DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Cálculo Diferencial (M3 y M4). Curso 2021–2022.

Diferenciabilidad. Hoja 5

39. Dada la función $f(x,y) = y\sin(xy^2)$ y el punto $p = (0,1)$, calcula:

    (a) Las derivadas parciales de f en un punto (x,y) cualquiera.

    (b) El gradiente de f en el punto p.

    (c) La ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto p.

    (d) La derivada direccional de f en la dirección $v = (4/5, -3/5)$ en el punto p.

    (e) La diferencial de la función $F(x,y) = (\sin(xy), f(x,y), y^2)$ en el punto p.

40. En los siguientes casos, calcula la derivada direccional de f en p, según el vector w:

    (a) $f(x,y) = xy^2 + x^3y$; $\quad p = (4,-2)$; $\quad w = (1,3)$.

    (b) $f(x,y) = \int_y^x (t^2+1)e^{-t^2}\,dt$; $\quad p = (0,0)$; $\quad w = (1,1)$.

41. Calcula la matriz jacobiana de las funciones siguientes:

    (a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \cdot \operatorname{sen} y)$ $\qquad$ (b) $f(x,y) = (x+y, \cos(xy), e^{xy})$

42. Estudia la existencia de las derivadas direccionales y la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2y^5}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    ¿En qué punto de $\mathbb{R}^2$ es diferenciable la función f?

43. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considera la función $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+y^6-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^\alpha}, & \text{si } (x,y) \neq (1,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

    Estudia la continuidad y la diferenciabilidad en el punto $(1,0)$ de la función f_α en términos del parámetro α.

44. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, calcula las derivadas parciales de la función:

$$g(r,\theta,\phi) = f(r\cos\theta\operatorname{sen}\phi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, r\cos\phi).$$

45. Consideramos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), t)$. Estudia si existe algún punto $c \in [0,1]$ tal que $f(1) - f(0) = Df(c)(1-0)$.

46. (a) Comprueba que la función $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ y la función $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ satisfacen la ecuación de Laplace:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
(b) Demuestra que si la función $f(x,y)$ satisface la ecuación de Laplace, también la satisface la función $g(x,y) = f(x - 2y, 2x + y)$.

47. Estudia si se cumple el Teorema de Schwarz sobre derivadas parciales cruzadas para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{si } (x,y) \neq (0,0); \qquad f(0,0) = (0,0)$$

48. Estudia si la siguiente función es de clase C^1 o de clase C^2:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^{8/3}}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

49. Calcula el Polinomio de Taylor de grado 3 para las siguientes funciones en los puntos que se indica:

(a) $f(x,y) = e^{(x-1)^2} \cos y$ en $(1,0)$ (b) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$ en $(0,0)$

50. (a) Encuentra el desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = e^{x-y} \sin(x+y)$ alrededor del origen.
(b) Calcula el siguiente límite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(y,x) - 3x^2 + y}{x^2 + y^2}.$$

51. Estudia la existencia del siguiente límite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x \cos(x+y) - 1 - x + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2}.$$

52. Estudia los puntos críticos de las siguientes funciones y determina si son máximos o mínimos locales:

(a) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$ (b) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$
(c) $f(x,y) = y^2 - x^3$ (d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$

53. Encuentra y clasifica los extremos locales de:
$$f(x,y,z) = \sin x + 4y^2 - \cos z.$$

54. Sea $f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Demuestra que $(0,0)$ es un punto crítico de f. Prueba que f tiene un mínimo local en $(0,0)$ sobre cada recta que pasa por el origen, pero $(0,0)$ no es un mínimo local de f.

55. Sea D un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y sea $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{D}$ y diferenciable en D. Demuestra que si f se anula en la frontera de D, entonces existe al menos un punto $a \in D$ tal que $Df(a) = 0$.