DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Cálculo Diferencial (M3 y M4). Curso 2021–2022.

Límites y continuidad. Hoja 4

31. Estudia la existencia de los siguientes límites:

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x^2+y^3)^2}{x^2+y^4} \qquad (b) \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^6+2y^4+3z^4}}$$

$$(c) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x+y^3)^2}{x^2+y^4} \qquad (d) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^4+y^2}$$

$$(e) \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(y+2)^9}{2x+y} \qquad (f) \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)^7}{x^4+y^3}$$

$$(g) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log^3(1+xy)}{(xy)^3} \qquad (h) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$$

32. Estudia la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ de la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6y^3}{(x^2-y)}, & \text{si } y \neq x^2, \\ 0, & \text{si } y = x^2. \end{cases}$$

33. Determina para qué valores de α son continuas las funciones $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^8+x^4y^2}{(x^6+y^4)^\alpha}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5|y|^\alpha}{x^8+y^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

34. Estudia la existencia de estos límites, justificando todos los pasos (en particular del *(d)*, en el que se pide hacerlo usando la definición, con la terminología (ε, δ)):

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg} x \sin y}{x^2+y^2} \qquad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^2+y^4+(x-y^2)^2}$$

$$(c) \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \qquad (d) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

35. Estudia la existencia de los límites. Si existen, calcúlalos:

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^6 x}{x-y^2} \qquad\qquad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0),xy\neq 0} \frac{\sin^3(xy)}{x^5y+xy^3}.$$

36. (a) Demuestra, con todo rigor, que toda función continua sobre un compacto K de un espacio métrico y con valores reales alcanza un máximo.

(b) Sea

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y \leq x^2+y^2 \leq 2y+3\}.$$

(i) ¿Es A cerrado? ¿Es A compacto? Justifica adecuadamente la respuesta.

(ii) Determina si el punto $(0,0)$ es interior o punto frontera de A.

(iii) ¿Alcanza la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

un máximo en A?

37. Estudia la continuidad en el origen, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, de

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^4+y^4)^\alpha}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

38. Estudia la existencia de los límites. Si existen, calcúlalos:

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$$

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(2x^2+y^3)}{x^4+y^4}$$