

CÁLCULO DIFERENCIAL

Juan Diego Barrado Daganzo e Iker Muñoz Martínez
2º de Carrera

22 de noviembre de 2021

TEORÍA DE LA MEDIDA

Vamos a introducir un elemento fundamental en esta asignatura, y muy útil para las posteriores, que no es otra cosa que la capacidad de definir qué es una medida y cómo podemos medir las cosas según un criterio general.

CONCEPTO DE MÉTRICA Y ESPACIOS NORMADOS

En esta sección, se definen los elementos básicos para el estudio de medidas, distancias y se estudian las características de las estructuras que se generan a partir de dichas definiciones, con sus consecuentes resultados para otras áreas como la geometría.

Definición (métrica)

Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto, decimos que $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es una **métrica o distancia** siempre que se satisfaga las siguientes propiedades¹

- *Positiva:* $d(x, y) > 0 : \forall x, y \in E$
- *No degenerada:* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría:* $d(x, y) = d(y, x) : \forall x, y \in E$
- *Desigualdad triangular:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) : \forall x, y, z \in E$

Al par (E, d) lo denotamos como **espacio métrico**.

Ejemplos:

- Un ejemplo sencillo de comprobar es considerar \mathbb{R} con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ tradicional.
- Otro ejemplo es, dado $E \neq \emptyset$ definimos la métrica discreta como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Luego con la definición dada de distancia y un conjunto cualquiera E tenemos que estos forman una peculiar definición de espacio métrico.

- Por último, definimos como **Espacio Euclídeo Usual** al conjunto:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

que junto con la suma y el producto por escalares usual, lo cual lo dota de estructura de espacio vectorial.

¹Nótese que no está permitido valores que tiendan a infinito (comprendidos en $\bar{\mathbb{R}}$)

Definición (Espacios normados)

Sea E un espacio vectorial real, se dice que $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una **norma** si se cumplen las siguientes propiedades:

- *Positiva:* $\|x\| \geq 0 : \forall x \in E$
- *No degenerada:* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- *Homogénea:* $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| : \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in E$
- *Desigualdad triangular:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Al par $(E, \|\cdot\|)$ se le denota como **espacio normado**.

Ejemplos:

- Considerando \mathbb{R}^n denominamos como la **clásica norma euclídea** a:

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} : \forall x \in \mathbb{R}^n$$

La demostración es trivial salvo el último apartado, que no se puede demostrar hasta más adelante puesto que se necesita de la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*.

Definición (Norma p)

Consideramos en \mathbb{R}^n la siguiente norma:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

En general, se define la norma p (con $1 < p < \infty$) como:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Es decir, que en el caso extremo tenemos que:

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max\{|x_j| : j = 1, \dots, n\}$$

Proposición (Métrica asociada a una norma)

Si consideramos $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, podemos definir **la métrica asociada a dicha norma** como:

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| : \forall x, y \in E$$

Cuya definición, por ser en base a una norma ya dada, hace fácilmente verificable las condiciones de métrica.

Definición (Métrica Euclídea)

De este modo, se define la **métrica o distancia euclídea** en \mathbb{R}^n como la métrica asociada a la norma euclídea:

$$d(x, y) = d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Ejemplos:

- Definimos el conjunto de las funciones continuas $E = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\} = \mathbb{C}[0, 1]$ y la función:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in [0, 1]\}$$

Lo primero de todo, comprobamos que está bien definida: como son funciones continuas la diferencia es continua y, por ser el valor absoluto una función continua, la composición con él también es continua. Consecuentemente, al tratarse de una función continua y acotada en $[0, 1]$ el máximo se alcanza, así que, de hecho, no solo el supremo es un número finito, sino que es máximo de la función en ese intervalo.

Para ver que se trata de una norma, comprobamos la última propiedad (las anteriores son triviales):

$$d(f, g) = |f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g)$$

- Junto al ejemplo anterior, podemos definir:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

y entonces el par $(E, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado. Para comprobar que esto es una norma, se puede tratar dicha norma como $\|f\|_\infty = d(f, 0)$ para demostrar sus propiedades.

- Sea $E = \{f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ definimos:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in (0, 1]\}$$

Sin embargo, no es una métrica porque no está bien definida; por ejemplo:

$$d\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \infty$$

Observación:

Sin embargo, no toda métrica tiene asociada una norma en un espacio vectorial. Para verlo, tomamos \mathbb{R}^n con la métrica discreta definida: observamos que no existe una norma que haga que el par (\mathbb{R}^n, d) sea un espacio normado puesto que en caso de existir, por ejemplo, no se verifica la 3 propiedad:

$$\text{Sea } x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \exists \|\cdot\| \Rightarrow \underbrace{d(\lambda x, 0)}_{=1} = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = |\lambda| \cdot d(x, 0) = |\lambda|$$

Y como debe ocurrir para todo lambda, es absurdo.

Definición (Producto escalar)

Sea E un espacio vectorial, se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es un **producto escalar** si es una forma bilineal definida positiva, es decir, cumple las propiedades:

- *Definida positiva:* $\langle x, x \rangle \geq 0 : \forall x \in E$
- *No degenerada:* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- *Homogeneidad:* $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle : \forall x, y \in E$
- *Bilinealidad:* $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle : \forall x, y, z \in E$
- *Simétrica:* $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle : \forall x, y \in E$

Al par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le denomina espacio vectorial con producto escalar o espacio **pre-Hilbert**.

Ejemplos

- En \mathbb{R}^n , definimos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j : \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

- En $\mathcal{C}[0, 1]$, definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

Y es muy sencillo demostrar que ambas definiciones suponen un producto escalar en el espacio en el que están definidas.

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert y sean $x, y \in E$ dos vectores cualesquiera. Entonces ocurre que:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}$$

Demostración:

- Si $x = 0$ o $y = 0$, la desigualdad es trivial.
- Tomemos en primer lugar un $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario y escojamos $x, y \in E \setminus \{0\}$:

$$0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

Esta ecuación² describe una parábola que, a lo sumo, es tangente al eje X pero nunca lo llega a cruzar porque es siempre ≥ 0 . Consecuentemente, el discriminante de esta ecuación nunca será estrictamente positivo ya que esto implicaría tener dos raíces, es decir:

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}$$

Observación:

Cabe destacar que hay igualdad si y solo si los vectores son proporcionales, es decir:

$$|\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle} \Leftrightarrow x = \alpha y : \alpha \in \mathbb{R}$$

Si son proporcionales es trivial demostrar la igualdad, pero si tenemos la igualdad, entonces ello implica que la parábola de la que hablábamos antes corta en un único punto al eje de abscisas, luego:

$$\langle \lambda \cdot x + y, \lambda \cdot x + y \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \cdot \langle x, y \rangle}{2 \cdot \langle x, x \rangle} \Leftrightarrow x = -\lambda y$$

Proposición

Dado un espacio pre-Hilbert $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y definimos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, entonces $(E, \|\cdot\|)$ es normado.

Demostración:

La única propiedad no trivial es la desigualdad triangular. Sea

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

²Esto es mayor o igual que 0 por la propiedad de definida positiva

Ejemplos

- En \mathbb{R}^n , si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\sum_{j=1}^n |x_j \cdot y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

- Sea $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \{x = \{x_j\} \in \mathbb{R} : \|x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$. Definimos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

Comprobemos que se encuentra bien definida:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} y_j^2} < \infty \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| |y_j| &\leq \|x\|_{\ell^2} \cdot \|y\|_{\ell^2} \end{aligned}$$

- Sea $\mathcal{C}[0, 1]$

$$\int_0^1 |f(x) \cdot g(x)| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición (Equivalencia de normas)

Se dice que dos normas son equivalentes en un espacio vectorial E , $\|\cdot\|_1 \approx \|\cdot\|_2$, si

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 : \forall x \in E$$

Observación

Dado un espacio métrico (E, d) , una pregunta razonable es cuándo existe una norma que genera d , tal que $d(x, y) = \|x - y\|$. Esto ocurre cuando la métrica cumple dos condiciones:

- $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Invariante por traslaciones)
- $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (Invariante por dilataciones)

Teorema (Ley del Paralelogramo)

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial normado, cuya norma es $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, se cumple que:

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

Si se diese que $x \perp y \Rightarrow \|x + y\| = \|x - y\|$, es decir, obtenemos el Teorema de Pitágoras:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

Es interesante observar que el recíproco también es cierto, es decir, dado un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, si $\|\cdot\|$ satisface la Ley del Paralelogramo, entonces existe un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Concretamente es:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS

Definición (Bola)

Sea el espacio métrico (E, d) . Se define la **bola abierta** de centro $x \in E$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

Asimismo, definimos como **bola cerrada** al conjunto:

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$$

Ejemplos:

- En \mathbb{R} , tomando $x = \frac{a+b}{2}$ donde $a < b$ y $a, b \in \mathbb{R}$, elegimos $r = \frac{b-a}{2} > 0$. Luego ocurre que:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : \left| y - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}\} = (a, b)$$

- Sea (X, d) , siendo d la métrica discreta $d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$, tenemos entonces que:

$$B(x, 2) = X$$

$$B(x, 1) = \{x\}$$

$$\bar{B}(x, 1) = X$$

Definición (Conjunto abierto)

Sea (X, d) un espacio métrico, se dice que un conjunto $A \subset X$ es **abierto** si:

$$\forall x \in A : \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$$

Observaciones:

- Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow B(x, \varepsilon_1) \subset B(x, \varepsilon_2)$
- El conjunto vacío \emptyset y X son abiertos.
- El intervalo $(0, 1]$ no es abierto en \mathbb{R} , ya que para $x = 1, \nexists \varepsilon > 0 : B(1, \varepsilon) \subset (0, 1]$
- Consideramos el espacio métrico $((0, 1], d_2)$. El conjunto $(0, 1]$ es abierto en este espacio métrico determinado. Es decir, que el hecho de ser abierto o no depende del espacio métrico en el que nos encontramos.
- $\{x\}$ no es abierto en \mathbb{R} . Sin embargo, $\{x\}$ sí es abierto en $(\mathbb{R}, d_{\text{discreta}})$

Proposición

En un espacio métrico (E, d) , toda bola abierta es un abierto.

Demostración:

Sean $x \in E$ y $r > 0$ tomamos $y \in B(x, r)$. Queremos probar que $\exists \varepsilon > 0 : B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$, luego sea $\varepsilon = r - d(x, y) > 0$ vamos a ver que $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. Para ello sea $z \in B(y, \varepsilon)$ comprobemos que $d(x, z) < r$:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon = r$$

Proposición

Sea el espacio métrico (E, d) , entonces³ ocurre:

1. $\forall A_1, \dots, A_n$ familia de conjuntos abiertos en E , $\bigcap_{j=1}^N A_j$ es abierto en E .
2. $\forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familia arbitraria de conjuntos abiertos en E , $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es abierto en E .

Demostración:

- Tomamos $x \in \bigcap_{j=1}^N A_j$ para intentar probar que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^N A_j$$

Para ello, la idea es que fijado un j tendremos un ε_j que valdrá, luego como es un conjunto finito podemos quedarnos con el más pequeño y valdrá para todos los demás:

$$j \in \{1, \dots, N\} \Rightarrow \exists \varepsilon_j > 0 : B(x, \varepsilon_j) \subset A_j \Rightarrow \varepsilon = \min_{j \in \{1, \dots, N\}} \{\varepsilon_j\} > 0$$

De esta forma ocurre que:

$$B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^N B(x, \varepsilon_j) \subset \bigcap_{j=1}^N A_j$$

- Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \exists \beta \in I : x \in A_\beta$, luego se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Cabe destacar que la condición de intersección finita es indispensable, puesto que en (\mathbb{R}^n, d_2) , $A_j = \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right)$ es abierto, pero $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{0\}$ **no** es abierto en \mathbb{R} .

Definición (Topología)

Toda familia de subconjuntos T de un conjunto X , $T \subset \mathcal{P}(X)$, que satisface:

- $\emptyset, X \in T$
- T es invariante por intersecciones finitas.
- T es invariante por uniones arbitrarias.

Se denomina como **topología de X** .

Así, la familia de abiertos de un espacio métrico (X, d) es una topología.

Definición (Punto interior)

Dado un espacio métrico (E, d) , se dice que x es un **punto interior** de $A \subset E$ si cumple que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$$

Denotamos como $\overset{\circ}{A} = \text{int}(A) = \{x \in A : x \text{ es punto interior}\}$

³Para la 2ª afirmación no es necesario que la familia sea finita

Proposición (Caracterización de abierto)

Dado un espacio métrico (E, d) , decimos que $A \subset E$ es abierto si y sólo si:

$$A = \overset{\circ}{A}$$

O lo que es lo mismo, todos los puntos son interiores.

Observaciones:

- $\overset{\circ}{A} \subset A$
- $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists U \text{ abierto} : x \in U \subset A$
- $A = \{0\} \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$
- $A = [0, 1] \Rightarrow \overset{\circ}{A} = (0, 1)$
- $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \subset A} U$ donde U es abierto.

Ejemplo:

- Tomando \mathbb{R}^2 y el conjunto $A = \{(0, x) : 0 < x < A\}$ vemos que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$

Definición

En un espacio métrico (E, d) , decimos que un conjunto $A \subset E$ es cerrado si $E \setminus A$ es abierto.

Ejemplos:

- \emptyset, E son cerrados.
- En \mathbb{R} , $(0, 1]$ no es abierto ni cerrado.
- En $(0, 2]$ el conjunto $(0, 1]$, es cerrado puesto que su complementario es $(0, 2] \setminus (0, 1] = (1, 2]$ es abierto en este espacio ambiente.
- En \mathbb{R}^2 los puntos son cerrados puesto que si tomamos $A = \{x\}$, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto. Tomamos $y \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon = \frac{\|x-y\|_2}{2}$ entonces $x \notin B(y, \varepsilon)$, luego es abierto.

Proposición

En cualquier espacio métrico (E, d) , las bolas cerradas $\bar{B}(x, \varepsilon)$ son conjuntos cerrados.

Demostración:

Se reduce todo a ver que el complementario es abierto. Sea $z \in E \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$, entonces $d(z, x) > \varepsilon$. Si escogemos $0 < \delta < d(z, x) - \varepsilon$, entonces ¿se podrá verificar que $B(z, \delta) \subset E \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$? o lo que es lo mismo, que la intersección de esta bola de centro z con la bola cerrada inicial es el vacío:

$$y \in B(z, \delta) \Rightarrow d(y, x) \geq d(x, z) - d(z, y) > d(x, z) - \delta > \varepsilon \Rightarrow y \notin \bar{B}(x, \varepsilon)$$

Luego ya tenemos lo que queríamos probar

Proposición

Sea un espacio métrico (E, d) se cumple que:

1. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son cerrados, entonces: $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ cerrado
2. Si $\{A_\alpha\}_{j=1, \dots, n}$ son cerrados, entonces: $\bigcup_{j=1}^n A_n$ cerrado

Demostración:

Se demuestra por las Leyes de De Morgan

Definición (Punto de acumulación)

Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $A \subset E$, se dice que $x \in E$ es un **punto de acumulación** de A si:

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos de acumulación se le conoce como A' .

Observaciones:

- Sea $A = (0, 1)$ en \mathbb{R} , entonces $A' = [0, 1]$, de lo que se desprende que no tiene por qué darse $A' \subset A$
- $A = \{1\}$ en \mathbb{R} , entonces $A' = \emptyset$, de lo que se desprende que no tiene por qué darse $A \subset A'$
- $x \in A' \Leftrightarrow \forall U$ abierto $\subset E$, $x \in U \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
- La acumulación en un espacio métrico con la métrica discreta es siempre el vacío. En efecto, tomamos (E, d) siendo d la métrica discreta y un conjunto $A \subset E$, entonces:

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Con lo cual, si tomamos $0 < \varepsilon \leq 1$, entonces

$$B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} = \emptyset \Rightarrow A' = \emptyset$$

Proposición (Caracterización de puntos de acumulación)

Podemos caracterizar los puntos de acumulación como:

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists x_\varepsilon \in A \setminus \{x\} : d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$$

En particular, en \mathbb{R}^n :

$$x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x\} : \|x - x_k\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Proposición (Caracterización de los cerrados)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, entonces ocurre que:

$$A' \subset A \Leftrightarrow A \text{ cerrado}$$

Demostración:

■ \Leftarrow :

Si A es cerrado, entonces $E \setminus A$ es abierto. De esta forma, queremos decir que

$$\begin{aligned} \forall x \notin A : \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset (E \setminus A) &\Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \notin A' \Rightarrow A' \subset A \end{aligned}$$

■ \Rightarrow :

Supongamos ahora que $A' \subset A$ veamos que el complementario es abierto, luego hay que ver que cualquier punto suyo es interior.

Sea $x \in E \setminus A$, luego $x \notin A'$. Esto quiere decir que:

$$\exists \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset (E \setminus A)$$

Definición (Adherencia)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, definimos **la adherencia** de A como:

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F} F \text{ donde } F \text{ es cerrado}$$

Es decir, es el menor cerrado en el cual A está contenido.

Observaciones:

- Esto siempre está bien definido porque $F = E \supset A$ y E es cerrado.
- $\bar{A} \supset A$
- $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

Ejemplos:

- $A = (0, 1)$ en \mathbb{R} , entonces $\bar{A} = [0, 1]$
- $A = \mathbb{Q}$ en \mathbb{R} , entonces $\bar{A} = \mathbb{R}$

Proposición (Caracterización de la adherencia)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, entonces:

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Demostración:

Sea $B = A \cup A'$, vamos a probar que $B = \bar{A}$.

- $B \supset \bar{A}$

Vamos a probar que B es un conjunto cerrado, puesto que si probamos esta propiedad se tiene que $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B} = B$ y quedaría demostrada la primera inclusión:

$$x \in B^c = A^c \cap (E \setminus A') \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin A'$$

En primer lugar, por ocurrir que $x \notin \bar{A}$, se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$$

Luego usando esa afirmación junto con que $x \notin A$, tenemos que:

$$B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset A^c$$

Queda solo por probar que $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus A'$, veámoslo:

$$\begin{aligned} z \in B(x, \varepsilon) &\Rightarrow \exists \delta > 0 : x \notin B(z, \delta) \subset B(x, \varepsilon) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (B(z, \delta) \setminus \{z\}) \cap A \subset (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow z \notin A' \Rightarrow \bar{A} \subset B \end{aligned}$$

- $B \subset \bar{A}$

Como $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$, todo se reduce a probar que $A' \subset \bar{A}$:

$$A' \subset \bar{A} \Leftrightarrow \forall F \supset A \text{ cerrado}, A' \subset F \Leftrightarrow \forall F \supset A \text{ cerrado}, (E \setminus A') \supset F^c$$

Luego vamos a intentar tratar de probar dicho enunciado equivalente:

$$\begin{aligned} z \notin F &\Rightarrow z \in F^c \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(z, \varepsilon) \subset F^c \Rightarrow (B(z, \varepsilon) \setminus \{z\}) \cap A \subset B(z, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow \\ &\Rightarrow z \notin A' \Rightarrow z \in E \setminus A' \end{aligned}$$

Corolario (Caracterización de los puntos de adherencia)

Si un punto pertenece a la adherencia, entonces cualquier bola centrada en ese punto interseca con el conjunto:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Definición (Densidad)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset B \subset E$, se dice que:

$$A \text{ es denso en } B \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$$

En particular, A es denso en E si $\bar{A} = E$.

Ejemplo:

- El conjunto \mathbb{Q} es denso dentro de \mathbb{R} .
- El conjunto \mathbb{I} es denso dentro de \mathbb{R} .

Definición (Frontera)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, se define la frontera de A como:

$$\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

Observaciones:

- $\partial(A)$ es cerrado.
- $A = [0, 1)$ en \mathbb{R} , implica que $\bar{A} = [0, 1]$, luego $\partial(A) = \{0, 1\}$
- $\partial(A) = \partial(A^c)$
- Ejercicio: probar que $\partial(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap (E \setminus \overset{\circ}{A})$. Pista: probar que $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$
- Ejercicio: probar que A' es cerrado.
- Ejercicio: estudiar cómo son los abiertos y los cerrados en un espacio con la métrica discreta.

Proposición (Caracterización de la frontera)

Si un punto pertenece a la frontera, entonces cualquier bola centrada en él interseca con el conjunto y con el complementario del conjunto:

$$p \in \partial(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon : B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(p, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$$

Aclaraciones de Clase:

- Vamos a poner un ejemplo donde $\bar{B}(x, r) \neq \overline{B(x, r)}$, tomamos (E, d) espacio métrico donde d es la métrica discreta. Escogemos $x \in E$ y $r = 1$, tenemos que $B(x, 1) = \{x\} \Rightarrow \overline{B(x, 1)} = \{x\}$, pero vemos que $\bar{B}(x, 1) = E \neq \{x\}$.
- Veamos que no siempre $Diam(A) = Diam(\partial A)$, si tomamos $E = [0, 1]$, entonces $\partial E = \emptyset$, luego $Diam(E) = 1 = Diam(\emptyset)$. Si tomamos \mathbb{R} y $A = (0, \infty)$, vemos que $\partial A = \{0\}$, luego $Diam(\partial A) = 0$ pero $Diam(A) = \infty$. De nuevo, si tomamos $E = [0, 1]$ y $A = (0, 1]$, tenemos que $\partial(A) = \{0\}$ y se tiene que $Diam(A) = 1 \neq 0 = Diam(\partial(A))$
- Veamos que $Diam(A) = Diam(\bar{A})$, como $A \subset \bar{A}$ entonces $Diam(A) \leq Diam(\bar{A})$. Y la otra desigualdad es muy fácil de probar también.
- Una buena propiedad es $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Elemental la demostración.

SUCESIONES, COMPLETITUD Y COMPACIDAD

Convergencia y sucesiones sobre espacios métricos

En Análisis de Variable Real definimos los conceptos de sucesiones y convergencia para el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, por tanto, es necesario redefinir dichos conceptos y prescindir de las particularidades de \mathbb{R} para poder hacerlos extensible a cualquier espacio métrico en el que trabajemos.

Definición (Sucesión y Subsucesión)

Sea E un conjunto. Una **sucesión** $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_n\}_n = \{x_n\}$ es una función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow E \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Una **subsucesión** o **sucesión parcial** de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión:

$$\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ donde } n_1 < n_2 < \dots < n_j$$

Definición (Convergencia)

Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de E , se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** a $x \in E$ si:

$$\forall \mathcal{U} \text{ abierto } \subset E \text{ tal que } x \in \mathcal{U}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U} : \forall n \geq n_0$$

Y entonces, escribimos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Esta definición que se ha dado de convergencia⁴ es equivalente a las siguientes caracterizaciones:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in B(x, \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \varepsilon$$

Proposición

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, si suponemos que dicha métrica anterior viene dada por la norma especificada ahora, entonces:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$
- Sea $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ donde $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ y $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in E$, entonces se tiene que:
 $\lambda_n \cdot x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \cdot x \in E$

Demostración:

El caso $x = 0$ se deja como ejercicio. Sea $x \neq 0$ y $\varepsilon > 0$. Entonces:

$$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} : |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|x\|} : \forall n \geq n_1 \text{ y } \|x_n - x\|_E < \frac{\varepsilon}{2 \cdot C} : \forall n \geq n_2 : |\lambda_n| \geq C < \infty$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $n \geq n_0$

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \leq |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2\|x\|} \cdot \|x\| = \varepsilon$$

⁴Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, el límite es único.

Proposición

Si $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ son normas equivalentes en E , entonces ambas normas tienen las mismas sucesiones convergentes y el límite coincide en ambas.

$$0 \leftarrow C\|x_n - x\|_1 \geq \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$$

Proposición (Convergencia en \mathbb{R}^n)

En $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ espacio euclídeo usual, sea $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} : x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n)$ la convergencia se caracteriza como:

$$x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x = (x^1, \dots, x^n) \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n : x_m^j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x^j$$

Es decir, se reduce la convergencia en \mathbb{R}^n a la convergencia de componentes en \mathbb{R} .

Demostración:

Trivialmente, se tiene que $|x_m^j - x_j| \leq \|x_m - x\|_2$, luego :

$$x_m \rightarrow x \Rightarrow |x_m^j - x_j| \leq \|x_m - x\|_2 \Rightarrow x_m^j \rightarrow x^j : \forall j = 1, \dots, n$$

Recíprocamente, podemos expresar la norma como:

$$\|x_m - x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n |x_m^j - x^j|^2$$

De este modo, por lo probado en la proposición anterior:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} |x_m^j - x^j|^2 = 0$$

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, podemos caracterizar de nuevo la convergencia en base a subsucesiones:

1. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Leftrightarrow \forall \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_{n_j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$
2. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Leftrightarrow \forall \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \exists \{y_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} : y_{m_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

Demostración:

- \Rightarrow : Tenemos que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$, luego entonces si consideramos $n_{j_0} \geq n_0 : \forall n_j \geq n_{j_0} \geq n_0 : d(x_{n_j}, x) < \varepsilon$ se tiene trivialmente.
 \Leftarrow : Trivial.
- \Rightarrow : Trivial por 1.
 \Leftarrow : Supongamos que $x_n \nrightarrow x$, entonces $\exists \varepsilon > 0 : \forall m \in \mathbb{N}, \exists n_m \geq m : d(x_{n_m}, x) \geq \varepsilon$. Si consideramos ahora $\{x_{n_m}\}_m \subset \{x_n\}_n$ y escogemos una subsucesión de esta $\{y_{m_k}\}_k \subset \{x_{n_m}\}_m : d(y_{m_k}, x) \geq \varepsilon \Rightarrow y_{m_k} \nrightarrow x \#$

Definición (Sucesión de Cauchy)

Sea (E, d) un espacio métrico, se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es **sucesión de Cauchy** si:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Se dice que (E, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Observaciones

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo.
- $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo.
- Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es completo. Por ejemplo, la sucesión $x_n = \frac{1}{n} \in E$ es sucesión de Cauchy y no converge en E .

Concepto de compacidad y propiedades

Definición (Conjunto Acotado)

En (E, d) un espacio métrico, un conjunto $A \subset E$ es **acotado** si:

$$\exists x \in E : \exists r > 0 : A \subset B(x, r) \Leftrightarrow \forall y \in A : d(y, x) < r$$

En el caso $(E, \|\cdot\|)$ espacio normado, $A \subset E$ es **acotado** si:

$$\exists r > 0 : \forall a \in A : \|a\| < r \Leftrightarrow A \subset B(0, r)$$

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces, se cumple que:

- Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es convergente, entonces es una sucesión de Cauchy.
- Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada.
- Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es convergente, entonces es acotada.
- Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión de Cauchy y $\exists \{x_{n_k}\}_{n_k}$ parcial tal que $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} x$, entonces $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Demostración:

- (i) y (iii) son triviales.
- Sea $\varepsilon = 1$. Entonces, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq 1$, luego se tiene que $\forall n \geq n_0 : d(x_n, x_{n_0}) \leq 1$. Por tanto, sea $r = \max\{1, d(x_{n_0}, x_k : k = 1, \dots, n_0 + 1)\} + 1$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in B(x_{n_0}, r)$.
- Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Del mismo modo, para el mismo ε $\exists m \in \mathbb{N} : n_k \geq m : d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, sea $k = \max\{n_0, m\} : \forall n \geq k$ se tiene que por la desigualdad triangular: $d(x_n, x) \leq d(x_{n_j}, x_n) + d(x_{n_j}, x)$. Elegimos $n_j \geq k$ y vemos que:

$$d(x_n, x) \leq d(x_{n_j}, x_n) + d(x_{n_j}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Teorema (de Completitud de \mathbb{R}^n)

El espacio euclídeo habitual (\mathbb{R}^n, d_2) es un espacio métrico completo.

Demostración:

Sea $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n de la forma $x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n) : m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$|x_m^j - x_\ell^j| \leq \|x_m - x_\ell\|_2 < \varepsilon : m, \ell \geq n_0 : \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Así que $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, la sucesión de la componente $\{x_m^j\}_{m \in \mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y como \mathbb{R} es completo, $x_m^j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x^j$. Por tanto, por la definición que se dio de convergencia en \mathbb{R}^n , si el límite es $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, entonces componente a componente $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$

Definición (Conjunto Secuencialmente Compacto)

Sea (E, d) un espacio métrico. Se dice que $A \subset E$ es **secuencialmente compacto** si:

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \exists \{x_{n_k}\}_{n_k} \subset \{x_n\}_n : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in A$$

Observaciones

- Si A es secuencialmente compacto, entonces $A' \subset A$ y, por lo tanto, A es cerrado.
- Si A es secuencialmente compacto, entonces A es acotado (porque hay una bola que lo contiene completamente).

En caso contrario, ocurriría que $\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in A : A \not\subset B(x, \varepsilon)$, pero si escogemos $\varepsilon = n$, entonces $A \not\subset B(x, \varepsilon)$, luego $\exists y_n \in A : d(y_n, x) \geq n$, es decir, podemos formar $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$.

Claramente $\nexists \{y_{n_k}\}_{n_k} \subset \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergente, ya que si existiese:

$$d(y_{n_k}, y) < \varepsilon : \forall n_k \geq m \Rightarrow d(y_m, y_n) \geq d(y_m, x) - d(x, y_n) \geq m - d(x, y_n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \#$$

Por tanto, llegamos a una contradicción.

Proposición (Caracterización de la topología vía sucesiones)

Sea (E, d) un espacio métrico. Se cumple que:

1. Un subconjunto $A \subset E$ es cerrado $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : (\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow x \in A)$
2. Un punto $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
3. Un punto $x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : x_n \neq x : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Demostración:

El conjunto A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$. Por tanto, si escogemos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ de forma que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, vamos a ver que $x \in A$. Supongamos que no, entonces tenemos una sucesión convergente a x de forma que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x$ porque está contenida en A . En consecuencia, por el apartado 3: $x \in A' \subset A$.

Definición (Conjunto Compacto)

Sea (E, d) un espacio métrico:

- Se dice que un **recubrimiento abierto** de $A \subset E$ es una familia de abiertos en cuya unión se encuentra A :

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} : \mathcal{U}_i \text{ abierto} \quad \wedge \quad A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

- Un **subrecubrimiento finito** de A es una familia finita de intervalos abiertos en cuya unión se encuentra A :

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m\} \subset \mathcal{U} : A \subset \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$$

- Se dice que $A \subset E$ es **compacto** si para todo recubrimiento abierto de A se puede extraer un subrecubrimiento finito.
-

Observaciones

- Si A es compacto, entonces A es acotado.

$$\text{Sea } x \in A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x, n) \xrightarrow{\exists m \in \mathbb{N}} A \subset B(x, m)$$

- $(0, 1)$ no es compacto en \mathbb{R} .

En efecto, sea $\mathcal{U}_n = (\frac{1}{n}, 1)$. Es claro que $(0, 1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$, pero $\nexists m : (0, 1) \subset \mathcal{U}_m$

Definición (Conjunto Totalmente Acotado)

Sea (E, d) un espacio métrico, se dice que $A \subset E$ es **totalmente acotado** si ocurre que:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \{x_1, \dots, x_m\} \subset A : A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_m, \varepsilon)$$

Observaciones

- Si A es totalmente acotado, entonces A es acotado.

Sea $r = \max\{d(x_1, x_j) : j = 2, \dots, n\}$ y sea $R = r + 3\varepsilon$. Entonces $B(x_j, \varepsilon) \subset B(x_1, R) \Rightarrow A \subset B(x_1, R)$

- En \mathbb{R} con la métrica discreta, $\mathbb{R} = B(0, 2)$, es decir, \mathbb{R} es acotado. Sin embargo \mathbb{R} no es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. La bola $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$, es decir, $\mathbb{R} \not\subset B(x_1, \frac{1}{2}) \cup \dots \cup B(x_m, \frac{1}{2})$

Lema (Lema 1)

Sea (E, d) un espacio métrico, si A es compacto, entonces A es cerrado.

Demostración:

Hay que ver que $E \setminus A$ es abierto, es decir, que todo punto es interior: $\forall x \in E \setminus A : \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset E \setminus A$.

Primero, sea $\mathcal{U}_n = E \setminus \bar{B}(x, \frac{1}{n})$ abierto. Vamos a probar que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$. Tomamos $y \in A$, luego $d(y, x) > 0$ para $x \notin A$, luego $\exists n \in \mathbb{N} : d(y, x) > \frac{1}{n} \Rightarrow y \notin \bar{B}(x, \frac{1}{n}) \Rightarrow y \in \mathcal{U}_n$.

Como A es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, luego $A \subset \mathcal{U}_{n_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{n_k} = \mathcal{U}_{n_k} : n_1 < \dots < n_k$ porque la sucesión de conjuntos es creciente.

$$\forall y \in A : y \in \mathcal{U}_{n_k} \text{ para } \exists n_k \Rightarrow y \notin \bar{B}\left(x, \frac{1}{n_k}\right) \Rightarrow \bar{B}\left(x, \frac{1}{n_k}\right) \cap A = \emptyset$$

Finalmente, $B\left(x, \frac{1}{n_k}\right) \subset E \setminus A$

Lema (Lema 2)

Sea (E, d) un espacio métrico compacto, si $A \subset E$ cerrado, entonces A es compacto.

Demostración:

Escojamos un recubrimiento de abiertos de A , es decir:

$$A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_i \text{ abierto}$$

De este modo, podemos escribir el espacio ambiente como:

$$E \subset (E \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

Como E es compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito $E \subset (E \setminus A) \cup \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_m$ y como $A \subset E$ y no está en su complementario, $A \subset \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_m$.

Lema (Lema 3)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$ secuencialmente compacto, entonces A es totalmente acotado.

Demostración:

Supongamos que A no es totalmente acotado, es decir:

$$\exists r > 0 : \forall \{x_1, \dots, x_m\} \subset A : A \not\subset B(x_1, r) \cup \dots \cup B(x_m, r)$$

Sea $z_1 \in A$, entonces $A \setminus B(z_1, r) \neq \emptyset$. Por tanto, podemos escoger $z_2 \in A \setminus B(z_1, r)$ y entonces $A \setminus (B(z_1, r) \cup B(z_2, r)) \neq \emptyset$. De modo análogo, podemos construir la sucesión:

$$z_n \in A \setminus (B(z_1, r) \cup \dots \cup B(z_{n-1}, r)) \neq \emptyset$$

Y, además, ocurre que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \text{ donde } d(z_m, z_n) \geq r : m \neq n$$

Luego se tiene que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no posee ninguna subsucesión convergente, lo cual contradice que A sea secuencialmente compacto.

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

Sea (E, d) un espacio métrico:

$$A \subset E \text{ es compacto} \Leftrightarrow A \text{ es secuencialmente compacto}$$

Demostración:

■ \Rightarrow

Supongamos que A compacto. Por reducción al absurdo, si A no es secuencialmente compacto, entonces $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ sin parciales convergentes.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que todos los términos son distintos unos de otros, es decir, $x_n \neq x_m : n \neq m$ porque si existiese un número infinito de términos con el mismo valor, entonces podríamos coger la parcial formada por dichos términos y sería convergente. Escogiendo el conjunto formado por los puntos de la sucesión $B = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow B' = \emptyset \subset B$, luego B es cerrado y como $B \subset A$ que es compacto, por el Lema 2, B es cerrado (y su complementario abierto), por lo que (si lo siguiente no ocurriese $B' \neq \emptyset$):

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_n > 0 : B(x_n, \varepsilon_n) \cap (\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \setminus \{x_n\}) = \emptyset$$

$B = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon_n)$. Como B es compacto, $B \subset B(x_{n_1}, \varepsilon_{n_1}) \cup \dots \cup B(x_{n_m}, \varepsilon_{n_m})$, lo cual es una contradicción pues B no es un conjunto finito, por lo tanto A es secuencialmente compacto.

■ \Leftarrow

Supongamos ahora que A es secuencialmente compacto. Veamos que A es compacto, es decir, que si $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, entonces $A \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_m}$.

Como A es secuencialmente compacto, es totalmente acotado por el Lema 3, entonces, dado $\varepsilon > 0$ sabemos⁵ que:

$$A \subset B(z_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(z_m, \varepsilon) : z_1, \dots, z_m \in A \Rightarrow A \subset \mathcal{U}_{i_{z_1}} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_{z_m}}$$

Ejercicios

- Caracterizar los compactos de un espacio métrico con la distancia discreta

⁵Se aplica la propiedad de Lebesgue que se ve más adelante en este documento

- Ver cuales son ciertos. Sean $A, B \begin{cases} \text{abiertos} \\ \text{cerrados} \\ \text{compactos} \end{cases}$. Entonces $A + B$ también lo es.

Proposición (Constante de Lebesgue)

Si A es secuencialmente compacto, para un recubrimiento $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \exists i_x \in I : B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_x}$$

Demostración:

En efecto, si suponemos lo contrario:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = \frac{1}{n} : \exists x_n \in A : \forall i \in I : B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset \mathcal{U}_i$$

Como A es secuencialmente compacto, $\exists \{y_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : y_m \rightarrow y \in A$. Además, como $y \in A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, entonces $y \in \mathcal{U}_{i_0}$, es decir, que $\exists \delta > 0 : B(y, \delta) \subset \mathcal{U}_{i_0}$ por ser este último abierto.

Sea $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$ y $\forall n \geq n_0 : d(y_n, y) < \frac{\delta}{2}$ tenemos que la bola $B(y_n, \frac{1}{n}) \subset B(y, \delta) : \forall n \geq n_0$.

Sea $z \in B(y_n, \frac{1}{n})$, tenemos que:

$$d(z, y_n) < \frac{1}{n} : d(z, y) \leq d(z, y_n) + d(y_n, y) < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Así, $B(x_m, \frac{1}{n}) = B(y_n, \frac{1}{n}) \subset B(y, \delta) \subset \mathcal{U}_{i_0}$, lo cual contradice que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset \mathcal{U}_i$

Observaciones

- $[0, 1]$ es compacto en \mathbb{R} . En efecto, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$. Entonces, es una sucesión acotada y tiene por lo tanto una parcial convergente:

$$\{x_{n_k}\}_{n_k} \subset \{x_n\}_n, x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

Como $[0, 1]$ cerrado $\Rightarrow x \in [0, 1] \subset [0, 1]$.

Análogamente, para $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ es compacto.

- Sea (E, d) un espacio métrico. Decir que $A \subset E$ es compacto $\Leftrightarrow (A, d)$ es compacto.

Teorema

$$(E, d) \text{ es compacto} \Leftrightarrow E \text{ es completo y totalmente acotado}$$

Demostración:

- \Rightarrow Como E es compacto, por el Teorema de Bolzano - Weierstrass E es secuencialmente compacto, y por el Lema 3 E es totalmente acotado.

Ahora, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ una sucesión de Cauchy. Por el Teorema de Bolzano - Weierstrass existe una parcial convergente, y por ser de Cauchy, la sucesión converge.

- \Leftarrow Veamos que es secuencialmente compacto para poder aplicar el Teorema de Bolzano - Weierstrass. Sea $\{x_n\}_n \subset E$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_n \neq x_m, n \neq m$ por el mismo argumento visto en anteriores demostraciones. Como E es totalmente acotado, $E \subset B(y_1^1, 1) \cup \dots \cup B(y_{m_1}^1, 1)$. Entonces,

$$\{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \exists j : \{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(y_j^1, 1)$$

Iterativamente, $E \subset B(y_1^2, \frac{1}{2}) \cup \dots \cup B(y_{m_1}^2, \frac{1}{2})$. Entonces,

$$\{x_n^2\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}, \exists j : \{x_n^2\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(y_j^2, 1)$$

En general, $\{x_n^m\} \subset \{x_n^{m-1}\}_n$ y $\{x_n^m\} \subset B(y_{j_m}^m, \frac{1}{m})$. Finalmente, sea

$$z_n = x_n^n : \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sean $m, n \geq n_0 : x_m^m = z_m, x_n^n = z_n \in B(y_{j_m}^{n_0}, \frac{1}{n_0}) \Rightarrow d(z_m, z_n) < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Entonces, $\{z_m\}_m$ es una sucesión de Cauchy.

Como E es completo, $\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es parcial de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, por lo que E es secuencialmente compacto.

Corolario

Sea (E, d) espacio métrico completo. Entonces, $A \subset E$ es compacto $\Leftrightarrow A$ es cerrado y totalmente acotado.

Demostración:

- \Rightarrow Por la proposición anterior, basta probar que A es cerrado.

Sea $x \in A'$, y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ con $x_n \neq x$ hay que ver que $x \in A$. Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en A y A es completo, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in A$.

- \Leftarrow Sabemos que E es completo y A es cerrado y totalmente acotado. Veamos que A es completo.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ una sucesión de Cauchy, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es sucesión de Cauchy y como E es completo ocurre que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in E$, pero además como A es cerrado por hipótesis se tiene $x \in A$.

Teorema (Heine - Borel)

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto} \Leftrightarrow A \text{ es cerrado y acotado}$$

Demostración:

- \Rightarrow Como hemos probado que \mathbb{R}^n es completo, esta implicación es trivial a partir del corolario anterior.

- \Leftarrow . Sea A cerrado y acotado en \mathbb{R}^n , debemos ver que A es secuencialmente acotado.

Sea $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset A$, entonces por ser acotado se tiene que $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada en \mathbb{R}^n . Por consiguiente, $\exists \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ parcial convergente en \mathbb{R}^n y entonces:

$$y_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in \bar{A} = A \Rightarrow \text{compacto}$$

Ejercicio*: En \mathbb{R}^n , A es acotado $\Leftrightarrow A$ es totalmente compacto.

Ejercicio*: \mathbb{R}^n , A es acotado $\Leftrightarrow \bar{A}$ es compacto.

Teorema (Principio de Conjuntos Encajados)

Sea (E, d) espacio métrico y sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, A_n \subset E$ y $A_n \neq \emptyset$ compacto tal que $A_{n+1} \subset A_n$. Entonces,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$

Demostración:

Sea $x_n \in A_n \subset A_m : m \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A_1$, y como A_1 es compacto, $\exists \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente $x_{n_k} \rightarrow x \in A_1$.

Fijado $m \in \mathbb{N}$, $\exists k_m \in \mathbb{N} : m_k \geq m, k \geq k_m$

$\{x_{n_k}\}_{k \geq k_m}$ converge a x

Además, $\{x_{n_k}\} \subset A_m : k \geq k_m$, y como A_m es compacto, $x \in A_m : \forall m \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m \neq \emptyset$$

CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Definición (Límite)

Sean $(E, d), (F, d')$ espacios métricos, $A \subset E$ de forma que $f : A \rightarrow F$ y $x_0 \in A'$ un punto de acumulación, se dice que $L \in F$ es el **límite**⁶ de f en x_0 si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A \cap (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) : d'(f(x), L) < \varepsilon$$

Y en ese caso escribimos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. De hecho, dicha definición es equivalente a:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(A \cap (B_d(x_0, \delta) \setminus \{x_0\})) \subset B_{d'}(L, \varepsilon)$$

Proposición (Caracterización del límite)

Si $f : A \subset E \rightarrow F$ y $x_0 \in A'$ es un punto de acumulación, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\} : (x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L)$$

Definición (Continuidad)

Sean $(E, d), (F, d')$ espacios métricos, $A \subset E$ de forma que $f : A \rightarrow F$ y $x_0 \in A$ un punto del conjunto, se dice que f es **continua** en x_0 si:

$$\begin{cases} \text{nada} & \text{si } x_0 \notin A' \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) & \text{si } x_0 \in A \end{cases}$$

Diremos que f es continua en A si es continua en todos los puntos de A .

Teorema (Caracterización de la continuidad)

Sean $(E, d), (F, d')$ espacios métricos, $A \subset E, f : A \rightarrow F$. Son equivalentes:

1. f es continua en A
2. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \in A$, entonces $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$
3. Si $\mathcal{U} \subset F$ es abierto, entonces $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en A .

⁶En caso de existir, este debe ser único

4. Si $B \subset F$ es cerrado, entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en A .

Demostración:

■ (i) \Rightarrow (ii)

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : x_n \rightarrow x_0 \in A$. Si $x_0 \notin A'$, entonces

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n = x_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) = f(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0) : \forall n \geq n_0$$

Por otro lado, si $x_0 \in A'$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A \cap (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Luego entonces se tiene que:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow x_n \in B(x_0, \delta) \Rightarrow d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$$

■ (ii) \Rightarrow (iv)

Suponemos $B \subset F$ cerrado y tomamos $\{x_n\} \subset (f^{-1}(B) \cap A) : x_n \rightarrow x_0 \in A$ ¿ocurre que $x_0 \in f^{-1}(B)$, es decir, que $f(x_0) \in B$? Por (ii) tenemos que, $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$ y además $\{f(x_n)\} \subset B$, por tanto, por ser B cerrado, $f(x_0) \in \bar{B} = B$.

■ (iv) \Rightarrow (iii)

Como $\mathcal{U} \subset F$ abierto, entonces $B = F \setminus \mathcal{U}$ es cerrado, luego:

$$f^{-1}(B) = (E \setminus f^{-1}(\mathcal{U})) \cap A \text{ es cerrado} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) \text{ es abierto en } A$$

■ (iii) \Rightarrow (i)

Sea $x_0 \in A$ y $\varepsilon > 0$ tomamos $\mathcal{U} = B(f(x_0), \varepsilon) \Rightarrow x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$ abierto $\Rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{A}$ de forma que:

$$\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(\mathcal{U}) \Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U} = B(f(x_0), \varepsilon)$$

Teorema

Sean $(E, d), (F, d')$ espacios métricos, $A \subset E$ un compacto y $f : A \rightarrow F$ una función continua, entonces $f(A)$ es compacto.

Demostración:

Sea $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ unión de abiertos de $F : \forall i \in I$ sabemos que:

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\right) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(\mathcal{U}_i)}_{\text{abierto}} \Rightarrow A \subset f^{-1}(\mathcal{U})_{i_1} \cup \dots \cup f^{-1}(\mathcal{U})_{i_m}$$

Entonces, de nuevo ocurre que:

$$f(A) \subset f(f^{-1}(\mathcal{U})_{i_1} \cup \dots \cup f^{-1}(\mathcal{U})_{i_m}) \subset f(f^{-1}(\mathcal{U})_{i_1}) \cup \dots \cup f(f^{-1}(\mathcal{U})_{i_m}) \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_m}$$

Observación

- Toda función constante es continua, es decir, $f(x) = k$ siempre es continua.
- Si la métrica de partida es la discreta, entonces $f(x)$ siempre es continua
- Las relaciones entre continuidad y las propiedades topológicas siguen la siguiente tabla:

$A \longrightarrow f(A)$	$f^{-1}(B) \longleftarrow B$
$\text{cerrado} \not\rightarrow \text{cerrado}$	$\text{cerrado} \longleftarrow \text{cerrado}$
$\text{abierto} \not\rightarrow \text{abierto}$	$\text{abierto} \longleftarrow \text{abierto}$
$\text{acotado} \not\rightarrow \text{acotado}$	$\text{acotado} \not\longleftarrow \text{acotado}$
$\text{compacto} \mapsto \text{compacto}$	$\text{compacto} \not\longleftarrow \text{compacto}$

Sin embargo, tomando el espacio \mathbb{R}^n podemos condierar como cierto que los acotados van a acotados.

Teorema

Sean $(E, d_1), (F, d_2), (G, d_3)$ espacios métricos y supongamos $A \subset E, B \subset F$ tal que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} G$ ambas continuas, entonces:

$$g \circ f : A \rightarrow G \text{ es continua}$$

Demostración:

Sea $\mathcal{U} \subset G$ abierto, se tiene $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ y como g es continua, entonces $g^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto de B , por extensión, como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ es abierto de A

Proposición

Sean (E, d) espacio métrico, $(F, \|\cdot\|)$ espacio normado, $A \subset E$ y $x_0 \in A'$ un punto de acumulación, se cumple:

- Si $f, g : A \rightarrow F, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$, entonces:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

- Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \rightarrow F, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ y $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \in F$, entonces:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$$

- Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \rightarrow F, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \in F$, entonces:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{L_2}{L_1}$$

Demostración:

- (i), (ii) son fáciles
- (iii)

Sin pérdida de generalidad, supongamos $L_1 > 0$, entonces sea $\varepsilon = \frac{L_1}{3} > 0$ se tiene que

$$\exists \delta > 0 : f((B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap A) \subset \left(L_1 - \frac{L_1}{\varepsilon}, L_1 + \frac{L_1}{\varepsilon}\right)$$

Por tanto, se ocurre que $\forall x \in B(x_0, \delta) : f(x) > 0$. Veamos que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L_1}$, es decir, $\forall x \in A : x \neq x_0$ y $d(x, x_0) < \delta$ se tiene que $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L_1}\right| < \varepsilon$.

Por como hemos escogido el delta tenemos que $f(x) > \frac{2 \cdot L_1}{3}$, entonces $\frac{1}{|L_1 \cdot f(x)|} < \frac{3}{2 \cdot L_1^2}$ así que tenemos:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L_1}\right| = \left|\frac{L_1 - f(x)}{L_1 \cdot f(x)}\right| \leq \frac{3\varepsilon}{2L_1^2} : \forall \varepsilon > 0$$

Corolario

Sean (E, d) espacio métrico y $(F, \|\cdot\|)$ espacio normado, $A \subset F$ un subconjunto y $x_0 \in A \cap A'$ un punto de acumulación del conjunto:

- Si $f, g : A \rightarrow F$ son continuas en x_0 , entonces $f + g : A \rightarrow F$ es continua en x_0 .
- Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \rightarrow F$ son continuas en x_0 , entonces $f \cdot g : A \rightarrow F$ es continua en x_0 .
- Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \rightarrow F$ son continuas en x_0 con $\forall x \in A : f(x) \neq 0$, entonces $\frac{g}{f} : A \rightarrow F$ es continua en x_0 .

Proposición (Límite en \mathbb{R}^κ)

Sea (E, d) espacio métrico, $A \subset E$ un subconjunto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$ un punto de acumulación, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = (L_1, \dots, L_n) \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : \lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = L_j$$

Es decir, reducimos el cálculo de límites en \mathbb{R}^κ al cálculo de cada coordenada en \mathbb{R} .

Teorema (Regla del Bocado)

Sean $f, g, h : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$ un punto de acumulación y se satisface que:

- $\exists \delta > 0 : g(x) \leq f(x) \leq h(x) : \forall x \in (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap A$
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$

Entonces se tiene que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Teorema (Límites reiterados)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen que:

- $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = L_1(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = L_2(x)$

Entonces, existen los límites reiterados y son iguales:

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = L$$

Demostración:

Por hipótesis, tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

También sabemos que:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists \delta_1 = \delta_1(y) > 0 : 0 < |x - a| < \delta_1(y) \Rightarrow |f(x, y) - L_1(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, solo hay que ver que $L_1(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} L$. Suponemos que $|y - b| < \delta$, y sea x tal que $|x - a| < \min\{\delta_1(y), \delta\}$, entonces:

$$|L_1(y) - L| \leq |L_1(y) - f(x, y)| + |f(x, y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

El primer sumando es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ por hipótesis y, para el segundo sumando, si tomamos la métrica $\|\cdot\|_\infty$, observamos que $\|(x, y) - (a, b)\|_\infty < \delta$. Como la métrica infinito es equivalente a la métrica euclídea, solo diferirá en una constante, luego ya lo tenemos.

Ejemplos

■ Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Si $y \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$

Si $x \neq 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$

Como los límites reiterados existen pero no coinciden, $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

■ Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Si $y \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1$

Si $x \neq 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$

Sin embargo, observamos que para los puntos de la recta $y = x$ tenemos:

$$f(x, x) = \frac{2 \cdot |x|}{\sqrt{2} \cdot x^2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Más generalmente, para una recta cualquiera que pase por el origen, es decir, $y = \lambda \cdot x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$f(x, \lambda \cdot x) = \frac{|x|(\lambda + 1)}{\sqrt{x^2(1 + \lambda^2)}} = \frac{\lambda + 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

Como $\forall \{x_n\} \subset \mathbb{R} : x_n \rightarrow (0, 0)$ se tiene que $f(x_n) = \frac{\lambda + 1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \nrightarrow 0$, entonces el límite no existe. Lo cual pone de manifiesto que la existencia de los límites reiterados no implica la existencia del límite.

■ Sea $f(x, y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Fijando la $x \neq 0$, calculamos el límite:

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Además, observamos que si fijamos la $y \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} y \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Pero, por la regla del Bocadillo, el límite $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, luego se pone de manifiesto la necesidad de que se den las 3 condiciones simultáneamente.

Teorema (Convergencia por coordenadas polares)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y tomando $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, tenemos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = L \text{ uniformemente en } \theta \in [0, 2\pi)$$

Es decir, que la convergencia de la función debe ser independiente de θ .

Demostración:

■ \Rightarrow : inmediato por la definición de límite

■ \Leftarrow :

Sabemos por la definición que se ha dado de convergencia uniforme que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall 0 < r < \delta : |f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) - L| < \varepsilon : \forall \theta \in [0, 2\pi)$$

Y queremos ver que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|(x, y)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$. En consecuencia, basta hacer un cambio de variable [COMPLETAR].

Ejemplos

■ Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \cos \theta \sin^3 \theta = 0$$

Es decir, el límite es uniforme en θ , porque la convergencia a 0, en este caso, es independiente del valor que tome θ .

■ Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \sin(x^2 + y^2) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} \sin r^2 \not\rightarrow 0 \text{ uniformemente en } \theta \in [0, 2\pi)$$

Porque como $\sup\{\cot \theta\} = \infty$, entonces podemos tomar valores en θ que no conviertan a 0 el denominador.

Proposición (Convergencia por curvas)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \subset \rightarrow \mathbb{R}$ y un abierto \mathcal{U} de forma que $(a, b) \in \mathcal{U}$, entonces podemos definir⁷

$$\alpha : [-c, c] \rightarrow \mathcal{U} \text{ continua : } \alpha(0) = (a, b)$$

Entonces podemos decir que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = L$$

Demostración:

Trivial a partir de la definición.

Ejemplos

■ Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Veamos que ocurre con las rectas de la forma $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(x, \lambda x) = \frac{\lambda^2 x^3}{(\lambda^2 + 1)x^2} = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + 1)} x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Lo que nos indica que es posible que dicho límite exista, luego consideremos la curva $\alpha(t) = (t^2, t)$ y tenemos entonces que:

$$f(\alpha(t)) = \frac{t^2 \cdot t}{t^4 + t^2} = \frac{t^2}{t^2 + 1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Por tanto, teniendo las suficientes garantías de que parece que converge, demostramos:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2} = r \cos \theta \sin^2 \theta \rightarrow 0 \text{ uniformemente en } \theta$$

■ 31 d) COMPLETAR

⁷Donde c puede ser el valor que más nos interese (se suele coger 1 o un valor cercano al punto)

Teorema

Sea (E, d) espacio métrico, sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua y un compacto $B \subset A$, entonces:

$$\exists x_1, x_2 \in B : f(x_1) = \max_{x \in B} f(x) \quad f(x_2) = \min_{x \in B} f(x)$$

Es decir, que se alcanza el supremo y el ínfimo en las imágenes de los compactos de las funciones continuas.

Demostración:

Sabemos que $f(B) \subset \mathbb{R}$ es compacto y, por el Teorema de Heine - Borel, $f(B)$ es cerrado y acotado. Por ser acotado, sabemos que $\exists M = \sup_{x \in B} f(x)$ y $\exists m = \inf_{x \in B} f(x)$ y por ser cerrado, $M = f(x_1), m = f(x_2) : x_1, x_2 \in B$.

Definición (Continuidad Uniforme)

Sean $(E, d), (F, d')$ espacios métricos. Se dice que $f : A \rightarrow F, A \subset E$ es **uniformemente continua** en A si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ si } d(x, y) < \delta, \forall x, y \in A$$

Observación

- Si f es uniformemente continua en A , entonces f es continua en A

Teorema

Sea $f : A \rightarrow F$ y supongamos que f es continua y A es compacto, entonces f es uniformemente continua.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in A$. Como f es continua en x , $\exists \delta_x > 0 : f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$

Como $A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{\delta_x}{2})$, entonces $A \subset B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}) \cup \dots \cup B(x_m, \frac{\delta_{x_m}}{2})$

Sea $\delta = \min\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_m}}{2}\} > 0$, y sean $x, y \in A : d(x, y) < \delta$

Como $x \in A$, $\exists j : 1 \leq j \leq m : B(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2})$. Entonces, $d'(f(x), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad triangular,

$$d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) \leq \frac{\delta_{x_j}}{2} + \frac{\delta_{x_j}}{2} < \delta_{x_j}$$

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_j)) + d'(f(x_j), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

DEFINICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD

Cuando trabajábamos en una dimensión, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto y $x_0 \in I$, definíamos la derivada como:

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

DIBUJO

Donde podemos expresar la recta tangente como:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \langle (x - x_0, y - f(x_0), (f'(x_0), -1)) \rangle = 0$$

Más adelante, recuperaremos este ejemplo para poder explicar la interpretación geométrica que tiene este concepto en \mathbb{R}^n

Definición (Derivada Direccional)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde A es abierto⁸, $x_0 \in A$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Se define como la **derivada** de f en la dirección v en el punto x_0 como:

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

También se conoce como **derivada direccional**.

Observaciones

El módulo del vector que se emplee para calcular dicha derivada no hace más que dilatar el resultado de la misma, es decir, para calcular la derivada del vector unitario basta con dividir por el módulo del vector:

$$D_{\lambda v} f(x_0) = \lambda D_v f(x_0)$$

Asimismo, fijados el punto x_0 y la dirección v sobre la que se va a calcular la derivada, podemos definir la función $\phi(t) = f(x_0 + tv)$ de modo que la derivada direccional se reduce a una derivada usual sobre 1 variable, en este caso t:

$$D_v f(x_0) = \phi'(0)$$

Ejemplos

- Sea $f(x, y) = |x^2 - y^2|^{\frac{1}{2}}$ podemos estudiar cuando existe $D_v f(0, 0)$. Sin pérdida de generalidad, suponemos v vector unitario de la forma $v = (\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in [0, 2\pi)$ que es trivialmente de dirección arbitraria:

$$D_v f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta) - 0}{t} = \frac{|t|}{t} |\cos^2 \theta - \sin^2 \theta|^{\frac{1}{2}}$$

Como el término $\frac{|t|}{t}$ no converge por ambos lados cuando $t \rightarrow 0$, tiene que ocurrir que $\cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ para que se anule todo. Es decir, f es derivable en $(0, 0)$ en las direcciones:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Definición (Derivada Parcial)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde A es abierto y $x_0 \in A$, definimos **derivada parcial j -ésima** de f en x_0 como:

$$D_j f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = D_{e_j} f(x_0)$$

Donde $e_j = (0, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0)$ denota a los vectores de la base canónica.

Observación

Recuperando la observación hecha anteriormente, si consideramos $\phi(t) = f(x_0 + e_j t)$ podemos definir la derivada parcial como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \phi'(0)$$

Es decir, que el cálculo de derivadas parciales se reduce a la derivación de la función $\phi(t)$ en $t = 0$ dejando fijas todas las variables que no sean x_j .

Ejemplo

⁸En general y aunque no se especifique los enunciados de esta sección siempre son para funciones definidas en abiertos

Sea $f(x, y) = y \sin(xy^2)$, entonces vemos que:

$$D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cdot \cos(xy^2) \cdot y^2 = y^3 \cos(xy^2)$$

$$D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(xy^2) + 2xy^2 \cos(xy^2)$$

Definición (Gradiente)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde A es abierto y $x_0 \in A$, si existen todas las derivadas parciales, se define **el gradiente de f en x_0** como:

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Cabe mencionar que dicha definición genera un **vector** del espacio de partida.

Ejemplo

Tomando la función de antes $f(x, y) = y \sin(xy^2)$ y habiendo calculado sus derivadas direccionales, tenemos que:

$$\nabla(x, y) = (y^3 \cos(xy^2), \sin(xy^2) + 2xy^2 \cos(xy^2)) \Rightarrow \nabla f(0, 1) = (1, 0)$$

Observación

En ocasiones trabajaremos con funciones del tipo $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. En este caso, basta con considerar la función como $f(z) = (f_1(z), \dots, f_m(z))$ y hacer los cálculos relativos sobre cada componente, es decir, sobre la función $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ siendo la derivada direccional resultante:

$$D_v f(x_0) = (D_v f_1(x_0), \dots, D_v f_m(x_0)) \in \mathbb{R}^m$$

En cuyo caso, el gradiente se convierte en una matriz: la fila i —ésima es el gradiente sobre la función f_i .

Definición (Forma lineal)

Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal, por estar definida de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} , entonces decimos que se llama **forma lineal sobre \mathbb{R}^n** de modo que:

$$L(x) = (a_1 \quad \dots \quad a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

Esto puede ser expresado como $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = M_{1,n}$, es decir, hay una matriz que representa dicha forma lineal (mejor dicho un vector fila) cuyos coeficientes podemos calcular de la siguiente forma:

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j, L(x) = \sum_{j=1}^n x_j \underbrace{L(e_j)}_{a_j}$$

Proposición

Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces L es uniformemente continua en \mathbb{R}^n

Demostración:

Dado un $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2|||(a_1, \dots, a_n)|||}$, entonces:

$$|L(x) - L(y)| = |L(x - y)| = |\langle (a_1, \dots, a_n), (x - y) \rangle| \leq ||(a_1, \dots, a_n)||_2 \cdot ||x - y||_2 \leq \varepsilon$$

Para los vectores que verifican $||x - y||_2 < \delta$.

Definición (Hiperplano tangente)

Definimos un **hiperplano afín** como un subespacio afín $H \subset \mathbb{R}^m$ de dimensión $m - 1$, es decir:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^m : L(x) = d\} : L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \text{ y } d \in \mathbb{R}$$

Luego podemos expresar dicho espacio afín como el conjunto de soluciones de la ecuación definida por la forma lineal y d .

Observación:

Cuando trabajábamos en \mathbb{R} con funciones de una variable del tipo $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que eran derivables en un punto $x_0 \in I$, podíamos definir el concepto de recta tangente en el punto x_0 como la recta de pendiente $f'(x_0)$ y que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$. De este modo, podemos reescribir el concepto de derivada como:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'(x_0) &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - \overbrace{(f(x_0) + tf'(x_0))}^{\text{recta tangente}}}{t} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - (f(x_0) + tf'(x_0))}{|t|} = 0 \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos definir el siguiente concepto fundamental a la hora de entender el cálculo diferencial.

Definición (Función Diferenciable)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde A es abierto y $x_0 \in A$, se dice que f es **diferenciable en x_0** si:

$$\exists L_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - \overbrace{(f(x_0) + L_{x_0}(h))}^{\text{hiperplano tangente}}}{\|h\|} = 0$$

Es decir, las funciones diferenciables introducen el concepto de **hiperplano tangente**, que sería el homólogo a las rectas tangentes definidas en \mathbb{R} .

Cabe destacar que esta definición y la definición de derivada coincide para las funciones de una variable, es decir, que dada $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f es diferenciable en x_0 si y sólo si f es derivable en x_0 y, además, $L_{x_0}(t) = t \cdot f'(x_0)$.

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde A es abierto, $x_0 \in A$ y $v \in \mathbb{R}^n$, si f es diferenciable en x_0 , entonces existe la derivada direccional en cualquier dirección.

$$f \text{ diferenciable} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n : \exists D_v f(x_0)$$

Además, se tiene que $L_{x_0}(v) = D_v f(x_0)$ para $\|v\| = 1$.

Demostración:

Como conocemos la certeza de la existencia del límite, podemos aproximarnos desde la dirección o curva que deseemos, luego si consideramos $h = t \cdot v$ con $t \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - tL_{x_0}(v)}{|t|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}}_{D_v f(x_0)} = L_{x_0}(v)$$

Definición (Diferencial)

Si f es diferenciable en $x_0 \in A$, entonces llamamos **diferencial**⁹ de f en x_0 :

$$df(x_0) = L_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

De esta forma, tenemos que:

$$\lim_{h \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)(h)}{\|h\|}$$

Corolario

Si f es diferenciable en $x_0 \in A$, entonces:

- La diferencial en x_0 es el gradiente en x_0 :

$$df(x_0) = \nabla f(x_0) \quad df(x_0)(v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = \nabla f(x_0) \cdot v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

- La demostración anterior no depende de que el vector sea unitario:

$$df(x_0)(v) = df(x_0) \left(\|v\| \cdot \frac{v}{\|v\|} \right) = \|v\| \cdot df(x_0) \left(\frac{v}{\|v\|} \right) = \|v\| \cdot D_{\frac{v}{\|v\|}} f(x_0) = \frac{\|v\|}{\|v\|} \cdot D_v f(x_0) = D_v f(x_0)$$

Interpretación geométrica de la diferencial

Cuando trabajamos en funciones de una variable, para hallar la ecuación de la recta tangente (que hace las veces de hiperplano tangente en 2 dimensiones) en un punto a la función teníamos en cuenta la siguiente ecuación:

$$\langle (x - x_0, y - f(x_0)), (f'(x_0), -1) \rangle = 0 \Leftrightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Si tratamos de expresar dicha recta como una forma lineal en \mathbb{R}^2 , entonces tenemos que:

$$\langle (x, y), (f'(x_0), -1) \rangle - \langle (x_0, f(x_0)), (f'(x_0), -1) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle (x, y), (f'(x_0), -1) \rangle = \langle (x_0, f(x_0)), (f'(x_0), -1) \rangle$$

Es decir, que si llamamos $L_{x_0} = (f'(x_0), -1)$, entonces tenemos que la recta puede ser expresada como:

$$\underbrace{L_{x_0}(x, y)}_{\in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} = \underbrace{L_{x_0}(x_0, f(x_0))}_{\in \mathbb{R}}$$

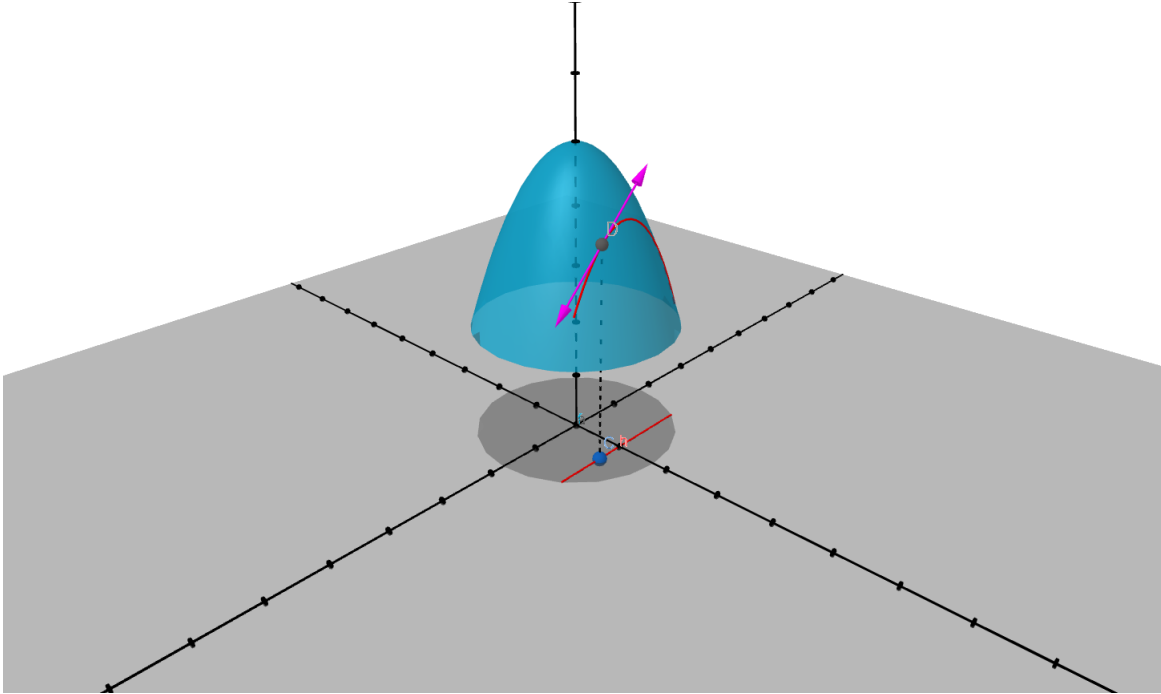
De modo análogo, vamos a tratar de determinar dichas ecuaciones y esa forma lineal en el caso de dimensión arbitraria.

Tomemos $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in A$.

- Si fijamos $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$, es decir, todas las variables excepto una, estamos reduciendo la función inicial a una función sobre una única variable (la x_j) y los puntos de dicha gráfica son de la forma $(x_1, \dots, x_n, f(x))$.
- Para calcular la derivada de dicha función tenemos que calcular $f'(x_0)$, es decir, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$. Trivialmente, como el vector tangente en una variable es el vector $(1, f'(x_0))$ extrapolando a más dimensiones tenemos que el vector $(0, \dots, 1, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0))$ es el vector tangente a dicha gráfica.

⁹De hecho, de la unicidad del límite se desprende la unidad de la diferencial y, en consecuencia, del gradiente.

- Este último paso es así porque, en dimensión 2, vale 1 en la variable que se deja libre, las demás tienen que valer 0 porque nos permite restringir el vector al plano que surge de fijar todas las demás variables y con el que cortamos a la gráfica y la derivada es la última coordenada, pero en el caso multivariable la derivada en x_0 es la parcial en x_0 .



Para poner un ejemplo y en referencia al dibujo, consideramos $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 5$ restringida al conjunto de puntos $\{x^2 + y^2 \leq 3\}$ que son la cónica azul y la sombra gris que proyecta en el suelo y el punto $x_0 = (1, \frac{1}{2})$ el punto azul de la sombra. Cuando fijamos la y y tomamos la x como variable libre nos estamos restringiendo a los puntos de la recta roja sobre el suelo, que son los que tienen como $y = \frac{1}{2}$ (la de x_0) y recorren x , cuyas imágenes forman la parábola roja en la cónica, que son los puntos de la forma $(x, \frac{1}{2}, f(x, \frac{1}{2}))$. Si calculamos $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$, entonces vemos que el vector tangente a la gráfica en el punto $(1, \frac{1}{2}, \frac{15}{4})$, que es la imagen de x_0 , es el vector formado por $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)) = (1, 0, -2)$.

- Para seguir y poder calcular el hiperplano tangente a la gráfica en dicho punto hay que recordar una noción básica de Álgebra: un hiperplano viene dado por una forma lineal cuyos coeficientes pueden ser considerados como un vector, que será el vector ortogonal al hiperplano en cuestión llamado vector normal.
- Por tanto, tenemos que calcular el vector normal a todos los vectores tangentes en cualquiera de las direcciones posibles. Como habíamos definido dichos vectores tangentes como:

$$v_j = \left(0, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right)$$

Si tomamos el vector

$$u = \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)}_{\nabla f(x_0)}, -1 \right)$$

Entonces el producto escalar resulta como

$$v_j \cdot u = 0 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) + \dots + 0 - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

Luego es ortogonal a todos los demás vectores

A partir de aquí, $x \in \mathbb{R}^n$ denota un vector de dimensión n , no la coordenada x del vector. De modo análogo, $z, f(x_0) \in \mathbb{R}$ se refieren a la coordenada x_{n+1} del vector y del punto x_0 respectivamente.

- Los puntos que definen la variedad afín (el hiperplano tangente) que estamos buscando están definidos por los vectores $(x - x_0, z - f(x_0)) \in \mathbb{R}^n$ donde además $(x - x_0, z - f(x_0)) \cdot (\nabla f(x_0), -1) = 0$ porque tienen que ser perpendiculares al vector normal, por tanto:

$$z = \nabla f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Ecuación que nos resulta muy similar a la de la recta tangente en \mathbb{R}^2 .

- Para expresarlo en forma de forma lineal, basta con despejar $(\nabla f(x_0), -1)$ del producto escalar inicial, es decir:

$$(x, z) \cdot \underbrace{(\nabla f(x_0), -1)}_{L_{x_0}} = (x_0, f(x_0)) \cdot (\nabla f(x_0), -1)$$

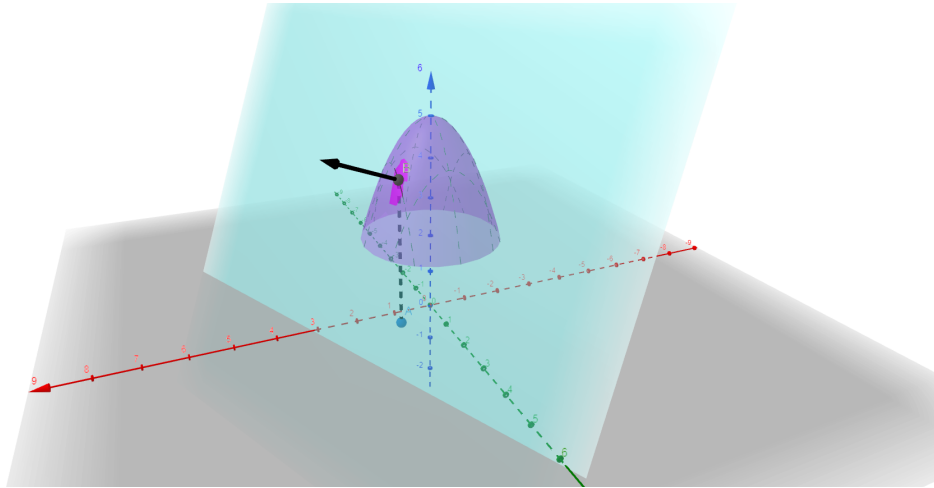
Luego los coeficientes de la forma lineal, son justamente los del vector normal. Para visualizarlo mejor, en caso de encontrarse en dimensión 3, tendríamos que:

$$(x, y, z) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2), -1 \right) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2), -1 \right)$$

Donde $x, y, z \in \mathbb{R}$ denotan coordenadas y $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ denotan las coordenadas del punto x_0 en cuestión.

Para completar el ejemplo anterior, el vector normal $(\nabla f(x_0), -1) = (-2, -1, -1)$ que hemos tomado en positivo y el hiperplano tangente vendría dado por:

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{15}{4} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in A$, entonces f es continua en x_0 .

Demostración:

Sea $\varepsilon = 1$ existe $\delta' > 0$ de modo que $\|x - x_0\| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)| < \|x - x_0\|$ por ser diferenciable. De este modo:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0) - df(x_0) \cdot (x - x_0)| + |df(x_0) \cdot (x - x_0)| \leq \|x - x_0\| \cdot (1 + \|\nabla f(x_0)\|)$$

Luego, para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomando como $\delta = \min \left\{ \frac{\delta'}{\|\nabla f\|+1}, \frac{\varepsilon}{1+\|\nabla f\|} \right\}$, obtenemos que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para $\|x - x_0\| < \delta$.

Ejemplo (REVISAR PORQUE NO LO ENTIENDO)

Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ queremos comprobar si es diferenciable en el $(0, 0)$.

Tomamos un vector unitario de dirección arbitraria $v = (\cos \theta, \sin \theta)$, entonces resulta :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + tv) - f(0, 0)}{\|tv\|} = \frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta) - 0}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{t^2 \cos^2 \theta + t^4 \sin^4 \theta}$$

Basta ahora con distinguir casos para evaluar la continuidad:

- $\cos \theta = 0$:

$$f(v) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = D_v f(0, 0)$$

- $\cos \theta \neq 0$:

$$= \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + t^2 \sin^4 \theta} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = D_v f(0, 0)$$

Entonces, f no es continua en $(0, 0)$

También podemos verlo por la aproximación por la curva (y^2, y) . Entonces, $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$. Si f, g son diferenciables en x_0 , entonces se cumple:

- $f + g$ es diferenciable y $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
- $f \cdot g$ es diferenciable en x_0 y $d(f \cdot g)(x_0) = df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)$
- Si $f(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{1}{f}$ es diferenciable en x_0 y $d\left(\frac{1}{f}\right)(x_0) = \frac{f(x_0) \cdot dg(x_0) - g(x_0) \cdot df(x_0)}{f^2(x_0)}$

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$. Supongamos que $\forall j \in \{1, \dots, n\} : \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ y además es continua en x_0 como función de una variable, entonces, f es diferenciable.

Demostración:

Para la demostración vamos a suponer que $n = 2$, puesto que para más dimensión basta con extrapolar esta demostración a dicha dimensión.

Sean $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $x_0 = (a, b) \in A$, entonces:

$$f(x, y) - f(a, b) = f(x, y) - f(a, y) + f(a, y) - f(a, b) = (f(x, y) - f(a, y)) + (f(a, y) - f(a, b))$$

Considerando en el primer paréntesis la y fija, entonces por el T^a. V. M. se tiene que $\exists \mu \in (x, a) \cup (a, x)$ que verifica las condiciones de abajo. Además, si consideramos en el segundo paréntesis la función como una función sobre una variable, la y , entonces por el mismo teorema $\exists \nu \in (y, b) \cup (b, y)$ que verifica la igualdad de abajo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, y) \right) \cdot (x - a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, \nu) \right) \cdot (y - b)$$

$$|f(x, y) - f(a, b) - \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| \cdot |x - a| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, \nu) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| \cdot |y - b|$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\|(x - a, y - b)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{|f(x, y) - f(a, b) - \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b)|}{\|(x - a, y - b)\|} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

COMPLETAR PULL

COMPLETAR PRINCIPIO DE CLASE

Notación

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, $f(f_1, \dots, f_m)$

$$M_{m \times n} \ni df(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$$

Teorema (Regla de la Cadena)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x_0 \in A$ y $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ de modo que $f(A) \subset B$ y diferenciable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $x_0 \in A$ y su diferencial se calcula como:

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \cdot df(x_0)$$

Tal y como hemos demostrado antes, la diferencial en el punto x_0 se corresponde con el valor del gradiente en dicho punto, luego tendremos que:

$$d(g \circ f)(x_0) = \left(\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_k}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq n}} \in M_{p \times n}$$

De hecho, como hemos definido la relación entre la diferencial de la composición y las diferenciales de las funciones que se componen, tenemos que cada coordenada de dicha matriz se calcula como:

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_k}(x_0) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_l}(f(x_0)) \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(x_0)$$

Por ser la diferencial de la composición el producto de las matrices $dg(f(x_0))$ y $df(x_0)$.

Ejemplo

Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas como:

$$\begin{cases} f(x, y) = (x^2 y^3, xy) \\ g(a, b) = (ab, a^2, b^2) \end{cases}$$

Por tanto, la composición $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se definirá como:

$$(g \circ f)(x, y) = (x^3 y^4, x^4 y^6, x^2 y^2)$$

La matriz del gradiente de la composición puede ser calculada fácilmente por el método explicado en secciones anteriores:

$$d(g \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4 & 4x^3y^3 \\ 4x^3y^6 & 6x^4y^5 \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$$

Sin embargo, podemos comprobar que el producto de matrices de las diferenciales correspondiente tiene como resultado dicha matriz:

$$dg(f(x, y)) = \begin{pmatrix} xy & x^2y^3 \\ 2x^2y^3 & 0 \\ 0 & 2xy \end{pmatrix} \quad df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^3 & 3x^2y^2 \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$dg(f(x, y)) \cdot df(x, y) = \begin{pmatrix} xy & x^2y^3 \\ 2x^2y^3 & 0 \\ 0 & 2xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x^3 & 3x^2y^2 \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^4 & 4x^3y^3 \\ 4x^3y^6 & 6x^4y^5 \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable podemos demostrar el cálculo de $d(f^2)(x)$ gracias a la regla de la Cadena. Si consideramos $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(x) = x^2$, sabemos que $dh(x) = 2x$, luego:

$$d(f^2)(x) = d(h \circ f)(x) = dh(f(x)) \cdot df(x) = 2f(x) \cdot df(x)$$

Gracias a un resultado como este podríamos demostrar la fórmula de la diferencial de un producto porque $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}[(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2]$, luego basta con calcular:

$$d(f \cdot g)(x) = \frac{1}{4} [2(f(x) + g(x)) \cdot (df(x) + dg(x)) - 2(f(x) - g(x)) \cdot (df(x) - dg(x))]$$

Que termina siendo la fórmula mencionada en secciones anteriores.

Definición (Conjunto convexo)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, decimos que A es **convexo** si

$$\forall x, y \in A : L[x, y] = \{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\} \subset A$$

Donde la definición que se ha dado de $L[x, y]$ representa geométricamente el segmento que une ambos puntos.

Ejemplos

DIBUJO EJEMPLOS

Observación

Cuando manejábamos funciones de una variable tales como $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable, podíamos afirmar que $\forall x, y \in I, \exists c \in L[x, y] : f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ gracias al Teorema del Valor Medio. Sin embargo, en general es falso en el caso vectorial, por ejemplo sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $f(t) = (t^2, t^3)$ si tomamos $x = 0$ y $y = 1$ podríamos suponer que:

$$(1, 1) = f(1) - f(0) = df(c)(1 - 0) = df(c) : c \in [0, 1]$$

Y, en realidad, vemos que el valor de la diferencial es:

$$df(c) = (2c, 3c^2) = (1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \#$$

Lema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en el abierto A , entonces $\forall x, y \in A : L[x, y] \subset A$ y $\forall z \in \mathbb{R}^m$ se tiene que:

$$\exists c_z \in L[x, y] : \langle z, f(y) - f(x) \rangle = \langle z, df(c_z) \cdot (y - x) \rangle$$

Demostración:

Al igual que hicimos con el T^a. V. M. en Análisis, vamos a definir una función auxiliar $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\psi(t) = \langle z, f(x + t(y - x)) \rangle$. Veamos ahora que:

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^m z_j \cdot f_j(x + t(y - x)) = \sum_{j=1}^m z_j \cdot \frac{d}{dt} f_j(x + t(y - x)) = \\ &= \sum_{j=1}^m z_j \cdot df_j(x + t(y - x)) \cdot (y - x) = \langle z, df(x + t(y - x)) \cdot (y - x) \rangle \end{aligned}$$

Luego, como ψ es derivable, entonces por el Teorema del Valor Medio se tiene que

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\alpha)(1 - 0) : \alpha \in (0, 1) \Rightarrow \langle z, f(y) - f(x) \rangle = \langle z, df(x + \alpha(y - x)) \cdot (y - x) \rangle$$

Y vemos que basta llamar $x + \alpha(y - x) = c_z = \alpha y + (1 - \alpha)x \in L[x, y]$.

Corolario

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en el abierto A , si $L[x, y] \subset A$, entonces se cumple la igualdad:

$$\exists c \in L[x, y] : f(y) - f(x) = df(c) \cdot (y - x)$$

Demostración:

En el lema anterior, basta coger $z = 1$

Definición (Norma de una aplicación lineal)

Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineal definimos **la norma de h** como:

$$\|h\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|h(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|y\|=1} \|h(y)\|$$

La última igualdad se da porque como el denominador es un escalar, puede entrar dentro de la norma del numerador y por ser $h(x)$ lineal, finalmente se tiene que $\left\| h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|$, es decir, que se reduce al supremo de las imágenes de vectores unitarios.

Observación

Es un buen ejercicio probar que el espacio de matrices $(M_{m \times n}, \|\cdot\|)$ con la norma definida anteriormente es un espacio normado.

Teorema (Teorema de los incrementos finitos)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en el abierto A , si $L[x, y] \subset A$, se satisface que:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{c \in L[x, y]} \|df(c)\| \cdot \|y - x\|$$

Demostración:

Si $f(x) = f(y)$ se cumple trivialmente, así que vamos a suponer que $f(x) \neq f(y)$. Sea $z = \frac{f(y) - f(x)}{\|f(y) - f(x)\|} \in \mathbb{R}^m$. Por el lema anterior:

$$\exists c_z \in L[x, y] : \langle z, f(y) - f(x) \rangle = \langle z, df(c_z) \cdot (y - x) \rangle$$

Sustituyendo z en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\langle z, f(y) - f(x) \rangle &= \left\langle \frac{f(y) - f(x)}{\|f(y) - f(x)\|}, f(y) - f(x) \right\rangle = \frac{1}{\|f(y) - f(x)\|} \langle f(y) - f(x), f(y) - f(x) \rangle = \\ &= \frac{1}{\|f(y) - f(x)\|} \cdot \|f(y) - f(x)\|^2 = \|f(y) - f(x)\|\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy - Schwarz

$$\|f(y) - f(x)\| \leq 1 \cdot \|df(c_z) \cdot (y - x)\| \leq \|df(c_z)\| \cdot \|y - x\| \leq \sup_{c \in L[x, y]} \|df(c)\| \cdot \|y - x\|$$

Corolario

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en el abierto A donde también es convexo y $df = 0$ en A , entonces f es constante.

Demostración:

Sean $x, x_0 \in A$, por la convexidad de A , $L[x, x_0] \subset A$ y, por el Teorema de los Incrementos Finitos, se tiene que:

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \sup_{c \in L[x, x_0]} \|df(c)\| \cdot \|x - x_0\| = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$$

Definición (Derivada Segunda)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde A es abierto y $u, v \in \mathbb{R}^n$. La **derivada segunda** de F se define (siempre que existan) como:

$$D_{u,v} = D_u(D_v f)$$

Si tomamos como vectores los canónicos $u = e_i, v = e_j$, entonces:

$$D_{e_i, e_j} f = D_{i,j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij} = f_{x_i x_j}$$

Y si además lo hacemos sobre el mismo vector en cada iteración:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f_{ii} = f_{x_i x_i}$$

De manera análoga, se definen las derivadas de cualquier orden.

$$D_{i_k, \dots, i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} : i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = yx^2 + xy^3$

$$\begin{array}{lll}\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^3 & \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3xy^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x + 3y^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 3y^2\end{array}$$

Definición (Función de Clase k)

Se dice que f es **función de clase k** y se denota por $f \in \mathcal{C}^k(A)$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, si $\forall \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\} : \exists D_{i_k, \dots, i_1} f$ y todas son funciones continuas.

Teorema (de Schwarz - Clairaut)

Sea $f \in \mathcal{C}^2(A)$ donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Es decir, las derivadas “cruzadas” coinciden (la diagonal de derecha a izquierda en la matriz de la diferencial).

Demostración:

La demostración se deja como ejercicio entregable para subir nota.

Observación

En general, la igualdad no es cierta si $f \notin \mathcal{C}^2(A)$. Por ejemplo, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
 f tiene derivadas de orden 2 en \mathbb{R}^n y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Corolario

Si $f \in \mathcal{C}^k(A)$ es de clase k y $\sigma \in \mathcal{S}_k$ es el conjunto de permutaciones de $\{1, \dots, k\}$, entonces

$$D_{i_1, \dots, i_k} f = D_{\sigma(\{1, \dots, k\})} f$$

Es decir, el orden de derivación sobre cada dirección no influye en el resultado final.

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definimos el **Jacobiano de F en $x_0 \in A$** a:

$$J_f(x_0) = df(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

De modo análogo, cuando el espacio de llegada es \mathbb{R} , llamamos **Hessiano de f en x_0** a:

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} D_{11}f(x_0) & \dots & D_{1n}f(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1}f(x_0) & \dots & D_{nn}f(x_0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Ejemplos

1. Sea $f(x, y) = (x^2y, y^3x, x + y)$, entonces el jacobiano queda como:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^3 & 3y^2x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}$$

2. Sea $g(x, y) = x^2y$, entonces el hessiano queda como:

$$H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema (Teorema de Taylor)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, una función de clase $\mathcal{C}^{k+1}(A)$. Sean $x_0 \in A$, $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $L[x_0, x_0 + h] \subset A$. Entonces, $\exists c \in L[x_0, x_0 + h]$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i_1=1}^n D_{i_1} f(x_0) \cdot h_{i_1} + \frac{1}{2} \sum_{i_1=1, i_2=1}^n D_{i_1, i_2} f(x_0) \cdot h_{i_1} \cdot h_{i_2} + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1, \dots, i_k=1}^n D_{i_1, \dots, i_k} f(x_0) \cdot h_{i_1} \cdot \dots \cdot h_{i_k} + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1, \dots, i_{k+1}=1}^n D_{i_1, \dots, i_{k+1}} f(c) \cdot h_{i_1} \cdot \dots \cdot h_{i_{k+1}}$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 3$. Calculemos el Polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$

Observamos que

- $\nabla f(x, y) = (2x + 4y, -4y + 4x)$
- $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$
- $h = (x, y) - (1, 1) = (x - 1, y - 1)$

$$\begin{aligned} P2((x, y); (1, 1)) &= 0 + \langle (6, 0), (x - 1, y - 1) \rangle + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 & y - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\ &= 6(x - 1) + \frac{1}{2} \cdot (2(x - 1) + 4(y - 1) - 4(x - 1) - 4(y - 1)) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\ &= 6(x - 1) + \frac{1}{2} (2(x - 1)^2 + 4(x - 1)(y - 1) + 4(x - 1)(y - 1) - 4(y - 1)^2) \\ &= x^2 - 2y^2 + 4xy - 3 \end{aligned}$$

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

- Decimos que x_0 es un mínimo relativo si $f(x) \geq f(x_0) : \forall x \in B(x_0, \varepsilon) \subset A$
- Decimos que x_0 es un máximo relativo si $f(x) \leq f(x_0) : \forall x \in B(x_0, \varepsilon) \subset A$
- Decimos que un extremo es absoluto si la desigualdad correspondiente es cierta $\forall x \in A$
- Decimos que x_0 es un punto crítico si $\nabla f(x_0) = 0$

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, y supongamos que existe $\nabla f(x_0)$, $x_0 \in A$ siendo x_0 un extremo relativo. Entonces, $\nabla f(x_0) = 0$.

Demostración:

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Supongamos que x_0 es un máximo relativo (razonamos de forma análoga para el caso del mínimo relativo). Entonces

$$\frac{f(x_0 + t \cdot e_j) - f(x_0)}{t} = \begin{cases} \leq 0 & t > 0 \\ \geq 0 & t < 0 \end{cases}$$

Entonces, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0$

Observación

Si $f \in \mathcal{C}^2(A)$, x_0 , definimos el Hessiano como $H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{1 \leq j, k \leq n}$. Es decir, es una , matriz cuadrada simétrica.

Si recordamos del curso de Álgebra Lineal, definíamos las formas cuadráticas como las aplicaciones $Q \in M_{n \times n}$ tales que

$$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Q(x) = xQ(x)x^t$$

Es decir, los Hessianos son formas cuadráticas.

Definición

Una forma cuadrática $Q \in M_{n \times n}$ se denomina:

- Definida positiva si $Q(x) > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- Definida negativa si $Q(x) < 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- Semidefinida positiva si $Q(x) \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Semidefinida negativa si $Q(x) \leq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n$

Definición (Punto Silla)

Un **punto silla** es un punto crítico que no es un extremo.

Teorema

Sea $f \in \mathcal{C}^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $x_0 \in A$ y $\nabla f(x_0) = 0$

- Si $H_f(x_0)$ es definida negativa, entonces x_0 es un máximo relativo.
- Si $H_f(x_0)$ es definida positiva, entonces x_0 es un mínimo relativo.
- Si x_0 es un máximo relativo, entonces $H_f(x_0)$ es semidefinida negativa.
- Si x_0 es un mínimo relativo, entonces $H_f(x_0)$ es semidefinida positiva.
- Si $H_f(x_0)$ es indefinida, entonces x_0 es un punto silla.

Demostración:

(i). Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ compacto de \mathbb{R}^n . La aplicación $H_f(x_0) = Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, y por lo tanto, alcanza un máximo en S (compacto en \mathbb{R}^n por Heine-Borel es cerrado y acotado, y por Weierstrass existe el máximo). Además, como Q es definida negativa por hipótesis

$$\exists \tilde{x} \in S : 0 > Q(\tilde{x}) \geq Q(x) : \forall x \in S$$

Sea $-\varepsilon_0 = Q(\tilde{x})$. Debido a la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden de f ,

$$\text{Dado } \varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |D_{ij}f(x) - D_{ij}f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2n^2} : \forall i, j = 1, \dots, n$$

Por otra parte, si $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, se verifica que

$$Q(h) = \|h\|^2 \cdot Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \leq \|h\|^2 Q(\tilde{x}) = -\varepsilon_0 \cdot \|h\|^2$$

Por el Teorema de Taylor, $\exists c \in L[x_0, x_0 + h]$ tal que

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \frac{1}{2} h \cdot H_f(c) \cdot h^t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_{ij} f(c) \cdot h_i \cdot h_j \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i,j=1}^n D_{ij} f(c) - D_{ij} f(x_0) \right) \cdot h_i \cdot h_j + \underbrace{\sum_{i,j=1}^n D_{ij} f(x_0) \cdot h_i \cdot h_j}_{Q(h)} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[n^2 \frac{\varepsilon}{2n^2} \cdot \|h\|^2 - \|h\|^2 \varepsilon_0 \right] < 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\|h\| < \delta$

El resto de apartados se demuestran de forma análoga.

— METER CLASE DÍA 17 DE NOVIEMBRE —

Extremos relativos, $n = 2$

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in A, A$ abierto, $f \in C^2(A)$.

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Denotamos al determinante Hessiano con $\Delta = \det(H_f(x_0, y_0)) = ac - b^2$

Observamos que si $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$h H_f(x_0, y_0) h^t = a \cdot h_1^2 + 2b \cdot h_1 \cdot h_2 + c \cdot h_2^2$$

Teorema

Sea $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

- $\Delta > 0 = \begin{cases} a > 0 & (x_0, y_0) \text{ mínimo relativo} \\ a < 0 & (x_0, y_0) \text{ máximo relativo} \end{cases}$
- $\Delta < 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ es punto silla}$
- $\Delta = 0$

Demostración:

(i)

Lo que queremos ver es que si $h \neq 0$, entonces $ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0$. Sabemos que, por hipótesis, $ac - b^2 > 0$, y que $a > 0$

Entonces, si escribimos $ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 = a \left(h_1 + \frac{b}{a} h_2 \right)^2 + \frac{\Delta}{a} h_2^2$, vamos a ver que es positivo. Desarrollando la igualdad de la derecha:

$$a \left(h_1 + \frac{b}{a} h_2 \right)^2 + \frac{\Delta}{a} h_2^2 = a \left(h_1^2 + \frac{b^2}{a^2} h_2^2 + 2 \cdot \frac{b}{a} h_1 h_2 \right) + \left(c - \frac{b^2}{a} h_2^2 \right)$$

Tenemos que $a \left(h_1 + \frac{b}{a} h_2 \right)^2 + \frac{\Delta}{a} h_2^2 > 0$, ya que aunque podría darse que $h_1 + \frac{b}{a} h_2$ pueda anularse, el segundo término no. Entonces, $\forall h = (h_1, h_2) \neq 0$

– Dibujo paraboloide hiperbólico como ejemplo de punto silla –

Ejemplo

Ejercicio 52d) Estudia los puntos críticos de la siguiente función y determina si son máximos o mínimos locales : $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3 \cdot axy$

Calculamos el gradiente en un punto cualquiera: $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3ay, 3y^2 - 3ax)$.

- Supongamos $a \neq 0$. Igualando a 0 ambas componentes: $y = \frac{x^2}{a}, \frac{x^4}{a^2} - ax = 0 \Rightarrow x(x^3 - a^3) = 0$
 $0 = \begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ x = a & y = a \end{cases}$
- Si $a = 0 : (0, 0)$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 36xy - 9a^2$$

- Si $a \neq 0$
 - $(0, 0) \Rightarrow \Delta = -9a^2 < 0 \Rightarrow$ punto silla
 - $(a, a) \Rightarrow \Delta = 27a^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 & \text{mínimo relativo} \\ a < 0 & \text{máximo relativo} \end{cases}$
- Si $a = 0, \Delta = 0 \quad f(0, 0) = 0$ completar

iiiiii

Definición ()
