DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Cálculo Diferencial (M3 y M4). Curso 2021–2022.

Espacios métricos. Hoja 1

1. Estudia si la aplicación $d : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por
$$d(x,y) = \left|\log\left(\frac{y}{x}\right)\right|$$
es una métrica en $\mathbb{R}^+$.

2. Demuestra que si $d(x,y)$ es una métrica en un conjunto X, entonces para todo $x,y,z \in X$,
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

3. Demuestra que si $d(x,y)$ es una métrica en un conjunto X, entonces
$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$
es también una métrica en X.

4. Demuestra que si $X = C([0,1])$, entonces
$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \quad \text{y} \quad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$
son dos métricas en X.

5. Se define la distancia entre dos subconjuntos A y B de un espacio métrico (X,d) mediante
$$d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b).$$
¿Es cierto que
$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B),$$
para todos los subconjuntos A, B y C de X?

6. Sea $\|\cdot\|$ una norma en un espacio vectorial E. Demuestra que para todo $x,y \in E$ se verifica que:
$$\Big|\, \|x\| - \|y\| \,\Big| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|\,.$$

7. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|u\cdot v| \leq \|u\|\|v\|$, prueba que si $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, se cumple que
$$-\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$
¿Para qué vectores $w = (x_1, \cdots, x_n)$ la primera desigualdad es una igualdad?

8. Comprueba que la expresión

$$\|(x, y)\| := (x^2 + y^2 + xy)^{1/2}$$

define una norma en $\mathbb{R}^2$. (Indicación: $\|\cdot\|$ está inducida por un producto escalar en $\mathbb{R}^2$).

9. Demuestra que las normas $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, y $||\cdot||_\infty$ en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

10. Estudiar cuál de las siguientes expresiones define una métrica en X:

   (a) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$, $X = \mathbb{R}$.

   (b) $d(n, m) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, si $n \neq m$ y $d(n, m) = 0$, si $n = m$, $X = \mathbb{N}$.

11. Demuestra que si d es una métrica en X y $A \subset X$, entonces

$$\Big| d(x, A) - d(y, A) \Big| \leq d(x, y), \qquad \forall x, y \in X.$$

12. Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas en $\mathbb{R}$, $C(\mathbb{R})$. Consideremos

$$d_n(f, g) = \sup_{x \in [-n, n]} |f(x) - g(x)|$$

y sea

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}.$$

¿Son d_n y d métricas en X?

13. *a*) Demuestra que $(1 + t)^p \leq 1 + t^p$, para $t \geq 0$ y $p \in (0, 1]$.

   b) Sea $X = \mathcal{C}([0, 1])$ y fijemos un número $p > 0$. Para $f, g \in X$ pongamos

$$d_p(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p \, dt.$$

   Demuestra que para todo $p \in (0, 1]$, d_p es una distancia en X.

   c) Para $f, g \in X$ definimos

$$\delta_p(f, g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

   Demuestra que existe un $p \in (0, 1)$ tal que δ_p no define una distancia en X.

Indicación. Considera las cantidades $\delta_p(f, g)$ y $\delta_p(f, 0) + \delta_p(0, g)$, donde $f(t) = t$ y $g(t) = t - 1$, y calcula el límite cuando $p \to 0^+$.