DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 20–21.
Sucesiones de números reales. Hoja 4

65 *Usando la definición de límite de una sucesión, probar los siguientes límites:*

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \qquad ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+3} = 1/2 \qquad iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

66 *Probar que*
i) Si $\alpha > 0$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$
ii) Si $r \in \mathbb{R}$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ *si* $|r| < 1$. *Si* $r > 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$. *¿Que ocurre si* $r < -1$*?.*
iii) Para todo $c > 0$ *se tiene* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1.$
Indicación: *Distinguir entre* $0 < c < 1$, $c = 1$ *y* $c > 1$.

67 *Probar que*

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+7}} = 0 \quad ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0 \quad iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0 \quad iv)\ \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$$

$v)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{n^2+n+1} = 3$ *vi)* $z_n = 2 + (-1)^n$ *no tiene límite.* *vii)* $\lim_{n\to\infty} 3^{2n-1} = \infty$

68 *Estudiar la convergencia de la sucesión* $X = \{x_n\}_n$ *donde* x_n *viene dado por:*

$$i)\ x_n = \frac{n}{n+1} \qquad ii)\ x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1} \qquad iii)\ x_n = \frac{n^2}{n+1} \qquad iv)\ x_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

69 *Probar que si* $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ *donde* $P(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$ *y* $Q(z) = \sum_{k=0}^l b_k z^k$ *son polinomios con* $a_m > 0$, $b_l > 0$, *se tiene*
i) Si $m = l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a_m}{b_l}$.
ii) si $m > l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.
iii) si $m < l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

70 *i) Probar que* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.
ii) Dar un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}_n$ *que verifique que existe* $\lim_{n\to\infty} |x_n|$ *pero no existe* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

71 *Probar que si* $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$ *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > 0$ *para todo* $n \geq N$.

72 *i) ¿Pueden existir dos sucesiones de números reales que tengan infinitos términos iguales y distinto límite?*
ii) ¿ Pueden existir dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_n$ *y* $\{b_n\}_n$ *tales que* $a_n \neq b_n$ *para todo* n *y con el mismo límite?*
iii) Una sucesión es convergente y tiene sus términos alternativamente positivos y negativos. ¿Cual es su límite?.

73 *Demostrar que si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $\{b_n\}_n$ *es acotada entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
Poner ejemplos en los que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *pero* $\{b_n\}_n$ *es no acotada y que se verifique, respectivamente, que* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ *no existe.*

74 *Probar que se tienen los siguientes límites:*

i) Si $b \in \mathbb{R}$ *con* $0 < b < 1$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} n b^n = 0$

$$ii)\ \lim_{n\to\infty} (2n)^{1/n} = 1 \qquad iii)\ \lim_{n\to\infty} n^2/n! = 0 \qquad iv)\ \lim_{n\to\infty} 2^n/n! = 0$$

75 *Probar que si* x_n *es una sucesión de números reales no nulos tales que*
i) $\lim_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
ii) $\lim_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| > 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$.
iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$.

76 *Calcular el límite de la sucesión* $X = \{x_n\}_n$ *donde:*

i) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ *ii)* $x_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$ *iii)* $x_n = (3\sqrt{n})^{1/2n}$

iv) $x_n = \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, *para* $0 < a < b$ *v)* $x_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n$, *para* $a \geq 0$, $b \geq 0$.

vi) $x_n = n^{1/n^2}$ *vii)* $x_n = (n!)^{1/n^2}$ *viii)* $x_n = (a^n + b^n)^{1/n}$, *para* $0 < a \leq b$.

77 *Calcular*
i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(3+6+\cdots+3n)$, *ii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$, *iii)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$, *iv)* $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$, *v)* $\lim_{n\to\infty} (n^{-2} + (n+1)^{-2} + \cdots + (2n)^{-2})$, *vi)* $\lim_{n\to\infty} \frac{3(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$, *vii)* $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{\frac{n+1}{2}}$, *viii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

78 *Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión* $\{x_n\}_n$ *donde*

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

79 *Sea* $X = \{x_n\}_n$ *con*

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada y por lo tanto convergente.
Indicación: *Usar que* $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ *y descomponer en fracciones simples.*

80 *i) Sea* $x_1 = 8$ *y* $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ *para* $n \in \mathbb{N}$. *Probar que la sucesión* $\{x_n\}_n$ *es monótona y acotada. Calcular su límite.*
ii) Sea $x_1 > 1$ *y* $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ *para* $n \in \mathbb{N}$. *Probar que la sucesión* $\{x_n\}_n$ *es monótona y acotada. Calcular su límite.*

81 *Probar que la sucesión definida por*

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

es monótona creciente y acotada y calcular su límite.

82 *Probar que las siguientes sucesiones son monótonas y acotadas. Calcula su límite.*
i) $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$, $y_1 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.
ii) $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$, $z_1 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

83 *Dado* $a > 0$ *sea*

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + \frac{a}{s_n}), \quad s_1 > 0$$

Probar que $s_{n+1}^2 \geq a$, *para* $n \geq 1$, s_n *es decreciente y converge a* $\sqrt{a}$.

84 *Calcular el límite de la sucesión*

$$a_1 = \sqrt{a}, \quad a_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, \quad a_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots$$

siendo $a > 0$.

85 *Sea* $x_1 = a > 0$ *y* $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$ *para* $n \in I\!\!N$. *Determinar si la sucesión* $X = \{x_n\}_n$ *tiene límite o no.*

86 *Sea* $A \subset I\!\!R$ *un conjunto infinito acotado superiormente y sea* $S = \sup A$. *Probar que existe una sucesión creciente* $\{x_n\}_n \subset A$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$.

Probar algo análogo para el ínfimo de un conjunto infinito acotado inferiormente.

87 *Usar el criterio de Stolz para probar*
i) Si $m \in I\!\!N$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{j=1}^{n} j^m = \frac{1}{m+1}.$$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 0$.
iii) Si $\{x_n\}_n$ *es una sucesion tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in \overline{I\!\!R}$. *Entonces las* **medias aritméticas** *verifican*

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j = \ell \in \overline{I\!\!R}$$

Poner ejemplos que muestren que el reciproco es falso.

88 *i) Dar un ejemplo de una sucesión no acotada que contiene una subsucesión convergente.*
ii) Probar que si $X = \{x_n\}_n$ *es una sucesión no acotada, entonces existe una subsucesión* $\{x_{n_k}\}_k$ *tal que* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$ *o* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

89 Límite superior e inferior de una sucesión

Sea $\{x_n\}_n \subset I\!\!R$ *una sucesión acotada y definimos para* $N \in I\!\!N$

$$a_N = \inf\{x_n,\ n \geq N\}, \qquad b_N = \sup\{x_n,\ n \geq N\}.$$

Demostrar que
i) a_N *es monótona creciente,* b_N *es decreciente,* $a_N \leq x_N \leq b_N$, *para todo* $N \in I\!\!N$.

Definimos el **límite inferior y superior** *de* x_n *como*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} a_N, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} b_N.$$

Probar que estan bien definidos y que por tanto siempre existen.
ii) Probar que x_n *converge si y sólo si* $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.
iii) Si $s > \limsup_{n\to\infty} x_n$ *entonces, excepto posiblemente para una cantidad finita de índices, se tiene* $x_n \leq s$.

Probar algo semejante para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.
iv) Si x_{n_k} *es una subsucesión de* x_n *que converge a* x_0 *entonces* $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq x_0 \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.
v) Existe una subsucesión de x_n *que converge a* $\liminf_{n\to\infty} x_n$ *y otra que converge a* $\limsup_{n\to\infty} x_n$.

Por tanto $\liminf_{n\to\infty} x_n$ *y* $\limsup_{n\to\infty} x_n$ **son el infimo y el supremo, respecivamente de todos los puntos que son límite de una subsucesión** *de* x_n.

90 *Para la sucesión* $\{x_n\}_n$ *con* $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$, *calcular* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *y* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

91 *(***Paso al límite en la exponencial***) Con las notaciones del Problema 62 probar*
i) Si $\{x_n\}_n$ *es una sucesión monotona y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $a > 0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.
ii) Usando el Problema 89 , si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $a > 0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

92 *Supongamos que* $x_n \le y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y son sucesiones acotadas.*
i) Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n \le y$$

ii) Demostrar que siempre se tiene

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{n\to\infty} y_n \quad y \quad \limsup_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} y_n$$

93 *Si* a_n *es una sucesión de números reales positivos,*
i) Demostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Indicación: *Si* $k = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *usar la propiedad iii) del Problema 89.*
ii) ¿Qué se puede deducir del límite de $\sqrt[n]{a_n}$ *cuando existe el de* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$*?.*
Dar un ejemplo de una sucesión para la que no exista el límite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *pero si el de* $\sqrt[n]{a_n}$*.*
iii) Aplicar lo anterior al cálculo de los límites

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$$

iv) Concluye el siguiente resultado sobre las **medias geométricas de una sucesión** *de números positivos: Sea* $\{x_n\}_n$ *un sucesión tal que* $x_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$*.*
Entonces las medias geométricas $a_n = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ *verifican* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$*.*

94 *Con las notaciones de los Problemas 60 y 61 probar*
i) Si $\{x_n\}_n$ *es una sucesión monotona y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \ge 0$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{x}$*.*
ii) Usando el Problema 89 , si $x_n \ge 0$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \ge 0$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{x}$*.*
iii) Concluye que si $x_n \ge 0$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \ge 0$ *y* $r \in \mathbb{Q}$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^r = x^r$*.*

95 La exponencial de base variable
Siguiendo las notaciones del Problema 62, sea $a > 0$*.*
i) Supongamos $x \in \mathbb{R}$ *fijo. Probar que si* a_n *es monótona convergente a* $a > 0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^x = a^x$*.*
Usando el Problema 89 probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^x = a^x$*.*
Indicación: *Distinguir los casos* $x > 0$*,* $x < 0$ *y* $x = 0$*.*
ii) Si $x > 0$*, probar que* $a^x = \sup\{b^x,\ b < a\} = \inf\{c^x,\ a < c\}$*.*
Si $x < 0$*, probar que* $a^x = \inf\{b^x,\ b < a\} = \sup\{c^x,\ a < c\}$*.*
iii) Probar que si a_n *es monótona convergente a* $a > 0$ *y* x_n *es monótona convergente a* x*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a^x$*.*
Usando el Problema 89 probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a^x$*.*
iv) Extender el apartado anterior al caso en que los límites $a \in (0, \infty]$ *y* $x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ *(excepto los casos* 1^∞ *e* ∞^0*).*

96 *Usando que* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ *(es una sucesión monótona y acotada) probar que* $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$*.*

97 *Usando que* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ *y* $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$*, probar*
i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *entonces* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$*.*
Indicación: *Usar la parte entera: si* $x \in \mathbb{R}$*,* $[x] \in \mathbb{Z}$ *y* $[x] \le x < [x] + 1$
ii) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *entonces* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$*.*
iii) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *entonces* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x_n}{a_n})^{a_n} = e^x$*.*
iv) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *y existe* $\lim_{n\to\infty} a_n(x_n - 1) = x$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n^{a_n} = e^x$*.*

98 *Calcular*
i) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, *ii)* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$, *iii)* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, *iv)* $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$, *v)* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2-2n+1}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$, *vi)* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-n+7}{8n^2+4n-1}\right)^{\frac{5n-7}{3n}}$, *vii)* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-7}\right)^{5n}$, *viii)* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{\sqrt{n}}$.
ix) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *x)* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}$ *xi)* $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}$ *xii)* $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$,
xiii) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$, *xiv)* $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$, *xv)* $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n$, *xvi)* $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-5n+6}{n^2-2n+1})^{\frac{n^2+5}{n+2}}$,
xvii) $\lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2-5n+7}{8n^2+4n-1})^{\frac{5n-7}{3n}}$, *xviii)* $\lim_{n\to\infty}(\frac{3n+1}{3n-7})^{5n}$, *xix)* $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n^2+1})^{\sqrt{n}}$

99 *Probar que una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es acotada.*

100 *Dar un ejemplo de una sucesión acotada que no sea de Cauchy.*

101 *Probar directamente de la definición que las siguientes sucesiones son de Cauchy,*

i) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ *ii)* $\left(1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$

102 *Consideremos la sucesión $X=\{x_n\}_n$ con $x_n=\sqrt{n}$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$ pero X no es una sucesión de Cauchy.*