CÁLCULO DIFERENCIAL

Juan Diego Barrado Daganzo e Iker Muñoz Martínez
$2^{\underline{o}}$ de Carrera

4 de noviembre de 2021

TEORÍA DE LA MEDIDA

Vamos a introducir un elemento fundamental en esta asignatura, y muy útil para las posteriores, que no es otra cosa que la capacidad de definir qué es una medida y cómo podemos medir las cosas según un criterio general.

CONCEPTO DE MÉTRICA Y ESPACIOS NORMADOS

En esta sección, se definen los elementos básicos para el estudio de medidas, distancias y se estudian las características de las estructuras que se generan a partir de dichas definiciones, con sus consecuentes resultados para otras áreas como la geometría.

Definición (métrica)

*Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto, decimos que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es una **métrica o distancia** siempre que se satisfaga las siguientes propiedades*[1]

- *Positiva:* $d(x, y) > 0 : \forall x, y \in E$
- *No degenerada:* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría:* $d(x, y) = d(y, x) : \forall x, y \in E$
- *Desigualdad triangular:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) : \forall x, y, z \in E$

*Al par (E, d) lo denotamos como **espacio métrico**.*

Ejemplos:

- Un ejemplo sencillo de comprobar es considerar $\mathbb{R}$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ tradicional.
- Otro ejemplo es, dado $E \neq \emptyset$ definimos la métrica discreta como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

  Luego con la definición dada de distancia y un conjunto cualquiera E tenemos que estos forman una peculiar definición de espacio métrico.

- Por último, definimos como **Espacio Euclídeo Usual** al conjunto:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

  que junto con la suma y el producto por escalares usual, lo cual lo dota de estructura de espacio vectorial.

[1] Nótese que no está permitido valores que tiendan a infinito (comprendidos en $\bar{\mathbb{R}}$)

Definición (Espacios normados)

*Sea E un espacio vectorial real, se dice que $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ es una **norma** si se cumplen las siguientes propiedades:*

- *Positiva:* $||x|| \geq 0 : \forall x \in E$
- *No degenerada:* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- *Homogénea:* $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| : \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in E$
- *Desigualdad triangular:* $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

*Al par $(E, ||\cdot||)$ se le denota como **espacio normado**.*

Ejemplos:

- Considerando $\mathbb{R}^n$ denominamos como la **clásica norma euclídea** a:

  $$||x|| = ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} : \forall x \in \mathbb{R}^n$$

  La demostración es trivial salvo el último apartado, que no se puede demostrar hasta más adelante puesto que se necesita de la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

Definición (Norma p)

Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la siguiente norma:

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

En general, se define la norma p (con $1 < p < \infty$) como:

$$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Es decir, que en el caso extremo tenemos que:

$$||x||_\infty = \lim_{p \to \infty} ||x||_p = \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, n\}$$

Proposición (Métrica asociada a una norma)

*Si consideramos $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado, podemos definir **la métrica asociada a dicha norma** como:*

$$d_{||\cdot||}(x,y) = ||x-y|| : \forall x, y \in E$$

Cuya definición, por ser en base a una norma ya dada, hace fácilmente verificable las condiciones de métrica.

Definición (Métrica Euclídea)

*De este modo, se define la **métrica o distancia euclídea** en $\mathbb{R}^n$ como la métrica asociada a la norma euclídea:*

$$d(x,y) = d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

Ejemplos:

- Definimos el conjunto de las funciones continuas $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\} = \mathbb{C}[0,1]$ y la función:
$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in [0,1]\}$$
Lo primero de todo, comprobamos que está bien definida: como son funciones continuas la diferencia es continua y, por ser el valor absoluto una función continua, la composición con él también es continua. Consecuentemente, al tratarse de una función continua y acotada en $[0,1]$ el máximo se alcanza, así que, de hecho, no solo el supremo es un número finito, sino que es máximo de la función en ese intervalo.

  Para ver que se trata de una norma, comprobamos la última propiedad (las anteriores son triviales):
$$d(f,g) = |f(x)-g(x)| = |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \leq d(f,h)+d(h,g)$$

- Junto al ejemplo anterior, podemos definir:
$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$
y entonces el par $(E, ||\ ||_\infty)$ es un espacio normado. Para comprobar que esto es una norma, se puede tratar dicha norma como $||f||_\infty = d(f,0)$ para demostrar sus propiedades.

- Sea $E = \{f : (0,1] \to \mathbb{R} \text{ continua }\}$ definimos:
$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in (0,1]\}$$
Sin embargo, no es una métrica porque no está bien definida; por ejemplo:
$$d\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \infty$$

Observación:

Sin embargo, no toda métrica tiene asociada una norma en un espacio vectorial. Para verlo, tomamos $\mathbb{R}^n$ con la métrica discreta definida: observamos que no existe una norma que haga que el par $(\mathbb{R}^n, d)$ sea un espacio normado puesto que en caso de existir, por ejemplo, no se verifica la 3 propiedad:

$$\text{Sea } x \in \mathbb{R} : x \neq 0,\ \exists || \cdot || \Rightarrow \underbrace{d(\lambda x, 0)}_{=1} = ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| = |\lambda| \cdot d(x,0) = |\lambda|$$

Y como debe ocurrir para todo lambda, es absurdo.

Definición (Producto escalar)

Sea E un espacio vectorial, se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ es un ***producto escalar*** *si es una forma bilineal definida positiva, es decir, cumple las propiedades:*

- *Definida positiva:* $\langle x, x \rangle \geq 0 : \forall x \in E$
- *No degenerada:* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- *Homogeneidad:* $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle : \forall x, y \in E$
- *Bilinealidad:* $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle : \forall x, y, z \in E$
- *Simétrica:* $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle :, \forall x, y, \in E$

Al par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le denomina espacio vectorial con producto escalar o espacio ***pre-Hilbert***.

Ejemplos

- En $\mathbb{R}^n$, definimos
$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j : \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
- En $\mathcal{C}[0,1]$, definimos
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$
Y es muy sencillo demostrar que ambas definiciones suponen un producto escalar en el espacio en el que están definidas.

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert y sean $x, y \in E$ dos vectores cualesquiera. Entonces ocurre que:
$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}$$

Demostración:

- Si $x = 0$ o $y = 0$, la desigualdad es trivial.
- Tomemos en primer lugar un $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario y escojamos $x, y \in E \setminus \{0\}$:
$$0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
Esta ecuación[2] describe una parábola que, a lo sumo, es tangente al eje X pero nunca lo llega a cruzar porque es siempre ≥ 0. Consecuentemente, el discriminante de esta ecuación nunca será estrictamente positivo ya que esto implicaría tener dos raíces, es decir:
$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}$$

Observación:

Cabe destacar que hay igualdad si y solo si los vectores son proporcionales, es decir:
$$|\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} \Leftrightarrow x = \alpha y : \alpha \in \mathbb{R}$$
Si son proporcionales es trivial demostrar la igualdad, pero si tenemos la igualdad, entonces ello implica que la parábola de la que hablábamos antes corta en un único punto al eje de abscisas, luego:
$$\langle \lambda \cdot x + y, \lambda \cdot x + y\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \cdot \langle x, y\rangle}{2 \cdot \langle x, x\rangle} \Leftrightarrow x = -\lambda y$$

Proposición

Dado un espacio pre-Hilbert $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y definimos $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, entonces $(E, ||\cdot||)$ es normado.

Demostración:

La única propiedad no trivial es la desigualdad triangular. Sea
$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = ||x||^2 + 2 \cdot \langle x, y\rangle + ||y||^2$$
Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz
$$\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

[2]Esto es mayor o igual que 0 por la propiedad de definida positiva

Ejemplos

- En $\mathbb{R}^n$, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$$

- Sea $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \{x = \{x_j\} \in \mathbb{R} : ||x||_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$. Definimos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

Comprobemos que se encuentra bien definida:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} y_j^2} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j||y_j| \leq ||x||_{\ell^2} \cdot ||y||_{\ell^2}$$

- Sea $\mathcal{C}[0,1]$

$$\int_0^1 |f(x) \cdot g(x)| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición (Equivalencia de normas)

Se dice que dos normas son equivalentes en un espacio vectorial E, $|| \cdot ||_1 \approx || \cdot ||_1$, si

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq c_2 ||x||_2 : \forall x \in E$$

Observación

Dado un espacio métrico (E, d), una pregunta razonable es cuándo existe una norma que genera d, tal que $d(x, y) = ||x - y||$. Esto ocurre cuando la métrica cumple dos condiciones:

- $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Invariante por traslaciones)
- $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (Invariante por dilataciones)

Teorema (Ley del Paralelogramo)

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial normado, cuya norma es $||x||^2 = \langle x, x \rangle$, se cumple que:

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x + y||^2 + ||x - y||^2$$

Si se diese que $x \perp y \Rightarrow ||x + y|| = ||x - y||$, es decir, obtenemos el Teorema de Pitágoras:

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$$

Es interesante observar que el recíproco también es cierto, es decir, dado un espacio normado $(E, || \cdot ||)$, si $|| \cdot ||$ satisface la Ley del Paralelogramo, entonces existe un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que $||x||^2 = \langle x, x \rangle$. Concretamente es:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(||x + y||^2 - ||x - y||^2 \right)$$

TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS

Definición (Bola)

*Sea el espacio métrico (E,d). Se define la **bola abierta** de centro $x \in E$ y radio $r > 0$ al conjunto:*

$$B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$$

*Asimismo, definimos como **bola cerrada** al conjunto:*

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$$

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}$, tomando $x = \frac{a+b}{2}$ donde $a < b$ y $a,b \in \mathbb{R}$, elegimos $r = \frac{b-a}{2} > 0$. Luego ocurre que:

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} : \left| y - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}\} = (a,b)$$

- Sea (X,d), siendo d la métrica discreta $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$, tenemos entonces que:

$$B(x,2) = X \qquad B(x,1) = \{x\} \qquad \bar{B}(x,1) = X$$

Definición (Conjunto abierto)

*Sea (X,d) un espacio métrico, se dice que un conjunto $A \subset X$ es **abierto** si:*

$$\forall x \in A : \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset A$$

Observaciones:

- Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow B(x,\varepsilon_1) \subset B(x,\varepsilon_2)$
- El conjunto vacío $\emptyset$ y X son abiertos.
- El intervalo $(0,1]$ no es abierto en $\mathbb{R}$, ya que para $x = 1, \nexists \varepsilon > 0 : B(1,\varepsilon) \subset (0,1]$
- Consideramos el espacio métrico $((0,1], d_2)$. El conjunto $(0,1]$ es abierto es este espacio métrico determinado. Es decir, que el hecho de ser abierto o no depende del espacio métrico en el que nos encontramos.
- $\{x\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Sin embargo, $\{x\}$ sí es abierto en $(\mathbb{R}, d_{\text{discreta}})$

Proposición

En un espacio métrico (E,d), toda bola abierta es un abierto.

Demostración:

Sean $x \in E$ y $r > 0$ tomamos $y \in B(x,r)$. Queremos probar que $\exists \varepsilon > 0 : B(y,e) \subset B(x,r)$, luego sea $\varepsilon = r - d(x,y) > 0$ vamos a ver que $B(y,e) \subset B(x,r)$. Para ello sea $z \in B(y,\varepsilon)$ comprobemos que $d(x,z) < r$:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon = r$$

Proposición

Sea el espacio métrico (E, d), entonces[3] *ocurre:*

1. $\forall A_1, \ldots, A_n$ *familia de conjuntos abiertos en* E, $\bigcap_{j=1}^{N} A_j$ *es abierto en* E.
2. $\forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *familia arbitraria de conjuntos abiertos en* E, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ *es abierto en* E.

Demostración:

- Tomamos $x \in \bigcap_{j=1}^{N} A_j$ para intentar probar que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{N} A_j$$

  Para ello, la idea es que fijado un j tendremos un ε_j que valdrá, luego como es un conjunto finito podemos quedarnos con el más pequeño y valdrá para todos los demás:

$$j \in \{1, \ldots, N\} \Rightarrow \exists \varepsilon_j > 0 : B(x, \varepsilon_j) \subset A_j \Rightarrow \varepsilon = \min_{j \in \{1, \ldots, N\}} \{\varepsilon_j\} > 0$$

  De esta forma ocurre que:

$$B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{N} B(x, \varepsilon_j) \subset \bigcap_{j=1}^{N} A_j$$

- Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \exists \beta \in I : x \in A_\beta$, luego se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Cabe destacar que la condición de intersección finita es indispensable, puesto que en $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $A_j = \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right)$ es abierto, pero $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{0\}$ **no** es abierto en $\mathbb{R}$.

Definición (Topología)

Toda familia de subconjuntos T de un conjunto X, $T \subset \mathcal{P}(X)$, que satisface:

- $\emptyset, X \in T$
- *T es invariante por intersecciones finitas.*
- *T es invariante por uniones arbitrarias.*

Se denomina como ***topología de X***.

Así, la familia de abiertos de un espacio métrico (X, d) es una topología.

Definición (Punto interior)

Dado un espacio métrico (E, d), se dice que x es un ***punto interior*** *de $A \subset E$ si cumple que:*

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$$

Denotamos como $\mathring{A} = int(A) = \{x \in A : x \text{ es punto interior}\}$

[3] Para la 2ª afirmación no es necesario que la familia sea finita

Observaciones:

- $\mathring{A} \subset A$
- A es abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$
- $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists U$ abierto : $x \in U \subset A$
- $A = \{0\} \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$
- $A = [0,1] \Rightarrow \mathring{A} = (0,1)$
- $\mathring{A} = \bigcup_{\mathcal{U} \subset A} \mathcal{U}$ donde U es abierto.

Ejemplo:

- Tomando $\mathbb{R}^2$ y el conjunto $A = \{(0,x) : 0 < x < A\}$ vemos que $\mathring{A} = \emptyset$

Definición

En un espacio métrico (E,d), decimos que un conjunto $A \subset E$ es cerrado si $E \setminus A$ es abierto.

Ejemplos:

- $\emptyset, E$ son cerrados.
- En $\mathbb{R}$, $(0,1]$ no es abierto ni cerrado.
- En $(0,2]$ el conjunto $(0,1]$, es cerrado puesto que su complementario es $(0,2] \setminus (0,1] = (1,2]$ es abierto en este espacio ambiente.
- En $\mathbb{R}^2$ los puntos son cerrados puesto que si tomamos $A = \{x\}$, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto. Tomamos $y \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon = \frac{||x-y||_2}{2}$ entonces $x \notin B(y,\varepsilon)$, luego es abierto.

Proposición

En cualquier espacio métrico (E,d), las bolas cerradas $\bar{B}(x,\varepsilon)$ son conjuntos cerrados.

Demostración:

Se reduce todo a ver que el complementario es abierto. Sea $z \in E \setminus \bar{B}(x,\varepsilon)$, entonces $d(z,x) > \varepsilon$. Si escogemos $0 < \delta < d(z,x) - \varepsilon$, entonces ¿se podrá verificar que $B(z,\delta) \subset E \setminus \bar{B}(x,\varepsilon)$? o lo que es lo mismo, que la intersección de esta bola de centro z con la bola cerrada inicial es el vacío:

$$y \in B(z,\delta) \Rightarrow d(y,x) \geq d(x,z) - d(z,y) > d(x,z) - \delta > \varepsilon \Rightarrow y \notin \bar{B}(x,\varepsilon)$$

Luego ya tenemos lo que queríamos probar

Proposición

Sea un espacio métrico (E,d) se cumple que:

1. *Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son cerrados, entonces: $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ cerrado*
2. *Si $\{A_\alpha\}_{j=1,\cdots,n}$ son cerrados, entonces: $\bigcup_{j=1}^{n} A_n$ cerrado*

Demostración:

Se demuestra por las Leyes de De Morgan

Definición (Punto de acumulación)

Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $A \subset E$, se dice que $x \in E$ es un ***punto de acumulación*** *de A si:*

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Al ***conjunto de puntos de acumulación*** *se le conoce como A'.*

Es decir, para cualquier "entorno" alrededor de ese punto sin contar con el punto, la intersección con el conjunto original es no vacía.

Observaciones:

- Sea $A = (0, 1)$ en $\mathbb{R}$, entonces $A' = [0, 1]$, de lo que se desprende que no tiene por qué darse $A' \subset A$
- $A = \{1\}$ en $\mathbb{R}$, entonces $A' = \emptyset$, de lo que se desprende que no tiene por qué darse $A \subset A'$
- $x \in A' \Leftrightarrow \forall U$ abierto $\subset E,\ x \in U \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
- Tomamos (E, d) siendo d la métrica discreta y un conjunto $A \subset E$, entonces:

  $$x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

  Con lo cual, si tomamos $0 < \varepsilon \leq 1$, entonces

  $$B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} = \emptyset \Rightarrow A' = \emptyset$$

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, entonces ocurre que:

$$A' \subset A \Leftrightarrow A \text{ cerrado}$$

Demostración:

- $\Leftarrow$:
  Si A es cerrado, entonces $E \setminus A$ es abierto. De esta forma, queremos decir que

  $$\forall x \notin A : \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset (E \setminus A) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow x \notin A' \Rightarrow A' \subset A$$

- $\Rightarrow$:
  Supongamos ahora que $A' \subset A$ veamos que el complementario es abierto, luego hay que ver que cualquier punto suyo es interior.
  Sea $x \in E \setminus A$, luego $x \notin A'$. Esto quiere decir que:

  $$\exists \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset (E \setminus A)$$

Definición (Adherencia)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, definimos ***la adherencia*** *de A como:*

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F} F$$

Donde F debe ser cerrado

Observaciones:

- Esto siempre está bien definido porque $F = E \supset A$ y E es cerrado.
- $\bar{A} \supset A$
- $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A
- $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

Ejemplos:

- $A = (0, 1)$ en $\mathbb{R}$, entonces $\bar{A} = [0, 1]$
- $A = \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, entonces $\bar{A} = \mathbb{R}$

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, entonces:

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Demostración:

Sea $B = A \cup A'$, vamos a probar que $B = \bar{A}$.

- $B \supset \bar{A}$

  Vamos a probar que B es un conjunto cerrado, puesto que si probamos esta propiedad se tiene que $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B} = B$ y quedaría demostrada la primera inclusión:

  $$x \in B^c = A^c \cap (E \setminus A') \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin A'$$

  En primer lugar, por ocurrir que $x \notin \bar{A}$, se tiene que:

  $$\exists \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$$

  Luego usando esa afirmación junto con que $x \notin A$, tenemos que:

  $$B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset A^c$$

  Queda solo por probar que $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus A'$, veamoslo:

  $$z \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \notin B(z, \delta) \subset B(x, \varepsilon) \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow (B(z, \delta) \setminus \{z\}) \cap A \subset (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow z \notin A' \Rightarrow \bar{A} \subset B$$

- $B \subset \bar{A}$

  Como $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$, todo se reduce a probar que $A' \subset \bar{A}$:

  $$A' \subset \bar{A} \Leftrightarrow \forall F \supset A \text{ cerrado}, A' \subset F \Leftrightarrow \forall F \supset A \text{ cerrado}, (E \setminus A') \supset F^c$$

  Luego vamos a intentar tratar de probar dicho enunciado equivalente:

  $$z \notin F \Rightarrow z \in F^c \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(z, \varepsilon) \subset F^c \Rightarrow (B(z, \varepsilon) \setminus \{z\}) \cap A \subset B(z, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow z \notin A' \Rightarrow z \in E \setminus A'$$

Corolario (Caracterización de adherencia)

Si un punto pertenece a la adherencia, entonces cualquier bola centrada en ese punto interseca con el conjunto:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Proposición (Caracterización de puntos de acumulación)

Podemos caracterizar los puntos de acumulación como:

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists x_\varepsilon \in A \setminus \{x\} : d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$$

En particular, en $\mathbb{R}^n$*:*

$$x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x\} : ||x - x_k||_2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Definición (Densidad)

Sea (E, d) *un espacio métrico y* $A \subset B \subset E$*, se dice que:*

$$A \text{ es denso en } B \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$$

En particular, A *es denso en* E *si* $\bar{A} = E$*.*

Ejemplo:

- El conjunto $\mathbb{Q}$ es denso dentro de $\mathbb{R}$.
- El conjunto $\mathbb{I}$ es denso dentro de $\mathbb{R}$.

Definición (Frontera)

Sea (E, d) *un espacio métrico y* $A \subset E$*, se define la frontera de* A *como:*

$$\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

Observaciones:

- $\partial(A)$ es cerrado.
- $A = [0, 1)$ en $\mathbb{R}$, implica que $\bar{A} = [0, 1]$, luego $\partial(A) = \{0, 1\}$
- $\partial(A) = \partial(A^c)$
- Ejercicio: probar que $\partial(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap (E \setminus \mathring{A})$. Pista: probar que $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$
- Ejercicio: probar que A' es cerrado.
- Ejercicio: estudiar cómo son los abiertos y los cerrados en un espacio con la métrica discreta.

Aclaraciones de Clase:

- Vamos a poner un ejemplo donde $\bar{B}(x, r) \neq \overline{B(x, r)}$, tomamos (E, d) espacio métrico donde d es la métrica discreta. Escogemos $x \in E$ y $r = 1$, tenemos que $B(x, 1) = \{x\} \Rightarrow \overline{B(x, 1)} = \{x\}$, pero vemos que $\bar{B}(x, 1) = E \neq \{x\}$.
- Veamos que no siempre $Diam(A) = Diam(\partial A)$, si tomamos $E = [0, 1]$, entonces $\partial E = \emptyset$, luego $Diam(E) = 1 = Diam(\emptyset)$. Si tomamos $\mathbb{R}$ y $A = (0, \infty)$, vemos que $\partial A = \{0\}$, luego $Diam()A) = \infty$ pero $Diam(\partial A) = 0$. De nuevo, si tomamos $E = [0, 1]$ y $A = (0, 1]$, tenemos que $\partial(A) = \{0\}$ y se tiene que $Diam(A) = 1 \neq 0 = Diam(\partial(A))$
- Veamos que $Diam(A) = Diam(\bar{A})$, como $A \subset \bar{A}$ entonces $Diam(A) \leq Diam(\bar{A})$. Y la otra desigualdad es muy fácil de probar también.
- Una buena propiedad es $(A \mathring{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Elemental la demostración.

SUCESIONES, COMPLETITUD Y COMPACIDAD

Definición (Sucesión y Subsucesión)

Sea E un conjunto. Una ***sucesión*** $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_n = \{x_n\}$ *es una función*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to E \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Una ***subsucesión*** *o* ***sucesión parcial*** *de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión:*

$$\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ donde } n_1 < n_2 < \ldots < n_j$$

Definición (Convergencia)

Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E, se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge a*** *$x \in E$ si:*

$$\forall \mathcal{U} \text{ abierto } \subset E \text{ tal que } x \in \mathcal{U},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U} : \forall n \geq n_0$$

Y entonces, escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Esta definición que se ha dado de convergencia[4] es equivalente a las siguientes caracterizaciones:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon) : \forall n \geq n_0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \varepsilon$$

Proposición

Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado, si suponemos que dicha métrica anterior viene dada por la norma especificada ahora, entonces:

- *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $\lim_{n\to\infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$
- *Sea* $\lambda_n \in \mathbb{R}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *donde* $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \in \mathbb{R}$ *y* $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in E$*, entonces se tiene que:* $\lambda_n \cdot x_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \cdot x \in E$

<u>Demostración</u>:

El caso $x = 0$ se deja como ejercicio. Sea $x \neq 0$ y $\varepsilon > 0$. Entonces:

$$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} : |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot ||x||} : \forall n \geq n_1 \text{ y } ||x_n - x||_E < \frac{\varepsilon}{2 \cdot C} : \forall n \geq n_2 : |\lambda_n| \geq C < \infty$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $n \geq n_0$

$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| = ||\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x|| \leq |\lambda_n| \cdot ||x_n - x|| + |\lambda_n - \lambda| \cdot ||x|| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2||x||} \cdot ||x|| = \varepsilon$$

<u>Observación</u>

Si $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ son normas equivalentes en E, entonces ambas normas tienen las mismas sucesiones convergentes y al mismo límite.

$$0 \leftarrow C||x_n - x||_1 \geq ||x_n - x||_2 \to 0$$

[4] Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, el límite es único.

Proposición (Convergencia en $\mathbb{R}^n$)

En $(\mathbb{R}^n, || \ ||_2)$ espacio euclídeo usual, sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} : x_m = (x_m^1, \cdots, x_m^n)$ la convergencia se caracteriza como:

$$x_m \xrightarrow{m\to\infty} x = (x^1, \ldots, x^n) \Leftrightarrow \forall j = 1, \cdots, n : x_m^j \xrightarrow{m\to\infty} x^j$$

Es decir, se reduce la convergencia en $\mathbb{R}^n$ a la convergencia de componentes en $\mathbb{R}$.

Demostración:

Trivialmente, se tiene que $|x_m^j - x_j| \leq ||x_m - x||_2$, luego :

$$x_m \to x \Rightarrow |x_m^j - x_j| \leq ||x_m - x||_2 \Rightarrow x_m^j \to x^j : \forall j = 1, \cdots, n$$

Recíprocamente, podemos expresar la norma como:

$$||x_m - x||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_m^j - x^j|^2$$

De este modo, por lo probado en la proposición anterior:

$$\lim_{m\to\infty} ||x_m - x||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \lim_{m\to\infty} |x_m^j - x^j|^2 = 0$$

Proposición (Caracterización de la topología vía sucesiones)

Sea (E, d) un espacio métrico. Se cumple que:

1. *Un subconjunto $A \subset E$ es cerrado $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : (\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in A)$*
2. *Un punto $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = x$*
3. *Un punto $x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : x_n \neq x : \lim_{n\to\infty} x_n = x$*

Demostración:

El conjunto A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$. Por tanto, si escogemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ de forma que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, vamos a ver que $x \in A$. Supongamos que no, entonces tenemos una sucesión convergente a x de forma que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x$ porque está contenida en A. En consecuencia, por el apartado 3: $x \in A' \subset A \sharp$.

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, podemos caracterizar de nuevo la convergencia en base a subsucesiones:

1. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Leftrightarrow \forall \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_{n_j} \xrightarrow{n\to\infty} x$
2. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Leftrightarrow \forall \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \exists \{y_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} : y_{m_k} \xrightarrow{n\to\infty} x$

Demostración:

- " $\Rightarrow$ "
  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$. Sea $n_{j_0} \geq n_0 : \forall n_j \geq n_{j_0} \geq n_0 : d(n_j, x) < \varepsilon$
  " $\Leftarrow$ "
  Trivial
- " $\Rightarrow$ "
  Trivial por (i).
  " $\Leftarrow$ " Supongamos que $x_n \nrightarrow x$. Entonces $\exists \varepsilon > 0 : \forall m \in \mathbb{N}, \exists n_m \geq m : d(x_{n_m}, x) \geq \varepsilon$
  $\{x_{n_m}\}_m \subset \{x_n\}_n$.
  Sea $\{y_{m_k}\}_k \subset \{x_{n_m}\}_m : d(y_{m_k}, x) \geq \varepsilon \Rightarrow y_{m_k} \nrightarrow x \sharp \Rightarrow x_n \to x$

Definición (Sucesión de Cauchy)

*Sea (E, d) un espacio métrico, se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es **sucesión de Cauchy** si:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

*Se dice que (E, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Observaciones

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo.
- $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo.
- Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es completo. Por ejemplo, la sucesión $x_n = \frac{1}{n} \in E$ es sucesión de Cauchy y no converge en E.

Definición (Conjunto Acotado)

*En (E, d) un espacio métrico, un conjunto $A \subset E$ es **acotado** si:*

$$\exists x \in E : \exists r > 0 : A \subset B(x, r) \Leftrightarrow \forall y \in A : d(y, x) < r$$

*En el caso $(E, ||\cdot||)$ espacio normado, $A \subset E$ es **acotado** si:*

$$\exists r > 0 : \forall a \in A : ||a|| < r \Leftrightarrow A \subset B(0, r)$$

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces, se cumple que:

- *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es convergente, entonces es una sucesión de Cauchy.*
- *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada.*
- *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es convergente, entonces es acotada.*
- *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión de Cauchy y $\exists \{x_{n_k}\}_{n_k}$ parcial tal que $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \to \infty} x$, entonces $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.*

Demostración:

- (i) y (iii) son triviales.
- Sea $\varepsilon = 1$. Entonces, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq 1$, luego se tiene que $\forall n \geq n_0 : d(x_n, x_{n_0}) \leq 1$. Por tanto, sea $r = \max\{1, d(x_{n_0}, x_k : k = 1, \ldots, n_0 + 1)\} + 1$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in B(x_{n_0}, r)$.
- Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Del mismo modo, para el mismo *epsilon* $\exists m \in \mathbb{N} : n_k \geq m : d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, sea $k = \max\{n_0, m\} : \forall n \geq k$ se tiene que por la desigualdad triangular: $d(x_n, x) \leq d(x_{n_j}, x_n) + d(x_{n_j}, x)$. Elegimos $n_j \geq k$ y vemos que:
$$d(x_n, x) \leq d(x_{n_j}, x_n) + d(x_{n_j}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Teorema (de Completitud de $\mathbb{R}^n$)

El espacio euclídeo habitual $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es un espacio métrico completo.

Demostración:

Sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ de la forma $x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n) : m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$|x_m^j - x_\ell^j| \leq ||x_m - x_\ell||_2 < \varepsilon : m, \ell \geq n_0 : \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Así que $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, la sucesión de la componente $\{x_m^j\}_{m\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y como $\mathbb{R}$ es completo, $x_m^j \xrightarrow[m\to\infty]{} x^j$. Por tanto, por la definición que se dio de convergencia en $\mathbb{R}^n$, si el límite es $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, entonces componente a componente $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$

Definición (Conjunto Secuencialmente Compacto)

*Sea (E, d) un espacio métrico. Se dice que $A \subset E$ es **secuencialmente compacto** si:*

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : \exists \{x_{n_k}\}_{n_k} \subset \{x_n\}_n : x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \in A$$

Observaciones

- Si A es secuencialmente compacto, entonces $A' \subset A$ y, por lo tanto, A es cerrado.
- Si A es secuenciamente compacto, entonces A es acotado (porque hay una bola que lo contiene completamente).

  En caso contrario, ocurriría que $\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in A : A \not\subset B(x, \varepsilon)$, peros si escogemos $\varepsilon = n$, entonces $A \not\subset B(x, \varepsilon)$, luego $\exists y_n \in A : d(y_n, x) \geq n$, es decir, podemos formar $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Claramente $\nexists \{y_{n_k}\}_{n_k} \subset \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente, ya que si existiese:

  $$d(y_{n_k}, y) < \varepsilon : \forall n_k \geq m \Rightarrow d(y_m, y_n) \geq d(y_m, x) - d(x, y_n) \geq m - d(x, y_n) \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty \Rightarrow \#$$

  Por tanto, llegamos a una contradicción.

Definición (Conjunto Compacto)

Sea (E, d) un espacio métrico:

- *Se dice que un **recubrimiento abierto** de $A \subset E$ es una familia de abiertos en cuya unión se encuentra A:*

  $$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I} : \mathcal{U}_i \text{ abierto } \ \wedge \ A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$$

- *Un **subrecubrimiento finito** de A es una familia finita de intervalos abiertos en cuya unión se encuentra A:*

  $$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m\} \subset \mathcal{U} : A \subset \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$$

- *Se dice que $A \subset E$ es **compacto** si para todo recubrimiento abierto de A se puede extraer un subrecubrimiento finito.*

Observaciones

- Si A es compacto, entonces A es acotado.

  Sea $x \in A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x, n) \xRightarrow{\exists m\in\mathbb{N}} A \subset B(x, m)$

- $(0, 1)$ no es compacto en $\mathbb{R}$.

  En efecto, sea $\mathcal{U}_n = (\frac{1}{n}, 1)$. Es claro que $(0, 1) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_i$, pero $\nexists m : (0, 1) \subset \mathcal{U}_m$

Definición (Conjunto Totalmente Acotado)

*Sea (E,d) un espacio métrico, se dice que $A \subset E$ es **totalmente acotado** si ocurre que:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \{x_1, \dots, x_m\} \subset A : A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_m, \varepsilon)$$

Observaciones

- Si A es totalmente acotado, entonces A es acotado.

  Sea $r = \max\{d(x_1, x_j) : j = 2, \dots, n\}$ y sea $R = r + 3\varepsilon$. Entonces $B(x_j, \varepsilon) \subset B(x_1, R) \Rightarrow A \subset B(x_1, R)$

- En $\mathbb{R}$ con la métrica discreta, $\mathbb{R} = B(0, 2)$, es decir, $\mathbb{R}$ es acotado. Sin embargo $\mathbb{R}$ no es totalmente acotado.

  Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. La bola $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$, es decir, $\mathbb{R} \not\subset B(x_1, \frac{1}{2}) \cup \ldots \cup B(x_m, \frac{1}{2})$

Lema (Lema 1)

Sea (E,d) un espacio métrico, si A es compacto, entonces A es cerrado.

Demostración:

Hay que ver que $E \setminus A$ es abierto, es decir, que todo punto es interior: $\forall x \in E \setminus A : \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset E \setminus A$.

Primero, sea $\mathcal{U}_n = E \setminus \bar{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ abierto. Vamos a probar que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$. Tomamos $y \in A$, luego $d(y, x) > 0$ para $x \notin A$, luego $\exists n \in \mathbb{N} : d(y, x) > \frac{1}{n} \Rightarrow y \notin \bar{B}(x, \frac{1}{n}) \Rightarrow y \in \mathcal{U}_n$.

Como A es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, luego $A \subset \mathcal{U}_{n_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{n_k} = \mathcal{U}_{n_k} : n_1 < \ldots < n_k$ porque la sucesión de conjuntos es creciente.

$$\forall y \in A : y \in U_{n_k} \text{ para } \exists! n_k \Rightarrow y \notin \bar{B}\left(x, \frac{1}{n_k}\right) \Rightarrow \bar{B}\left(x, \frac{1}{n_k}\right) \cap A = \emptyset$$

Finalmente, $B\left(x, \frac{1}{n_k}\right) \subset E \setminus A$

Lema (Lema 2)

Sea (E,d) un espacio métrico compacto, si $A \subset E$ cerrado, entonces A es compacto.

Demostración:

Escojamos un recubrimiento de abiertos de A, es decir:

$$A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_i \text{ abierto}$$

De este modo, podemos escribir el espacio ambiente como:

$$E \subset (E \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

Como E es compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito $E \subset (E \setminus A) \cup \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_m$ y como $A \subset E$ y no está en su complementario, $A \subset \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_m$.

Lema (Lema 3)

Sea (E,d) un espacio métrico y $A \subset E$ secuencialmente compacto, entonces A es totalmente acotado.

Demostración:

Supongamos que A no es totalmente acotado, es decir:

$$\exists r > 0 : \forall \{x_1, \ldots, x_m\} \subset A : A \not\subset B(x_1, r) \cup \ldots \cup B(x_m, r)$$

Sea $z_1 \in A$, entonces $A \setminus B(z_1, r) \neq \emptyset$. Por tanto, podemos escoger $z_2 \in A \setminus B(z_1, r)$ y entonces $A \setminus (B(z_1, r) \cup B(z_2, r)) \neq \emptyset$. De modo análogo, podemos construir la sucesión:

$$z_n \in A \setminus (B(z_1, r) \cup \ldots \cup B(z_{n-1}, r)) \neq \emptyset$$

Y, además, ocurre que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ donde } d(z_m, z_n) \geq r : m \neq n$$

Luego se tiene que $\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ no posee ninguna subsucesión convergente, lo cual contradice que A sea secuencialmente compacto.

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

Sea (E, d) un espacio métrico:

$$A \subset E \text{ es compacto } \Leftrightarrow A \text{ es secuencialmente compacto}$$

Demostración:

- $\boxed{\Rightarrow}$

  Supongamos que A compacto. Por reducción al absurdo, si A no es secuencialmente compacto, entonces $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sin parciales convergentes.

  Sin pérdida de generalidad, suponemos que todos los términos son distintos unos de otros, es decir, $x_n \neq x_m : n \neq m$ porque si existiese un número infinito de términos con el mismo valor, entonces podríamos coger la parcial formada por dichos términos y sería convergente. Escogiendo el conjunto formado por los puntos de la sucesión $B = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow B' = \emptyset \subset B$, luego B es cerrado y como $B \subset A$ que es compacto, por el Lema 2, B es cerrado (y su complementario abierto), por lo que (si lo siguiente no ocurriese $B' \neq \emptyset$):

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_n > 0 : B(x_n, \varepsilon_n) \cap (\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \setminus \{x_n\}) = \emptyset$$

  $B = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon_n)$. Como B es compacto, $B \subset B(x_{n_1}, \varepsilon_{n_1}) \cup \ldots \cup B(x_{n_m}, \varepsilon_{n_m})$, lo cual es una contradicción pues B no es un conjunto finito, por lo tanto A es secuencialmente compacto.

- $\boxed{\Leftarrow}$

  Supongamos ahora que A es secuencialmente compacto. Veamos que A es compacto, es decir, que si $A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$, entonces $A \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{i_m}$.

  Como A es secuencialmente compacto, es totalmente acotado por el Lema 3, entonces, dado $\varepsilon > 0$ sabemos[5] que:

  $$A \subset B(z_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(z_m, \varepsilon) : z_1, \ldots, z_m \in A \Rightarrow A \subset \mathcal{U}_{i_{z_1}} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{i_{z_m}}$$

Ejercicios

- Caracterizar los compactos de un espacio métrico con la distacia discreta
- Ver cuales son ciertos. Sean $A, B \begin{cases} \text{abiertos} \\ \text{cerrados} \\ \text{compactos} \end{cases}$. Entonces $A + B$ también lo es.

[5]Se aplica la propiedad de Lebesque que se ve más adelante en este documento

Proposición (Constante de Lebesgue)

Si A es secuencialmente compacto, para un recubrimiento $A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \exists i_x \in I : B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_x}$$

Demostración:

En efecto, si suponemos lo contrario:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = \frac{1}{n} : \exists x_n \in A : \forall i \in I : B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset \mathcal{U}_i$$

Como A es secuencialmente compacto, $\exists \{y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : y_m \to y \in A$. Además, como $y \in A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$, entonces $y \in \mathcal{U}_{i_0}$, es decir, que $\exists \delta > 0 : B(y, \delta) \subset \mathcal{U}_{i_0}$ por ser este último abierto.

Sea $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$ y $\forall nn \geq n_0 : d(y_n, y) < \frac{\delta}{2}$ tenemos que la bola $B(y_n, \frac{1}{n}) \subset B(y, \delta) : \forall n \geq n_0$.

Sea $z \in B(y_n, \frac{1}{n})$, tenemos que:

$$d(z, y_n) < \frac{1}{n} : d(z, y) \leq d(z, y_n) + d(y_n, y) < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Así, $B(x_m, \frac{1}{n}) = B(y_n, \frac{1}{n}) \subset B(y, \delta) \subset \mathcal{U}_{i_0}$, lo cual contradice que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset \mathcal{U}_i$

Observaciones

- $[0, 1]$ es compacto en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$. Entonces, es una sucesión acotada y tiene por lo tanto una parcial convergente:

  $$\{x_{n_k}\}_{n_k} \subset \{x_n\}_n, x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$$

  Como $[0, 1]$ cerrado $\Rightarrow x \in [0, 1] \subset [0, 1]$.

  Análogamente, para $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ es compacto.

- Sea (E, d) un espacio métrico. Decir que $A \subset E$ es compacto $\Leftrightarrow (A, d)$ es compacto.

Teorema

$$(E, d) \text{ es compacto } \Leftrightarrow E \text{ es completo y totalmente acotado}$$

Demostración:

- $\boxed{\Rightarrow}$ Como E es compacto, por el Teorema de Bolzano - Weierstrass E es secuencialmente compacto, y por el Lema 3 E es totalmente acotado.

  Ahora, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión de Cauchy. Por el Teorema de Bolzano - Weierstrass existe una parcial convergente, y por ser de Cauchy, la sucesión converge.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Veamos que es secuencialmente compacto para poder aplicar el Teorema de Bolzano - Weierstrass. Sea $\{x_n\}_n \subset E$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_n \neq x_m, n \neq m$ por el mismo argumento visto en anteriores demostraciones. Como E es totalmente acotado, $E \subset B(y_1^1, 1) \cup \ldots \cup B(y_{m_1}^1, 1)$. Entonces,

  $$\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \exists j : \{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(y_j^1, 1)$$

  Iterativamente, $E \subset B(y_1^2, \frac{1}{2}) \cup \ldots \cup B(y_{m_1}^2, \frac{1}{2})$. Entonces,

  $$\{x_n^2\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}, \exists j : \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(y_j^2, 1)$$

En general, $\{x_n^m\} \subset \{x_n^{m-1}\}_n$ y $\{x_n^m\} \subset B(y_{j_m}^m, \frac{1}{m})$. Finalmente, sea

$$z_n = x_n^n : \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sean $m, n \geq n_0 : x_m^m = z_m, x_n^n = z_n \in B(y_j^{n_0}, \frac{1}{n_0}) \Rightarrow d(z_m, z_n) < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Entonces, $\{z_m\}_m$ es una sucesión de Cauchy.

Como E es completo, $\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es parcial de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, por lo que E es secuencialmente compacto.

Corolario

Sea (E, d) espacio métrico completo. Entonces, $A \subset E$ es compacto $\Leftrightarrow$ A es cerrado y totalmente acotado.

Demostración:

- $\boxed{\Rightarrow}$ Por la proposición anterior, basta probar que A es cerrado.

  Sea $x \in A'$, y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ con $x_n \neq x$ hay que ver que $x \in A$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en A y A es completo, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in A$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Sabemos que E es completo y A es cerrado y totalmente acotado. Veamos que A es completo.

  Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ una sucesión de Cauchy, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es sucesión de Cauchy y como E es completo ocurre que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in E$, pero además como A es cerrado por hipótesis se tiene $x \in A$.

Teorema (Heine - Borel)

$$A \subset \mathbb{R}^n \textit{ compacto } \Leftrightarrow A \textit{ es cerrado y acotado}$$

Demostración:

- $\boxed{\Rightarrow}$ Como hemos probado que $\mathbb{R}^n$ es completo, esta implicación es trivial a partir del corolario anterior.

- $\boxed{\Leftarrow}$. Sea A cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, debemos ver que A es secuencialmente acotado.

  Sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset A$, entonces por ser acotado se tiene que $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}^n$. Por consiguiente, $\exists \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ parcial convergente en $\mathbb{R}^n$ y entonces:

  $$y_k \xrightarrow{n\to\infty} y \in \bar{A} = A \Rightarrow \text{ compacto}$$

Ejercicio**: En $\mathbb{R}^n$, A es acotado $\Leftrightarrow$ A es totalmente compacto.

Ejercicio*: $\mathbb{R}^n$, A es acotado $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ es compacto.

Teorema (Principio de Conjuntos Encajados)

Sea (E, d) espacio métrico y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, A_n \subset E$ y $A_n \neq \emptyset$ compacto tal que $A_{n+1} \subset A_n$. Entonces,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$

Demostración:

Sea $x_n \in A_n \subset A_m : m \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A_1$, y como A_1 es compacto, $\exists \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente $x_{n_k} \to x \in A_1$.

Fijado $m \in \mathbb{N}, \exists k_m \in \mathbb{N} : m_k \geq m, k \geq k_m$

$$\{x_{n_k}\}_{k\geq k_m} \text{ converge a } x$$

Además, $\{x_{n_k}\} \subset A_m : k \geq k_m$, y como A_m es compacto, $x \in A_m : \forall m \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m \neq \emptyset$$

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Definición (Límite)

*Sean $(E,d),(F,d')$ espacios métricos, $A \subset E$ de forma que $f : A \to F$ y $x_0 \in A'$ un punto de acumulación, se dice que $L \in F$ es el **límite**[6] **de f en** x_0 si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A \cap (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) : d'(f(x),L) < \varepsilon$$

Y en ese caso escribimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. De hecho, dicha definición es equivalente a:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(A \cap (B_d(x_0,\delta) \setminus \{x_0\})) \subset B_{d'}(L,\varepsilon)$$

Proposición (Caracterización del límite)

Si $f : A \subset E \to F$ y $x_0 \in A'$ es un punto de acumulación, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\} : \Big(x_n \to x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L\Big)$$

Definición (Continuidad)

*Sean $(E,d),(F,d')$ espacios métricos, $A \subset E$ de forma que $f : A \to F$ y $x_0 \in A$ un punto del conjunto, se dice que f es **continua en** x_0 si:*

$$\begin{cases} \text{nada} & \text{si } x_0 \notin A' \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) & \text{si } x_0 \in A \end{cases}$$

Diremos que f es continua en A si es continua en todos los puntos de A.

Teorema

Sean $(E,d),(F,d')$ espacios métricos, $A \subset E, f : A \to F$. Son equivalentes:

1. *f es continua en A*
2. *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \in A$, entonces $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$*
3. *Si $\mathcal{U} \subset F$ es abierto, entonces $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en A.*
4. *Si $B \subset F$ es cerrado, entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en A.*

<u>Demostración</u>:

- $(i) \Rightarrow (ii)$

  Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : x_n \to x_0 \in A$. Si $x_0 \notin A'$, entonces

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n = x_0 : \forall n \geq n \Rightarrow f(x_n) = f(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0) : \forall n \geq n_0$$

  Por otro lado, si $x_0 \in A'$, entonces

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A \cap (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

  Luego entonces se tiene que:

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x_n,x_0) < \delta \Rightarrow x_n \in B(x_0,\delta) \Rightarrow d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$$

[6] En caso de existir, este debe ser único

- $(ii) \Rightarrow (iv)$

  Suponemos $B \subset F$ cerrado y tomamos $\{x_n\} \subset\in (f^{-1}(B) \cap A) : x_n \to x_0 \in A$ ¿ ocurre que $x_0 \in f^{-1}(B)$, es decir, que $f(x_0) \in B$? Por (ii) tenemos que, $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x_0)$ y además $\{f(x_n)\} \subset B$, por tanto, por ser B cerrado, $f(x_0) \in \bar{B} = B$.

- $(iv) \Rightarrow (iii)$

  Como $\mathcal{U} \subset F$ abierto, entonces $B = F \setminus \mathcal{U}$ es cerrado, luego:

  $$f^{-1}(B) = (E \setminus f^{-1}(\mathcal{U})) \cap A \text{ es cerrado } \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) \text{ es abiertyo en } A$$

- $(iii) \Rightarrow (i)$

  Sea $x_0 \in A$ y $\varepsilon > 0$ tomamos $\mathcal{U} = B(f(x_0), \varepsilon) \Rightarrow x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$ abierto $\Rightarrow x_0 \in \mathring{A}$ de forma que:

  $$\exists d > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(\mathcal{U}) \Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U} = B(f(x_0), \varepsilon)$$

Teorema

Sean $(E, d), (F, d')$ espacios métricos, $A \subset E$ un compacto y $f : A \to F$ una función continua, entonces $f(A)$ es compacto.

Demostración:

Sea $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ unión de abiertos de $F : \forall i \in I$ sabemos que:

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\right) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(\mathcal{U}_i)}_{\text{abierto}} \Rightarrow A \subset f^{-1}(\mathcal{U})_{i_1} \cup \ldots \cup f^{-1}(\mathcal{U})_{i_m}$$

Entonces, de nuevo ocurre que:

$$f(A) \subset f(f^{-1}(\mathcal{U})_{i_1} \cup \ldots \cup f^{-1}(\mathcal{U})_{i_m}) \subset f(f^{-1}(\mathcal{U})_{i_1}) \cup \ldots \cup f(f^{-1}(\mathcal{U})_{i_m}) \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{i_m}$$

Observación

- Toda función constante es continua, es decir, $f(x) = k$ siempre es continua.
- Si la métrica de partida es la discreta, entonces $f(x)$ siempre es continua
- Las relaciones entre continuidad y las propiedades topológicas siguen la siguiente tabla:

  $$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} A & \longrightarrow & f(A) & f^{-1}(B) & \longleftarrow & B \\ \textit{cerrado} & \not\longmapsto & \textit{cerrado} & \textit{cerrado} & \longmapsfrom & \textit{cerrado} \\ \textit{abierto} & \not\longmapsto & \textit{abierto} & \textit{abierto} & \longmapsfrom & \textit{abierto} \\ \textit{acotado} & \not\longmapsto & \textit{acotado} & \textit{acotado} & \not\longmapsfrom & \textit{acotado} \\ \textit{compacto} & \longmapsto & \textit{compacto} & \textit{compacto} & \not\longmapsfrom & \textit{compacto} \end{array}$$

  Sin embargo, tomando el espacio $\mathbb{R}^n$ podemos consdierar como cierto que los acotados van a acotados.

NO SE QUE ES ESTO Recordamos la definición de continuidad en $\mathbb{R}$:

$f : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), f$ es continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in (a, b) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Utilizando la extensión de la definición de continuidad, si $E = \mathbb{R}, d = |\cdot|, F = \mathbb{R}, d' = |\cdot|$ y $A = (a, b)$

$$f(B_d(x_0, \delta) \cap A) \subset B_{d'}(f(x_0), \varepsilon)$$

Teorema

Sean $(E, d_1), (F, d_2), (G, d_3)$ *espacios métricos y supongamos* $A \subset E, B \subset F$ *tal que* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} G$ *ambas continuas, entonces:*

$$g \circ f : A \to G \text{ es continua}$$

<u>Demostración</u>:

Sea $\mathcal{U} \subset G$ abierto, se tiene $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ y como g es continua, entonces $g^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto de B, por extensión, como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ es abierto de A

Proposición

Sean (E, d) *espacio métrico,* $(F, ||\cdot||)$ *espacio normado,* $A \subset E$ *y* $x_0 \in A'$ *un punto de acumulación, se cumple:*

- *Si* $f, g : A \to F, \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ *y* $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$*, entonces:*

$$\exists \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $g : A \to F$*,* $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ *y* $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \in F$*, entonces:*

$$\exists \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$$

- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $g : A \to F$*,* $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \neq 0$ *y* $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \in F$*, entonces:*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{L_2}{L_1}$$

<u>Demostración</u>:

- $(i), (ii)$ son fáciles
- (iii)

  Sin pérdida de generalidad, supongamos $L_1 > 0$, entonces sea $\varepsilon = \frac{L_1}{3} > 0$ se tiene que

$$\exists \delta > 0 : f\left((B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap A\right) \subset \left(L_1 - \frac{L_1}{\varepsilon}, L_1 + \frac{L_1}{\varepsilon}\right)$$

  Por tanto, se ocurre que $\forall x \in B(x_0, \delta) : f(x) > 0$. Veamos que $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L_1}$, es decir, $\forall x \in A : x \neq x_0$ y $d(x, x_0) < \delta$ se tiene que $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L_1}\right| < \varepsilon$.

  Por como hemos escogido el delta tenemos que $f(x) > \frac{2\cdot L_1}{3}$, entonces $\frac{1}{|L_1\cdot f(x)|} < \frac{3}{2\cdot L_1^2}$ así que tenemos:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L_1}\right| = \left|\frac{L_1 - f(x)}{L_1 \cdot f(x)}\right| \leq \frac{3\varepsilon}{2L_1^2} : \forall \varepsilon > 0$$

Corolario

Sean (E, d) *espacio métrico y* $(F, ||\cdot||)$ *espacio normado,* $A \subset F$ *un subconjunto y* $x_0 \in A \cap A'$ *un punto de acumulación del conjunto:*

- *Si* $f, g : A \to F$ *son continuas en* x_0*, entonces* $f + g : A \to F$ *es continua en* x_0*.*
- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $g : A \to F$ *son continuas en* x_0*, entonces* $f \cdot g : A \to F$ *es continua en* x_0*.*
- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $g : A \to F$ *son continuas en* x_0 *con* $\forall x \in A : f(x) \neq 0$*, entonces* $\dfrac{g}{f} : A \to F$ *es continua en* x_0*.*

Proposición (Límite en $\mathbb{R}^{\ltimes}$)

Sea (E,d) espacio métrico, $A \subset E$ un subconjunto, $f: A \to \mathbb{R}^n$ tal que $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_j : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$ un punto de acumulación, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L = (L_1, \dots, L_n) \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : \lim_{x \to x_0} f_j(x) = L_j$$

Es decir, reducimos el cálculo de límites en $\mathbb{R}^{\ltimes}$ al cálculo de cada coordenada en $\mathbb{R}$.

Teorema (Regla del Bocadillo)

Sean $f, g, h : A \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$ un punto de acumulación y se satisface que:

- $\exists \delta > 0 : g(x) \leq f(x) \leq h(x) : \forall x \in (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap A$
- $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$

Entonces se tiene que:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Teorema (Límites reiterados)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen que:

- $\exists \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists \lim_{x \to a} f(x,y) = L_1(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \lim_{y \to b} f(x,y) = L_2(x)$

Entonces, existen los límites reiterados y son iguales:

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x,y) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x,y) = L$$

<u>Demostración</u>:

Por hipótesis, tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < ||(x,y) - (a,b)|| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

También sabemos que:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists \delta_1 = \delta_1(y) > 0 : 0 < |x - a| < \delta_1(y) \Rightarrow |f(x,y) - L_1(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, solo hay que ver que $L_1(y) \xrightarrow[y \to b]{} L$. Suponemos que $|y - b| < \delta$, y sea x tal que $|x - a| < \min\{d_1(y), \delta\}$, entonces:

$$|L_1(y) - L| \leq |L_1(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

El primer sumando es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ por hipótesis y, para el segundo sumando, si tomamos la métrica $||\cdot||_\infty$, observamos que $||(x,y) - (a,b)||_\infty < \delta$. Como la métrica infinito es equivalente a la métrica euclídea, solo diferirá en una constante, luego ya lo tenemos.

Ejemplos

- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

  Si $y \neq 0, \lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$

  Si $x \neq 0, \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$

  Como los límites reiterados existen pero no coinciden, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

  Si $y \neq 0, \lim_{x\to 0} f(x,y) = 1$

  Si $x \neq 0, \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$

  Sin embargo, observamos que para los puntos de la recta $y = x$ tenemos:

  $$f(x,x) = \frac{2\cdot|x|}{\sqrt{2\cdot x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

  Más generalmente, para una recta cualquiera que pase por el origen, es decir, $y = \lambda \cdot x, \lambda \in \mathbb{R}$ se tiene:

  $$f(x,\lambda\cdot x) = \frac{|x|(\lambda+1)}{\sqrt{x^2(1+\lambda^2)}} = \frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

  Como $\forall \{x_n\} \subset \mathcal{R} : x_n \to (0,0)$ se tiene que $f(x_n) = \frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \nrightarrow 0$, entonces el límite no existe. Lo cual pone de manifiesto que la existencia de los límites reiterados no implica la existencia del límite.

- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\operatorname{sen}(x^2+y^2) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

  Fijando la y,$y \neq 0$, calculamos el límite

  $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{y}\operatorname{sen}(x^2+y^2) = 0$$

  Además, observamos que si fijamos la $x \in \mathbb{R}$,

  $$\nexists \lim_{y\to 0} \frac{x}{y}\operatorname{sen}(x^2+y^2)$$

- Sea $f(x,y) = \begin{cases} y\operatorname{sen}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

  Fijando la x,$x \neq 0$, calculamos el límite

  $$\lim_{y\to 0} y\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

  Además, observamos que si fijamos la $y \in \mathbb{R}$,

  $$\nexists \lim_{x\to 0} y\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

  Pero el límite, por la regla del bocadillo,

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Teorema (Coordenadas Polares)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = L \text{ uniformemente en } \theta \in [0, 2\pi)$$

Demostración:

- $\Rightarrow$. Inmediato por la definición de límite
- $\Leftarrow$. Sabemos que $\forall\varepsilon, \exists\delta > 0 : |f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - L| < \varepsilon : \forall 0 < r < \delta, \forall\theta \in [0, 2\pi)$, y queremos ver que $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : ||(x,y)|| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

  A través de un cambio de variable, escribiendo x, y en sus coordenadas polares, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$, observamos que la norma del vector (x,y), $||(x,y)|| = r < \delta$. Por lo tanto, independientemente del ángulo θ, se tiene que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Ejemplos

- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) = (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r^2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta = 0$$

  Es decir, el límite es uniforme en θ ya que $0 < |r^2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta| < r^2$
- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\operatorname{sen}(x^2+y^2) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen} r^2 \nrightarrow 0 \text{ uniformemente en } \theta \in [0, 2\pi)$$

  Ya que $\sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left|\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right| \cdot |\operatorname{sen} r^2| = \infty$

Proposición

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\mathcal{U}$ es abierto, $(a,b) \in \mathcal{U}$, y sea $\alpha : [-1,1] \to \mathcal{U}$ continua y cumpliendo que $\alpha(0) = (a,b)$. Entonces, si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, entonces

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) = L$$

Demostración:

Trivial a partir de la definición.

Ejemplos

- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) = (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

  Buscamos rectas de la forma $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$

  $$f(x, \lambda x) = \frac{\lambda^2 x^3}{(\lambda^2+1)\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+1)}x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Consideremos la curva $\alpha(t) = (t^2, t)$

$$f(\alpha(t)) = \frac{t^2 \cdot t}{t^4 + t^2} = \frac{t^2}{t^2+1} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \frac{r^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} = r\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \to 0 \text{ uniformemente en } \theta$$

- 31 d) COMPLETAR

Teorema

Sea (E, d) espacio métrico, sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua y sea $B \subset A$ compacto. Entonces, $\exists x_1, x_2 \in B$ tal que

$$f(x_1) = \max_{x\in B} f(x) \quad f(x_2) = \min_{x\in B} f(x)$$

Demostración:

Sabemos que $f(B) \subset \mathbb{R}$ es compacto, y por el Teorema de Heine - Borel, $f(B)$ es cerrado y acotado. Por ser acotado, sabemos que

$$\begin{cases} \exists M = \sup\limits_{x\in B} f(x) \\ \exists m = \inf\limits_{x\in B} f(x) \end{cases}$$

, y por ser cerrado, $M = f(x_1), m = f(x_2) : x_1, x_2 \in B$

Definición (Continuidad Uniforme)

*Sean $(E, d), (F, d')$ espacios métricos. Se dice que $f : A \to F, A \subset E$ es **uniformemente continua** en A si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \textit{ si } d(x, y) < \delta, \forall x, y \in A$$

Observación

- Si f es uniformemente continua en A, entonces f es continua en A

Teorema

Sea $f : A \to F, A \subset E$ y supongamos que f es continua y A es compacto. Entonces, f es uniformemente continua.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in A$. Como f es continua en x, $\exists\delta_x > 0 : f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$

Como $A \subset \bigcup_{x\in A} B(x, \frac{\delta_x}{2})$, entonces $A \subset B(x_1, \frac{d_{x_1}}{2}) \cup \ldots \cup B(x_m, \frac{d_{x_m}}{2})$

Sea $\delta = \min\{\frac{d_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{d_{x_m}}{2}\} > 0$, y sean $x, y \in A : d(x, y) < \delta$

Como $x \in A$, $\exists j : 1 \leq j \leq m : B(x_j, \frac{d_{x_j}}{2}))$. Entonces, $d'(f(x), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad triangular,

$$d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) \leq< \frac{\delta_{x_j}}{2} + \frac{\delta_{x_j}}{2} < \delta_{x_j}$$

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_j)) + d'(f(x_j), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

CÁLCULO DIFERENCIAL

DIFERENCIABILIDAD

Recordemos que si $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, y $x_0 \in I$, se define la derivada como

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \langle (x - x_0, y - f(x_0), (f'(x_0), -1)) \rangle = 0$

Definición (Derivada)

*Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, A$ abierto, $x_0 \in A$, y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Se define como la **derivada** de f en la dirección v en el punto x_0 como:*

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

*También se conoce como **derivada direccional***

Observaciones

- $D_{\lambda v} f(x_0) = \lambda D_v f(x_0)$
- Fijados $x_0 \in A, v \in \mathbb{R}^n$, si llamamos $\phi(t) = f(x_0 + tv)$
$$D_v f(x_0) = \phi'(0)$$

Ejemplos

- Sea $f(x, y) = |x^2 - y^2|^{\frac{1}{2}}$. Estudiemos cuando existe $D_v f(0, 0)$. Sin pérdida de generalidad, suponemos v vector unitario de la forma $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) : \theta \in [0, 2\pi)$.
$$\frac{f(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta) - 0}{t} = \frac{|t|}{t} |\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta|^{\frac{1}{2}}$$
Lo cual converge a 0 si $\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$. Es decir, f es derivable en $(0, 0)$ en las direcciones
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Definición (Derivada Parcial)

*Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, A$ abierto y $x_0 \in A$. La **derivada parcial j-ésima** de f en x_0 :*

$$D_j f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = D_{e_j} f(x_0)$$

donde $e_j = (0, \ldots, \underbrace{1}_{j-\acute{e}sima}, \ldots, 0)$

Observación

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in A$. Entonces, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \phi'(0)$

$\phi(t) = f(x_0 + (0, \ldots, \underbrace{t}_{j-ésima}, \ldots, 0))$

Es decir, equivale a derivar f en la variable x_j, fijando el resto $x_1, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ como si fueran constantes.

Definición ()

*Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in A$ tiene todas las derivadas parciales, se define el **gradiente de f en** x_0, $\nabla f(x_0)$:*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = y \operatorname{sen}(xy^2)$. Entonces:

- $D_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^3 cos(xy^2)$
- $D_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sen}(xy^2) + 2xy^2 cos(xy^2)$
  $\nabla f(0, 1) = (1, 0)$

Observación

Si tenemos una función vectorial del tipo $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se pueden definir análogamente las derivadas direccionales como el vector de las derivadas de cada componente:

$$D_v f(x_0) = (D_v f_1(x_0), \ldots, D_v f_m(x_0)) \in \mathbb{R}^m)$$

Observación

Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal, $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = M_{1,m}$

$$L(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, L(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{L(e_j)}_{a_j}$$

Proposición

Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces L es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$:

$$|L(x) - L(y)| = |L(x-y)| = |\langle (a_1, \ldots, a_n), x-y \rangle| \leq ||(a_1, \ldots, a_n)||_2 \cdot ||x-y||_2 \leq \varepsilon : ||x-y||_2 < \delta = \frac{\varepsilon}{2|||(a_1, \ldots, a_n)||}$$

Obsevación

Un **hiperplano afín**, $H \subset \mathbb{R}^m$, es un subespacio afín de dimensión $m-1$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^m : L(x) = d\} : L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), d \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Sea $m = 2$, y sea $L(x,y) = x + y$. El hiperplano afín $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = d\}$

Observación

Supongamos que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in I$

$$\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \to f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_0+t) - (f(x_0) + tf'(x_0))}{t} \to 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0+t) - (f(x_0) + tf'(x_0))}{|t|} \to 0$$

Definición (Función Diferenciable)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, $x_0 \in A$. Se dice que f es ***diferenciable en*** *x_0 si*

$$\exists L_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \frac{f(x_0+h) - (f(x_0) + L_{x_0}(h))}{||h||} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Demostración

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in I$. f es diferenciable en $x_0 \Leftrightarrow f$ es derivable en x_0. Además, $L_{x_0}(t) = t \cdot f'(x_0) : t \in \mathbb{R}$

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, A$ abierto, $x_0 \in A$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable en x_0, entonces existe $D_v f(x_0)$. Además, si existe $L'_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $\frac{f(x_0+h) - \left(f(x_0) + L'_{x_0}(h)\right)}{||h||} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, entonces $L'_{x_0}(v) = D_v f(x_0) : ||v|| = 1$

Demostración:

Sea $h = t \cdot v : t \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x_0+tv) - f(x_0) - tL_{x_0}(v)}{|t|} \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} \to L_{x_0}(v)$$

Es decir, $D_v f(x_0) = L_{x_0}(v)$

—- METER CLASE JUANDI 03/11/2021 —

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in A$. Entonces, f es continua en x_0.

Demostración:

Sea $\varepsilon = 1$, y sea $\delta' > 0 : ||x - x_0|| < \delta'$

$|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)| < ||x - x_0||$

Así,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)| + |df(x_0)(x - x_0)| <\leq ||x - x_0||(1 + ||\nabla f(x_0)||)$$

Tomando $\varepsilon > 0$ arbitrario, y $\delta = \text{mín}\{\frac{\delta'}{||\nabla f||+1}, \frac{\varepsilon}{1+||\nabla f||}\}$, obtenemos

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon : ||x - x_0|| < \delta$$

<u>Observación</u>

Si f es diferenciable en x_0, entonces existe $D_v f(x_0) : \forall v$ y además f es continua en x_0

<u>Ejemplo</u>

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Sea $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$$\frac{f(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{t^2\cos^2\theta + t^4 \operatorname{sen}^4\theta}$$

- $\cos\theta = 0$
  $= 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 = D_v f(0,0)$
- $\cos\theta \neq 0$
  $= \frac{\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta + t^2 \operatorname{sen}^4\theta} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = D_v f(0,0)$

Entonces, f no es continua en $(0,0)$

También podemos verlo por la aproximación por la curva (y^2, y). Entonces, $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in A$. Si f, g son diferenciables en x_0, entonces se cumple:

- *$f + g$ es diferenciable y $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$*
- *$f \cdot g$ es diferenciable en x_0 y $d(f \cdot g)(x_0) = g(x_0) \cdot df(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)$*
- *Si $f(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{1}{f}$ es diferenciable en x_0 y $d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f(x_0)\cdot dg(x_0) - g(x_0)\cdot df(x_0)}{f^2(x_0)}$*

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in A$. Supongamos que $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) : x \in A, j = 1, \ldots, n$ y la función $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ en continua en $x_0 : \forall j = 1, \ldots, n$. Entonces, f es diferenciable.

<u>Demostración</u>:

Supongamos $n = 2$, y sean $(x,y) \in \mathbb{R}^2, x_0 = (a,b) \in A$

$$f(x,y) - f(a,b) = f(x,y) - f(a,y) + f(a,y) - f(a,b) = (f(x,y) - f(a,y)) + (f(a,y) - f(a,b)) =$$

$$[\text{TVM}] \;= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, y)\right) \cdot (x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,\nu)\right) \cdot (y-b)$$

$$|f(x,y) - f(a,b) - \nabla f(a,b)\cdot(x-a, y-b)| \leq |\frac{\partial f}{\partial x}(\mu,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)| \cdot |x-a| + |\frac{\partial f}{\partial y}(a,\nu) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)| \cdot |y-b|$$

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||(x-a, y-b)|| < \delta \Rightarrow |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{|f(x,y) - f(a,b) - \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b)|}{||(x-a, y-b)||} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Definición ()
