CÁLCULO DIFERENCIAL

Juan Diego Barrado Daganzo e Iker Muñox Martínez
$2^{\underline{o}}$ de Carrera

22 de septiembre de 2021

TEORÍA DE LA MEDIDA

Vamos a introducir un elemento fundamental en esta asignatura, y muy útil para las posteriores, que no es otra cosa que la capacidad de definir qué es una medida y cómo podemos medir las cosas según un criterio general.

ESPACIOS MÉTRICOS

Definición: distancia

Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto, decimos que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es una **métrica o distancia** siempre que se satisfaga las siguientes propiedades[1]

- Positiva: $d(x, y) > 0 : \forall x, y \in E$
- No degenerada: $d(x, y) > 0 \Leftrightarrow x = y$
- Simetría: $d(x, y) = d(y, x) : \forall x, y \in E$
- Desigualdad triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) : \forall x, y, z \in E$

Al par (E, d) lo denotamos como **espacio métrico**.

Ejemplos

Un ejemplo sencillo de comprobar es considerar $\mathbb{R}$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ tradicional.

Para poner otro ejemplo, dado $E \neq \emptyset$ definimos la métrica discreta como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Luego con la definición dada de distancia y un conjunto cualquiera E tenemos que estos forman una peculiar definición de espacio métrico.

Espacio euclídeo usual

Definimos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$, donde consideramos la suma y el producto por escalares como los usuales, lo cual dota a $\mathbb{R}^n$ de estructura de espacio vectorial.

[1] Nótese que no está permitido valores que tiendan a infinito (comprendidos en $\bar{\mathbb{R}}$)

Espacios normados

Sea E un espacio vectorial real, se dice que $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ es una **norma** si se cumplen las siguientes propiedades:

- Positiva: $||x|| \geq 0 : \forall x \in E$
- No degenerada: $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Homogénea: $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| : \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in E$
- Desigualdad triangular: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Al par $(E, ||\cdot||)$ se le denota como **espacio normado**.

Ejemplo

Considerando $\mathbb{R}^n$ denominamos como la clásica norma euclídea a:

$$||x|| = ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} : \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Para demostrar que, en efecto, esto es una norma, procederemos a demostrar la última de las propiedades (puesto que las demás son triviales) más adelante, puesto que su demostración surge de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

En otro ejemplo, si consideramos $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado, podemos definir la métrica asociada a dicha norma como:

$$d_{||\cdot||}(x, y) = ||x - y|| : \forall x, y \in E$$

Cuya definición, por ser en base a una norma ya dada, hace fácilmente verificable las condiciones de métrica.

Definición

De este modo, se define la **métrica o distancia euclídea** en $\mathbb{R}^n$ como la métrica asociada a la norma euclídea:

$$d(x, y) = d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Ejemplos

Definimos el conjunto de las funciones continuas $E = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\} = \mathbb{C}[0, 1]$ y la función:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in [0, 1]\}$$

Lo primero de todo, comprobamos que está bien definida: como son funciones continuas la diferencia es continua y, por ser el valor absoluto una función continua, la composición con él también es continua. Por tanto, al tratarse de una función continua y acotada en $[0, 1]$ el máximo se alcanza así que de hecho no solo el supremo es un número finito sino que es máximo de la función en ese intervalo.

Para ver que se trata de una norma, comprobamos la última propiedad puesto que las anteriores se comprueban trivialmente:

$$d(f, g) = |f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g)$$

Si definimos $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, entonces el par $(E, || \, ||_\infty)$ es un espacio normado.

$$||f||_\infty = d(f, 0)$$

Sea $E = \{f : (0,1] \to \mathbb{R} \text{ continua }\}$definimos

$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in (0,1]\}$

Sin embargo, no es una métrica ya que no está bien definida, por ejemplo, $d(\frac{1}{x}, 0) = \infty$

Observación

Sin embargo, no toda métrica tiene asociada una norma en un espacio vectorial. Para verlo, tomamos $\mathbb{R}^n$ con la métrica discreta definida, observamos que no existe una norma que haga que el par $(\mathbb{R}^n, d)$ sea un espacio normado puesto que en caso de existir, por ejemplo, no se verifica la 3 propiedad:

$$\text{Sea } x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \ \exists || \cdot || \Rightarrow \underbrace{d(\lambda x, 0)}_{=1} = ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| = |\lambda| \cdot d(x,0) = |\lambda|$$

Y como debe ocurrir para todo lambda, no se verifica.

Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la siguiente norma:

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

En general, se define la norma p (con $1 < p < \infty$) como:

$$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Observación: $||x||_\infty = \text{máx}\{|x_j| : j = 1, \ldots, n\}$

Definición: producto escalar

Sea E un espacio vectorial, se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ es un producto escalar si es una forma bilineal definida positiva, es decir, cumple las propiedades:

- Definida positiva: $\langle x, x \rangle \geq 0 : \forall x \in E$
- No degenerada: $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Homogeneidad: $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle : \forall x, y \in E$
- Bilinealidad: $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle : \forall x, y, z \in E$
- Simétrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle :, \forall x, y, \in E$

Al par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le denomina espacio vectorial con producto escalar o espacio **pre-Hilbert**.

Ejemplos

1. En $\mathbb{R}^n$, definimos
$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j : \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
2. En $\mathcal{C}[0,1]$, definimos
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert y sean $x, y \in E$ dos vectores cualesquiera. Entonces ocurre que:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}$$

<u>Demostración</u>

- Si $x = 0$ o $y = 0$, la desigualdad es trivial.
- Tomemos en primer lugar un $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario y escojamos $x, y \in E \setminus \{0\}$:

  $$0 \leq \ \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

  Esta ecuación[2] describe una parábola que, a lo sumo, es tangente al eje X pero nunca lo llega a cruzar porque es siempre ≥ 0. Consecuentemente, el discriminante de esta ecuación nunca será estrictamente positivo ya que esto implicaría tener dos raíces, es decir:

  $$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}$$

Como observación ocurre que hay igualdad si y solo si los vectores son proporcionales:

$$|\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} \Leftrightarrow x = \alpha y : \alpha \in \mathbb{R}$$

Si son proporcionales es trivial demostrar la igualdad, pero si tenemos la igualdad, entonces ello implica que la parábola de la que hablamos antes corta en un único punto al eje de abscisas, luego:

$$\langle \lambda \cdot x + y, \lambda \cdot x + y\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \cdot \langle x, y\rangle}{2 \cdot \langle x, x\rangle} \Leftrightarrow x = -\lambda y$$

Proposición

Dado un espacio pre-Hilbert $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y definimos $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, entonces $(E, ||\cdot||)$ es normado.

<u>Demostración</u>:

La única propiedad no trivial es la desigualdad triangular. Sea

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = ||x||^2 + 2 \cdot \langle x, y\rangle + ||y||^2$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

<u>Ejemplos</u>

- En $\mathbb{R}^n$, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:

  $$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$$

- Sea $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \{x = \{x_j\} \in \mathbb{R} : ||x||_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$. Definimos

  $$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

[2] Esto es mayor o igual que 0 por la propiedad de definida positiva

Comprobemos que se encuentra bien definida:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} y_j^2} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j||y_j| \leq ||x||_{\ell^2} \cdot ||y||_{\ell^2}$$

- Sea $\mathcal{C}[0,1]$

$$\int_0^1 |f(x) \cdot g(x)| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Observación

Se dice que dos normas son equivalentes en un espacio vectorial E, $||\cdot||_1 \approx ||\cdot||_1$, si

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq c_2 ||x||_2 : \forall x \in E$$

Observación

Dado (E, d), ¿cuándo existe una norma que genera d, tal que $d(x,y) = ||x-y||$?

- $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ (Invariante por traslaciones)
- $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$ (Invariante por dilataciones)

Observación: Ley del Paralelogramo

Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $||x||^2 = \langle x, x\rangle$, se cumple que:

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$$

Si se diese que $x \perp y \Rightarrow ||x+y|| = ||x-y||$, es decir, obtenemos el Teorema de Pitágoras:

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x+y||^2$$

Es interesante observar que el recíproco también es cierto. Dado un espacio normado $(E, ||\cdot||)$, si $||\cdot||$ satisface la Ley del Paralelogramo, entonces existe un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que $||x||^2 = \langle x, x\rangle$. La demostración se deja como ejercicio.

TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS

Definición (Bola)

Sea el espacio métrico (E,d). Se define la ***bola abierta*** *de centro $x \in E$ y radio $r > 0$ al conjunto:*

$$B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$$

Asimismo, definimos como ***bola cerrada*** *al conjunto:*

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$$

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}$, tomando $x = \frac{a+b}{2}$ donde $a < b$ y $a, b \in \mathbb{R}$, elegimos $r = \frac{b-a}{2} > 0$. Luego ocurre que:

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} : \left| y - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}\} = (a,b)$$

- Sea (X, d), siendo d la métrica discreta $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$, tenemos entonces que:

$$B(x,2) = X \qquad B(x,1) = \{x\} \qquad \bar{B}(x,1) = X$$

Definición (Conjunto abierto)

*Sea (X, d) un espacio métrico, se dice que un conjunto $A \subset X$ es **abierto** si:*

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$$

Observaciones:

- Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow B(x, \varepsilon_1) \subset B(x, \varepsilon_2)$
- El conjunto vacío $\emptyset$ y X son abiertos.
- El intervalo $(0, 1]$ no es abierto en $\mathbb{R}$, ya que para $x = 1, \nexists \varepsilon > 0 : B(1, \varepsilon) \subset (0, 1]$
- Consideramos el espacio métrico $((0, 1], d_2)$. El conjunto $(0, 1]$ es abierto es este espacio métrico determinado. Es decir, que el hecho de ser abierto o no depende del espacio métrico en el que nos encontramos.
- $\{x\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Sin embargo, $\{x\}$ sí es abierto en $(\mathbb{R}, d_{\text{discreta}})$

Proposición

En un espacio métrico (E, d), toda bola abierta es un abierto.

Demostración:

Sean $x \in E$ y $r > 0$ tomamos $y \in B(x,r)$. Queremos probar que $\exists \varepsilon > 0 : B(y, e) \subset B(x,r)$, luego sea $\varepsilon = r - d(x,y) > 0$ vamos a ver que $B(y,e) \subset B(x,r)$. Para ello sea $z \in B(y, \varepsilon)$ comprobemos que $d(x,z) < r$:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon = r$$

Proposición

Sea el espacio métrico (E, d), entonces[3] *ocurre:*

1. $\forall A_1, \ldots, A_n$ familia de conjuntos abiertos en E, $\bigcap_{j=1}^{N} A_j$ es abierto en E.
2. $\forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familia arbitraria de conjuntos abiertos en E, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es abierto en E.

[3] Para la 2ª afirmación no es necesario que la familia sea finita

Demostración:

- Tomamos $x \in \bigcap_{j=1}^{N} A_j$ para intentar probar que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{N} A_j$$

Para ello, la idea es que fijado un j tendremos un ε_j que valdrá, luego como es un conjunto finito podemos quedarnos con el más pequeño y valdrá para todos los demás:

$$j \in \{1, \ldots, N\} \Rightarrow \exists \varepsilon_j > 0 : B(x, \varepsilon_j) \subset A_j \Rightarrow \varepsilon = \min_{j \in \{1,\ldots,N\}} \{\varepsilon_j\} > 0$$

De esta forma ocurre que:

$$B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{N} B(x, \varepsilon_j) \subset \bigcap_{j=1}^{N} A_j$$

- Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \exists \beta \in I : x \in A_\beta$, luego se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Observación: En $(\mathbb{R}^n, d_2), A_j = (-\frac{1}{j}, \frac{1}{j})$ es abierto pero $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{0\}$ **no** es abierto en $\mathbb{R}$.

Definición (Topología)

Toda familia de subconjuntos T de un conjunto X, $T \subset \wp(X)$, que satisface:

- $\emptyset, X \in T$
- *T es invariante por intersecciones finitas.*
- *T es invariante por uniones arbitrarias.*

*Se denomina como **topología de X**.*

Así, la familia de abiertos de un espacio métrico (X, d) es una topología.

Definición (Punto interior)

*Dado un espacio métrico (E, d), se dice que x es un **punto interior** de $A \subset E$ si cumple que:*

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$$

Denotamos como $\mathring{A} = int(A) = \{x \in A : x \text{ es punto interior}\}$

Observaciones:

- $\mathring{A} \subset A$
- A es abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$
- $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists U$ abierto : $x \in U \subset A$
- $A = \{0\} \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$
- $A = [0, 1] \Rightarrow \mathring{A} = (0, 1)$
- $\mathring{A} = \bigcup_{\mathcal{U} \subset A} \mathcal{U}$ donde U es abierto.