dt$$

Consideramos:

$$\begin{cases} \varphi(t) = t^2 \\ \alpha = 0,\ \beta = 2 \\ f(x) = sen(x) \end{cases}$$

Por tanto por el Teorema de Cambio de Variable tenemos que:

$$\int_0^2 2tsen(t^2)\ dt = \int_0^4 sen(x)\ dx = cos(0) - cos(4) = 1 - cos(4)$$

También es útil para el cálculo de primitivas de funciones. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la primitiva de

$$f(t) = t \cdot e^{t^2}$$

No existe una única primitiva, por lo que podemos denotar la familia de todas estas como:

$$\int f(x)\ dx$$

Entonces para calcular esta primitiva, basta con aplicar el cambio de variable visto considerando que $t^2 = x \Rightarrow 2t\ dt =\ dx$ se tiene:

$$\int te^{t^2}\ dt = \int e^x \frac{1}{2}\ dx = \frac{1}{2}e^x + C \Rightarrow F(t) = \frac{1}{2}e^{t^2} + C$$

Teorema 6.15 (Integración por partes)
Sean $F, G \in C^1(I, \mathbb{R})$, $f = F'$ y $g = G'$, entonces para $\alpha, \beta \in I$ se tiene que:

$$\int_\alpha^\beta f(x)G(x)\ dx = F(\beta)G(\beta) - F(\alpha)G(\alpha) - \int_\alpha^\beta F(x)g(x)\ dx$$

Demostración:
Vamos a considerar la función $H(x) = F(x)G(x)$, es sencillo ver que por la Regla del Producto tenemos que:

$$H'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

De este modo, la integral en ambos lados debe ser la misma, es decir:

$$\int_\alpha^\beta H'(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(x)G(x)\ dx + \int_\alpha^\beta F(x)g(x)\ dx$$

Por un lado tenemos que:

$$\int_\alpha^\beta H'(x)\ dx = H(\beta) - H(\alpha) = [FG]_\alpha^\beta$$

Con lo cual despejando $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)G(x)\ dx$:

$$\int_\alpha^\beta f(x)G(x)\ dx = [FG]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)g(x)\ dx \Rightarrow \int_\alpha^\beta F'(x)G(x)\ dx = [FG]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)G'(x)\ dx$$

Lo más representativo es que esta igualdad es aprovechable por ambos lados puesto que en ocasiones será más sencillos despejar una o despejar la otra para poder hacer el cálculo que deseemos. $\square$

Ejemplo 6.5:
Si queremos calcular $\int_0^\pi x \operatorname{sen}(x)\ dx =$, considerando como:

$$\begin{cases} F'(x) = \operatorname{sen}(x) \\ F(x) - \cos(x) \\ G(x) = x \\ G'(x) = 1 \end{cases}$$

Entonces se tiene que:

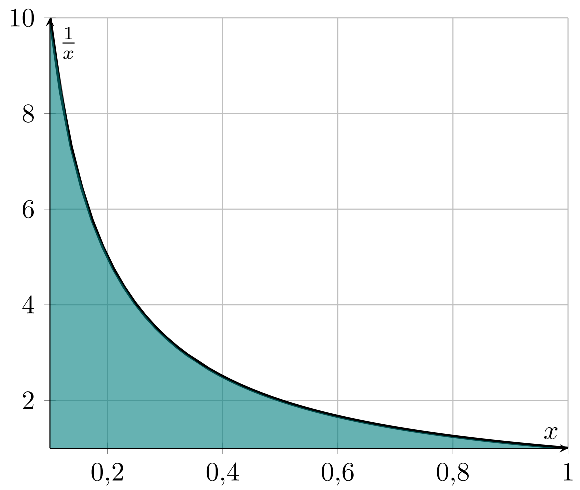
$$\int_0^\pi x \operatorname{sen}(x)\ dx = [-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\ dx = \pi + \int_0^\pi \cos(x)\ dx = \pi + \operatorname{sen}(x)]_0^\pi = \pi$$

También podemos emplearlo para el cálculo de primitivas

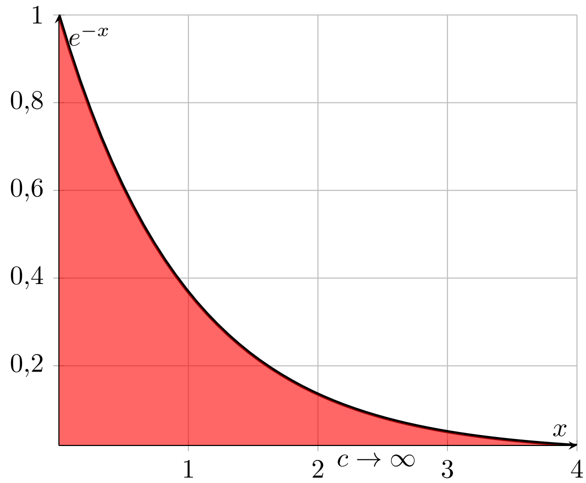
$$\int_1^2 \ln(x)\ dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\ dx \\ v = x \Rightarrow dv = 1\ dx \end{bmatrix} = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\ dx = 2\ln(2) - 1$$

Integrales Impropias

En ocasiones, la teoría presentada se queda corta, pues podemos querer calcular un área finita, pero definida en un intervalo que no es acotado tal y como se muestra en la parte inferior derecha del dibujo o incluso un área también finita en un intervalo acotado, pero con las imágenes de la función a integrar no acotadas tal y como se muestra en la parte superior izquierda del dibujo:



Como la definición que hemos dado de integral de Riemann no permite que la suma de los intervalos sea una cantidad infinita, lo lógico para resolver este tipo de problemas es calcular la integral hasta cierto punto c y después enviar a c a infinito pasando al límite, cosa que si nos permiten las reglas generales del cálculo:



$$\int_0^\infty e^{-x}\ dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x}\ \ dx = \lim_{c\to\infty} 1 - e^{-c} = 1$$

En cierto modo, estamos calculando áreas de regiones infinitas y, por estar fuera de la definición propiamente dicha de integral, se las conoce como integrales impropias.

Integrales Impropias de 1ª Especie

El primer caso presentado, el de las funciones acotadas pero definidas en intervalos no acotados, conforman lo que llamamos integrales impropias de 1ª especie.

Definición 6.9 (Integral Impropia de 1ª especie)
*Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función $\forall b > a : f \in R[a, b]$, definimos la **integral impropia** como:*

$$\int_a^\infty f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx$$

Además, decimos que dicha integral converge si existe y es finito este límite:

$$\exists \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx$$

Observación 6.9:
Pero hay que destacar que a esta integral no se le pueden aplicar muchos de los criterios o normas que hemos determinado puesto que no es una integral al uso de las que hemos visto.

Ejemplo 6.6:
Tomamos por ejemplo la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ de forma que para hallar $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ calculamos:

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \int_1^b x^{-p}\ dx = \begin{cases} [\ln(x)]_1^b & \text{si } p = 1 \\ \left[\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b & \text{si } p \neq 1 \end{cases}$$

Para el caso $p \neq 1$, tenemos que:

$$\frac{b^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \Rightarrow \begin{cases} 1 - p > 0 \Rightarrow b^{1-p} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \infty \\ 1 - p < 0 \Rightarrow b^{1-p} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} \end{cases}$$

Por el contrario, para el caso $p = 1$, tenemos que:

$$\ln(b) - \ln(1) = \ln(b) \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Y, en consecuencia, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ es covergente $\Leftrightarrow p > 1$ y además $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

Es importante tratar de dar un criterio para saber si una integral impropia es o no convergente sin conocer el límite de convergencia puesto que en ocasiones será muy complejo.

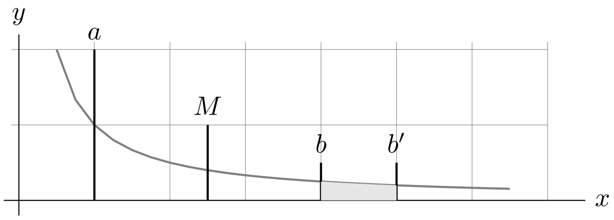
Si tratamos la integral como una expresión de la que queremos hallar el límite:

$$\exists \lim_{b\to+\infty} \underbrace{\int_a^b f(x)\ dx}_{=I_b} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists M \geq a:\ \text{ si } b' > b \geq M \Rightarrow |I_{b'} - I_b| < \varepsilon$$

Teorema 6.16 (Criterio de Cauchy)
Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una función $\forall b \in [a,\infty) : f \in R[a,b]$, entonces:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \textit{ es convergente } \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M \geq a:\ \textit{ si } b' > b \geq M \Rightarrow \left|\int_b^{b'} f(x)\ dx\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |I_{b'} - I_b| = |\int_a^{b'} f(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx| = |\int_b^{b'} f(x)\ dx|$$



Observación 6.10:
En el fondo, lo que estamos diciendo es que podemos coger dos puntos lo suficientemente grandes de forma que el área bajo la curva entre ambos sea cada vez más pequeña.

Corolario 6.16.1
Este resultado tiene consecuencias muy importantes, como que:

$$\int_a^\infty f \textit{ es convergente} \Leftrightarrow \int_{a'}^\infty f(x)\ dx : a' > a \textit{ es convergente} \Leftrightarrow \int_{a'}^\infty f(x)\ dx : \forall a' > a \textit{ es convergente}$$

Observación 6.11:
Por tanto, la convergencia o divergencia de la integral impropia no depende de lo que le ocurra a la función en el intervalo $[a, a']$ (a pesar de poder ser tan grande como queramos) porque al fin y al cabo esta cantidad será finita, lo verdaderamente importante es ver que ocurre con la función cerca de ∞.

Teorema 6.17 (Criterio de comparación de integrales impropias)
Sean $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ donde $\forall b > a : f, g \in R[a,b]$ y $0 \leq f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\int_a^\infty g(x)\ dx \textit{ convergente } \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\ dx \textit{ convergente}$$

Demostración:

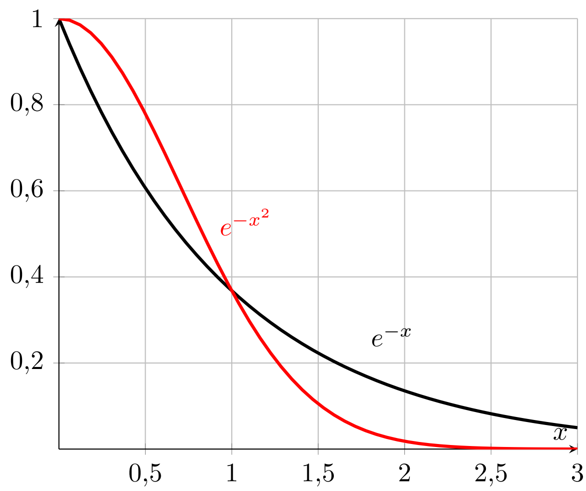
$$\int_a^{+\infty} g(x)\ dx \text{ es convergente } \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M \geq a: \text{ si } b' > b \geq M \Rightarrow \left| \int_b^{b'} g(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

Por tanto, para los mismos ε, M, b, b' se tiene que:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\ dx \leq \int_a^{\infty} g(x)\ dx < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente}$$

Ejemplo 6.7:
Tomamos como función $f(x) = e^{-x^2}$ de forma que queremos calcular $\int_0^{\infty} e^{-x^2}$. Podemos usar entonces otra función para "acotarla" por arriba y que sepamos que su integral es convergente:

$$\begin{cases} e^{-x^2} \leq e^{-x} \text{ si } x \geq 1 \\ e^{-x^2} \geq e^{-x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



En primer lugar, por lo probado antes:

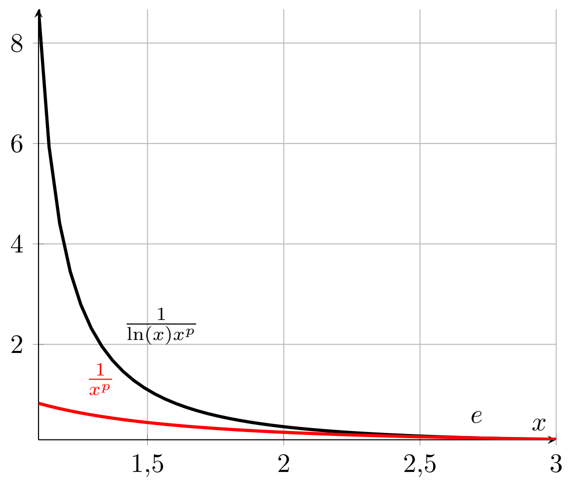
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} e^{-x^2} \text{ converge}$$

Del mismo modo, y por el teorema que se acaba de ver, se tiene que:

$$0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x} : \forall x \geq 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x} \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x^2} \text{ converge} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} \text{ converge}$$

Tomamos ahora $f(x) = \frac{1}{\ln(x)x^p}$ de forma que queremos calcular $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p}$. Acotamos de nuevo por una función que sabemos convergente:

$$\frac{1}{\ln(x)x^p} < \frac{1}{x^p} : \forall x \geq e$$



Del mismo modo, vuelve a ocurrir:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p} \text{ converge } \Leftrightarrow \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p} \text{ converge}$$

Así que se tiene que:

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ converge} \Rightarrow \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p} \text{ converge} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p} \text{ converge}$$

Hemos visto anteriormente que si $0 \leq f(x) \leq g(x) : \forall x \in (a, \infty)$, entonces la convergencia de la integral de $g(x)$ implica la convergencia de la integral de $f(x)$, pero vimos que, en realidad, podíamos relajar condiciones como que $f(x) \leq g(x) : \forall x \in (a', \infty) : a' > a$. El objetivo de este teorema es mejorar dicho criterio para prescindir de todas aquellas premisas que no son tan necesarias, debilitando las condiciones del Teorema.

Teorema 6.18 (Criterio de comparación en el límite)
Sean $f, g \in [a, \infty) \to \mathbb{R}$ tales que $\forall b > a : f, g \in R[a, b]$ y $f(x), g(x) \geq 0$. Si se verifica que:

$$\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$$

entonces se tiene que:

- $0 < L < \infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ es convergente} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ es convergente}$$

Esto quiere decir que intuitivamente existe una constante que relaciona como se comportan ambas funciones cuando tienden a infinito.

- $L = 0$

$$\int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ es convergente}$$

Lo que indica lo que vimos, que $g(x)$ acota a f y entonces si la integral impropia de $g(x)$ converge, entonces la de $f(x)$ también.

- $L = \infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ es convergente}$$

El mismo caso que vimos, pero cambiando la función que es acotada.

Demostración:
Vamos a hacer la primera demostración y las otras se dejan a nuestra cuenta.

Supongamos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L : 0 < L < +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M \geq a: \text{ si } x \geq M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$$

Ahora tomamos $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$, entonces se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{L}{2} > 0, \exists M \geq a: \text{ si } x \geq M \Rightarrow -\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - L < \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2} \cdot g(x) < f(x) < \frac{3L}{2} \cdot g(x) : x \geq M$$

Conociendo esta desigualdad, tenemos entonces que:

- $\Rightarrow$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_M^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_M^{+\infty} \frac{L}{2} \cdot g(x)\,dx \text{ es convergente} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_M^{+\infty} g(x)\,dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ es convergente}$$

- $\Leftarrow$

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergente} \Rightarrow \int_M^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergente} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_M^{+\infty} \frac{2}{3L} f(x)\,dx \text{ convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente}$$

Ejemplo 6.8:
Supongamos que la función $f(x) = xe^{-x^2+2x}$ de forma que el objetivo sea calcular:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2+2x}\,dx$$

Tomamos la función $g(x) = e^{-x}$ y ahora vamos a calcular el cociente de ambas:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{xe^{-x^2+2x}}{e^{-x}} = \frac{x}{e^{x^2-3x}}$$

Y por L'Hôpital se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Luego entonces ocurre que:

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

Integrales Impropias de 2ª especie

Puede ocurrir que el área que queremos hallar no es que esté en un intervalo que es infinito sino que esté en intervalo en el que las imágenes no son acotadas y se plantea el mismo problema que teníamos en las impropias de primera especie, por tanto, es razonable pensar que la solución es la misma.

Los criterios de comparación y comparación en el límite que se han dado anteriormente funcionan también para integrales de 2ª especie.

Teorema 6.19 (Criterio de convergencia entre series e integrales)
Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$, f es decreciente y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces decimos que:

$$\int_0^\infty f(x)\ dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge}$$

Demostración:

- $\Rightarrow$

  Sabemos que:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\ dx$$

  Si $x \in [n-1, n] \Rightarrow f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$ porque f es decreciente, luego ocurre que:

$$\underbrace{\int_{n-1}^{n} f(n)}_{=f(n)} \leq \int_{n-1}^{n} f(x) \leq \underbrace{\int_{n-1}^{n} f(n-1)}_{=f(n-1)} : \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

  Podemos observar que entonces se verifica que:

$$\begin{cases} f(1) \leq \displaystyle\int_0^1 f(x) \leq f(0) \\ f(2) \leq \displaystyle\int_1^2 f(x) \leq f(1) \\ \vdots \\ f(n) \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x) \leq f(n-1) \end{cases}$$

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \leq \int_0^n f(x)\ dx \leq f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) \Rightarrow$$

  Es decir, geométricamente estamos sumando los cuadrados "pequeñitos" que son menores que la integral y, por otro lado, estamos sumando los cuadrados "grandes" que son mayores que la integral. Si ahora suponemos que lo que es convergente es la integral, tenemos que:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente } \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\ dx = L$$

  De este modo, recuperando la desigualdad de antes vemos que:

$$\underbrace{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}_{s_n} \leq \int_0^n f(x)\ dx \leq L$$

  Por tanto, como s_n es creciente y está acotada superiormente, tenemos que es convergente, es decir:

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

- $\Leftarrow$

  Supongamos ahora que $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$$\int_0^n f(x)\ dx \leq f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) = f(0) + s_{n-1}$$

  Si consideramos ahora la sucesión $\{f(0) + s_{n-1}\} \xrightarrow{n\to\infty} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

Vemos entonces que $\left\{\int_0^n f(x)\ dx\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y creciente porque:

$$\int_0^n f(x)\ dx \leq \int_0^{n+1} f(x)\ dx = \int_0^n f(x)\ dx + \int_n^{n+1} f(x)\ dx$$

Por tanto, se tiene que:

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\ dx = L$$

A pesar de que podría parecer que la demostración ha concluido, la integral impropia no es solo entre 0 y n sino que es entre 0 y un b arbitrario:

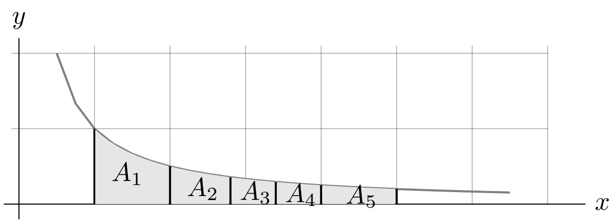
Para que la integral impropia exista, tenemos que probar que $\exists \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\ dx$. Por ello vemos que $\int_0^b f(x)\ dx$ es creciente en b, además:

$$b \leq n \Rightarrow \int_0^b f(x)\ dx \leq \int_0^n f(x)\ dx \leq L$$

Y entonces, como es creciente y acotada es convergente a un límite:

$$\Rightarrow \exists \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\ dx$$

Observación 6.12:
El siguiente dibujo pone de manifiesto lo que el teorema viene a decir: las series numéricas, que podemos simplificar en concepto a suma infinita de ciertos números, están muy relacionadas con la suma de las áreas de los trozos en los que hemos partido $f(x)$ puesto que vuelve a ser el problema de hallar una suma infinita de números.



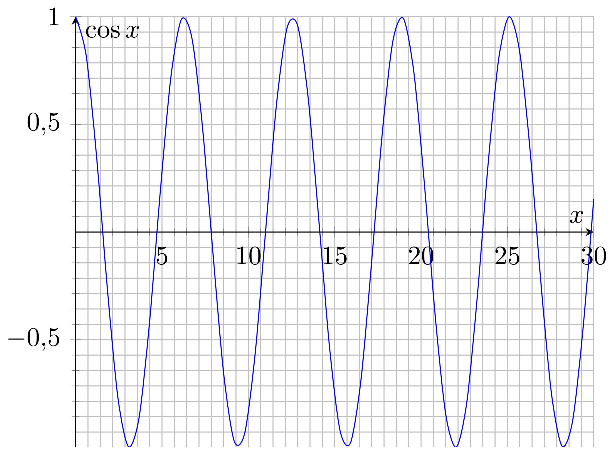
Observación 6.13:
Como la sucesión $\int_0^n f(x)\ dx$ acota a $\int_0^b f(x)\ dx$ y esta última es creciente, la convergencia de la primera implica la convergencia de la segunda, pero si no se verificasen esas condiciones no podríamos afirmar nada, por este motivo la demostración no finalizaba con demostrar que $\int_0^n f(x)\ dx$ convergía, es decir:

$$\exists \lim_{b\to\infty} h(b) \Rightarrow \exists \lim_{x_n\to\infty} h(x_n)$$

Pero el recíproco necesita condiciones extra.

Ejemplo 6.9:

$$h(x) = \cos(2\pi x) \Rightarrow \begin{cases} \nexists \lim_{x\to\infty} cos(2\pi x) \\ \exists \lim_{n\to\infty} cos(2\pi n) \end{cases}$$



Ejemplo 6.10:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (serie armónica)}$$

Esta serie se relaciona con las integrales de esta forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx \text{ converge}$$

Pero sabemos que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}$ no converge, luego la serie armónica no converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Ejemplo 6.11:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ (serie de Basilea)}$$

Con esta serie por el teorema visto sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ converge}$$

Y sabemos que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$ luego podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge .

Integral de Darboux

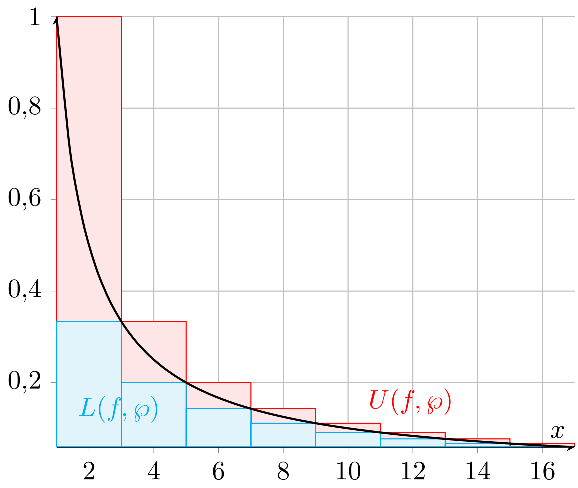
La integral de Darboux es una interpretación alternativa de la integral de Riemann que permite construir, de forma distinta, el concepto que se ha venido desarrollando y para la cual se aplican todos los teoremas y razonamientos vistos anteriormente.

Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada, de esta forma podemos definir:

$$\begin{cases} m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{cases} \quad m_i \leq f(x) \leq M_i : \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Tomamos la partición $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ y definimos las siguientes sumas de Riemann:

$$\begin{cases} L(f, \wp) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ U(f, \wp) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \end{cases}$$



Dada una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ diremos que la partición $Q = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ es un refinamiento de P si $P \subset Q$, es decir, $\forall x_i \in P \Rightarrow x_i \in Q$.

Es decir, lo que estamos haciendo es dividir en fragmentos más finos (que incluyen los puntos de la partición anterior) el intervalo del que queremos hallar la integral.

De este modo, vemos que se verifican las siguientes propiedades:

- $L(f,P) \leq U(f,P)$ de forma trivial
- $P \subset \bar{P} \Rightarrow L(f,P) \leq L(f,\bar{P}) \leq U(f,\bar{P}) \leq U(f,P)$ porque el ínfimo solo aumenta y el supremo solo disminuye en los refinamientos sucesivos.

Es decir, los refinamientos sucesivos hacen que las sumas de Riemann cada vez se junten más y por las propiedades anteriores podemos definir:

$$\begin{cases} L(f) = \sup\{L(f,P) : P \text{ partición}\} \\ U(f) = \text{ínf}\{U(f,P) : P \text{ partición}\} \end{cases}$$

Por tanto, siempre se tiene que:

$$L(f) \leq U(f)$$

Por tanto, diremos que $f \in R[a,b]$ en el sentido de Darboux si $L(f) = U(f)$ que además ocurre que $L(f) = U(f) = \int_a^b f(x)\ dx$.

Teorema 6.20
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces se verifica:

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow L(f) = U(f)$$

Por tanto, también ocurre que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = L(f) = U(f)$$

Demostración:

- "$\Leftarrow$"

  Supongamos que $L(f) = U(f)$. Sabemos por la definición dada que:

$$\begin{cases} L(f) = \sup\{L(f,\wp) : \wp \text{ partición}\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\wp} : L(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,\tilde{\wp}) \\ U(f) = \text{ínf}\{U(f,\wp) : \wp \text{ partición}\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\wp} : U(f,\bar{\wp}) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Sea $P = \tilde{\wp} \cup \bar{\wp}$ una nueva partición, esta es un refinamiento de $\tilde{\wp}$ y $\bar{\wp}$. Ahora podemos ver por las propiedades definidas antes para los refinamientos:

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \tilde{\wp}) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, \bar{\wp}) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, tal y como hemos definido $L(f) = U(f)$ tenemos que:

$$I(f[a, b]) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \wp) \leq U(f, \wp) < I(f, [a, b]) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora si aplicamos el Teorema del Sandwich:

$$\begin{cases} \alpha_\varepsilon(x) = m_i : x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \omega_\varepsilon(x) = M_i : x \in [x_{i-1}, x_i] \end{cases} : \forall i \in \mathbb{N} : x_i \in P$$

Tal y como las hemos definido, α_ε y ω_ε son funciones escalera que acotan a $f(x)$, luego:

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x)$$

Por lo que basta probar que la integral de la distancia entre ambas es tan pequeña como queramos:

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = L(f, \wp)$$

$$\int_a^b \omega_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = U(f, \wp)$$

$$\int_a^b \omega_\varepsilon(x) - \alpha_\varepsilon(x)\ dx \leq \int_a^b \varepsilon = \varepsilon(b - a)$$

Y por el Teorema del Sándwich $f \in \mathcal{R}[a, b]$

- ”$\Rightarrow$”

Suponemos en este caso que f es integrable en el sentido de Riemann. Eso quiere decir que:

$$\exists L : \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : ||\mathring{P}|| < \delta \Rightarrow |S(f, \mathring{P}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Supongamos entonces $\mathring{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b\}$ una partición que cumple que $||\mathring{P}|| < \delta$ y vamos a calcular las sumas superiores e inferiores de Riemann:

$$\begin{cases} L(f, p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ U(f, p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \end{cases} \text{donde } \begin{cases} m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{cases}$$

En primer lugar, tenemos que m_i, por la definición de ínfimo, cumple que:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists t_i \in [x_i - x_{i-1}] : m_i + \frac{\varepsilon}{2(b - a)} > f(t_i)$$

Y de forma análoga, por definición de supremo:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\bar{t_i} : f(\bar{t_i}) > M_i - \frac{\varepsilon}{2(b - a)}$$

Por tanto, ahora generamos dos particiones a partir de la habíamos denotado antes de forma que las marcas de una sean t_i y que las marcas de la otra sean $\bar{t_i}$:

$$\begin{cases} \mathring{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b : t_i \in [x_i - x_{i-1}]\} \\ \bar{\mathring{P}} = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b : \bar{t_i} \in [x_i - x_{i-1}]\} \end{cases}$$

De este modo, las sumas de Riemann de cada partición se corresponden con:

$$S(f,\mathring{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{b-a} = L(f,P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Y de modo análogo se tiene que:

$$S(f,\mathring{\bar{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{t_i})(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2} = U(f,\mathring{\bar{P}}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

En consecuencia, ocurre que:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < S(f,\mathring{P}) - L < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,\mathring{P}) < L + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,\mathring{P}) < L(f,\mathring{P}) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow L - \varepsilon < L(f,\mathring{P}) \leq L(f)$$

Y para la partición $\mathring{\bar{P}}$ ocurre de forma análoga:

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,\mathring{\bar{P}}) < L + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow U(f,\mathring{\bar{P}}) - \frac{\varepsilon}{2} \leq S(f,\mathring{\bar{P}}) < L + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(f) \leq U(f,\mathring{\bar{P}}) < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Así que en conjunto tengo que:

$$L - \varepsilon \leq L(f) \leq U(f) \leq L + \varepsilon$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, entonces se tiene que:

$$U(f) - L(f) = 0 \Rightarrow U(f) = L(f)$$

Y además se verifica:

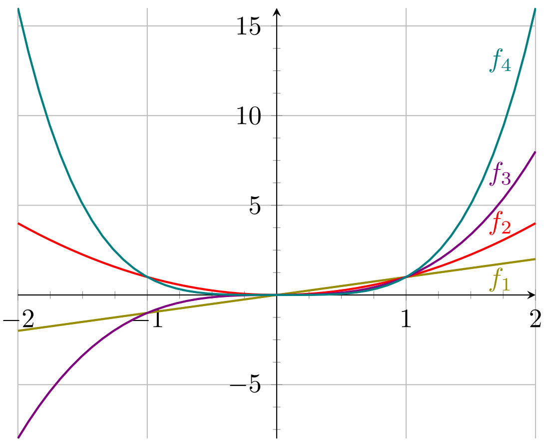
$$L - \varepsilon \leq L(f) = U(f) \leq L + \varepsilon \Rightarrow U(f) = L(f) = L$$

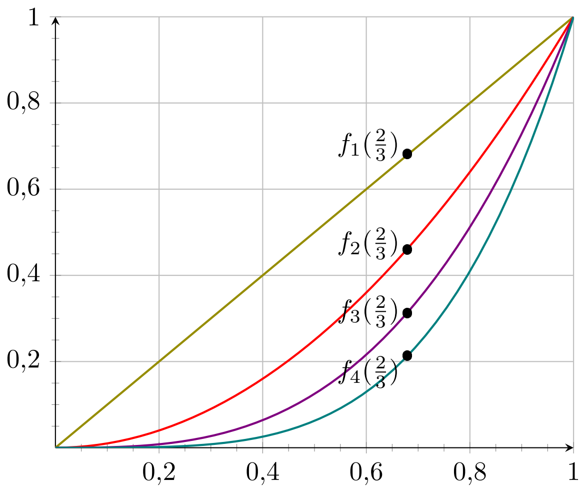
SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

Hasta ahora hemos considerado las sucesiones y series de numéricas y también hemos discutido cuestiones referidas a funciones que, en ocasiones, estaban pendientes de un parámetro. Este capítulo aúna ambos temas en un único objeto matemático: **las sucesiones y las series de funciones**.

SUCESIONES DE FUNCIONES

Consideremos, por ejemplo, la sucesión $f_n(x) = x^n$. Para los distintos valores de n vamos a tener polinomios de grado distinto:





Fijado un valor de x, como por ejemplo $x_0 = \frac{2}{3}$, es sencillo ver que las sucesivas imágenes de x_0 convergen a 0 conforme va aumentando n, luego podemos decir:

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

En general, este hecho no es exclusivo de dicho punto, sino que se observa un comportamiento similar (tanto analíticamente, como por el dibujo) para todos aquellos puntos entre -1 y 1. Del mismo modo, para los puntos menores que -1 no se puede asegurar nada, pues depende de la paridad de n si su convergencia es a $\pm\infty$ y para los mayores que 1 trivialmente se tiene la convergencia a infinito. Por tanto, no es difícil comprender el comportamiento general:

$$\begin{cases} x \in [0,1) & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \\ x = 1 & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \\ x \in (1,\infty) & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = \infty \\ x \in (-1,0] & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \\ x = -1 & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = \nexists \\ x \in (-\infty,-1) & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = \nexists \end{cases}$$

Convergencia

Del mismo modo que se dieron nociones de convergencia para sucesiones numéricas, es necesario definir qué significa la convergencia en las sucesiones de funciones. Además, en este caso no habrá una única forma de convergencia sino que además entenderemos el concepto central de convergencia uniforme.

En el caso de sucesiones de funciones, el límite de convergencia será otra función real. Por ejemplo, en el caso anterior el límite de convergencia sería:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

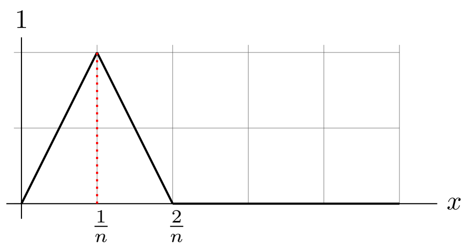
Definición 7.1 (Convergencia Puntual)
Sean $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales, decimos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***converge puntualmente*** *a una función $f : A_0 \subseteq A \to \mathbb{R}$ si y sólo si:*

$$\forall x \in A_0 : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Ejemplo 7.1:
Para las funciones que se han definido en el preámbulo de este capítulo, $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a $f(x)$ en A_0.

Por ejemplo, sea $x \in [0,1], n \geq 2$, entonces:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



- Si $x = 0$

$$f_n(x) = 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Si $0 < x \leq 1$

Veamos que por ejemplo si $x = \frac{1}{2}$, entonces:

$$\begin{cases} f_2(\frac{1}{2}) = 1 \\ f_3(\frac{1}{2}) = 2 - 3\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ f_4(\frac{1}{2}) = 0 \\ f_5(\frac{1}{2}) = 0 \\ f_6(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 : \forall n \geq 4 \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Con lo cual, de forma más general, dado $x \in (0,1]$:

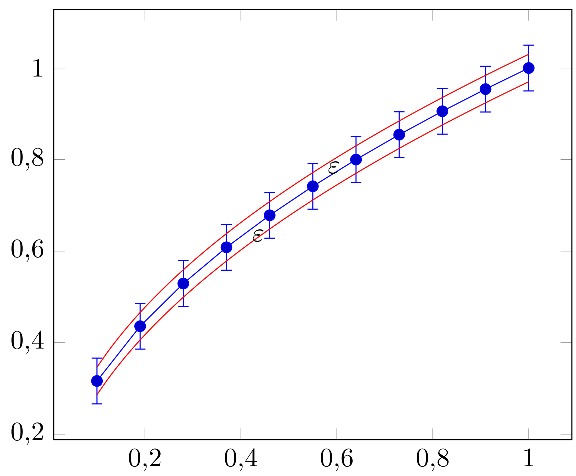
$$\exists N \in \mathbb{N} : N > \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{N} < x \Rightarrow \forall n \geq N : \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < x \Rightarrow f_n(x) = 0 : \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Es decir, $\forall x \in [0,1] : f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por tanto, en general $f(x) = 0 : \forall x \in [0,1]$.

Definición 7.2 (Convergencia Uniforme)
Sean $f_n : A \to \mathbb{R}$ funciones reales, decimos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***converge uniformemente*** *a la función $f : A_0 \to \mathbb{R}$ si y sólo si:*

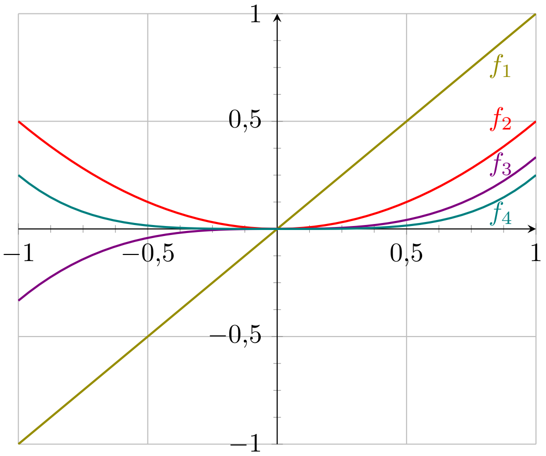
$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon : \forall x \in A_0$$

Observación 7.1:
La diferencia notable con respecto a la convergencia puntual es que en este caso no es un único punto el que converge a partir de un cierto n, sino que son todos los puntos los que cada vez se asemejan más a la función a partir de un cierto n.



Es decir, que podemos meter todas las funciones de la sucesión a partir de un n dentro de ese intervalo tubular ε alrededor de la función límite.

Ejemplo 7.2:
Tomamos $g_n(x) = \frac{x^n}{n} : x \in [-1, 1]$:



Tal y como hemos tomado el intervalo, tenemos que $x \in [-1, 1] \Rightarrow |x| \le 1$, luego:

$$|g_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n} \le \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La diferencia fundamental con respecto al otro ejemplo es que a partir de un cierto n yo siempre puedo meter a la sucesión de funciones en un entorno alrededor de la función $f(x)$ a la que converge, es decir:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{x^n}{n}| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon \text{ si } n \ge n_0$$

Mientras que en la otra sucesión de funciones para cualquier n siempre voy a tener puntos cuyo valor sea 1, por lo que no puede verificarse esta condición tan fuerte.

Teorema 7.1
La convergencia uniforme implica convergencia puntual:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$$

Demostración:
Es trivial por las definiciones que se han dado, ya que al converger uniformemente, entonces se verifica la desigualdad para todo x y si lo fijamos obtenemos la definición de convergencia puntual.□

Definición 7.3 (Norma del Supremo)
Sea $f : A_0 \to \mathbb{R}$ una función acotada, definimos la ***norma del supremo o norma infinito*** *como:*

$$||f||_{A_0} = \sup_{x\in A_0} \{|f(x)|\}$$

Observación 7.2:
De esta forma, si observamos la siguiente equivalencia en la convergencia uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon : \forall x \in A_0 \Leftrightarrow \sup\{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon$$

Podemos redefinir el concepto de convergencia uniforme conforme a la siguiente definición:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : ||f_n - f||_{A_0} < \varepsilon : \forall x \in A_0$$

Criterios

Visto el significado de convergencia para las sucesiones de funciones, vamos a dar unos criterios para determinar de forma “sencilla” cuando una sucesión converge y qué tipo de convergencia tiene en cada caso.

Teorema 7.2 (Criterio de Cauchy)
Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones acotadas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces:

$$f_n \rightrightarrows f : A_0 \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq K \Rightarrow ||f_n - f_m||_{A_0} < \varepsilon$$

<u>Demostración</u>:

- ”$\Rightarrow$”

  Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$ uniformemente en A_0, entonces:

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow ||f_n - f||_{A_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Es decir, que esto es lo mismo que:

  $$\sup_{x \in A_0} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} : \forall x \in A_0$$

  De este modo, sean $n, m \geq N(\varepsilon)$ y sea $x \in A_0$, entonces ocurre que:

  $$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \sup_{x \in A_0} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow ||f_n - f_m|| < \varepsilon$$

- ”$\Leftarrow$”

  Supongamos que $\{f_n\}$ que satisface el Criterio de Cauchy. Si $x \in A_0$ entonces la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy porque:

  $$\varepsilon > 0, \text{ sea } K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n, m \geq K(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{z \in A_0} |f_n(z) - f_m(z)| = ||f_n - f_m||_{A_0} \leq \varepsilon$$

  De este modo, si la sucesión es de Cauchy, es convergente, luego:

  $$\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

  Hemos construido $f : A_0 \to \mathbb{R}$ que a cada punto le asocia su límite, por tanto hemos demostrado que hay convergencia puntual y tenemos candidata a convergencia uniforme. Vamos a probar ahora que $f_n \rightrightarrows f$:

  $$\text{Dado } \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) : n, m \geq K(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n - f_m||_{A_0} \leq \varepsilon \text{ por ser de Cauchy}$$

  Fijamos $n \geq N(\varepsilon)$ y escogemos $x \in A_0$ arbitrario, entonces sea $\gamma_m = |f_n(x) - f_m(x)| \in \mathbb{R}$ se tiene que:

  $$\begin{cases} \lim_{m \to \infty} \gamma_m = |f_n(x) - f(x)| \\ 0 \leq \gamma_m \leq \varepsilon \end{cases} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon : \forall x \in A_0$$

  Por tanto, $f_n \rightrightarrows f$ uniformemente en A_0 □

Teorema 7.3 (Criterio de no Convergencia Uniforme)
Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones, entonces:

$$f_n \not\rightrightarrows f \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \ \exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \ \ y \ \exists x_{n_k} \in A_0 : |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| > \varepsilon_0$$

Demostración:
La definición de convergencia uniforme:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : ||f_n - f||_{A_0} < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x \in A_0} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

La negación de esta definición:

$$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ y } x_n : |f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon_0$$

Sea $N = 1 \Rightarrow \exists n_1$ y $x_{n_1} : |f_{n_1}(x_{n_1}) - f(x_{n_1})| > \varepsilon_0$. Si tomamos $N = n_1, \exists n_2 > n_1$ y $x_{n_2} \in A_0 :$ $|f_{n_2}(x_{n_2}) - f(x_{n_2})| > \varepsilon_0$, luego por inducción:

$$\exists f_{n_k} \text{ y } x_{n_k} \in A : |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| > \varepsilon_0$$

Lo que es equivalente a la negación que hemos puesto. □

Ejemplo 7.3:
Tomemos como ejemplo la sucesión $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ tomando $x \in [0, \infty)$. Por un lado, es sencillo ver que la convergencia puntual es 0, puesto que si fijamos x obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$$

Sin embargo, vemos que para un n fijo, $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 1$, lo que quiere decir que siempre a partir de un cierto x la función se acerca lo suficiente a 1; luego no parece plausible la convergencia uniforme porque para cualquier n por muy grande que sea siempre existirán x de forma que la función esté cerca de 1 y no de 0. ¿Como demostramos esto? Tomemos la sucesión $x_n = n$, de este modo, $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, luego:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

Así que ya vemos que no converge uniformemente en $[0, \infty)$, sin embargo, ¿podemos considerar $A_0 \subset [0, \infty)$ de forma que sí converja uniformemente?

Sea $M > 0$ fijo, y sea $A_0 = [0, M]$ vamos a demostrar la convergencia uniforme en $[0, M)$. Si consideramos este intervalo nos deshacemos del problema que imposibilitaba la convergencia uniforme puesto que al no dejar que la función llegue hasta infinito no se verifica la propiedad del límite de que había x cuya imagen era muy cercana a 1, es decir, sigue ocurriendo lo mismo de antes pero al acotar el intervalo sobre el que lo estudiamos, dado un n existen x suficientemente grandes cuya imagen es cercana a uno, pero ahora estas x están fuera del intervalo $[0, M]$ por lo que no cuentan.

En primer lugar, es trivial de nuevo que la función converge puntualmente a 0:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 : x \in [0, M]$$

Veamos ahora la convergencia uniforme, para ello primero calculamos este supremo:

$$\sup_{x\in[0,M]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,M]} \frac{x}{x+n}$$

Como $f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$ entonces f_n es creciente, luego el supremo se alcanza en el extremo derecho del intervalo, así que:

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{M+n}$$

De este modo, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M}{M+n} = 0 \Rightarrow \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : 0 < \frac{M}{M+n} < \varepsilon : n \geq N(\varepsilon)$$

Luego, por la definición que se ha dado de convergencia uniforme con respecto a la norma del supremo:

$$||f_n - f||_{[0,M]} \overset{f\equiv 0}{=} ||f_n||_{[0,M]} = \sup_{x\in[0,M]} \left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{M}{M+n} < \varepsilon : n \geq N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows 0 \text{ en } [0, M]$$

Conservación de propiedades por convergencia

Por último, vamos a tratar de ver cómo cada tipo de convergencia conserva o no propiedades fundamentales de las funciones como la continuidad, la integrabilidad o la derivabilidad.

Teorema 7.4 (Uniformidad de la continuidad)
Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en $A \subset \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : A \to \mathbb{R}$, entonces f es continua en A, es decir:

$$f_n \rightrightarrows f \text{ y } \forall n \in \mathbb{N} : f_n \text{ continua en } A \Rightarrow f \text{ continua en } A$$

Demostración:
Si $f_n \rightrightarrows f$ uniformemente, entonces:

$$\varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow ||f_n - f||_A < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sea $x \in A$ un punto cualquiera, como f_N es continua en A, entonces:

$$\exists \delta > 0 : |y - x| < \delta \Rightarrow |f_N(y) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

De este modo, ocurre que:

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \leq ||f - f_N||_A + |f_N(y) - f_N(x)| + ||f_n - f||_A \leq$$

$$\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon : \text{ si } |y - x| < \delta \Rightarrow \text{ f es continua en } x$$

Como x es arbitrario, entonces f es continua en A. □

Teorema 7.5 (Uniformidad de la derivada)
Sea J un conjunto acotado y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} J \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones derivables $\forall n \in \mathbb{N}$, supongamos que:

- $\exists x_0 \in J : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *es convergente.*
- *La sucesión de funciones $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ convergen uniformemente a una función $g : J \to \mathbb{R}$*

entonces:

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \rightrightarrows f : J \to \mathbb{R} \text{ y } f'(x) = g(x)$$

es decir, se puede operar con los límites de esta forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx} f_n\right)$$

Demostración:
Vamos a aplicar el Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme:

$$\gamma_{nm} = f_n - f_m$$

Si tomamos $x_0, x \in J$, entonces se tiene que γ_{nm} continua en $[x_0, x]$ o $[x, x_0]$ y además derivable en los abiertos, luego por el Teorema del Valor Medio:

$$\frac{\gamma_{nm}(x) - \gamma_{nm}(x_0)}{x - x_0} = \gamma_{nm}'(\xi) : \xi \in (x_0, x) \text{ o } (x, x_0) \Rightarrow \gamma_{nm}(x) = \gamma_{nm}(x_0) + (x - x_0)\gamma_{nm}'(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |x - x_0||f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + (b - a)||f_n' - f_m'||_J$$

Por un lado, como por hipótesis esta sucesión es convergente en x_0, entonces es de Cauchy, por lo que podemos acotar el primer término de la suma y como las derivadas convergen, el segundo término también está acotado. Como esto ocurre para todo x, si tomamos $\sup\limits_{x\in J}$ tenemos que:

$$||f_n-f_m||_J=\sup_{x\in J}|f_n(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x_0)-f_m(x_0)|+(b-a)||f_n'-f_m'||_J<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon$$

Justificación: $\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}: n,m\geq N\Rightarrow|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ y $||f_n'-f_m'||_J<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Luego $\{f_n\}$converge uniformemente a una funciónf.

Vamos a probar que f es derivable en $x\in J$. Por el teorema del valor medio teníamos que:

$$\gamma_{nm}(y)-\gamma_{nm}(x)=\gamma_{nm}'(\xi)(y-x): y\in J\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_n(y)-f_m(y)-(f_n(x)-f_m(x))=\gamma_{nm}'(\xi)(y-x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}-\frac{f_m(y)-f_m(x)}{y-x}=\gamma_{nm}'(\xi)=f_n'(\xi)-f_m'(\xi)$$

Dado $\varepsilon>0$, sea $N\in\mathbb{N}: n,m\geq N\Rightarrow||f_n'-f_m'||<\varepsilon$, entonces se tiene que:

$$\left|\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}-\frac{f_m(y)-f_m(x)}{y-x}\right|<\varepsilon: n,m\geq N$$

Fijamos $n\geq N$ y hacemos $m\to+\infty$:

$$f_m(x)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}f(x), f_m(y)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}f(y)\Rightarrow\left|\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}-\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leq\varepsilon$$

Por tanto, sabiendo que la diferencia de esas dos cosas es menor que épsilon, vamos a tratar de demostrar que $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-g(x)\right|<\varepsilon$ porque entonces $g(x)=f'(x)$:

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-g(x)\right|\leq\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}\right|+\left|\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}-f_n'(x)\right|+|f_n'(x)-g(x)|\leq$$

Por la convergencia uniforme de las derivadas, se tiene que $\exists N': \forall n\geq N'\Rightarrow||f_n'-g||_J<\varepsilon$. Por tanto, escogiendo $K=\max\{N,N'\}$. Tomamos $n=K$ y ocurre que:

$$\leq\varepsilon+\left|\frac{f_K(y)-f_K(x)}{y-x}-f_K'(x)\right|+\varepsilon:\forall x,y: x\neq y$$

Como f_K es derivable, entonces:

$$\varepsilon>0,\exists\delta>0:\ \text{si } 0<|y-x|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f_K(y)-f_K(x)}{y-x}-f_K'(x)\right|<\varepsilon$$

Si $0<|y-x|<\delta$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-g(x)\right|<3\varepsilon$$

Por tanto, f es derivable y $f'(x)=g(x)$, que podemos expresar también como $(\lim f_n)'=\lim(f_n')$.$\square$

Teorema 7.6 (Uniformidad de la integral)
Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}:[a,b]\to\mathbb{R}$ una sucesión de funciones, entonces:

$$\forall n\in\mathbb{N}: f_n\in R[a,b]\ \ y\ \ f_n\rightrightarrows f:[a,b]\to\mathbb{R}\Rightarrow f\in R[a,b]\ \ y\ \int_a^b f_n\to\int_a^b f$$

es decir, se puede operar con los límites de esta forma:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n\ dx\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)\ dx$$

Demostración:
Como $f_n \rightrightarrows f$, se satisface el Criterio de Cauchy de convergencia uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon : \forall x \in [a, b]$$

Por la monotonía de la integral:

$$-\varepsilon < f_n(x) - f_m(x) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon(b-a) < \int_a^b (f_n(x) - f_m(x))\, dx < \varepsilon(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon(b-a) < \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f_m(x)\, dx < \varepsilon(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f_m(x)\, dx \right| < \varepsilon(b-a) : n, m \geq N \Rightarrow$$

Que es lo mismo que decir que la sucesión $\{\int_a^b f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy, luego es convergente[1]:

$$\exists L = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n$$

Como $f_n \rightrightarrows f$, entonces por la caracterización de la norma del supremo:

$$||f_n - f||_{[a,b]} < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon : \forall x \in [a, b], n \geq N$$

En particular, si fijamos $n = N$:

$$-\varepsilon < f_N(x) - f(x) < \varepsilon : \forall x \in [a, b]$$

Sea $\delta > 0 :$ si $||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f_N, \mathring{\wp}) - \int_a^b f_N| < \varepsilon$ de este modo tenemos que:

$$S(f, \mathring{\wp}) - L = S(f, \mathring{\wp}) - S(f_N, \mathring{\wp}) + S(f_N, \mathring{\wp}) - \int_a^b f_N + \int_a^b f_N - L$$

Tomando el valor absoluto:

$$|S(f, \mathring{\wp}) - L| \leq |S(f, \mathring{\wp}) - S(f_N, \mathring{\wp})| + \left| S(f_N, \mathring{\wp}) - \int_a^b f_N \right| + \left| \int_a^b f_N - L \right|$$

Tal y como hemos elegido N se verifica que $||f_n - f||_{[a,b]} < \varepsilon$ y también que $|\int_a^b f_n - \int_a^b f_m| < \varepsilon :$ $n, m \geq N$. Por tanto, fijando N se tiene que:

$$\left| \int_a^b f_N - \underbrace{\int_a^b f_m}_{\to L} \right| < \varepsilon : m \geq N \Rightarrow \left| \int_a^b f_N - L \right| \leq \varepsilon$$

De esta manera, tenemos todos los términos acotados excepto $|S(f, \mathring{\wp}) - S(f_N, \mathring{\wp})|$, veamos que también está acotado:

$$|S(f, \mathring{\wp}) - S(f_N, \mathring{\wp})| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f_N(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f_N(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon(b-a)$$

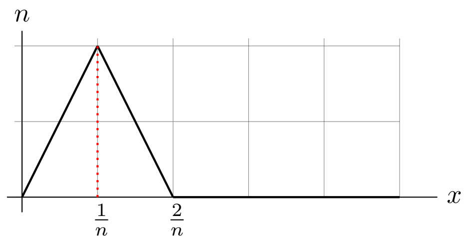
En consecuencia, para el conjunto se tiene que:

$$|S(f, \mathring{\wp}) - L| \leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2 + b + a)$$

[1]Y este L será nuestro candidato a integral.

Observación 7.3:
La convergencia uniforme es una condición imprescindible para poder aplicar este teorema, por ejemplo sea:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2(x-2n) & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$



La convergencia puntual a la función $f(x) = 0$ es trivial, pero vemos que $\int_0^1 f_n = 1 : \forall n \in \mathbb{N} \neq 0 = \int_0^1 f(x)$, es decir, el área del triángulo es constantemente 1 que es distinto del área que tiene la función límite.

Teorema 7.7
Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones tales que $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in R[a,b]$ y $f_n(x) \to f(x)$, entonces:

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq M \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Demostración:
No disponemos de las herramientas suficientes en este curso para poder demostrar este teorema (que se verá mucho más adelante). □

Teorema 7.8 (de Dini)
Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que convergen monótonamente y puntualmente a una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces la convergencia es uniforme.

Demostración:
Vamos a suponer que la sucesión es monótona decreciente, esto implica que:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \leq f_n(x) : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$$

Ahora, vamos a definir una nueva función $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ de forma que $g_n : I \to \mathbb{R}$ y además $g_n(x) \geq 0$. También, es trivial ver que esta función es:

- Continua
- Decreciente
- $g_n \to 0$ puntualmente

Se trata de probar ahora que $g_n(x) \rightrightarrows 0$ para luego poder afirmarlo de $f_n(x)$, es decir, tenemos que probar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |g_n(x)| < \varepsilon : n \geq N \Leftrightarrow g_n(x) < \varepsilon \Leftrightarrow g_N(x) < \varepsilon$$

Porque como g_n es positiva podemos quitar los valores absolutos y como g_n es decreciente, si lo probamos para el primer N los demás estarán por debajo.

Ahora pues, por reducción al absurdo, vamos a probar que existe un N que hace que este conjunto sea vacío:

$$\text{Fijado } \varepsilon > 0, \text{ sea } K_n = \{x \in [a,b] : g_n(x) \geq \varepsilon\}$$

Sabemos que como $g_n \geq g_{n+1}$, entonces $K_{n+1} \subseteq K_n$, luego tenemos una familia de conjuntos encajados. Supongamos que $K_n \neq \emptyset : \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\exists x_n \in K_n : \forall n \in \mathbb{N}$, luego hemos construido una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ y por el Teorema de Bolzano-Wierstrass esta sucesión tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a un número que llamaremos x.

Sea ahora $r \in \mathbb{N}$, como $n_k \to \infty$, entonces:

$$r : \exists n_{k_0} \in \mathbb{N} : n_{k_0} \geq r \Rightarrow g_r(y) \geq g_{n_{k_0}}(y) \geq g_{n_k}(y) : \forall y \in [a,b]$$

También vemos que:

$$x_{n_k} \in K_{n_k} \subset K_{n_{k_0}} \Rightarrow g_{n_{k_0}} \geq \varepsilon : \forall k \geq k_0$$

Como $g_{n_{k_0}}$ es continua y $x_{n_k} \to x$, entonces:

$$g_{n_{k_0}}(x) = \lim_{k\to\infty} g_{n_{k_0}}(x_{n_k}) \geq \varepsilon \Rightarrow g_r(x) \geq g_{n_{k_0}}(x) \geq \varepsilon \Rightarrow x \in K_r : \forall r \in \mathbb{N}$$

Lo cual es absurdo porque sabemos que $g_n(x)$ converge puntualmente a 0. □

SERIES DE FUNCIONES

Del mismo modo que en tema de sucesiones definíamos las series como la sucesión de sumas parciales, para sucesiones de funciones $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} : A \to \mathbb{R}$ podemos definir la serie asociada como la sucesión de sumas parciales, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) : s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{n=1}^{n} f_n(x)$$

Por tanto, esta sección estará dedicada a definir cuál es el

Convergencia y propiedades

Tipos de convergencia

Definición 7.4 (Tipos de Convergencia)
Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *una serie convergente, diremos que esta convergencia es:*

- ***Puntual*** *si* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge puntualmente.*
- ***Uniforme*** *en* A *si* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente.*
- ***Absoluta*** *si* $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ *converge puntualmente.*
- ***Absoluta y Uniforme*** *si* $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ *converge uniformemente.*

Ejemplo 7.4:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n : f_n(x) = x^n$$

- Si $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} \Rightarrow \forall x \in (-1,1) \text{ convergencia absoluta}$$

- Si $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ diverge
- Si $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverge
- Si $|x| > 1 \Rightarrow |x|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge

Teorema 7.9 (Uniformidad de la continuidad)
Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} : A \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas en A y $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$, entonces S es continua en A.

Demostración:
Si f_n es continua en $A : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continua. Como $s_n \rightrightarrows s$ en $A \Rightarrow S(x)$ es una función continua en A. $\square$

Teorema 7.10 (Uniformidad de la derivada)
Sea I un intervalo acotado y $f_n : I \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\exists x_0 \in I : \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ *es convergente*
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \rightrightarrows g : I \to \mathbb{R}$

entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \rightrightarrows S : I \to \mathbb{R} \text{ donde } S'(x) = g(x)$$

es decir, que podemos operar con los límites de esta forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n$$

Demostración:
Se deduce trivialmente de la demostración que se hizo para sucesiones, puesto que basta solo estudiar ese teorema para la sucesión $\{s_n\}$ que es la que caracteriza la serie. $\square$

Teorema 7.11 (Uniformidad de la integral)
Sean $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{R}[a,b] \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S : [a,b] \to \mathbb{R} \Rightarrow S \in R[a,b] \text{ y } \int_a^b S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$$

es decir, que podemos operar con los límites de esta forma:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n \ dx$$

Demostración:
Se deduce trivialmente de la demostración que se hizo para sucesiones, puesto que basta solo estudiar ese teorema para la sucesión $\{s_n\}$ que es la que caracteriza la serie. $\square$

El criterio para sucesiones de funciones $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ afirmaba que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n, m \geq N \Rightarrow ||f_n - f||_A < \varepsilon$$

Sea f_n las sumas parciales $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ y $m < n$, entonces:

$$||s_n - s_m||_A = \left|\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k\right|\right|_A < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon : \forall x \in A$$

Teorema 7.12 (Criterio de Convergencia Uniforme de Cauchy para series)
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) : A \to \mathbb{R}$ una serie, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S : A \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \ y \ m < n : \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| < \varepsilon : \forall x \in A$$

Observación 7.4:
Además, a modo de observación, como $|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)|$, entonces si $\sum f_n(x)$ converge absoluta y uniformemente en A se tiene que $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en A.

Teorema 7.13 (Criterio M de Weierstrass)
Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} : A \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones que verifica:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists M_n \in \mathbb{R},\ M_n \geq 0 : |f_n(x)| \leq M_n : \forall x \in A$$

entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \ \textit{absolutamente}$$

Demostración:
Por el Criterio de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > m \geq N \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$$

Pero como $|f_k(x)| \leq M_k : \forall k \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in A$, entonces:

$$\sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon : \forall x \in A \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge absoluta y uniformemente en A}$$

Series de Potencias

Dentro de las series de funciones, toman gran relevancia las series de potencias. Este tipo específico de series son muy importantes por las propiedades de convergencia que tienen (y en muchos casos la sencillez de cálculo de las mismas) y por lo presenten que están en muchas áreas de las matemáticas: sin ir más lejos en la propia definición de la exponencial real y las funciones trigonométricas.

Definición 7.5 (Serie de Potencias)
*Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones, decimos que ésta es una **serie de potencias centrada en** x_0 si y sólo si es de la siguiente forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Observación 7.5:
De hecho, es posible considerarla centrada en 0 porque, a efectos prácticos de estudio de la convergencia, el cambio de variable $y = x - x_0$ posibilita que estudiemos la convergencia sobre la nueva variable:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Lo cual nos permite simplificar la notación a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Definición 7.6 (Radio de convergencia)
Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ una serie de potencias, si tomamos el siguiente valor:

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

*definimos el **radio de convergencia** de la serie de potencias como:*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & 0 < \rho < \infty \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$$

Teorema 7.14 (de Cauchy - Hadamard)
La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es absolutamente convergente en $(-R, R)$, divergente en $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ y para cualquier $[a, b] \subset (-R, R)$ es absoluta y uniformemente convergente.

Demostración:
Vamos a demostrar primero que es absolutamente convergente en $(-R, R)$, para ello supongamos $R \in (0, +\infty)$. De este modo, escogemos $x \in (-R, R) : |x| < R$ por lo que se tiene que $\exists c \in (0, 1) : |x| < cR$. Por tanto observamos que:

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \rho = \frac{1}{R} < \frac{c}{|x|}$$

Esta relación implica que a partir de un cierto n, todos los términos van a estar por debajo de esta cota (por estar acotado el límite superior y por la definición del mismo), luego:

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{c}{|x|} \Leftrightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} |x| < c \Leftrightarrow |a_n||x|^n < c^n : n \geq n_0, c \in (0, 1)$$

Pero $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ es convergente para $c \in (0, 1)$, por tanto, por el principio de comparación se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n \text{ es convergente } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ es absolutamente convergente}$$

Vamos a demostrar ahora que si $[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado tal que $[a, b] \subset (-R, R)$, entonces, la serie de potencias converge absoluta y uniformemente en $[a, b]$.

Si $[a, b] \subset (-R, R) : -R < a < b < R$, de este modo:

$$\exists A \in \mathbb{R} : 0 < A < R : -R < -A < a < b < A < R$$

Por tanto, $[a, b] \subset [-A, A] = \{|x| \leq A\}$, entonces dado ese A, tenemos que:

$$\exists c \in (0, 1) : A < cR \Leftrightarrow |a_n||A|^n < c^n : n \geq n_0$$

Por tanto, si $|x| \leq A$ tenemos acotado ese término porque $|a_n||x|^n < |a_n||A|^n < c^n : n \geq n_0$, de este modo vemos que:

$$|a_n||x|^n \leq |a_n|A^n = M_n : n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$$

$$|a_n||x|^n \leq c^n = M_n : n = n_0, n_0+1, \ldots$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge trivialmente por ser $c < 1$ y en consecuencia, por el Criterio M de Weierstrass, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge absoluta e uniformemente en $[-A, A]$, y por tanto en $[a, b]$.

Por último, vamos a demostrar que diverge fuera de $(-R, R)$.

Si $|x| > R$ entonces se tiene que $\rho = \frac{1}{R} > \frac{1}{|x|}$. Por ser ρ límite superior hay una subsucesión convergente a ρ, luego $\exists n_k \to \infty : |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{|x|}$ porque tiene que estar suficientemente cerca de ρ, luego:

$$|a_{n_k}||x|^{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n||x|^n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ no converge}$$

Observación 7.6:
Es importante recalcar que no se sabe nada acerca de los puntos del radio de convergencia, es decir, para los valore de $-R$ y R hay que estudiar cada caso.

Ejemplo 7.5:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Está claro que $a_n = \frac{1}{n}$, de este modo $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$; luego $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

Por el Teorema de Cauchy-Hadamard, la serie converge absoluta y uniformemente en $(-R, R)$. Estudiamos ahora los extremos:

- Si $x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que sabemos que es divergente
- Si $x = -1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es la serie armónica alternada, que sabemos que es condicionalmente convergente

Corolario 7.14.1

- *El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no depende de los primeros términos de la sucesión, es decir para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n$ tales que $\forall n \geq n_0 : a_n = \tilde{a}_n$ el radio de convergencia será el mismo.*
- *Sea b_n una sucesión con $\lim_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n x^n$ tienen el mismo radio de convergencia por tener el mismo ρ.*
- *Las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.*

Demostración:
La demostración de este corolario se basa en la definición de $\rho = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$

- Como $a_n = \tilde{a}_n : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |\tilde{a}_n|^{\frac{1}{n}}$, y por tanto los radios de convergencia son iguales.
- De modo análogo, los límites superiores coinciden: $\limsup_{n\to\infty} |a_n b_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} |b_n|^{\frac{1}{n}} \overset{\lim_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = 1}{=} \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.
- Tenemos la primera serie que es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que $\rho = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ y la segunda la podemos expresar como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot x + \ldots + a_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k$. De esta manera ocurre que:

$$\tilde{\rho} = \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}(n+1)|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{(n+1)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \cdot |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \left[|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}} = \rho$$

Teorema 7.15
Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia $R > 0$ y $[a, b] \subset (-R, R)$, entonces:

- *La serie converge absolutamente en $(-R, R)$ y también uniformemente en $[a, b]$ a la función:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : x \in (-R, R)$$

que es continua en $(-R, R)$ y $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

- *La función $f(x)$ es derivable en todos los órdenes en $(-R, R)$ y su derivada es:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$$

Además, la serie de las derivadas tiene el mismo radio de convergencia que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- *Sea $z \in (-R, R)$, la función:*

$$\int_0^z f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

tiene el mismo radio de convergencia que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, es decir, se puede pasar el límite bajo la integral:

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

Demostración:

1. Las primeras condiciones de convergencia y tipo de convergencia ya han sido probadas en el Teorema de Cauchy - Hamard, por tanto, solo es necesario probar la continuidad de la función a la que converge.

   Sea $c \in (-R, R) \Rightarrow c \in [a, b] : [a, b] \subset (-R, R)$ para algún a y b reales. Como la serie converge uniformemente en $[a, b]$ y $a_n x^n$ son funciones continuas , en consecuencia, f es continua en $[a, b]$ y, por tanto, en c.

   Sin embargo, es notable destacar que f puede no ser continua en R o $-R$. Por ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, entonces queda definido $\rho = \lim\sup_{n\to\infty} |1|^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$. La función límite queda como $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, que no es continua en $x = 1$.

2. Sea $c \in (-R, R)$ de nuevo puedo meterlo dentro de un intervalo acotado $c \in (a, b) : [a, b] \subset (-R, R)$. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ converge uniformemente en $[a, b]$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge en un $x_0 \in (-R, R)$. Por tanto, por los resultados de convergencia uniforme y derivabilidad se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge uniformemente a } f(x) \text{ y } f'(c) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n c^{n-1}$$

   Por inducción, f es derivable de todos los órdenes en $(-R, R)$ y $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$.

3. Sea $z \in (-R, R) \Rightarrow z \in [a, b]$, se tiene por el resultado de convergencia e integrabilidad:

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^z \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

   De modo análogo, z no puede ser $-R$ o R. Por ejemplo, $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \neq \int_0^1 \frac{1}{1-x}$. □

Observación 7.7:

- No podemos asegurar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia R converja uniformemente en $(-R, R)$.

  Por ejemplo, si tomamos $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ cuyo radio de convergencia es $R = 1$. Además, por ser una serie geométrica, sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} : |x| < 1$ Sabemos que la serie converge absolutamente en $(-1, 1)$, pero no converge uniformemente en $(-1, 1)$ porque:

$$\sup_{x\in(-1,1)} |s_n(x) - \frac{1}{1-x}| = +\infty \Rightarrow s_n \text{ no converge uniformemente en } (-1, 1)$$

- Del mismo modo, si $z \in (-1, 1)$, lo que se ha afirmado para integrales no es cierto en los límites $-R$ y R porque no podemos integrar entre 0 y 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = +\infty$$

Luego la conclusión es que hay que tener cuidado con aplicar estos teoremas en los límites del intervalo de convergencia.

Proposición 7.1

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R y en $x = R$ o $x = -R$ la serie converge absolutamente, entonces la serie de potencias converge uniformemente en $[-R, R]$.

Demostración:

Supongamos que tenemos que la serie converge absolutamente en $x = R$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n R^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \text{ converg abs}$$

Luego si converge absolutamente en uno de los extremos, automáticamente también lo hace en el otro.

Sea $|x| \leq R$, entonces $|a_n x^n| \leq |a_n| R^n = M_n$. Aplicando el criterio M de Weierstrass, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge absolutamente en } [-R, R]$$

Observación 7.8:

Si la convergencia en R o $-R$ es condicional, entonces el teorema no es cierto. Por ejemplo, tomamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} : \rho = 1 = R \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \to & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ cond. conver.} \\ x = 1 \to & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \text{ no conv. unifor. } \in [-1, 1]$$

Proposición 7.2

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ series con radio de convergencia $R_a, R_b > 0$ y $\forall x \in (-\delta, \delta) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, entonces:

$$\forall x \in (-\delta, \delta) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow a_n = b_n : \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \begin{cases} a_0 = f(0) = b_0 \\ a_1 = f'(0) = b_1 \\ 2a_2 = f''(0) = 2b_2 \\ \vdots \\ k! a_k = f^{(k)}(0) = k! b_k \end{cases}$$

Por inducción se tiene que $a_n = b_n$. □

Observación 7.9:
Este teorema demuestra que la aplicación que a cada serie de potencias le asigna su función límite en un entorno de 0 es inyectiva.

Series de Taylor

Hemos visto probado anteriormente la inyectividad de la función que a cada serie le asigna su función límite. Sin embargo, es razonable preguntarse por la sobreyectividad de dicha función, es decir, ¿para cualquier función $f(x)$ existirá una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de la que sea límite $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : |x| < \delta$? Tal y como hemos visto en la proposición anterior:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \begin{cases} f(0) = a_0 \\ f'(0) = a_1 \\ \vdots \\ f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Definición 7.7 (Serie de Taylor)
*Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función con infinitas derivadas, definimos su **Serie de Taylor** como su polinomio de Taylor centrado en 0, pero de grado infinito:*

$$f(x) \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Sin embargo, para poder afirmar que existe esta relación entre ambas expresiones es necesario que dicha serie converja a la función d ela que proviene y para ello hay que estudiar el resto de Lagrange de dicho polinomio de Taylor cuando $n \to \infty$, es decir:

$$R_n(x;0) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow p_n(x;0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

Para ver esto, suponiendo el desarrollo de Taylor $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, tiene que ocurrir que:

$$\sup_{x\in[-\delta,\delta]} |R_n(x;0)| = \sup_{x\in[-\delta,\delta]} \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \rightrightarrows f(x) : \forall x \in [-\delta, \delta] \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n : |x| \leq \delta$$

Luego basta con estudiar en cada caso la convergencia a 0 del Resto de Lagrange para poder afirmar que esa serie de Taylor converge a la función $f(x)$.

Ejemplo 7.6:
Veamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge a la función $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$. Para ello calculamos $P_n(x, 0)$:

$$\begin{cases} f'(x) = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = (-1)(1-x)^{-2} \\ f''(x) = (-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3} \\ f'''(x) = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 3!(1-x)^{-4} \\ \vdots \\ f^{(k)} = k!(1-x)^{-k-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = 2 \\ f'''(0) = 3! \\ \vdots \\ f^{(k)(0)} = k! \end{cases}$$

Luego podemos escribir:

$$P_n(x, 0) = f(0) + f'(0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + x + \frac{2!}{2!} x^2 + \ldots \frac{n!}{n!} x^n = 1 + x + \ldots + x^n$$

Por el Teorema de Taylor:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} : \xi \in (0, x) \text{ o } (x, 0) \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} : |\xi| < |x|$$

Ahora tenemos que tratar de controlar ese Resto de Lagrange para poder probarlo:

$$f^{n+1}(\xi) = (n+1)!(1-\xi)^{-(n+2)} \Rightarrow |f^{n+1}|(\xi) = (n+1)!|(1-\xi)|^{-(n+2)} \leq (n+1)!(1-|x|)^{-(n+2)}$$

Esto último es porque $1 - |\xi| \leq 1 - |x|$ y elevando y multiplicando ya lo tenemos. De esta forma, hemos acotado ese término de la siguiente forma:

$$|R_n(x,0)| \leq \frac{(n+1)!(1-|x|)^{-(n+2)}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{n+2}} = \left(\frac{|x|}{1-|x|} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-x}$$

Por tanto, lo único que necesitamos ahora es que $\left(\frac{|x|}{1-|x|} \right)^{n+1}$ esto tienda a cero puesto que lo otro es constante. Es sencillo ver pues que:

$$\left(\frac{|x|}{1-|x|} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Leftrightarrow \frac{|x|}{1-|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$$

Es decir, si consideramos $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ y el conjunto $[-\alpha, \alpha]$, entonces:

$$\sup_{|x| \leq \alpha} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^n \right| \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Por tanto, se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} : |x| \leq \alpha$.

Definición de exponencial, seno y coseno

En este tema se va a dar una definición alternativa a la que se dió de función exponencial y logarítmica. Además, se va a definir de forma analítica las funciones trigonométricas conocidas y todo ello en términos de series de potencias.

Exponencial y Logarítmica

Exponencial

En la parte de propiedades de los números reales, definimos lo que significa $a^r : r \in \mathbb{Q}$, luego hasta ahí no hay problema. Lo complicado viene al introducir el concepto de exponente real, que en su momento definimos como:

$$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow a^{\alpha} = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q < \alpha\}$$

Para redefinir esta exponencial real, introducimos la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Como $a_n = \frac{1}{n!}$, vemos que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty$$

Es decir, converge absolutamente en cada $x \in \mathbb{R}$ y converge uniformemente en cada intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a una función concreta que vamos a denominar:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Vamos a probar ahora que esta función es la exponencial, para ello probamos que:

1. E tiene derivadas de todos los órdenes
2. $E(0) = 1$
3. $E'(x) = E(x) : \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Demostración</u>:

1. Si demostramos la 3 queda probada
2. Trivial por sustituir en la serie $x = 0$
3. $E'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x^n}{n!})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \overset{n-1=k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = E(x)$

Además, vamos a ver que:

1. $E^{(k)} = E(x)$
2. $E(x) \geq 1 + x : \forall x > 0$
3. $E(x)$ es la única función que verifica $E(0) = 1$ y $E'(x) = E(x)$ simultáneamente

<u>Demostración</u>:

1. Trivial por inducción sobre la propiedad probada antes
2. Sea $x > 0 : E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \text{lím}_{n\to\infty}(1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{\geq 0}) \geq \text{lím}_{n\to\infty}(1 + x) = 1 + x$
3. Supongamos que $\exists E_1(x), E_2(x)$ verificando ambas, entonces definimos $F(x) = E_1(x) - E_2(x)$ y tenemos que probar que $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = 0$:

$$F(0) = E_1(0) - E_2(0) = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} F'(x) = E_1'(x) - E_2'(x) = E_1 - E_2 = F(x) \\ F''(x) = (F')' = F' = F(x) \\ \vdots \\ F^{(k)}(x) = F(x) : \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Aplicamos el Teorema de Taylor:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x, 0)$$

Pero el valor para cualquier $F^{(k)}(0) = 0$, al igual que $F(0)$, luego:

$$F(x) = 0 + R_n(x, 0)$$

Así que si ese Resto de Lagrange va a 0, ya está probado:

$$|R_n(x, 0)| = \left| \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| |x|^{n+1} = \frac{|F(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \sup_{|z| \leq |x|} |F(z)| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De modo análogo, probamos que:

1. $E(x) \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x+y) = E(x)E(y)$, es decir, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right)$

3. Si $r \in \mathbb{Q} : E(r) = e^r$

<u>Demostración</u>:

1. Supongamos que $\exists x_0 : E(x_0) = 0$, entonces:

$$E(x_0) = E'(x_0) = \ldots = E^{(k)}(x_0) = 0 : \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

De este modo, el desarrollo de Taylor centrado en x_0 quedaría como:

$$E(x) = \underbrace{\cancel{P_n(x, x_0)}}_{=0} + R_n(x, x_0) = \frac{E^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Por tanto, si escogemos ahora $x = 0$, ocurre que:

$$1 = E(0) = \left| \frac{E(\xi)}{(n+1)!} \cdot (-x_0)^{n+1} \right| \leq \sup_{|\xi| \leq |x_0|} |E(\xi)| \cdot \frac{|x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \#$$

2. Fijamos $y \in \mathbb{R}$ y definimos la función $G(x) = \frac{E(x+y)}{E(y)}$ y vemos que verifica que:

$$\begin{cases} G(0) = \frac{E(y)}{E(y)} = 1 \\ G'(x) = \frac{1}{E(y)} E'(x+y) = \frac{E(x+y)}{E(y)} = G(x \end{cases})$$

Pero habíamos probado que la única función que verfica que $G'(x) = G(x)$ y $G(0) = 1$ es la función $E(x)$, luego:

$$\frac{E(x+y)}{E(y)} = E(x) \Rightarrow E(x+y) = E(x)E(y)$$

3. Por inducción en el apartado anterior, podemos concluir que:

$$E(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = E(x_1) \cdot E(x_2) \cdot \ldots \cdot E(x_n)$$

En particular, si tenemos un número natural:

$$E(n) = E(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}}) = (E(1))^n = e^n$$

Para verlo para los racionales, escojamos primero un $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$e = E(1) = E\underbrace{\left(\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}\right)}_{\text{m veces}} = \left(E(\frac{1}{m})\right)^m \Rightarrow E(\frac{1}{m}) = e^{\frac{1}{m}}$$

Por tanto, si tenemos un número racional cualquiera:

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = E\underbrace{\left(\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}\right)}_{\text{n veces}} = \left(E(\frac{1}{m})\right)^n = (e^{\frac{1}{m}})^n = e^{\frac{n}{m}}$$

Falta solo distinguir cuando este número es negativo, luego veamos que:

$$E(x) \cdot E(-x) = E(x + (-x)) = E(0) = 1 \Rightarrow E(-x) = \frac{1}{E(x)} \Rightarrow E\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{E(\frac{n}{m})} = \frac{1}{e^{\frac{n}{m}}} = e^{\frac{-n}{m}}$$

En consecuencia, para terminar de definir esta función exponencial, basta con definir su valor para los reales, que diremos que es:

$$r \in \mathbb{R} : e^r \overset{\text{def}}{=} E(r)$$

Por continuidad, $e^{\alpha} = \sup\{e^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha\} = E(\alpha)$, luego coincide con la definición por axioma del supremo que se dió.

De este modo, queda definida la función exponencial como:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Además, verifica las siguientes propiedades:

- $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) > 0$
- $\lim_{n \to +\infty} E(x) = +\infty$
- $\lim_{n \to \infty} E(x) = 0$

Demostración:

- Como $E(0) = 1$ y hemos probado que $E(x) \neq 0$, al ser $E(x)$ continua se tiene por Bolzano que $E(x) > 0 : \forall x$
- Como hemos probado que $E(x) > 1 + x : x > 0$ entonces se tiene que $\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$
- Sabemos que $E(-x) = \frac{1}{E(x)} \Rightarrow \frac{1}{E(x)} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$, luego entonces tenemos que $\lim_{x \to -\infty} E(x) = \lim_{x \to +\infty} E(-x) = 0$

Función logaritmo

Como $E(x) = e^x$ es monótona creciente, es biyectiva sobre los positivos, luego podemos definir su función inversa como $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ inversa de E que se denomina función logaritmo.

Podemos además dar las siguientes propiedades:

- $L'(x) = \frac{1}{x} : x > 0$
- $L(xy) = L(x) + L(y) : x, y > 0$
- $L(1) = 0$ y $L(e) = 1$
- $L(x^r) = r \cdot L(x) : r \in \mathbb{Q}$, $\lim_{x \to \infty} L(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} L(x) = -\infty$

Demostración:

- Como es la inversa de $E(x)$, podemos derivarla en términos de la misma, luego:

$$L'(x) = \frac{1}{E'(L(x))} = \frac{1}{E(L(x))} = \frac{1}{x}$$

- Sean $u = L(x), v = L(y) \Rightarrow E(u) = x, E(v) = y$, entonces:

$$E(u + v) = E(u) \cdot E(v) = xy \Rightarrow L(x) + L(y) = u + v = L(xy)$$

- Directamente de la definición.

- Si $n \in \mathbb{N}$, sabiendo que $L(xy) = L(x) + L(y)$, entonces:

$$L(x^n) = L(x \cdot x \cdot \ldots \cdot) = nL(x)$$

Si $r = \frac{1}{m}$, entonces:

$$mL(x^{\frac{1}{m}}) = L(x^{\frac{1}{m}}) + \ldots + L(x^{\frac{1}{m}}) = L(x^{\frac{1}{m}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{1}{m}}) = L(x) \Rightarrow L(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}L(x)$$

Por tanto, si escogemos un $r \in \mathbb{Q}$, tenemos que:

$$L(x^{\frac{n}{m}}) = L(\underbrace{x^{\frac{1}{m}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{1}{m}}}_{n \text{ veces}}) = nL(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{n}{m}L(x)$$

Falta solo definir que ocurre cuando este número es negativo:

$$0 = L(1) = L(x \cdot x^{-1}) = L(x) + L(x^{-1}) \Rightarrow L(x^{-1}) = -L(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x^{\frac{-n}{m}}) = L((x^{-1})^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m}L(x^-1) = -\frac{n}{m}L(x)$$

Exponencial de base arbitraria

Podemos definir ahora la exponencial para cualquier base en términos de la que ya hemos definido como:

$$a^b \overset{\text{def}}{=} e^{b\log(a)}$$

Y vemos que esto tiene sentido como definición porque

$$a = E(L(a)) = e^{\log(a)}$$

Luego si definimos la función en términos de la otra:

$$a^x = e^{x\log(a)} : \forall a > 0$$

Es importante tener clara esta definición, puesto que en ocasiones es útil para poder comprender las funciones que manejamos y como tratar con ellas:

$$f(x) = x^x = e^{x\log(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{x\log(x)}[\log(x) + 1] = x^x[\log(x) + 1]$$