

CÁLCULO DIFERENCIAL

Juan Diego Barrado Daganzo e Iker Muñoz Martínez
2º de Carrera

15 de octubre de 2021

TEORÍA DE LA MEDIDA

Vamos a introducir un elemento fundamental en esta asignatura, y muy útil para las posteriores, que no es otra cosa que la capacidad de definir qué es una medida y cómo podemos medir las cosas según un criterio general.

CONCEPTO DE MÉTRICA Y ESPACIOS NORMADOS

En esta sección, se definen los elementos básicos para el estudio de medidas, distancias y se estudian las características de las estructuras que se generan a partir de dichas definiciones, con sus consecuentes resultados para otras áreas como la geometría.

Definición (métrica)

Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto, decimos que $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es una **métrica o distancia** siempre que se satisfaga las siguientes propiedades¹

- *Positiva:* $d(x, y) > 0 : \forall x, y \in E$
- *No degenerada:* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría:* $d(x, y) = d(y, x) : \forall x, y \in E$
- *Desigualdad triangular:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) : \forall x, y, z \in E$

Al par (E, d) lo denotamos como **espacio métrico**.

Ejemplos:

- Un ejemplo sencillo de comprobar es considerar \mathbb{R} con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ tradicional.
- Otro ejemplo es, dado $E \neq \emptyset$ definimos la métrica discreta como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Luego con la definición dada de distancia y un conjunto cualquiera E tenemos que estos forman una peculiar definición de espacio métrico.

- Por último, definimos como **Espacio Euclídeo Usual** al conjunto:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

que junto con la suma y el producto por escalares usual, lo cual lo dota de estructura de espacio vectorial.

¹Nótese que no está permitido valores que tiendan a infinito (comprendidos en $\bar{\mathbb{R}}$)

Definición (Espacios normados)

Sea E un espacio vectorial real, se dice que $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una **norma** si se cumplen las siguientes propiedades:

- *Positiva:* $\|x\| \geq 0 : \forall x \in E$
- *No degenerada:* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- *Homogénea:* $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| : \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in E$
- *Desigualdad triangular:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Al par $(E, \|\cdot\|)$ se le denota como **espacio normado**.

Ejemplos:

- Considerando \mathbb{R}^n denominamos como la **clásica norma euclídea** a:

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} : \forall x \in \mathbb{R}^n$$

La demostración es trivial salvo el último apartado, que no se puede demostrar hasta más adelante puesto que se necesita de la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*.

Definición (Norma p)

Consideramos en \mathbb{R}^n la siguiente norma:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

En general, se define la norma p (con $1 < p < \infty$) como:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Es decir, que en el caso extremo tenemos que:

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max\{|x_j| : j = 1, \dots, n\}$$

Proposición (Métrica asociada a una norma)

Si consideramos $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, podemos definir la **métrica asociada a dicha norma** como:

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| : \forall x, y \in E$$

Cuya definición, por ser en base a una norma ya dada, hace fácilmente verificable las condiciones de métrica.

Definición (Métrica Euclídea)

De este modo, se define la **métrica o distancia euclídea** en \mathbb{R}^n como la métrica asociada a la norma euclídea:

$$d(x, y) = d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Ejemplos:

- Definimos el conjunto de las funciones continuas $E = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\} = \mathbb{C}[0, 1]$ y la función:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in [0, 1]\}$$

Lo primero de todo, comprobamos que está bien definida: como son funciones continuas la diferencia es continua y, por ser el valor absoluto una función continua, la composición con él también es continua. Consecuentemente, al tratarse de una función continua y acotada en $[0, 1]$ el máximo se alcanza, así que, de hecho, no solo el supremo es un número finito, sino que es máximo de la función en ese intervalo.

Para ver que se trata de una norma, comprobamos la última propiedad (las anteriores son triviales):

$$d(f, g) = |f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g)$$

- Junto al ejemplo anterior, podemos definir:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

y entonces el par $(E, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado. Para comprobar que esto es una norma, se puede tratar dicha norma como $\|f\|_\infty = d(f, 0)$ para demostrar sus propiedades.

- Sea $E = \{f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ definimos:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : \forall x \in (0, 1]\}$$

Sin embargo, no es una métrica porque no está bien definida; por ejemplo:

$$d\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \infty$$

Observación:

Sin embargo, no toda métrica tiene asociada una norma en un espacio vectorial. Para verlo, tomamos \mathbb{R}^n con la métrica discreta definida: observamos que no existe una norma que haga que el par (\mathbb{R}^n, d) sea un espacio normado puesto que en caso de existir, por ejemplo, no se verifica la 3 propiedad:

$$\text{Sea } x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \exists \|\cdot\| \Rightarrow \underbrace{d(\lambda x, 0)}_{=1} = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = |\lambda| \cdot d(x, 0) = |\lambda|$$

Y como debe ocurrir para todo lambda, es absurdo.

Definición (Producto escalar)

Sea E un espacio vectorial, se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es un **producto escalar** si es una forma bilineal definida positiva, es decir, cumple las propiedades:

- *Definida positiva:* $\langle x, x \rangle \geq 0 : \forall x \in E$
- *No degenerada:* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- *Homogeneidad:* $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle : \forall x, y \in E$
- *Bilinealidad:* $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle : \forall x, y, z \in E$
- *Simétrica:* $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle : \forall x, y \in E$

Al par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le denomina espacio vectorial con producto escalar o espacio **pre-Hilbert**.

Ejemplos

- En \mathbb{R}^n , definimos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j : \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

- En $\mathcal{C}[0, 1]$, definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

Y es muy sencillo demostrar que ambas definiciones suponen un producto escalar en el espacio en el que están definidas.

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert y sean $x, y \in E$ dos vectores cualesquiera. Entonces ocurre que:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}$$

Demostración:

- Si $x = 0$ o $y = 0$, la desigualdad es trivial.
- Tomemos en primer lugar un $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario y escojamos $x, y \in E \setminus \{0\}$:

$$0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

Esta ecuación² describe una parábola que, a lo sumo, es tangente al eje X pero nunca lo llega a cruzar porque es siempre ≥ 0 . Consecuentemente, el discriminante de esta ecuación nunca será estrictamente positivo ya que esto implicaría tener dos raíces, es decir:

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}$$

Observación:

Cabe destacar que hay igualdad si y solo si los vectores son proporcionales, es decir:

$$|\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle} \Leftrightarrow x = \alpha y : \alpha \in \mathbb{R}$$

Si son proporcionales es trivial demostrar la igualdad, pero si tenemos la igualdad, entonces ello implica que la parábola de la que hablábamos antes corta en un único punto al eje de abscisas, luego:

$$\langle \lambda \cdot x + y, \lambda \cdot x + y \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \cdot \langle x, y \rangle}{2 \cdot \langle x, x \rangle} \Leftrightarrow x = -\lambda y$$

Proposición

Dado un espacio pre-Hilbert $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y definimos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, entonces $(E, \|\cdot\|)$ es normado.

Demostración:

La única propiedad no trivial es la desigualdad triangular. Sea

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

²Esto es mayor o igual que 0 por la propiedad de definida positiva

Ejemplos

- En \mathbb{R}^n , si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\sum_{j=1}^n |x_j \cdot y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

- Sea $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \{x = \{x_j\} \in \mathbb{R} : \|x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$. Definimos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

Comprobemos que se encuentra bien definida:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} y_j^2} < \infty \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| |y_j| &\leq \|x\|_{\ell^2} \cdot \|y\|_{\ell^2} \end{aligned}$$

- Sea $\mathcal{C}[0, 1]$

$$\int_0^1 |f(x) \cdot g(x)| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición (Equivalencia de normas)

Se dice que dos normas son equivalentes en un espacio vectorial E , $\|\cdot\|_1 \approx \|\cdot\|_2$, si

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 : \forall x \in E$$

Observación

Dado un espacio métrico (E, d) , una pregunta razonable es cuándo existe una norma que genera d , tal que $d(x, y) = \|x - y\|$. Esto ocurre cuando la métrica cumple dos condiciones:

- $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Invariante por traslaciones)
- $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (Invariante por dilataciones)

Teorema (Ley del Paralelogramo)

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial normado, cuya norma es $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, se cumple que:

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

Si se diese que $x \perp y \Rightarrow \|x + y\| = \|x - y\|$, es decir, obtenemos el Teorema de Pitágoras:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

Es interesante observar que el recíproco también es cierto, es decir, dado un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, si $\|\cdot\|$ satisface la Ley del Paralelogramo, entonces existe un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Concretamente es:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS

Definición (Bola)

Sea el espacio métrico (E, d) . Se define la **bola abierta** de centro $x \in E$ y radio $r > 0$ al conjunto:

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

Asimismo, definimos como **bola cerrada** al conjunto:

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$$

Ejemplos:

- En \mathbb{R} , tomando $x = \frac{a+b}{2}$ donde $a < b$ y $a, b \in \mathbb{R}$, elegimos $r = \frac{b-a}{2} > 0$. Luego ocurre que:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : \left| y - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}\} = (a, b)$$

- Sea (X, d) , siendo d la métrica discreta $d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$, tenemos entonces que:

$$B(x, 2) = X$$

$$B(x, 1) = \{x\}$$

$$\bar{B}(x, 1) = X$$

Definición (Conjunto abierto)

Sea (X, d) un espacio métrico, se dice que un conjunto $A \subset X$ es **abierto** si:

$$\forall x \in A : \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$$

Observaciones:

- Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow B(x, \varepsilon_1) \subset B(x, \varepsilon_2)$
- El conjunto vacío \emptyset y X son abiertos.
- El intervalo $(0, 1]$ no es abierto en \mathbb{R} , ya que para $x = 1, \nexists \varepsilon > 0 : B(1, \varepsilon) \subset (0, 1]$
- Consideramos el espacio métrico $((0, 1], d_2)$. El conjunto $(0, 1]$ es abierto en este espacio métrico determinado. Es decir, que el hecho de ser abierto o no depende del espacio métrico en el que nos encontramos.
- $\{x\}$ no es abierto en \mathbb{R} . Sin embargo, $\{x\}$ sí es abierto en $(\mathbb{R}, d_{\text{discreta}})$

Proposición

En un espacio métrico (E, d) , toda bola abierta es un abierto.

Demostración:

Sean $x \in E$ y $r > 0$ tomamos $y \in B(x, r)$. Queremos probar que $\exists \varepsilon > 0 : B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$, luego sea $\varepsilon = r - d(x, y) > 0$ vamos a ver que $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. Para ello sea $z \in B(y, \varepsilon)$ comprobemos que $d(x, z) < r$:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon = r$$

Proposición

Sea el espacio métrico (E, d) , entonces³ ocurre:

1. $\forall A_1, \dots, A_n$ familia de conjuntos abiertos en E , $\bigcap_{j=1}^N A_j$ es abierto en E .
2. $\forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familia arbitraria de conjuntos abiertos en E , $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es abierto en E .

Demostración:

- Tomamos $x \in \bigcap_{j=1}^N A_j$ para intentar probar que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^N A_j$$

Para ello, la idea es que fijado un j tendremos un ε_j que valdrá, luego como es un conjunto finito podemos quedarnos con el más pequeño y valdrá para todos los demás:

$$j \in \{1, \dots, N\} \Rightarrow \exists \varepsilon_j > 0 : B(x, \varepsilon_j) \subset A_j \Rightarrow \varepsilon = \min_{j \in \{1, \dots, N\}} \{\varepsilon_j\} > 0$$

De esta forma ocurre que:

$$B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^N B(x, \varepsilon_j) \subset \bigcap_{j=1}^N A_j$$

- Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \exists \beta \in I : x \in A_\beta$, luego se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Cabe destacar que la condición de intersección finita es indispensable, puesto que en (\mathbb{R}^n, d_2) , $A_j = \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right)$ es abierto, pero $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{0\}$ **no** es abierto en \mathbb{R} .

Definición (Topología)

Toda familia de subconjuntos T de un conjunto X , $T \subset \mathcal{P}(X)$, que satisface:

- $\emptyset, X \in T$
- T es invariante por intersecciones finitas.
- T es invariante por uniones arbitrarias.

Se denomina como **topología de X** .

Así, la familia de abiertos de un espacio métrico (X, d) es una topología.

Definición (Punto interior)

Dado un espacio métrico (E, d) , se dice que x es un **punto interior** de $A \subset E$ si cumple que:

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$$

Denotamos como $\overset{\circ}{A} = \text{int}(A) = \{x \in A : x \text{ es punto interior}\}$

³Para la 2ª afirmación no es necesario que la familia sea finita

Observaciones:

- $\mathring{A} \subset A$
- A es abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$
- $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists U$ abierto : $x \in U \subset A$
- $A = \{0\} \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$
- $A = [0, 1] \Rightarrow \mathring{A} = (0, 1)$
- $\mathring{A} = \bigcup_{U \subset A} U$ donde U es abierto.

Ejemplo:

- Tomando \mathbb{R}^2 y el conjunto $A = \{(0, x) : 0 < x < 1\}$ vemos que $\mathring{A} = \emptyset$

Definición

En un espacio métrico (E, d) , decimos que un conjunto $A \subset E$ es cerrado si $E \setminus A$ es abierto.

Ejemplos:

- \emptyset, E son cerrados.
- En \mathbb{R} , $(0, 1]$ no es abierto ni cerrado.
- En $(0, 2]$ el conjunto $(0, 1]$, es cerrado puesto que su complementario es $(0, 2] \setminus (0, 1] = (1, 2]$ es abierto en este espacio ambiente.
- En \mathbb{R}^2 los puntos son cerrados puesto que si tomamos $A = \{x\}$, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto. Tomamos $y \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon = \frac{\|x-y\|_2}{2}$ entonces $x \notin B(y, \varepsilon)$, luego es abierto.

Proposición

En cualquier espacio métrico (E, d) , las bolas cerradas $\bar{B}(x, \varepsilon)$ son conjuntos cerrados.

Demostración:

Se reduce todo a ver que el complementario es abierto. Sea $z \in E \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$, entonces $d(z, x) > \varepsilon$. Si escogemos $0 < \delta < d(z, x) - \varepsilon$, entonces ¿se podrá verificar que $B(z, \delta) \subset E \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$? o lo que es lo mismo, que la intersección de esta bola de centro z con la bola cerrada inicial es el vacío:

$$y \in B(z, \delta) \Rightarrow d(y, x) \geq d(x, z) - d(z, y) > d(x, z) - \delta > \varepsilon \Rightarrow y \notin \bar{B}(x, \varepsilon)$$

Luego ya tenemos lo que queríamos probar

Proposición

Sea un espacio métrico (E, d) se cumple que:

1. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son cerrados, entonces: $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ cerrado
2. Si $\{A_\alpha\}_{j=1, \dots, n}$ son cerrados, entonces: $\bigcup_{j=1}^n A_n$ cerrado

Demostración:

Se demuestra por las Leyes de De Morgan

Definición (Punto de acumulación)

Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $A \subset E$, se dice que $x \in E$ es un **punto de acumulación** de A si:

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos de acumulación se le conoce como A' .

Es decir, para cualquier “entorno” alrededor de ese punto sin contar con el punto, la intersección con el conjunto original es no vacía.

Observaciones:

- Sea $A = (0, 1)$ en \mathbb{R} , entonces $A' = [0, 1]$, de lo que se desprende que no tiene por qué darse $A' \subset A$
- $A = \{1\}$ en \mathbb{R} , entonces $A' = \emptyset$, de lo que se desprende que no tiene por qué darse $A \subset A'$
- $x \in A' \Leftrightarrow \forall U$ abierto $\subset E$, $x \in U \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
- Tomamos (E, d) siendo d la métrica discreta y un conjunto $A \subset E$, entonces:

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Con lo cual, si tomamos $0 < \varepsilon \leq 1$, entonces

$$B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} = \emptyset \Rightarrow A' = \emptyset$$

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, entonces ocurre que:

$$A' \subset A \Leftrightarrow A \text{ cerrado}$$

Demostración:

- \Leftarrow :

Si A es cerrado, entonces $E \setminus A$ es abierto. De esta forma, queremos decir que

$$\begin{aligned} \forall x \notin A : \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset (E \setminus A) &\Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \notin A' \Rightarrow A' \subset A \end{aligned}$$

- \Rightarrow :

Supongamos ahora que $A' \subset A$ veamos que el complementario es abierto, luego hay que ver que cualquier punto suyo es interior.

Sea $x \in E \setminus A$, luego $x \notin A'$. Esto quiere decir que:

$$\exists \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset (E \setminus A)$$

Definición (Adherencia)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, definimos **la adherencia** de A como:

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F} F$$

Donde F debe ser cerrado

Observaciones:

- Esto siempre está bien definido porque $F = E \supset A$ y E es cerrado.
- $\bar{A} \supset A$
- \bar{A} es el menor cerrado que contiene a A
- $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

Ejemplos:

- $A = (0, 1)$ en \mathbb{R} , entonces $\bar{A} = [0, 1]$
- $A = \mathbb{Q}$ en \mathbb{R} , entonces $\bar{A} = \mathbb{R}$

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, entonces:

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Demostración:

Sea $B = A \cup A'$, vamos a probar que $B = \bar{A}$.

- $B \supset \bar{A}$

Vamos a probar que B es un conjunto cerrado, puesto que si probamos esta propiedad se tiene que $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B} = B$ y quedaría demostrada la primera inclusión:

$$x \in B^c = A^c \cap (E \setminus A') \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin A'$$

En primer lugar, por ocurrir que $x \notin \bar{A}$, se tiene que:

$$\exists \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$$

Luego usando esa afirmación junto con que $x \notin A$, tenemos que:

$$B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset A^c$$

Queda solo por probar que $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus A'$, veámoslo:

$$\begin{aligned} z \in B(x, \varepsilon) &\Rightarrow \exists \delta > 0 : x \notin B(z, \delta) \subset B(x, \varepsilon) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (B(z, \delta) \setminus \{z\}) \cap A \subset (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow z \notin A' \Rightarrow \bar{A} \subset B \end{aligned}$$

- $B \subset \bar{A}$

Como $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$, todo se reduce a probar que $A' \subset \bar{A}$:

$$A' \subset \bar{A} \Leftrightarrow \forall F \supset A \text{ cerrado}, A' \subset F \Leftrightarrow \forall F \supset A \text{ cerrado}, (E \setminus A') \supset F^c$$

Luego vamos a intentar tratar de probar dicho enunciado equivalente:

$$\begin{aligned} z \notin F &\Rightarrow z \in F^c \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(z, \varepsilon) \subset F^c \Rightarrow (B(z, \varepsilon) \setminus \{z\}) \cap A \subset B(z, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Rightarrow \\ &\Rightarrow z \notin A' \Rightarrow z \in E \setminus A' \end{aligned}$$

Corolario (Caracterización de adherencia)

Si un punto pertenece a la adherencia, entonces cualquier bola centrada en ese punto interseca con el conjunto:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Proposición (Caracterización de puntos de acumulación)

Podemos caracterizar los puntos de acumulación como:

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists x_\varepsilon \in A \setminus \{x\} : d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$$

En particular, en \mathbb{R}^n :

$$x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x\} : \|x - x_k\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Definición (Densidad)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset B \subset E$, se dice que:

$$A \text{ es denso en } B \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$$

En particular, A es denso en E si $\bar{A} = E$.

Ejemplo:

- El conjunto \mathbb{Q} es denso dentro de \mathbb{R} .
- El conjunto \mathbb{I} es denso dentro de \mathbb{R} .

Definición (Frontera)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$, se define la frontera de A como:

$$\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

Observaciones:

- $\partial(A)$ es cerrado.
- $A = [0, 1]$ en \mathbb{R} , implica que $\bar{A} = [0, 1]$, luego $\partial(A) = \{0, 1\}$
- $\partial(A) = \partial(A^c)$
- Ejercicio: probar que $\partial(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap (E \setminus \overset{\circ}{A})$. Pista: probar que $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$
- Ejercicio: probar que A' es cerrado.
- Ejercicio: estudiar cómo son los abiertos y los cerrados en un espacio con la métrica discreta.

Aclaraciones de Clase:

- Vamos a poner un ejemplo donde $\bar{B}(x, r) \neq \overline{B(x, r)}$, tomamos (E, d) espacio métrico donde d es la métrica discreta. Escogemos $x \in E$ y $r = 1$, tenemos que $B(x, 1) = \{x\} \Rightarrow \overline{B(x, 1)} = \{x\}$, pero vemos que $\bar{B}(x, 1) = E \neq \{x\}$.
- Veamos que no siempre $Diam(A) = Diam(\partial A)$, si tomamos $E = [0, 1]$, entonces $\partial E = \emptyset$, luego $Diam(E) = 1 = Diam(\emptyset)$. Si tomamos \mathbb{R} y $A = (0, \infty)$, vemos que $\partial A = \{0\}$, luego $Diam(A) = \infty$ pero $Diam(\partial A) = 0$. De nuevo, si tomamos $E = [0, 1]$ y $A = (0, 1]$, tenemos que $\partial(A) = \{0\}$ y se tiene que $Diam(A) = 1 \neq 0 = Diam(\partial(A))$
- Veamos que $Diam(A) = Diam(\bar{A})$, como $A \subset \bar{A}$ entonces $Diam(A) \leq Diam(\bar{A})$. Y la otra desigualdad es muy fácil de probar también.
- Una buena propiedad es $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Elemental la demostración.

SUCESIONES, COMPLETITUD Y COMPACIDAD

Definición (Sucesión y Subsucesión)

Sea E un conjunto. Una **sucesión** $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_n\}_n = \{x_n\}$ es una función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow E \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Una **subsucesión** o **sucesión parcial** de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión:

$$\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ donde } n_1 < n_2 < \dots < n_j$$

Definición (Convergencia)

Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de E , se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** a $x \in E$ si:

$$\forall \mathcal{U} \text{ abierto } \subset E \text{ tal que } x \in \mathcal{U}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{U} : \forall n \geq n_0$$

Y entonces, escribimos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Esta definición que se ha dado de convergencia⁴ es equivalente a las siguientes caracterizaciones:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon) : \forall n \geq n_0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x, x_n) < \varepsilon$$

Proposición

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, si suponemos que dicha métrica anterior viene dada por la norma especificada ahora, entonces:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$
- Sea $\lambda_n \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ donde $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \in \mathbb{R}$ y $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in E$, entonces se tiene que:
 $\lambda_n \cdot x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \cdot x \in E$

Demostración:

El caso $x = 0$ se deja como ejercicio. Sea $x \neq 0$ y $\varepsilon > 0$. Entonces:

$$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} : |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|x\|} : \forall n \geq n_1 \text{ y } \|x_n - x\|_E < \frac{\varepsilon}{2 \cdot C} : \forall n \geq n_2 : |\lambda_n| \geq C < \infty$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $n \geq n_0$

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \leq |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2\|x\|} \cdot \|x\| = \varepsilon$$

Observación

Si $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ son normas equivalentes en E , entonces ambas normas tienen las mismas sucesiones convergentes y al mismo límite.

$$0 \leftarrow C \|x_n - x\|_1 \geq \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$$

⁴Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, el límite es único.

Proposición (Convergencia en \mathbb{R}^n)

En $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||_2)$ espacio euclídeo usual, sea $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} : x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n)$ la convergencia se caracteriza como:

$$x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x = (x^1, \dots, x^n) \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n : x_m^j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x^j$$

Es decir, se reduce la convergencia en \mathbb{R}^n a la convergencia de componentes en \mathbb{R} .

Demostración:

Trivialmente, se tiene que $|x_m^j - x_j| \leq ||x_m - x||_2$, luego :

$$x_m \rightarrow x \Rightarrow |x_m^j - x_j| \leq ||x_m - x||_2 \Rightarrow x_m^j \rightarrow x^j : \forall j = 1, \dots, n$$

Recíprocamente, podemos expresar la norma como:

$$||x_m - x||_2^2 = \sum_{j=1}^n |x_m^j - x^j|^2$$

De este modo, por lo probado en la proposición anterior:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} ||x_m - x||_2^2 = \sum_{j=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} |x_m^j - x^j|^2 = 0$$

Proposición (Caracterización de la topología vía sucesiones)

Sea (E, d) un espacio métrico. Se cumple que:

1. Un subconjunto $A \subset E$ es cerrado $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : (\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow x \in A)$
2. Un punto $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
3. Un punto $x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : x_n \neq x : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Demostración:

El conjunto A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$. Por tanto, si escogemos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ de forma que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, vamos a ver que $x \in A$. Supongamos que no, entonces tenemos una sucesión convergente a x de forma que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x$ porque está contenida en A . En consecuencia, por el apartado 3: $x \in A' \subset A^\#$.

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, podemos caracterizar de nuevo la convergencia en base a subsucesiones:

1. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Leftrightarrow \forall \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_{n_j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$
2. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Leftrightarrow \forall \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \exists \{y_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} : y_{m_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

Demostración

■ " \Rightarrow "

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$. Sea $n_{j_0} \geq n_0 : \forall n_j \geq n_{j_0} \geq n_0 : d(x_{n_j}, x) < \varepsilon$

" \Leftarrow "

Trivial

■ " \Rightarrow "

Trivial por (i).

" \Leftarrow " Supongamos que $x_n \not\rightarrow x$. Entonces $\exists \varepsilon > 0 : \forall m \in \mathbb{N}, \exists n_m \geq m : d(x_{n_m}, x) \geq \varepsilon$

$\{x_{n_m}\}_m \subset \{x_n\}_n$.

Sea $\{y_{m_k}\}_k \subset \{x_{n_m}\}_m : d(y_{m_k}, x) \geq \varepsilon \Rightarrow y_{m_k} \not\rightarrow x \Rightarrow x_n \not\rightarrow x$

Definición (Sucesión de Cauchy)

Sea (E, d) un espacio métrico, se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es **sucesión de Cauchy** si:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Se dice que (E, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Observaciones

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo.
 - $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo.
 - Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es completo. Por ejemplo, la sucesión $x_n = \frac{1}{n} \in E$ es sucesión de Cauchy y no converge en E .
-

Definición (Conjunto Acotado)

En (E, d) un espacio métrico, un conjunto $A \subset E$ es **acotado** si:

$$\exists x \in E : \exists r > 0 : A \subset B(x, r) \Leftrightarrow \forall y \in A : d(y, x) < r$$

En el caso $(E, \|\cdot\|)$ espacio normado, $A \subset E$ es **acotado** si:

$$\exists r > 0 : \forall a \in A : \|a\| < r \Leftrightarrow A \subset B(0, r)$$

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces, se cumple que:

- Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es convergente, entonces es una sucesión de Cauchy.
- Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada.
- Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es convergente, entonces es acotada.
- Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión de Cauchy y $\exists \{x_{n_k}\}_{n_k}$ parcial tal que $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} x$, entonces $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Demostración

- (i) y (iii) son triviales.
- Sea $\varepsilon = 1$. Entonces, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq 1$, luego se tiene que $\forall n \geq n_0 : d(x_n, x_{n_0}) \leq 1$. Por tanto, sea $r = \max\{1, d(x_{n_0}, x_k : k = 1, \dots, n_0 + 1)\} + 1$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in B(x_{n_0}, r)$.
- Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Del mismo modo, para el mismo ε $\exists m \in \mathbb{N} : n_k \geq m : d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, sea $k = \max\{n_0, m\} : \forall n \geq k$ se tiene que por la desigualdad triangular: $d(x_n, x) \leq d(x_{n_j}, x_n) + d(x_{n_j}, x)$. Elegimos $n_j \geq k$ y vemos que:

$$d(x_n, x) \leq d(x_{n_j}, x_n) + d(x_{n_j}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Teorema (de Completitud de \mathbb{R}^n)

El espacio euclídeo habitual (\mathbb{R}^n, d_2) es un espacio métrico completo.

Demostración

Sea $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n de la forma $x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n) : m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$|x_m^j - x_\ell^j| \leq \|x_m - x_\ell\|_2 < \varepsilon : m, \ell \geq n_0 : \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Así que $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, la sucesión de la componente $\{x_m^j\}_{m \in \mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y como \mathbb{R} es completo, $x_m^j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x^j$. Por tanto, por la definición que se dio de convergencia en \mathbb{R}^n , si el límite es $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, entonces componente a componente $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$

Definición (Conjunto Secuencialmente Compacto)

Sea (E, d) un espacio métrico. Se dice que $A \subset E$ es **secuencialmente compacto** si:

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \exists \{x_{n_k}\}_{n_k} \subset \{x_n\}_n : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in A$$

Observaciones

- Si A es secuencialmente compacto, entonces $A' \subset A$ y, por lo tanto, A es cerrado.
- Si A es secuencialmente compacto, entonces A es acotado (porque hay una bola que lo contiene completamente).

En caso contrario, ocurriría que $\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in A : A \not\subset B(x, \varepsilon)$, pero si escogemos $\varepsilon = n$, entonces $A \not\subset B(x, \varepsilon)$, luego $\exists y_n \in A : d(y_n, x) \geq n$, es decir, podemos formar $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$.

Claramente $\nexists \{y_{n_k}\}_{n_k} \subset \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergente, ya que si existiese:

$$d(y_{n_k}, y) < \varepsilon : \forall n_k \geq m \Rightarrow d(y_m, y_n) \geq d(y_m, x) - d(x, y_n) \geq m - d(x, y_n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \#$$

Por tanto, llegamos a una contradicción.

Definición (Conjunto Compacto)

Sea (E, d) un espacio métrico:

- Se dice que un **recubrimiento abierto** de $A \subset E$ es una familia de abiertos en cuya unión se encuentra A :

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} : \mathcal{U}_i \text{ abierto} \quad \wedge \quad A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

- Un **subrecubrimiento finito** de A es una familia finita de intervalos abiertos en cuya unión se encuentra A :

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m\} \subset \mathcal{U} : A \subset \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$$

- Se dice que $A \subset E$ es **compacto** si para todo recubrimiento abierto de A se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Observaciones

- Si A es compacto, entonces A es acotado.

$$\text{Sea } x \in A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x, n) \xrightarrow{\exists m \in \mathbb{N}} A \subset B(x, m)$$

- $(0, 1)$ no es compacto en \mathbb{R} .

En efecto, sea $\mathcal{U}_n = (\frac{1}{n}, 1)$. Es claro que $(0, 1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$, pero $\nexists m : (0, 1) \subset \mathcal{U}_m$

Definición (Conjunto Totalmente Acotado)

Sea (E, d) un espacio métrico, se dice que $A \subset E$ es **totalmente acotado** si ocurre que:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \{x_1, \dots, x_m\} \subset A : A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_m, \varepsilon)$$

Observaciones

- Si A es totalmente acotado, entonces A es acotado.
Sea $r = \max\{d(x_1, x_j) : j = 2, \dots, n\}$ y sea $R = r + 3\varepsilon$. Entonces $B(x_j, \varepsilon) \subset B(x_1, R) \Rightarrow A \subset B(x_1, R)$
- En \mathbb{R} con la métrica discreta, $\mathbb{R} = B(0, 2)$, es decir, \mathbb{R} es acotado. Sin embargo \mathbb{R} no es totalmente acotado.
Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. La bola $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$, es decir, $\mathbb{R} \not\subset B(x_1, \frac{1}{2}) \cup \dots \cup B(x_m, \frac{1}{2})$

Lema (Lema 1)

Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces, si A es compacto, entonces A es cerrado.

Demostración

Hay que ver que $E \setminus A$ es abierto, es decir, que todo punto es interior: $\forall x \in E \setminus A : \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset E \setminus A$.

Primero, sea $\mathcal{U}_n = E \setminus \bar{B}(x, \frac{1}{n})$ abierto. Vamos a probar que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$. Tomamos $y \in A$, luego $d(y, x) > 0$ para $x \notin A$, luego $\exists n \in \mathbb{N} : d(y, x) > \frac{1}{n} \Rightarrow y \notin \bar{B}(x, \frac{1}{n}) \Rightarrow y \in \mathcal{U}_n$.

Como A es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, luego $A \subset \mathcal{U}_{n_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{n_k} = \mathcal{U}_{n_k} : n_1 < \dots < n_k$ porque la sucesión de conjuntos es creciente.

$$\forall y \in A : y \in \mathcal{U}_{n_k} \text{ para } \exists n_k \Rightarrow y \notin \bar{B}\left(x, \frac{1}{n_k}\right) \Rightarrow \bar{B}\left(x, \frac{1}{n_k}\right) \cap A = \emptyset$$

Finalmente, $B\left(x, \frac{1}{n_k}\right) \subset E \setminus A$

Lema (Lema 2)

Sea (E, d) un espacio métrico compacto y $A \subset E$ cerrado. Entonces A es compacto.

Demostración

Sea $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_i$ abierto. Así, $E \subset (E \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

Como E es compacto, $E \subset (E \setminus A) \cup \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_m$

$$\Rightarrow A \subset \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_m$$

Lema (Lema 3)

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$ secuencialmente compacto. Entonces A es totalmente acotado.

Demostración

Supongamos que A no es totalmente acotado, es decir,

$$\exists r > 0 : \forall \{x_1, \dots, x_m\} \subset A : A \not\subset B(x_1, r) \cup \dots \cup B(x_m, r)$$

Sea $z_1 \in A$. Entonces, $A \setminus B(z_1, r) \neq \emptyset$.

Sea $z_2 \in A$. Entonces, $A \setminus (B(z_1, r) \cup B(z_2, r)) \neq \emptyset$. Es decir,

$$z_n \in A \setminus (B(z_1, r) \cup \dots \cup B(z_{n-1}, r)) \neq \emptyset$$

$\forall n \in \mathbb{N} : \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ y $d(z_m, z_n) \geq r : m \neq n$.

Así, $\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ no posee ninguna subsucesión convergente, lo cual contradice que A sea secuencialmente compacto.

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces $A \subset E$ es compacto $\Leftrightarrow A$ es secuencialmente compacto.

Demostración

- \Rightarrow . Supongamos que A compacto. Por reducción al absurdo, si A no es secuencialmente compacto, entonces $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que no posee parciales convergentes.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $x_n \neq x_m : n \neq m$. Sea $B = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow B' = \emptyset \subset B$. Así, B es cerrado, $B \subset A$ y A compacto, y por el Lema 2, B es cerrado (y su complementario abierto).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_n > 0 : B(x_n, \varepsilon_n) \cap (\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \setminus \{x_n\}) = \emptyset$$

$B = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon_n)$. Como B es compacto, $B \subset B(x_{n_1}, \varepsilon_{n_1}) \cup \dots \cup B(x_{n_m}, \varepsilon_{n_m})$, lo cual es una contradicción pues B no es un conjunto finito, por lo tanto A es secuencialmente compacto.

- \Leftarrow . Supongamos ahora que A es secuencialmente compacto. Veamos que A es compacto, es decir, que si $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, entonces $A \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_m}$.

Para proceder a la demostración, usaremos la siguiente propiedad que será probada más adelante:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \exists i_0 \in I : B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_0}$$

Como A es totalmente acotado por el Lema 3, entonces, dado $\varepsilon > 0$ que existe por la propiedad anterior, sabemos que $A \subset B(z_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(z_m, \varepsilon) : z_1, \dots, z_m \in A$. Por lo tanto:

$$A \subset \mathcal{U}_{i_{z_1}} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_{z_m}}$$

Ejercicios

- Caracterizar los compactos de un espacio métrico con la distancia discreta
- Ver cuales son ciertos. Sean $A, B \begin{cases} \text{abiertos} \\ \text{cerrados} \\ \text{compactos} \end{cases}$. Entonces $A + B$ también lo es.

Proposición (Constante de Lebesgue)

Si A es secuencialmente compacto, $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, entonces

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \exists i_x \in I : B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_x}$$

Demostración

En efecto, si suponemos lo contrario,

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = \frac{1}{n}, \exists x_n \in A : \forall i \in I, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset \mathcal{U}_i$$

Como A es secuencialmente compacto, $\exists \{y_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : y_m \rightarrow y \in A$

Como $y \in A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, entonces $y \in \mathcal{U}_{i_0}$, es decir, que $\exists \delta > 0 : B(y, \delta) \subset \mathcal{U}_{i_0}$

Sea $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$ y $d(y_n, y) < \frac{\delta}{2} : n \geq n_0$

Veamos que la bola $B(y_n, \frac{1}{n}) \subset B(y, \delta) : n \geq n_0$.

Sea $z \in B(y_n, \frac{1}{n})$.

$$d(z, y_n) < \frac{1}{n} : d(z, y) \leq d(z, y_n) + d(y_n, y) < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Así, $B(x_m, \frac{1}{n}) = B(y_n, \frac{1}{n}) \subset B(y, \delta) \subset \mathcal{U}_{i_0}$, lo cual contradice que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset \mathcal{U}_i$

Observaciones

- $[0, 1]$ es compacto en \mathbb{R} . En efecto, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$. Entonces, es una sucesión acotada y tiene por lo tanto una parcial convergente:

$$\{x_{n_k}\}_{n_k} \subset \{x_n\}_n, x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

Como $[0, 1]$ cerrado $\Rightarrow x \in [0, 1] \subset [0, 1]$.

Análogamente, para $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ es compacto.

- Sea (E, d) un espacio métrico. Decir que $A \subset E$ es compacto $\Leftrightarrow (A, d)$ es compacto.

Teorema ()

(E, d) es compacto $\Leftrightarrow E$ es completo y totalmente acotado.

Demostración

- \Rightarrow . Como E es compacto, por el Teorema de Bolzano - Weierstrass E es secuencialmente acotado, y por el Lema 3 E es totalmente acotado.

Ahora, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ una sucesión de Cauchy. Así, por el Teorema de Bolzano - Weierstrass existe una parcial convergente, y por ser de Cauchy, la sucesión converge.

- \Leftarrow . Veamos que es secuencialmente compacto para poder aplicar el Teorema de Bolzano - Weierstrass. Sea $\{x_n\}_n \subset E$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_n \neq x_m, n \neq m$.

Como E es totalmente acotado, $E \subset B(y_1^1, 1) \cup \dots \cup B(y_{m_1}^1, 1)$. Entonces,

$$\{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \exists j : \{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(y_j^1, 1)$$

Iterativamente, $E \subset B(y_1^2, \frac{1}{2}) \cup \dots \cup B(y_{m_1}^2, \frac{1}{2})$. Entonces,

$$\{x_n^2\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}, \exists j : \{x_n^2\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(y_j^2, 1)$$

En general, $\{x_n^m\} \subset \{x_n^{m-1}\}_n$ y $\{x_n^m\} \subset B(y_{j_m}^m, \frac{1}{m})$. Finalmente, sea $z_n = x_n^n : \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sean $m, n \geq n_0 : x_m^m = z_m, x_n^n = z_n \in B(y_{j_j}^{n_0}, \frac{1}{n_0}) \Rightarrow d(z_m, z_n) < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Entonces, $\{z_m\}_m$ es una sucesión de Cauchy.

Como E es completo, $\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es parcial de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, por lo que E es secuencialmente compacto.