CÁLCULO DIFERENCIAL

Juan Diego Barrado Daganzo e Iker Muñoz Martínez
2º de Carrera

5 de octubre de 2021

TEORÍA DE LA MEDIDA

Vamos a introducir un elemento fundamental en esta asignatura, y muy útil para las posteriores, que no es otra cosa que la capacidad de definir qué es una medida y cómo podemos medir las cosas según un criterio general.

CONCEPTO DE MÉTRICA Y ESPACIOS NORMADOS

En esta sección, se definen los elementos básicos para el estudio de medidas, distancias y se estudian las características de las estructuras que se generan a partir de dichas definiciones, con sus consecuentes resultados para otras áreas como la geometría.

Definición (métrica)

Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto, decimos que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es una ***métrica o distancia*** *siempre que se satisfaga las siguientes propiedades*[1]

- *Positiva:* $d(x, y) > 0 : \forall x, y \in E$
- *No degenerada:* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría:* $d(x, y) = d(y, x) : \forall x, y \in E$
- *Desigualdad triangular:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) : \forall x, y, z \in E$

Al par (E, d) lo denotamos como ***espacio métrico****.*

<u>**Ejemplos**</u>:

- Un ejemplo sencillo de comprobar es considerar $\mathbb{R}$ con la métrica $d(x, y) = |x-y|$ tradicional.
- Otro ejemplo es, dado $E \neq \emptyset$ definimos la métrica discreta como:

  $$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

  Luego con la definición dada de distancia y un conjunto cualquiera E tenemos que estos forman una peculiar definición de espacio métrico.
- Por último, definimos como **Espacio Euclídeo Usual** al conjunto:

  $$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

  que junto con la suma y el producto por escalares usual, lo cual lo dota de estructura de espacio vectorial.

[1] Nótese que no está permitido valores que tiendan a infinito (comprendidos en $\bar{\mathbb{R}}$)

Definición (Espacios normados)

Sea E un espacio vectorial real, se dice que $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ es una ***norma*** *si se cumplen las siguientes propiedades:*

- *Positiva:* $||x|| \geq 0 : \forall x \in E$
- *No degenerada:* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- *Homogénea:* $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| : \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in E$
- *Desigualdad triangular:* $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Al par $(E, ||\cdot||)$ se le denota como ***espacio normado****.*

Ejemplos:

- Considerando $\mathbb{R}^n$ denominamos como la **clásica norma euclídea** a:

  $$||x|| = ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} : \forall x \in \mathbb{R}^n$$

  La demostración es trivial salvo el último apartado, que no se puede demostrar hasta más adelante puesto que se necesita de la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*.

Definición (Norma p)

Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la siguiente norma:

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

En general, se define la norma p (con $1 < p < \infty$) como:

$$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Es decir, que en el caso extremo tenemos que:

$$||x||_\infty = \lim_{p \to \infty} ||x||_p = \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, n\}$$

Proposición (Métrica asociada a una norma)

Si consideramos $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado, podemos definir ***la métrica asociada a dicha norma*** *como:*

$$d_{||\cdot||}(x, y) = ||x - y|| : \forall x, y \in E$$

Cuya definición, por ser en base a una norma ya dada, hace fácilmente verificable las condiciones de métrica.

Definición (Métrica Euclídea)

De este modo, se define la ***métrica o distancia euclídea*** *en $\mathbb{R}^n$ como la métrica asociada a la norma euclídea:*

$$d(x, y) = d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Ejemplos:

- Definimos el conjunto de las funciones continuas $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\} = \mathbb{C}[0,1]$ y la función:
$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in [0,1]\}$$
Lo primero de todo, comprobamos que está bien definida: como son funciones continuas la diferencia es continua y, por ser el valor absoluto una función continua, la composición con él también es continua. Consecuentemente, al tratarse de una función continua y acotada en $[0,1]$ el máximo se alcanza, así que, de hecho, no solo el supremo es un número finito, sino que es máximo de la función en ese intervalo.
Para ver que se trata de una norma, comprobamos la última propiedad (las anteriores son triviales):
$$d(f,g) = |f(x)-g(x)| = |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \leq d(f,h)+d(h,g)$$
- Junto al ejemplo anterior, podemos definir:
$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$
y entonces el par $(E, || \, ||_\infty)$ es un espacio normado. Para comprobar que esto es una norma, se puede tratar dicha norma como $||f||_\infty = d(f,0)$ para demostrar sus propiedades.
- Sea $E = \{f : (0,1] \to \mathbb{R} \text{ continua } \}$ definimos:
$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in (0,1]\}$$
Sin embargo, no es una métrica porque no está bien definida; por ejemplo:
$$d\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \infty$$

Observación:

Sin embargo, no toda métrica tiene asociada una norma en un espacio vectorial. Para verlo, tomamos $\mathbb{R}^n$ con la métrica discreta definida: observamos que no existe una norma que haga que el par $(\mathbb{R}^n, d)$ sea un espacio normado puesto que en caso de existir, por ejemplo, no se verifica la 3 propiedad:

$$\text{Sea } x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \ \exists || \cdot || \Rightarrow \underbrace{d(\lambda x, 0)}_{=1} = ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| = |\lambda| \cdot d(x,0) = |\lambda|$$

Y como debe ocurrir para todo lambda, es absurdo.

Definición (Producto escalar)

Sea E un espacio vectorial, se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ es un ***producto escalar*** *si es una forma bilineal definida positiva, es decir, cumple las propiedades:*

- *Definida positiva:* $\langle x, x \rangle \geq 0 : \forall x \in E$
- *No degenerada:* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- *Homogeneidad:* $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle : \forall x, y \in E$
- *Bilinealidad:* $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle : \forall x, y, z \in E$
- *Simétrica:* $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle :, \forall x, y, \in E$

Al par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le denomina espacio vectorial con producto escalar o espacio ***pre-Hilbert***.

Ejemplos

- En $\mathbb{R}^n$, definimos
$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j : \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
- En $\mathcal{C}[0,1]$, definimos
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$$
Y es muy sencillo demostrar que ambas definiciones suponen un producto escalar en el espacio en el que están definidas.

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert y sean $x, y \in E$ dos vectores cualesquiera. Entonces ocurre que:
$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}$$

Demostración:

- Si $x = 0$ o $y = 0$, la desigualdad es trivial.
- Tomemos en primer lugar un $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario y escojamos $x, y \in E \setminus \{0\}$:
$$0 \leq \ \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
Esta ecuación[2] describe una parábola que, a lo sumo, es tangente al eje X pero nunca lo llega a cruzar porque es siempre ≥ 0. Consecuentemente, el discriminante de esta ecuación nunca será estrictamente positivo ya que esto implicaría tener dos raíces, es decir:
$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}$$

Observación:

Cabe destacar que hay igualdad si y solo si los vectores son proporcionales, es decir:
$$|\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} \Leftrightarrow x = \alpha y : \alpha \in \mathbb{R}$$

Si son proporcionales es trivial demostrar la igualdad, pero si tenemos la igualdad, entonces ello implica que la parábola de la que hablábamos antes corta en un único punto al eje de abscisas, luego:
$$\langle \lambda \cdot x + y, \lambda \cdot x + y\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2\cdot\langle x, y\rangle}{2\cdot\langle x, x\rangle} \Leftrightarrow x = -\lambda y$$

Proposición

Dado un espacio pre-Hilbert $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y definimos $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, entonces $(E, ||\cdot||)$ es normado.

Demostración:

La única propiedad no trivial es la desigualdad triangular. Sea
$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = ||x||^2 + 2\cdot\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz
$$\leq ||x||^2 + 2||x||\cdot||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

[2] Esto es mayor o igual que 0 por la propiedad de definida positiva

Ejemplos

- En $\mathbb{R}^n$, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$$

- Sea $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \{x = \{x_j\} \in \mathbb{R} : ||x||_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$. Definimos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

Comprobemos que se encuentra bien definida:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} y_j^2} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j||y_j| \leq ||x||_{\ell^2} \cdot ||y||_{\ell^2}$$

- Sea $\mathcal{C}[0,1]$

$$\int_0^1 |f(x) \cdot g(x)| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición (Equivalencia de normas)

Se dice que dos normas son equivalentes en un espacio vectorial E, $|| \cdot ||_1 \approx || \cdot ||_1$, si

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq c_2 ||x||_2 : \forall x \in E$$

Observación

Dado un espacio métrico (E, d), una pregunta razonable es cuándo existe una norma que genera d, tal que $d(x, y) = ||x - y||$. Esto ocurre cuando la métrica cumple dos condiciones:

- $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Invariante por traslaciones)
- $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (Invariante por dilataciones)

Teorema (Ley del Paralelogramo)

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial normado, cuya norma es $||x||^2 = \langle x, x \rangle$, se cumple que:

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x + y||^2 + ||x - y||^2$$

Si se diese que $x \perp y \Rightarrow ||x + y|| = ||x - y||$, es decir, obtenemos el Teorema de Pitágoras:

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$$

Es interesante observar que el recíproco también es cierto, es decir, dado un espacio normado $(E, || \cdot ||)$, si $|| \cdot ||$ satisface la Ley del Paralelogramo, entonces existe un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que $||x||^2 = \langle x, x \rangle$. Concretamente es:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(||x + y||^2 - ||x - y||^2 \right)$$

TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS

Definición (Bola)

*Sea el espacio métrico (E, d). Se define la **bola abierta** de centro $x \in E$ y radio $r > 0$ al conjunto:*

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

*Asimismo, definimos como **bola cerrada** al conjunto:*

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$$

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}$, tomando $x = \frac{a+b}{2}$ donde $a < b$ y $a, b \in \mathbb{R}$, elegimos $r = \frac{b-a}{2} > 0$. Luego ocurre que:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : \left| y - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}\} = (a, b)$$

- Sea (X, d), siendo d la métrica discreta $d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$, tenemos entonces que:

$$B(x, 2) = X \qquad B(x, 1) = \{x\} \qquad \bar{B}(x, 1) = X$$

Definición (Conjunto abierto)

*Sea (X, d) un espacio métrico, se dice que un conjunto $A \subset X$ es **abierto** si:*

$$\forall x \in A : \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$$

Observaciones:

- Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow B(x, \varepsilon_1) \subset B(x, \varepsilon_2)$
- El conjunto vacío $\emptyset$ y X son abiertos.
- El intervalo $(0, 1]$ no es abierto en $\mathbb{R}$, ya que para $x = 1, \nexists \varepsilon > 0 : B(1, \varepsilon) \subset (0, 1]$
- Consideramos el espacio métrico $((0, 1], d_2)$. El conjunto $(0, 1]$ es abierto es este espacio métrico determinado. Es decir, que el hecho de ser abierto o no depende del espacio métrico en el que nos encontramos.
- $\{x\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Sin embargo, $\{x\}$ sí es abierto en $(\mathbb{R}, d_{\text{discreta}})$

Proposición

En un espacio métrico (E, d), toda bola abierta es un abierto.

Demostración:

Sean $x \in E$ y $r > 0$ tomamos $y \in B(x, r)$. Queremos probar que $\exists \varepsilon > 0 : B(y, e) \subset B(x, r)$, luego sea $\varepsilon = r - d(x, y) > 0$ vamos a ver que $B(y, e) \subset B(x, r)$. Para ello sea $z \in B(y, \varepsilon)$ comprobemos que $d(x, z) < r$:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon = r$$

Proposición

Sea el espacio métrico (E, d), entonces[3] *ocurre:*

1. $\forall A_1, \ldots, A_n$ familia de conjuntos abiertos en E, $\bigcap\limits_{j=1}^{N} A_j$ es abierto en E.

2. $\forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familia arbitraria de conjuntos abiertos en E, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ es abierto en E.

Demostración:

- Tomamos $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{N} A_j$ para intentar probar que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{N} A_j$$

Para ello, la idea es que fijado un j tendremos un ε_j que valdrá, luego como es un conjunto finito podemos quedarnos con el más pequeño y valdrá para todos los demás:

$$j \in \{1, \ldots, N\} \Rightarrow \exists \varepsilon_j > 0 : B(x, \varepsilon_j) \subset A_j \Rightarrow \varepsilon = \min_{j \in \{1, \ldots, N\}} \{\varepsilon_j\} > 0$$

De esta forma ocurre que:

$$B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{N} B(x, \varepsilon_j) \subset \bigcap_{j=1}^{N} A_j$$

- Sea $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \exists \beta \in I : x \in A_\beta$, luego se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Cabe destacar que la condición de intersección finita es indispensable, puesto que en $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $A_j = \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right)$ es abierto, pero $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \{0\}$ **no** es abierto en $\mathbb{R}$.

Definición (Topología)

Toda familia de subconjuntos T de un conjunto X, $T \subset \mathcal{P}(X)$, que satisface:

- $\emptyset, X \in T$
- *T es invariante por intersecciones finitas.*
- *T es invariante por uniones arbitrarias.*

Se denomina como ***topología de X****.*

Así, la familia de abiertos de un espacio métrico (X, d) es una topología.

Definición (Punto interior)

Dado un espacio métrico (E, d), se dice que x es un ***punto interior*** *de $A \subset E$ si cumple que:*

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$$

Denotamos como $\mathring{A} = int(A) = \{x \in A : x \text{ es punto interior}\}$

[3] Para la 2ª afirmación no es necesario que la familia sea finita

Observaciones:

- $\mathring{A} \subset A$
- A es abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$
- $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists U$ abierto : $x \in U \subset A$
- $A = \{0\} \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$
- $A = [0,1] \Rightarrow \mathring{A} = (0,1)$
- $\mathring{A} = \bigcup_{\mathcal{U} \subset A} \mathcal{U}$ donde U es abierto.

Ejemplo:

Tomando $\mathbb{R}^2$ y el conjunto $A = \{(0,x) : 0 < x < A\}$ vemos que $\mathring{A} = \emptyset$

Definición

En un espacio métrico (E,d) decimos que un conjunto $A \subset E$ es cerrado si $E \setminus A$ es abierto.

Ejemplos:

- $\emptyset, E$ son cerrados.
- En $\mathbb{R}$, $(0,1]$ no es abierto ni cerrado.
- En $(0,2]$ el conjunto $(0,1]$, es cerrado puesto que su complementario es $(0,2] \setminus (0,1] = (1,2]$ es abierto en este espacio ambiente.
- En $\mathbb{R}^2$ los puntos son cerrados puesto que si tomamos $A = \{x\}$, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto. Tomamos $y \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon = \frac{||x-y||_2}{2}$ entonces $x \notin B(y,\varepsilon)$, luego es abierto.

Proposición

En cualquier espacio métrico (E,d) las bolas cerradas $\bar{B}(x,\varepsilon)$ son conjuntos cerrados.

Demostración:

Se reduce todo a ver que el complementario es abierto. Sea $z \in E \setminus \bar{B}(x,\varepsilon)$, entonces $d(z,x) > \varepsilon$. Si escogemos $0 < \delta < d(z,x) - \varepsilon$, entonces ¿se podrá verificar que $B(z,\delta) \subset E \setminus \bar{B}(x,\varepsilon)$? o lo que es lo mismo, que la intersección de esta bola de centro z con la bola cerrada inicial es el vacío:

$$y \in B(z,\delta) \Rightarrow d(y,x) \geq d(x,z) - d(z,y) > d(x,z) - \delta > \varepsilon \Rightarrow y \notin \bar{B}(x,\varepsilon)$$

Luego ya tenemos lo que queríamos probar

Proposición

Sea un espacio métrico (E,d) se cumple que:

1. *Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son cerrados, entonces: $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ cerrado*
2. *Si $\{A_\alpha\}_{j=1,\cdots,n}$ son cerrados, entonces: $\bigcup_{j=1}^{n} A_n$ cerrado*

Demostración:

Se demuestra por las Leyes de De Morgan

Definición (Punto de acumulación)

*Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $A \subset E$, se dice que $x \in E$ es un **punto de acumulación** de A si:*

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Es decir, para cualquier "entorno" alrededor de ese punto sin contar con el punto, la intersección con el conjunto original es no vacía. Al **conjunto de puntos de acumulación** se le conoce como A'

Observaciones:

- Sea $A = (0, 1)$ en $\mathbb{R}$, entonces $A' = [0, 1]$, de lo que se desprende que no tiene por qué darse $A' \subset A$
- $A = \{1\}$ en $\mathbb{R}$, entonces $A' = \emptyset$, de lo que se desprende que no tiene por qué darse $A \subset A'$
- $x \in A' \Leftrightarrow \forall U$ abierto $\subset E,\ x \in U \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
- Tomamos (E, d) siendo d la métrica discreta y un conjunto $A \subset E$, entonces:

  $$x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

  Con lo cual, si tomamos $0 < \varepsilon \leq 1$, entonces

  $$B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} = \emptyset \Rightarrow A' = \emptyset$$

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, entonces ocurre que:

$$A' \subset A \Leftrightarrow A \text{ cerrado}$$

Demostración:

- $\Leftarrow$:

  Si A es cerrado, entonces $E \setminus A$ es abierto. De esta forma, queremos decir que

  $$\forall x \notin A : \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset (E \setminus A) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow x \notin A' \Rightarrow A' \subset A$$

- $\Rightarrow$:

  Supongamos ahora que $A' \subset A$ veamos que el complementario es abierto, luego hay que ver que cualquier punto suyo es interior.

  Sea $x \in E \setminus A$, luego $x \notin A'$. Esto quiere decir que:

  $$\exists \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset (E \setminus A)$$

Definición (Adherencia)

*Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, definimos **la adherencia** de A como:*

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F} F$$

Donde F debe ser cerrado

Observaciones:

- Esto siempre está bien definido porque $F = E \supset A$ y E es cerrado.
- $\bar{A} \supset A$
- $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A
- $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

Ejemplos:

- $A = (0,1)$ en $\mathbb{R}$, entonces $\bar{A} = [0,1]$
- $A = \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, entonces $\bar{A} = \mathbb{R}$

Proposición

Sea (E,d) un espacio métrico y $A \subset E$, entonces:

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Demostración:

Sea $B = A \cup A'$, vamos a probar que $B = \bar{A}$.

- $B \supset \bar{A}$

  Vamos a probar que B es un conjunto cerrado, puesto que si probamos esta propiedad se tiene que $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B} = B$ y quedaría demostrada la primera inclusión:

  $$x \in B^c = A^c \cap (E \setminus A') \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin A'$$

  En primer lugar, por ocurrir que $x \notin \bar{A}$, se tiene que:

  $$\exists \varepsilon > 0 : (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$$

  Luego usando esa afirmación junto con que $x \notin A$, tenemos que:

  $$B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset A^c$$

  Queda solo por probar que $B(x,\varepsilon) \subset E \setminus A'$, veamoslo:

  $$z \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \notin B(z,\delta) \subset B(x,\varepsilon) \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow (B(z,\delta) \setminus \{z\}) \cap A \subset (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow z \notin A' \Rightarrow \bar{A} \subset B$$

- $B \subset \bar{A}$

  Como $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$, todo se reduce a probar que $A' \subset \bar{A}$:

  $$A' \subset \bar{A} \Leftrightarrow \forall F \supset A \text{ cerrado}, \ A' \subset F \Leftrightarrow \forall F \supset A \text{ cerrado}, \ (E \setminus A') \supset F^c$$

  Luego vamos a intentar tratar de probar dicho enunciado equivalente:

  $$z \notin F \Rightarrow z \in F^c \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(z,\varepsilon) \subset F^c \Rightarrow (B(z,\varepsilon) \setminus \{z\}) \cap A \subset B(z,\varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow z \notin A' \Rightarrow z \in E \setminus A'$$

Corolario

Si un punto pertenece a la adherencia, entonces cualquier bola centrada en ese punto interseca con el conjunto:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Proposición

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists x_\varepsilon \in A \setminus \{x\} : d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$$

En particular, en $\mathbb{R}^n$:

$$x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x\} : ||x - x_k||_2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset B \subset E$, se dice que A es denso en B si $B \subset \bar{A}$. En particular, A es denso en E si $\bar{A} = E$.

Ejemplo:

- El conjunto $\mathbb{Q}$ es denso dentro de $\mathbb{R}$.
- El conjunto $\mathbb{I}$ es denso dentro de $\mathbb{R}$.

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, se define la frontera de A como:

$$\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

Observaciones:

- $\partial(A)$ es cerrado.
- $A = [0, 1)$ en $\mathbb{R}$, implica que $\bar{A} = [0, 1]$, luego $\partial(A) = \{0, 1\}$
- $\partial(A) = \partial(A^c)$
- Ejercicio: probar que $\partial(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap (E \setminus \mathring{A})$. Pista: probar que $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$
- Ejercicio: probar que A' es cerrado.
- Ejercicio: estudiar cómo son los abiertos y los cerrados en un espacio con la métrica discreta.

Aclaraciones de Clase:

- Vamos a poner un ejemplo donde $\bar{B}(x, r) \neq \overline{B(x, r)}$, tomamos (E, d) espacio métrico donde d es la métrica discreta. Escogemos $x \in E$ y $r = 1$, tenemos que $B(x, 1) = \{x\} \Rightarrow \overline{B(x, 1)} = \{x\}$, pero vemos que $\bar{B}(x, 1) = E \neq \{x\}$.
- Veamos que no siempre $Diam(A) = Diam(\partial A)$, si tomamos $E = [0, 1]$, entonces $\partial E = \emptyset$, luego $Diam(E) = 1 = Diam(\emptyset)$. Si tomamos $\mathbb{R}$ y $A = (0, \infty)$, vemos que $\partial A = \{0\}$, luego $Diam()A) = \infty$ pero $Diam(\partial A) = 0$. De nuevo, si tomamos $E = [0, 1]$ y $A = (0, 1]$, tenemos que $\partial(A) = \{0\}$ y se tiene que $Diam(A) = 1 \neq 0 = Diam(\partial(A))$
- Veamos que $Diam(A) = Diam(\bar{A})$, como $A \subset \bar{A}$ entonces $Diam(A) \leq Diam(\bar{A})$. Y la otra desigualdad es muy fácil de probar también.
- Una buena propiedad es $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Elemental la demostración.

SUCESIONES, COMPLETITUD Y COMPACIDAD

Definición (Sucesión y Subsucesión)

*Sea E un conjunto. Una **sucesión** $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_n = \{x_n\}$ es una función*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to E \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

*Una **subsucesión** o sucesión parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$*

Definición (Convergencia)

*Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** $x \in E$ si $\forall \mathcal{U} \subset E$ abierto $x \in \mathcal{U}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U} : \forall n \geq n_0$.*

Escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

<u>Observación</u>

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon) : \forall n \geq n_0$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \varepsilon$$

<u>Observación</u>

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, el límite es único.

Proposición

Sea $(E, || \, ||)$ un espacio normado. Se cumple que:

- *Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) + y$*
- *Sea $\lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$ en $\mathbb{R}$ y $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en $E \Rightarrow \lambda_n \cdot x_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \cdot x$ en E*

<u>Demostración</u>

El caso $x = 0$ se deja como ejercicio. Sea $x \neq 0$ y $\varepsilon > 0$. Entonces:

$$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} : |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot ||x||} \quad \forall n \geq n_1 \text{ y } ||x_n - x||_E < \frac{\varepsilon}{2 \cdot C} \quad \forall n \geq n_2 \quad |\lambda_n| \geq C < \infty$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $n \geq n_0$

$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| = ||\lambda_n x_n - \lambda_n x_n + \lambda_n x_n - \lambda x|| \leq |\lambda_n| \cdot ||x_n - x|| + |\lambda_n - \lambda| \cdot ||x|| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2||x||} \cdot ||x|| = \varepsilon$$

<u>Observación</u>

Si $|| \cdot ||_1, || \cdot ||_2$ son normas equivalentes en E, entonces ambas normas tienen las mismas sucesiones convergentes y al mismo límite.

$$0 \leftarrow C||x_n - x||_1 \geq ||x_n - x||_2 \to 0$$

Proposición

En $(\mathbb{R}^n, || \, ||_2)$, sea la sucesión $x_m = (x_m^1, \ldots, x_m^n) = \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $x = (x^1, \ldots, x^n)$ si y solo si $\forall j = 1, \ldots, n : x_m^j \xrightarrow{m\to\infty} x^j$

Demostración

$$|x_m^j - x_j| \leq ||x_m - x||_2 \Rightarrow x_m \to x \Rightarrow x_m^j \to x^j : \forall j = 1, \ldots, n$$

Recíprocamente,

$$||x_m - x||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_m^j - x^j|^2$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} ||x_m - x||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \lim_{m\to\infty} |x_m^j - x^j|^2 = 0$$

$\square$

Proposición

Sea (E,d) un espacio métrico. Se cumple que:

- *$A \subset E$ es cerrado si y solo si $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in A$*
- *$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = x$*
- *$x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A, x_n \neq x : \lim_{n\to\infty} x_n = x$*

Demostración

A es cerrado si y solo si $A' \subset A$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = x$. Veamos que $x \in A$.

En caso contrario, $x \notin A$. Entonces, $x_n \neq x : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in A' \subset A \sharp$. El resto de apartados son análogos y se dejan como ejercicios.

Proposición

Sea (E,d) un espacio métrico. Entonces se cumple:

- *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E : x_n \to x \Leftrightarrow \forall \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_{n_j} \to x$*
- *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E : x_n \to x \Leftrightarrow \forall \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \exists \{y_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} : y_{m_k} \to x$*

Demostración

- "$\Rightarrow$"
  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$. Sea $n_{j_0} \geq n_0 : \forall n_j \geq n_{j_0} \geq n_0 : d(n_j, x) < \varepsilon$
  "$\Leftarrow$"
  Trivial
- "$\Rightarrow$"
  Trivial por (i).
  "$\Leftarrow$" Supongamos que $x_n \nrightarrow x$. Entonces $\exists \varepsilon > 0 : \forall m \in \mathbb{N}, \exists n_m \geq m : d(x_{n_m}, x) \geq \varepsilon$
  $\{x_{n_m}\}_m \subset \{x_n\}_n$.
  Sea $\{y_{m_k}\}_k \subset \{x_{n_m}\}_m : d(y_{m_k}, x) \geq \varepsilon \Rightarrow y_{m_k} \nrightarrow x \sharp \Rightarrow x_n \to x$

Definición (Sucesión de Cauchy)

Sea (E,d) un espacio métrico. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es ***sucesión de Cauchy*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Sea dice que (E,d) es ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Observaciones

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo.
- $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo.
- Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es completo. Por ejemplo, la sucesión $x_n = \frac{1}{n} \in E$ es sucesión de Cauchy y no converge en E.

Definición (Conjunto Acotado)

*En (E, d), un conjunto $A \subset E$ es **acotado** si $\exists x \in E$ y $r > 0 : A \subset B(x, r)$, es decir, $d(y, x) < r : \forall y \in A$*