DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Cálculo Diferencial (M3 y M4). Curso 2021–2022.

Sucesiones y compacidad. Hoja 3

24. Consideramos en el plano $\mathbb{R}^2$ las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, siendo

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2}, \frac{n+1}{n} \cos \frac{\pi n}{2} \right), \qquad b_n = \left(e^{-n^2}, \frac{n^2+n+1}{3n^2+1} \right).$$

   (a) Encuentra dos subsucesiones de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergentes a distintos límites.

   (b) Estudia si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son acotadas y/o si son convergentes.

25. Estudia la compacidad de los siguientes conjuntos en el plano $\mathbb{R}^2$:

   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 2x,\ y \geq x\}$

   (b) $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 = n^{-1}\}$

   (c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+|y| \geq 1\}$

   (d) $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\left(x, \frac{1}{n}\right) \,:\, 1-\frac{1}{n} \leq x \leq 2+\frac{1}{n}\} \bigcup([1,2] \times \{0\})$

26. Estudia la compacidad de los siguientes conjuntos en el espacio $\mathbb{R}^3$:

   (a) $A = \{(x,y,z) : x+y+z = 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

   (b) $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ z^2 < 1\}$

   (c) $C = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{(x,y,\frac{1}{n}) : x^2+y^2 \leq \frac{1}{n^2}\}$

27. ¿Es la unión de dos compactos en el espacio $\mathbb{R}^n$ un conjunto compacto? ¿Es todo conjunto finito en $\mathbb{R}^n$ un conjunto compacto?

28. Prueba que la frontera de un conjunto acotado en el espacio $\mathbb{R}^n$ es siempre compacta.

29. Demuestra que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que no tenga puntos de acumulación debe ser numerable.

30. Dados dos conjuntos compactos A y B, ¿es cierto que $A+B$ es compacto?