

CÁLCULO DIFERENCIAL

Víctor Manuel Sánchez de los Reyes

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

Índice

1. Conceptos topológicos y métricos	5
1.1. Métricas, normas y productos escalares	5
1.2. Conceptos topológicos	9
1.2.1. Conjuntos abiertos	9
1.2.2. Interior de un conjunto	10
1.2.3. Conjuntos cerrados	10
1.2.4. Puntos de acumulación de un conjunto	11
1.2.5. Adherencia de un conjunto	12
1.2.6. Frontera de un conjunto	12
1.3. Sucesiones y completitud	15
1.4. Compacidad	18
1.5. Conexión	22
1.6. Límites, continuidad y continuidad uniforme	24
2. Cálculo diferencial en \mathbb{R}^n	33
2.1. Funciones diferenciables	33
2.2. Derivadas de orden superior y teorema de Taylor	40
2.3. Extremos locales	43
2.4. Teorema de la función inversa	46
2.5. Teorema de la función implícita	48

2.6. Extremos condicionados	51
Apéndice. Funciones convexas	53
Bibliografía	57

Tema 1

Conceptos topológicos y métricos

1.1. Métricas, normas y productos escalares

Definición 1.1.1. Un **espacio métrico** (E, d) está formado por un conjunto E y una función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, llamada **métrica**, que cumplen las siguientes propiedades:

1. (positividad) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$.
2. (no degeneración) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
3. (simetría) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$.
4. (desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

Ejemplo 1.1.2. (\mathbb{R}^n, d) siendo d la métrica usual dada por

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, es un espacio métrico (la única propiedad no trivial es la desigualdad triangular, la cual se obtendrá más adelante).

Ejemplo 1.1.3 (Métrica discreta). Si E es cualquier conjunto y

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

entonces d es una métrica sobre E .

Observación 1.1.4. El ejemplo anterior muestra que un espacio métrico no tiene por qué ser espacio vectorial. Sin embargo, el siguiente concepto solo tiene sentido en espacios vectoriales.

Definición 1.1.5. Un **espacio normado** $(E, \|\cdot\|)$ está formado por un espacio vectorial real E y una función $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, llamada **norma**, que cumplen las siguientes propiedades:

1. (positividad) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$.
2. (no degeneración) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
3. (multiplicidad) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. (desigualdad triangular) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

Ejemplo 1.1.6. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ siendo $\|\cdot\|$ la norma usual dada por

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, es un espacio normado (la única propiedad no trivial es la desigualdad triangular, la cual se obtendrá más adelante).

Ejemplo 1.1.7. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ es un espacio normado con $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.

Ejemplo 1.1.8 (Norma del supremo). Sea el espacio vectorial

$$E = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ está acotada}\}.$$

Para cada $f \in E$, $\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ es un subconjunto acotado de \mathbb{R} , con lo que tiene supremo finito y, por tanto, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ define una función $\|\cdot\|_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}$, la cual constituye una norma sobre E .

Proposición 1.1.9. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, entonces d es una métrica sobre E .

Demostración. Todas las propiedades son inmediatas salvo, quizás, la desigualdad triangular:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$$

para todo $x, y, z \in E$. □

Observación 1.1.10. No todas las métricas provienen de normas. Supongamos que una métrica d proviene de una norma $\|\cdot\|$. Salvo que el espacio vectorial consista solo en el vector cero, sea $x \neq 0$. Ya que $d(\lambda x, 0) = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \rightarrow \infty$ cuando $|\lambda| \rightarrow \infty$, la métrica discreta y la acotada (ver ejercicio 1a) no pueden provenir de una norma.

Definición 1.1.11. Un **espacio con producto escalar** $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ está formado por un espacio vectorial real E y una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada **producto escalar**, que cumplen las siguientes propiedades:

1. (positividad) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in E$.
2. (no degeneración) $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.
3. (multiplicatividad) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. (distributividad) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ para todo $x, y, z \in E$.
5. (simetría) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in E$.

Ejemplo 1.1.12. $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, es un espacio con producto escalar.

Ejemplo 1.1.13. Sea el espacio vectorial $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. La función $\langle \cdot, \cdot \rangle : C([0, 1]) \times C([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ constituye un producto escalar sobre $C([0, 1])$.

Algunos resultados de demostración inmediata se recogen en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.14. Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto escalar, entonces:

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle$ para todo $x, y, z \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$ para todo $x \in E$.

Proposición 1.1.15 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto escalar, entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

para todo $x, y \in E$.

Demostración. Si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $\langle x, y \rangle = 0$ y, por tanto, la desigualdad (de hecho, la igualdad) se cumple. Así pues, podemos suponer que $x, y \neq 0$ y, entonces, $\langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle > 0$. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Si definimos $\langle x, x \rangle = a$, $2\langle x, y \rangle = b$ y $\langle y, y \rangle = c$, la desigualdad anterior se convierte en $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$. Si $\lambda = -\frac{b}{2a}$, obtenemos $b^2 \leq 4ac$, es decir, $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. Tomando raíces cuadradas se obtiene la desigualdad deseada. \square

Observación 1.1.16. *La desigualdad de Cauchy-Schwarz es una igualdad si y solo si x e y son linealmente dependientes.*

Proposición 1.1.17. *Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto escalar y $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, entonces $\| \cdot \|$ es una norma sobre E .*

Demostración. Todas las propiedades son inmediatas salvo la desigualdad triangular:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

donde la desigualdad es consecuencia de la de Cauchy-Schwarz. \square

Observación 1.1.18. *De las Proposiciones 1.1.9 y 1.1.17 se obtiene que la norma y la métrica usuales son, efectivamente, una norma y una métrica sobre \mathbb{R}^n .*

Ejercicios

1. Sea (E, d) un espacio métrico. Prueba que las siguientes funciones $D : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ son también métricas sobre E :

a) (**Métrica acotada**) $D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$

b) $D(x, y) = \inf\{1, d(x, y)\}.$

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente. Prueba que la función $D : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $D(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una métrica sobre \mathbb{R} .

3. Sean E el conjunto de las sucesiones de números reales y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Prueba que la función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{|y_n - x_n|}{1 + |y_n - x_n|}$$

donde $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, es una métrica sobre E .

4. Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $T : E \rightarrow E$ una aplicación lineal inyectiva. Prueba que la función $\|\cdot\|_T : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\|_T = \|T(x)\|$ es otra norma sobre E .
5. Demuestra que la norma del supremo en $C([0, 1])$ no es la definida por el producto escalar del Ejemplo 1.1.13.
6. Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto escalar. Prueba que para todo $x, y \in E$ se verifican:
 - a) (**Ley del paralelogramo**) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$.
 - b) $\|x + y\|\|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.
 - c) $4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$.
7. En el espacio normado $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, prueba que la ley del paralelogramo no es válida y deduce que esta norma no proviene de ningún producto escalar.

1.2. Conceptos topológicos

1.2.1. Conjuntos abiertos

Definición 1.2.1. Sea (E, d) un espacio métrico. Para cada $x \in E$ y $\epsilon > 0$, el conjunto

$$B(x, \epsilon) = \{y \in E : d(x, y) < \epsilon\}$$

se denomina **bola abierta** de centro x y radio ϵ . Un conjunto $A \subset E$ es **abierto** si para cada $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$. Análogamente, el conjunto

$$\overline{B}(x, \epsilon) = \{y \in E : d(x, y) \leq \epsilon\}$$

se denomina **bola cerrada** de centro x y radio ϵ .

Ejemplo 1.2.2. El conjunto vacío \emptyset y el conjunto total E son abiertos.

Ejemplo 1.2.3. El intervalo $(0, 1)$ es abierto en \mathbb{R} pero no en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.2.4. La bola cerrada de centro 0 y radio 1 (**bola unidad cerrada**) no es abierta en \mathbb{R}^2 .

Proposición 1.2.5. En un espacio métrico (E, d) , toda bola abierta es abierta.

Demostración. Sean $B(x, \epsilon)$ una bola abierta de centro x y radio ϵ e $y \in B(x, \epsilon)$. Tomando $\epsilon' = \epsilon - d(x, y) > 0$, se tiene que $B(y, \epsilon') \subset B(x, \epsilon)$. En efecto, si $z \in B(y, \epsilon')$, entonces

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \epsilon' = \epsilon$$

es decir, $z \in B(x, \epsilon)$. □

Proposición 1.2.6. *En un espacio métrico (E, d) , tanto la intersección de un número finito de abiertos como la unión de una colección arbitraria de abiertos son abiertas.*

Demostración. El caso de la intersección de un número finito de abiertos se puede reducir, por inducción, a la intersección no vacía de dos abiertos. Sean A y B abiertos y $x \in A \cap B$. Existen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tales que $B(x, \epsilon_1) \subset A$ y $B(x, \epsilon_2) \subset B$. Basta tomar $\epsilon_3 = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ ya que $B(x, \epsilon_3) \subset A \cap B$.

En cuanto a la unión de una colección arbitraria de abiertos, todo elemento de la unión pertenece a uno de los abiertos, con lo que existe una bola abierta centrada en él y contenida en dicho abierto y, por tanto, en la unión de todos ellos. \square

Observación 1.2.7. *La intersección de una colección arbitraria de abiertos no tiene por qué ser abierta. Basta considerar, por ejemplo, en \mathbb{R} la colección de intervalos $(-\epsilon, \epsilon)$ con $\epsilon > 0$.*

Observación 1.2.8. *A un conjunto con una colección dada de subconjuntos (llamados, por definición, **abiertos**) que cumplan las condiciones de la Proposición 1.2.6 y que contenga al conjunto vacío y al total, se le denomina **espacio topológico**.*

1.2.2. Interior de un conjunto

Definición 1.2.9. *Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Un punto $x \in A$ es **interior** a A si existe un abierto U tal que $x \in U \subset A$. El **interior** de A es la colección de todos los puntos interiores a A y se denota por $\text{int}(A)$.*

Observación 1.2.10. *La condición para que $x \in \text{int}(A)$ es equivalente a que exista $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$.*

Observación 1.2.11. *El interior de un conjunto puede ser vacío. Por ejemplo, el interior de un único punto en \mathbb{R}^n .*

Observación 1.2.12. *El interior de un conjunto es la unión de todos sus subconjuntos abiertos, con lo que es el mayor subconjunto abierto de dicho conjunto.*

Observación 1.2.13. *Un conjunto es abierto si y solo si coincide con su interior.*

Observación 1.2.14. *Si $A \subset B$, entonces $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$.*

1.2.3. Conjuntos cerrados

Definición 1.2.15. *Sea (E, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset E$ es **cerrado** si su complementario $E \setminus A$ es abierto.*

Ejemplo 1.2.16. El conjunto vacío \emptyset y el conjunto total E son cerrados.

Ejemplo 1.2.17. Un punto en \mathbb{R}^n es un conjunto cerrado.

Ejemplo 1.2.18. El intervalo $(0, 1]$ no es ni abierto ni cerrado en \mathbb{R} .

Proposición 1.2.19. En un espacio métrico (E, d) , toda bola cerrada es cerrada.

Demostración. Sean $\overline{B}(x, \epsilon)$ una bola cerrada de centro x y radio ϵ e $y \in E \setminus \overline{B}(x, \epsilon)$. Tomando $0 < \epsilon' < d(x, y) - \epsilon$, se tiene que $B(y, \epsilon') \subset E \setminus \overline{B}(x, \epsilon)$. En efecto, si $z \in B(y, \epsilon')$, entonces

$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(z, y) > d(x, y) - \epsilon' > \epsilon$$

es decir, $z \in E \setminus \overline{B}(x, \epsilon)$. □

De la Proposición 1.2.6 se obtiene fácilmente el siguiente resultado análogo para conjuntos cerrados:

Proposición 1.2.20. En un espacio métrico (E, d) , tanto la unión de un número finito de cerrados como la intersección de una colección arbitraria de cerrados son cerradas.

Observación 1.2.21. La unión de una colección arbitraria de cerrados no tiene por qué ser cerrada. Basta considerar, por ejemplo, en \mathbb{R} la colección de puntos del intervalo $(0, 1)$.

1.2.4. Puntos de acumulación de un conjunto

Definición 1.2.22. Un punto x en un espacio métrico (E, d) es un **punto de acumulación** de un conjunto $A \subset E$ si $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ para todo abierto U que contiene a x . El conjunto de puntos de acumulación de A se denota por A' .

Observación 1.2.23. La proposición 1.2.5 nos permite afirmar que $x \in A'$ si y solo si $A \cap (B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$.

Ejemplo 1.2.24. Un conjunto en \mathbb{R} formado por un único punto no tiene puntos de acumulación.

Ejemplo 1.2.25. Los puntos del intervalo $[0, 1]$ son los puntos de acumulación de $(0, 1)$.

Observación 1.2.26. Un punto de acumulación de un conjunto no tiene por qué pertenecer a él.

Teorema 1.2.27. Un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Demostración. Supongamos en primer lugar que A es cerrado. Así, para todo $x \in E \setminus A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset E \setminus A$, es decir, $A \cap B(x, \epsilon) = \emptyset$, con lo que $x \notin A'$.

Recíprocamente, supongamos que A contiene a todos sus puntos de acumulación y sea $x \in E \setminus A$. Como $x \notin A \cup A'$, existe $\epsilon > 0$ tal que $A \cap B(x, \epsilon) = \emptyset$, es decir, $B(x, \epsilon) \subset E \setminus A$. Por tanto, $E \setminus A$ es abierto. \square

1.2.5. Adherencia de un conjunto

Definición 1.2.28. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. La **adherencia** de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A y se denota por \overline{A} .

Observación 1.2.29. La adherencia de un conjunto es el menor conjunto cerrado que lo contiene.

Observación 1.2.30. Un conjunto es cerrado si y solo si coincide con su adherencia.

Observación 1.2.31. Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Proposición 1.2.32. La adherencia de un conjunto está formada por él mismo junto con sus puntos de acumulación.

Demostración. Sean A un subconjunto de un espacio métrico (E, d) y $B = A \cup A'$. Por el Teorema 1.2.27, cualquier conjunto cerrado que contiene a A también debe contener a B . Si B es cerrado, entonces será el menor conjunto cerrado que contiene a A , con lo que $B = \overline{A}$. Veamos que B es, en efecto, cerrado usando de nuevo el Teorema 1.2.27. Sea $x \in B'$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ se tiene que $B \cap (B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Si y pertenece a dicha intersección, entonces $y \in A$ o $y \in A'$. En este último caso, $B(y, \epsilon - d(x, y))$ contiene puntos de A distintos de x . Así, $x \in A'$ con lo que $x \in B$. \square

A partir de este resultado es obvia la consecuencia siguiente:

Corolario 1.2.33. Dado un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) se tiene que $x \in \overline{A}$ si y solo si $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$.

Definición 1.2.34. Dados dos subconjuntos A y B de un espacio métrico (E, d) con $A \subset B$, se dice que A es **denso** en B si $B \subset \overline{A}$.

Ejemplo 1.2.35. \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} .

1.2.6. Frontera de un conjunto

Definición 1.2.36. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. La **frontera** de A se define como $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$.

Observación 1.2.37. *La frontera de un conjunto es cerrada.*

Observación 1.2.38. $\partial(A) = \partial(E \setminus A)$.

Observación 1.2.39. $\partial(A) = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$.

El Corolario 1.2.33 implica que la frontera de un conjunto tiene también la siguiente descripción:

Proposición 1.2.40. *Dado un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) , se tiene que $x \in \partial(A)$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon)$ contiene puntos de A y de $E \setminus A$.*

Ejercicios

1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ con A abierto y definamos $A + B = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ e } y \in B\}$. Demuestra que $A + B$ es abierto.
2. Demuestra que todo subconjunto de un conjunto arbitrario es abierto con la métrica discreta.
3. Sean $A \subset \mathbb{R}$ abierto y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$. Prueba que B es abierto.
4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y definamos $B = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < 1 \text{ para algún } y \in A\}$. Prueba que B es abierto.
5. Prueba la certeza o falsedad de las expresiones siguientes:
 - a) $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) = \text{int}(A \cup B)$.
 - b) $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \text{int}(A \cap B)$.
 - c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 - d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
 - e) $\text{int}(\overline{A}) = \text{int}(A)$.
 - f) $\overline{\text{int}(A)} = A$.
 - g) $\partial(\overline{A}) = \partial(A)$.
6. ¿Es cierto en un espacio métrico arbitrario que el interior de una bola cerrada es la correspondiente bola abierta?
7. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$ un subconjunto finito. Prueba que el conjunto $B = \{x \in E : d(x, y) \leq 1 \text{ para algún } y \in A\}$ es cerrado.
8. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Demuestra que B es abierto (cerrado) en (A, d) si y solo si $B = B' \cap A$ para cierto abierto (cerrado) B' en (E, d) .

9. ¿Es cierto en un espacio métrico arbitrario que los puntos de una bola cerrada son puntos de acumulación de la correspondiente bola abierta?
10. Encuentra los puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 - $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
 - $\left\{ \left(\frac{m}{n}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.
11. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Demuestra que si $x \in A'$, entonces todo abierto que contenga a x contiene a su vez infinitos puntos de A .
12. Dado $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$, prueba que $A' = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$.
13. Dado un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) , prueba que A' es cerrado.
14. Dado un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) , prueba que $x \in \overline{A}$ si y solo si $\inf\{d(x, y) : y \in A\} = 0$.
15. Dados un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) y $x \in E$, se definen

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

y para cada $\epsilon > 0$,

$$B(A, \epsilon) = \{x \in E : d(x, A) < \epsilon\}$$

y

$$\overline{B}(A, \epsilon) = \{x \in E : d(x, A) \leq \epsilon\}.$$

Prueba que para cada $\epsilon > 0$, $B(A, \epsilon)$ es abierto, $\overline{B}(A, \epsilon)$ es cerrado y que A es cerrado si y solo si $A = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{B}(A, \epsilon)$.

16. Dados dos subconjuntos A y B de un espacio métrico (E, d) , prueba que

$$\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B) \subset \partial(A \cup B) \cup A \cup B.$$

17. Determina el interior, los puntos de acumulación, la adherencia y la frontera de los siguientes conjuntos:

- $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1 \right\}$.
- $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_1 = \frac{1}{n} \right\}$.
- $C = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$.
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$.

1.3. Sucesiones y completitud

Definición 1.3.1. Una **sucesión** x_n en un conjunto E es una función de \mathbb{N} en E . Dada una sucesión estrictamente creciente $j(n)$ en \mathbb{N} la sucesión $y_n = x_{j(n)}$ se llama **subsucesión** de x_n . En un espacio métrico (E, d) , se dice que x_n **converge** a un punto $x \in E$ y escribimos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, si para todo abierto U que contiene a x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.

Es obvio que la convergencia de una sucesión en un espacio métrico se puede caracterizar de la forma siguiente:

Proposición 1.3.2. Una sucesión x_n en un espacio métrico (E, d) converge a x si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Observación 1.3.3. El límite de una sucesión convergente en un espacio métrico es único.

Definición 1.3.4. Una sucesión x_n en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ converge a $x \in E$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Los dos resultados siguientes se demuestran sin dificultad:

Proposición 1.3.5. Sean x_n e y_n sucesiones en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ convergentes a x e y , respectivamente y λ_n una sucesión en \mathbb{R} convergente a $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n x_n) = \lambda x$.
3. Si $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} x_n\right) = \frac{1}{\lambda} x$.

Proposición 1.3.6. Una sucesión (x_k^1, \dots, x_k^n) en \mathbb{R}^n converge a (x^1, \dots, x^n) si y solo si x_k^i converge a x^i para todo $i = 1, \dots, n$.

Las sucesiones pueden utilizarse para determinar si un conjunto es cerrado, así como para caracterizar la adherencia de un conjunto:

Proposición 1.3.7. Sea (E, d) un espacio métrico.

1. Un conjunto $A \subset E$ es cerrado si y solo si para cada sucesión convergente x_n contenida en A , el límite pertenece a A .
2. Dado un conjunto $B \subset E$, $x \in \overline{B}$ si y solo si existe una sucesión x_n contenida en B convergente a x .

Demostración.

1. En primer lugar, supongamos que A es cerrado y sea x_n una sucesión contenida en A y convergente a x . Entonces $x \in A'$ y, por el Teorema 1.2.27, se tiene que $x \in A$. Recíprocamente, dado $x \in A'$, para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. La sucesión x_n está contenida en A y converge a x , con lo que, por hipótesis, $x \in A$ y, de nuevo por el Teorema 1.2.27, se tiene que A es cerrado.
2. El argumento es similar.

□

La convergencia de una sucesión se puede caracterizar en términos de subsucesiones como muestra el resultado siguiente:

Proposición 1.3.8.

1. Una sucesión x_n en un espacio métrico converge a x si y solo si toda subsucesión suya converge a x también.
2. Una sucesión x_n en un espacio métrico converge a x si y solo si toda subsucesión suya tiene a su vez una subsucesión convergente a x .

Demostración.

1. Si toda subsucesión de x_n converge a x , basta considerar las subsucesiones x_{2n-1} y x_{2n} .
2. Si x_n no converge a x , existe $\epsilon > 0$ y una subsucesión $x_{j(n)}$ tales que $d(x_{j(n)}, x) \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Abordemos ahora la completitud de un espacio métrico.

Definición 1.3.9. En un espacio métrico (E, d) , se dice que x_n es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq n_0$. El espacio (E, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge a un punto de E .

Ejemplo 1.3.10. \mathbb{R} es un espacio métrico completo.

Ejemplo 1.3.11. \mathbb{Q} y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no son espacios métricos completos.

Definición 1.3.12. En un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, se dice que x_n es una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para todo $n, m \geq n_0$.

Definición 1.3.13. En un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, se dice que una sucesión x_n está **acotada** si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|x_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.3.14. En un espacio métrico (E, d) , se dice que una sucesión x_n está acotada si existen $C \in \mathbb{R}$ y $x \in E$ tales que $d(x_n, x) \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En general, se dice que un subconjunto $A \subset E$ está acotado si está contenido en una bola.

Es fácil obtener las siguientes propiedades de las sucesiones de Cauchy:

Proposición 1.3.15.

1. Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.
2. Una sucesión de Cauchy en un espacio métrico debe estar acotada.
3. Toda sucesión convergente en un espacio métrico está acotada.
4. Si una subsucesión de una sucesión de Cauchy en un espacio métrico converge a x , entonces la sucesión converge a x .

El que \mathbb{R} sea un espacio métrico completo junto con la Proposición 1.3.6 implica:

Teorema 1.3.16. \mathbb{R}^n es un espacio métrico completo.

Ejercicios

1. Calcula, si existen, los límites de las siguientes sucesiones de \mathbb{R}^2 :

a) $((-1)^n, \frac{1}{n})$.

b) $(1, \frac{1}{n})$.

c) $\left(\frac{\cos(n\pi)}{n}, \frac{\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})}{n}\right)$.

d) $(\frac{1}{n}, n^{-n})$.

2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados. ¿Debe $A + B$ ser cerrado?
3. Sean (E, d) un espacio métrico completo y $A \subset E$ un subconjunto cerrado. Prueba que (A, d) es también un espacio métrico completo.
4. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$ tales que (A, d) es un espacio métrico completo. Demuestra que A es cerrado.

5. Si (E, d) es un espacio métrico con la propiedad de que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente, prueba que es completo.
6. Sea (E, d) un espacio métrico siendo d la métrica discreta. ¿Es completo?
7. Sea x_n una sucesión en \mathbb{R}^k tal que $d(x_{n+1}, x_n) \leq r d(x_n, x_{n-1})$ para cierto $r \in [0, 1)$ y todo $n > 1$. Prueba que x_n converge.
8. Sea x_n una sucesión en \mathbb{R}^k tal que $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Demuestra que x_n converge.
9. Sea $E = \{a_1, a_2, \dots\}$ un conjunto numerable. Se define

$$d(a_n, a_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Comprueba que d es una métrica sobre E y estudia si (E, d) es completo.

1.4. Compacidad

En \mathbb{R} toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. Por tanto, toda sucesión contenida en un conjunto cerrado y acotado tiene una subsucesión convergente a un punto de dicho conjunto. La generalización de esta propiedad en espacios métricos viene dada por la siguiente definición:

Definición 1.4.1. Sea (E, d) un espacio métrico. Se dice que un subconjunto $A \subset E$ es **secuencialmente compacto** si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente a un punto de A .

Observación 1.4.2. Utilizando la caracterización de los conjuntos cerrados mediante sucesiones se obtiene que todo conjunto secuencialmente compacto A debe ser cerrado. Además, debe estar acotado pues, de lo contrario, existirían un punto x y una sucesión x_n en A tales que $d(x_n, x) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que x_n no podría tener ninguna subsucesión convergente.

Definición 1.4.3. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Un **recubrimiento (abierto)** de A es una colección de conjuntos (abiertos) cuya unión contiene a A o **recubre** A . Un **subrecubrimiento (finito)** de un recubrimiento dado es una subcolección (finita) cuya unión también recubre A .

Definición 1.4.4. Sea (E, d) un espacio métrico. Se dice que un subconjunto $A \subset E$ es **compacto** si todo recubrimiento abierto de A contiene un subrecubrimiento finito. Si $A = E$ se dice que (E, d) es un **espacio métrico compacto**.

Observación 1.4.5. Un conjunto compacto A está acotado pues dado $x \in A$, la colección de bolas abiertas $\{B(x, n) : n \in \mathbb{N}\}$ forma un recubrimiento abierto de A .

Definición 1.4.6. Sea (E, d) un espacio métrico. Se dice que un subconjunto $A \subset E$ es **totalmente acotado** si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ en A tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \epsilon)$.

Observación 1.4.7. Un conjunto totalmente acotado A está acotado pues existe un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ en A tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, 1)$ y

$$B(x_k, 1) \subset B(x_1, 1 + d(x_k, x_1)) \subset B(x_1, 1 + \max\{d(x_2, x_1), \dots, d(x_n, x_1)\})$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.

Teorema 1.4.8 (Bolzano-Weierstrass). Un subconjunto de un espacio métrico es compacto si y solo si es secuencialmente compacto.

La demostración de este resultado requiere el establecimiento de dos lemas previos:

Lema 1.4.9. Un subconjunto compacto A de un espacio métrico (E, d) es cerrado.

Demostración. Veamos que $E \setminus A$ es abierto. Sea $x \in E \setminus A$. La colección de conjuntos abiertos $U_n = E \setminus \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ con $n \in \mathbb{N}$ recubre A , así que debe existir un subrecubrimiento finito. Si n_0 es el índice máximo de los abiertos del subrecubrimiento, entonces se tiene que $B\left(x, \frac{1}{n_0}\right) \subset E \setminus A$. \square

Lema 1.4.10. Si (E, d) es un espacio métrico compacto y $A \subset E$ es cerrado, entonces A es compacto.

Demostración. Sea $\{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de A . Entonces la colección de conjuntos $\{U_i : i \in I\} \cup (E \setminus A)$ es un recubrimiento abierto de E , con lo que tiene un subrecubrimiento finito, digamos $\{U_1, \dots, U_n, E \setminus A\}$. Así, $\{U_1, \dots, U_n\}$ es un subrecubrimiento finito de A . \square

Demostración del Teorema de Bolzano-Weierstrass. Sea A un subconjunto compacto de un espacio métrico (E, d) y supongamos que existe una sucesión x_n en A que no tiene subsucesiones convergentes. En particular, esto significa que x_n tiene infinitos puntos distintos, digamos y_n . Puesto que y_n tampoco tiene subsucesiones convergentes, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un abierto U_n que contiene a y_n y a ningún otro término de la sucesión. El conjunto $\{y_1, y_2, \dots\}$ es cerrado pues no tiene puntos de acumulación. Aplicando el Lema 1.4.10 a dicho conjunto se obtiene su compacidad. Pero $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento abierto suyo que no tiene ningún subrecubrimiento finito, lo cual es una contradicción.

Así, x_n tiene una subsucesión convergente cuyo límite está en A ya que, en virtud del Lema 1.4.9, A es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que A es secuencialmente compacto y sea $\{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de A . Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in A$ existe $i \in I$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U_i$ (en caso contrario, para todo $n \in \mathbb{N}$ existiría $x_n \in A$ tal que $B(x_n, \frac{1}{n})$ no estaría contenida en ningún U_i . Por hipótesis, x_n tendría una subsucesión y_n convergente a $y \in A$. Siendo $i_0 \in I$ y $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subset U_{i_0}$ y tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $d(y_{n_0}, y) < \frac{\delta}{2}$ y $\frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$ se tendría que $B(y_{n_0}, \frac{1}{n_0}) \subset U_{i_0}$ lo cual es una contradicción). Además, A es totalmente acotado (si no lo fuera, existiría $r > 0$ tal que A no se podría recubrir con un número finito de bolas abiertas de radio r . Tomando

$$z_1 \in A, z_2 \in A \setminus B(z_1, r), \dots, z_n \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B(z_k, r)$$

obtendríamos una sucesión z_n en A tal que $d(z_n, z_m) \geq r$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$, es decir, sin ninguna subsucesión convergente). Por tanto, existe un conjunto finito $\{t_1, \dots, t_n\}$ en A tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^n B(t_k, \epsilon)$. Ya que para cada k existe $i_k \in I$ tal que $B(t_k, \epsilon) \subset U_{i_k}$, la colección $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ forma un subrecubrimiento finito. \square

Teorema 1.4.11. *Un espacio métrico (E, d) es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Primero, supongamos que E es compacto. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, es secuencialmente compacto. Así, toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, luego la sucesión converge y (E, d) es completo. Además, según se probó en la demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass, todo conjunto secuencialmente compacto es totalmente acotado.

Recíprocamente, supóngase que E es completo y totalmente acotado. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, basta probar que E es secuencialmente compacto. Sea x_n una sucesión en E (podemos suponer que todos los términos son distintos). Si recubrimos E con un número finito de bolas de radio 1, existe una subsucesión de x_n totalmente contenida en una de esas bolas. Ahora, si recubrimos E con un número finito de bolas de radio $\frac{1}{2}$, existe una subsucesión de la anterior totalmente contenida en una de ellas y así sucesivamente. La subsucesión **diagonal** (el primer elemento de la primera subsucesión, el segundo de la segunda, etc.) es de Cauchy y, por tanto, convergente. \square

Corolario 1.4.12. *Sea (E, d) es un espacio métrico completo. Un subconjunto A es compacto si y solo si es cerrado y totalmente acotado.*

Demostración. Basta aplicar el teorema anterior al espacio métrico (A, d) . \square

Los compactos de \mathbb{R}^n están caracterizados por el siguiente teorema:

Teorema 1.4.13 (Heine-Borel). *Un subconjunto de \mathbb{R}^n es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Ya hemos probado que los conjuntos compactos son cerrados y acotados. Recíprocamente, sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, basta probar que A es secuencialmente compacto. Sea $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ una sucesión en A . Como A está acotado, la sucesión x_k^1 tiene una subsucesión convergente, digamos $x_{j_1(k)}^1$. Entonces $x_{j_1(k)}^2$ tiene una subsucesión convergente, digamos $x_{j_2(k)}^2$. Continuando de esta manera obtenemos la subsucesión convergente $x_{j_n(k)}$ cuyo límite está en A por ser cerrado. \square

El resultado siguiente se obtiene como una consecuencia importante del teorema de Bolzano-Weierstrass:

Teorema 1.4.14 (Propiedad de los conjuntos encajados). *Sea A_n una sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico (E, d) tales que $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Elijamos $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión x_n tiene una subsucesión convergente por estar contenida en el conjunto compacto A_1 . El punto límite está en todos los conjuntos A_n por ser cerrados. \square

Ejercicios

1. Encuentra un ejemplo de un conjunto cerrado y acotado que no sea compacto.
2. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Una colección de conjuntos cerrados tiene la **propiedad de intersección finita** para A si la intersección de cualquier cantidad finita de ellos con A es no vacía. Demuestra que A es compacto si y solo si toda colección de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita para A tiene intersección no vacía con A .
3. ¿Es cierta la propiedad de los conjuntos encajados si estos no son compactos?
4. Prueba que $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es compacto.
5. Demuestra, utilizando la definición, que no son compactos los siguientes conjuntos:
 - a) \mathbb{R} .
 - b) $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

- c) La bola abierta en \mathbb{R}^n de centro 0 y radio r .
6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ compactos. ¿Debe $A + B$ ser compacto?
7. Estudia la compacidad de los conjuntos siguientes:
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(-1 + \frac{3}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$.
 - $\{(t, \sin \frac{\pi}{t}) : 0 < t \leq 1\}$.
8. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado no vacío y $x \notin A$. Demuestra que existe $y \in A$ tal que $d(x, y) = d(x, A)$.

1.5. Conexión

Definición 1.5.1. Sea (E, d) un espacio métrico. Una aplicación $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ es **continua** si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = \varphi(t)$ para toda sucesión t_n en $[a, b]$ convergente a $t \in [a, b]$. Un **arco continuo** que une dos puntos $x, y \in E$ es una aplicación continua $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ tal que $\varphi(a) = x$ y $\varphi(b) = y$. Un arco φ está **contenido** en un conjunto A si se verifica que $\varphi(t) \in A$ para todo $t \in [a, b]$. Finalmente, decimos que un conjunto es **conexo por arcos** si cualesquiera dos puntos del conjunto se pueden unir mediante un arco continuo contenido en el conjunto.

Ejemplo 1.5.2. El intervalo $[0, 1]$ es conexo por arcos, pues dados $x, y \in [0, 1]$ basta tomar el arco continuo contenido en $[0, 1]$ $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\varphi(t) = (y - x)t + x$.

Definición 1.5.3. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Se dice que dos abiertos U y V **separan** A si satisfacen las condiciones siguientes:

- $U \cap V \cap A = \emptyset$.
- $U \cap A \neq \emptyset$.
- $V \cap A \neq \emptyset$.
- $A \subset U \cup V$.

Se dice que A es **disconexo** si existen tales conjuntos; en caso contrario, se dice que A es **conexo**. Finalmente, una **componente conexa** de A es un subconjunto conexo $A_0 \subset A$ tal que no existe un conjunto conexo en A que contenga a A_0 y sea distinto de A_0 .

Lema 1.5.4. El intervalo $[a, b]$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $[a, b]$ es desconexo. Entonces existen dos abiertos U y V que separan $[a, b]$. Supongamos, además, que $b \in V$. Sea $c = \sup(U \cap [a, b])$, que existe porque $U \cap [a, b]$ es no vacío y está acotado superiormente. El conjunto $U \cap [a, b]$ es cerrado, pues su complementario es $V \cup (\mathbb{R} \setminus [a, b])$, que es abierto. Así, $c \in U \cap [a, b]$. Ahora, se tiene que $c \neq b$, pues $c \notin V$ y $b \in V$. Ya que ningún intervalo abierto centrado en c puede estar totalmente contenido en U , cualquier intervalo de ese tipo interseca a $V \cap [a, b]$. Por tanto, c es un punto de acumulación de $V \cap [a, b]$. Como $U \cap [a, b]$, el conjunto $V \cap [a, b]$ es cerrado y entonces $c \in V \cap [a, b]$, lo cual contradice que $U \cap V \cap [a, b] = \emptyset$. \square

Corolario 1.5.5. *No existen subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos A y B de $[a, b]$ cuya unión sea $[a, b]$.*

Demostración. Si existieran tales subconjuntos, los abiertos $U = \mathbb{R} \setminus A$ y $V = \mathbb{R} \setminus B$ separarían $[a, b]$. \square

La conexión por arcos y la conexión se relacionan de la siguiente forma:

Teorema 1.5.6. *Los conjuntos conexos por arcos son conexos.*

Demostración. Sea A un conjunto conexo por arcos supuestamente desconexo. Entonces existen dos abiertos U y V que separan A . Sean $x \in U \cap A$ e $y \in V \cap A$. Existe un arco continuo $\varphi : [a, b] \rightarrow A$ que une x con y . Sean $B = \varphi^{-1}(U)$ y $C = \varphi^{-1}(V)$. Supongamos que t_n es una sucesión en B convergente a t . Entonces $t \in [a, b]$ y $\varphi(t_n)$ converge a $\varphi(t)$. Se tiene que $\varphi(t) \in U$ pues, en caso contrario, $\varphi(t_n) \in V$ para n suficientemente grande lo que contradice el hecho de que $U \cap V \cap A = \emptyset$. Por tanto, B es cerrado y, análogamente, C también. Además, B y C son no vacíos ($a \in B$ y $b \in C$), disjuntos ($B \cap C = \varphi^{-1}(U \cap V) = \emptyset$) y

$$B \cup C = \varphi^{-1}(U \cup V) = \varphi^{-1}(A) = [a, b].$$

Obtenemos, pues, una contradicción con el Corolario 1.5.5. \square

Observación 1.5.7. *El recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir, existen conjuntos conexos que no son conexos por arcos.*

Ejercicios

1. Sean $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arco continuo y $A = \varphi([0, 1])$. Demuestra que A es conexo por arcos.
2. Sean $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un arco continuo, $a < c < d < b$ y $A = \{\varphi(t) : c \leq t \leq d\}$. ¿Debe $\varphi^{-1}(A)$ ser conexo por arcos?

3. Estudia las componentes conexas de \mathbb{Z} y de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
4. Prueba que $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es conexo.
5. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus A$ y $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arco continuo que une x e y . Prueba que existe $t \in [0, 1]$ tal que $\varphi(t) \in \partial(A)$.
6. Demuestra que un subconjunto de \mathbb{R} es conexo si y solo si es un intervalo.
7. Si A es un subconjunto conexo de \mathbb{R}^n , ¿debe ser $\mathbb{R}^n \setminus A$ conexo?
8. Sean (E, d) un espacio métrico y $\{A_i : i \in I\}$ una colección de subconjuntos conexos de E tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para cualesquiera $i, j \in I$. Prueba que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.

1.6. Límites, continuidad y continuidad uniforme

Definición 1.6.1. Sean (E, d) y (F, d') dos espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \rightarrow F$. Supongamos que $x_0 \in A'$. Se dice que $L \in F$ es el **límite** de f en x_0 y lo denotamos por $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \delta$ se tiene que $d'(f(x), L) < \epsilon$.

Observación 1.6.2. El límite de f en x_0 , si existe, es único. En efecto, supongamos que dicho límite es L y L' y sea $\epsilon > 0$. Existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que si $0 < d(x, x_0) < \delta_1$, entonces $d'(f(x), L) < \frac{\epsilon}{2}$ y si $0 < d(x, x_0) < \delta_2$, entonces $d'(f(x), L') < \frac{\epsilon}{2}$. Por tanto, si $0 < d(x, x_0) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $d'(L, L') \leq d'(L, f(x)) + d'(f(x), L') < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, luego $d'(L, L') = 0$ con lo que $L = L'$.

Definición 1.6.3. Sean (E, d) y (F, d') dos espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$ y $x_0 \in A$. Se dice que f es **continua** en x_0 si $x_0 \notin A'$ o si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observación 1.6.4. En la definición de límite hay que especificar que $x \neq x_0$ pues f no tiene por qué estar definida en x_0 , pero en la de continuidad puede ser $x = x_0$.

Definición 1.6.5. Sean (E, d) y (F, d') dos espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \rightarrow F$. Se dice que f es **continua** en $B \subset A$ si y solo si es continua en cada punto de B y se dice que f es continua si y solo si lo es en todo su dominio A .

El resultado siguiente caracteriza la continuidad de una función:

Teorema 1.6.6. Sean (E, d) y (F, d') dos espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \rightarrow F$. Son equivalentes:

1. f es continua.

2. Para cada sucesión x_n convergente a x_0 en A , se tiene que $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.
3. Para cada conjunto abierto $U \subset F$, $f^{-1}(U)$ es abierto en (A, d) .
4. Para cada conjunto cerrado $B \subset F$, $f^{-1}(B)$ es cerrado en (A, d) .

Demostración. Es fácil demostrar que de 1 se obtiene 2.

Veamos que 2 implica 4. Sean un conjunto cerrado $B \subset F$ y una sucesión x_n en $f^{-1}(B)$ convergente a $x \in A$. Por continuidad, la sucesión $f(x_n)$ en B converge a $f(x)$. Ya que B es cerrado, $f(x) \in B$, es decir, $x \in f^{-1}(B)$.

Pasando al complementario, de 4 se obtiene 3.

Finalmente, 3 implica 1. En efecto, sean $x_0 \in A$ y $\epsilon > 0$. Por hipótesis se tiene que $f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$ es un conjunto abierto en (A, d) y $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$, luego existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \cap A \subset f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$, obteniéndose así 1. \square

Observación 1.6.7. En las condiciones del Teorema 1.6.6, si $x_0 \in A'$, entonces se tiene que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ para toda sucesión x_n en $A \setminus \{x_0\}$ convergente a x_0 . La prueba del solo si es análoga a la de 1 implica 2 del Teorema 1.6.6 y el si se obtiene por reducción al absurdo.

A continuación vamos a estudiar el comportamiento de los conjuntos compactos y conexos bajo funciones continuas.

Teorema 1.6.8. Sean (E, d) y (F, d') dos espacios métricos, $A \subset E$ conexo (conexo por arcos) y $f : A \rightarrow F$ continua. Entonces $f(A)$ es conexo (conexo por arcos).

Demostración. Supongamos que $f(A)$ es desconexo. Entonces existen dos abiertos U y V tales que $U \cap V \cap f(A) = \emptyset$, $U \cap f(A) \neq \emptyset$, $V \cap f(A) \neq \emptyset$ y $f(A) \subset U \cup V$. Ya que $f^{-1}(U) = U' \cap A$ y $f^{-1}(V) = V' \cap A$ para ciertos abiertos U' y V' , se tiene que $U' \cap V' \cap A = \emptyset$, $U' \cap A \neq \emptyset$, $V' \cap A \neq \emptyset$ y $A \subset U' \cup V'$, es decir, A es desconexo.

En cuanto a la conexión por arcos, sean $z, w \in f(A)$, es decir, $z = f(x)$ y $w = f(y)$ con $x, y \in A$ y φ un arco continuo contenido en A que une x con y . Entonces $f(\varphi(t))$ es un arco continuo contenido en $f(A)$ que une z con w . \square

Teorema 1.6.9. Sean (E, d) y (F, d') espacios métricos, $A \subset E$ compacto y $f : A \rightarrow F$ continua. Entonces $f(A)$ es compacto.

Demostración. Sea y_n una sucesión en $f(A)$, es decir, $y_n = f(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo x_n una sucesión en A . Como A es compacto, existe una subsucesión $x_{j(n)}$ convergente a $x \in A$. Ya que f es continua, $y_{j(n)}$ es una subsucesión convergente a $f(x) \in f(A)$, luego $f(A)$ es compacto. \square

Los siguientes resultados nos dicen como se comportan las funciones continuas al operar con ellas.

Teorema 1.6.10. Sean (E, d) , (F, d') y (G, d'') espacios métricos y $f : A \subset E \longrightarrow F$ y $g : B \subset F \longrightarrow G$ continuas con $f(A) \subset B$. Entonces la composición $g \circ f : A \longrightarrow G$, definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, es continua.

Demostración. Sea $U \subset G$ abierto. Entonces $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Ahora, ya que g es continua, por el Teorema 1.6.6 $g^{-1}(U) = U' \cap B$ para cierto abierto U' , luego $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(U' \cap B) = f^{-1}(U') = U'' \cap A$ para cierto abierto U'' . Así, $g \circ f$ es continua. \square

Proposición 1.6.11. Sean (E, d) un espacio métrico, $(F, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $A \subset E$ y $x_0 \in A'$.

1. Si $f, g : A \longrightarrow F$ con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L'$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = L + L'$$

estando definida $f + g : A \longrightarrow F$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

2. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow F$ con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L'$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = LL'$$

estando definida $f \cdot g : A \longrightarrow F$ por $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

3. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow F$ con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L'$, entonces f es no nula en $A \cap (B(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\})$ para cierto $\epsilon > 0$ y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g}{f} \right)(x) = \frac{L'}{L}$$

estando definida $\frac{g}{f} : A \cap (B(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\}) \longrightarrow F$ por $\left(\frac{g}{f} \right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

Demostración.

1. Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \delta_1$ se tiene que $\|f(x) - L\| < \frac{\epsilon}{2}$ y existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \delta_2$ se tiene que $\|g(x) - L'\| < \frac{\epsilon}{2}$. Si $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces, usando la desigualdad triangular, se tiene que $\|(f + g)(x) - (L + L')\| < \epsilon$.

2. Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \delta_1$ se tiene que

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2(\|L'\| + 1)}$$

y

$$|f(x)| \leq |L| + 1.$$

Además, existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \delta_2$ se tiene que

$$\|g(x) - L'\| < \frac{\epsilon}{2(|L| + 1)}.$$

Si $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces, usando la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{aligned} \|(f \cdot g)(x) - LL'\| &= \|f(x)g(x) - L'f(x) + L'f(x) - LL'\| \\ &\leq |f(x)|\|g(x) - L'\| + |f(x) - L|\|L'\| \\ &< \frac{\epsilon(|L| + 1)}{2(|L| + 1)} + \frac{\epsilon\|L'\|}{2(\|L'\| + 1)} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

3. Basta considerar el producto de g y $\frac{1}{f}$, ya que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$. En efecto, consideremos $\epsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \delta_1$ se tiene que $|f(x) - L| < \frac{|L|}{2}$, con lo que $|f(x)| > \frac{|L|}{2}$ y existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \delta_2$ se tiene que $|f(x) - L| < \frac{\epsilon L^2}{2}$. Para todo $x \in A$ con $0 < d(x, x_0) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| = \left| \frac{L - f(x)}{Lf(x)} \right| < \frac{2}{L^2} |f(x) - L| < \epsilon.$$

□

Corolario 1.6.12. Sean (E, d) un espacio métrico, $(F, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $A \subset E$ y $x_0 \in A \cap A'$.

1. Si $f, g : A \rightarrow F$ son continuas en x_0 , entonces $f + g$ también.
2. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \rightarrow F$ son continuas en x_0 , entonces $f \cdot g$ también.
3. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \rightarrow F$ son continuas en x_0 , con $f(x_0) \neq 0$, entonces f es no nula en $A \cap B(x_0, \epsilon)$ para cierto $\epsilon > 0$ y $\frac{g}{f}$ es continua en x_0 .

Las funciones continuas con valores reales están acotadas sobre conjuntos compactos y alcanzan sus valores máximo y mínimo en puntos del conjunto:

Teorema 1.6.13. Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $B \subset A$ es compacto, entonces f está acotada en B , es decir, $f(B)$ es un conjunto acotado. Además, existen $x_1, x_2 \in B$ tales que $f(x_1) = \inf f(B)$ (**mínimo absoluto** de f en B) y $f(x_2) = \sup f(B)$ (**máximo absoluto** de f en B).

Demostración. Por el Teorema 1.6.9 $f(B)$ es compacto, luego cerrado y acotado. Por ser cerrado se tiene que $\inf f(B), \sup f(B) \in f(B)$. \square

Las funciones continuas con valores reales sobre conjuntos conexos alcanzan todos los valores intermedios:

Teorema 1.6.14 (de los valores intermedios). Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $B \subset A$ es conexo (conexo por arcos) y que $x, y \in B$. Para cada $c \in (f(x), f(y))$ existe $z \in B$ tal que $f(z) = c$.

Demostración. Supongamos que no existe tal z . Sean $U = (-\infty, c)$ y $V = (c, \infty)$. Como f es continua, $f^{-1}(U) = U' \cap B$ y $f^{-1}(V) = V' \cap B$ para ciertos abiertos U' y V' . Entonces, $U' \cap V' \cap B = \emptyset$, $x \in U' \cap B \neq \emptyset$, $y \in V' \cap B \neq \emptyset$ y $B \subset U' \cup V'$, luego B es desconexo, lo cual es una contradicción. \square

Una variante del concepto de continuidad es la continuidad uniforme:

Definición 1.6.15. Sean (E, d) y (F, d') dos espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \rightarrow F$. Se dice que f es **uniformemente continua** en $B \subset A$ si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B$ con $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Observación 1.6.16. Si f es uniformemente continua, entonces es continua. El recíproco no es cierto en general.

Teorema 1.6.17. Sean (E, d) y (F, d') dos espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$ continua y $B \subset A$ compacto. Entonces f es uniformemente continua en B .

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ y $x \in B$, existe $\delta_x > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta_x$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Los abiertos $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ recubren B , luego existe un subrecubrimiento finito, digamos

$$B\left(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}\right), \dots, B\left(x_n, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right).$$

Si $x, y \in B$ con $d(x, y) < \min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right\}$, entonces existe x_i tal que $d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$ y, por lo tanto, $d(x_i, y) \leq d(x, x_i) + d(x, y) < \delta_{x_i}$. Así,

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_i)) + d'(f(x_i), f(y)) < \epsilon.$$

\square

Ejercicios

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ compacto. Demuestra que

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, y) \in A\}$$

es compacto.

2. Encuentra una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un compacto (conexo) $A \subset \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(A)$ no sea compacto (conexo).
3. Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, prueba que $A = \{f(x) : \|x\| = 1\}$ es un intervalo cerrado y acotado.
4. Da un ejemplo de una función no continua que transforma compactos en compactos.
5. Da un ejemplo de una función no continua que transforma conexos (conexos por arcos) en conexos (conexos por arcos).
6. Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función dada por $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Demuestra que f es continua si y solo si lo es cada componente f_i , $i = 1, \dots, n$.
7. Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en $x_0 \in A$, siendo $f(x_0) \neq 0$. Demuestra que existe $\epsilon > 0$ tal que f es no nula en $B(x_0, \epsilon)$.
8. Demuestra que una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua (de hecho, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|L(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$).
9. Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua y $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Prueba que $f(A)$ está acotado.
10. Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ conexo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Demuestra que o bien $f(x) > 0$ para todo $x \in A$ o bien $f(x) < 0$ para todo $x \in A$.
11. Encuentra una función continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ tales que $f(A)$ no sea cerrado.
12. Sean (E, d) un espacio métrico compacto y $f : E \rightarrow E$ una **isometría**, es decir, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in E$. Demuestra que f es una biyección.
13. Sean (E, d) y (F, d') dos espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \rightarrow F$.

- a) Prueba que f es uniformemente continua si y solo si para cada par de sucesiones x_n e y_n en A con $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

- b) Demuestra que si f es uniformemente continua, entonces transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.
14. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Prueba que A es conexo si y solo si toda función continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(A) \subset \{0, 1\}$, es constante. Obtén como consecuencia que si A es conexo, entonces también lo es \overline{A} .
15. Da un ejemplo de un conjunto conexo no conexo por arcos.
16. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- a) Prueba que si para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ y $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$, entonces existen los **límites reiterados**

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$$

y

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

y son iguales a L .

- b) Da un ejemplo en el que los límites reiterados existan y sean distintos.
- c) Da un ejemplo en el que los límites reiterados existan y sean iguales, pero no exista $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$.
- d) Da un ejemplo en el que exista $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ y no exista alguno de los límites reiterados.
17. Sean $A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ y $g : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

- a) Prueba que g es una biyección continua de A sobre $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que

$$g((0, r) \times (0, 2\pi]) = B((0, 0), r) \setminus \{(0, 0)\}.$$

- b) Sean $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ y $F = f \circ g$. Prueba que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = L$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \rho < \delta$, entonces $|F(\rho, \theta) - L| < \epsilon$, cualquiera que sea $\theta \in (0, 2\pi]$.
- c) Estudia la continuidad en $(0, 0)$ de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} \sin(x^2 + y^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

18. Sean f , g y F las funciones definidas en el ejercicio anterior y supongamos que $F(\rho, \theta) = h(\rho)G(\theta)$ donde h no es idénticamente nula en los intervalos de la forma $(0, r)$ y $\lim_{\rho \rightarrow 0} h(\rho) = 0$.

a) Demuestra que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ si y solo si la función G está acotada.

b) Estudia la continuidad en $(0, 0)$ de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 - y^2} & \text{si } x^2 - y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

19. Estudia la existencia en $(0, 0)$ de límites reiterados, **límites direccionales** (a lo largo de rectas que pasan por el origen) y límite de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ o } y \geq x^2 \end{cases}$

b) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

c) $h(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \cos(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

20. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{4x^2 + y^2 - 1} & \text{si } 4x^2 + y^2 \neq 1 \text{ y } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } 4x^2 + y^2 = 1 \text{ o } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c) $h(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \operatorname{sen}(x + y) \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

21. Estudia la continuidad uniforme de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (\operatorname{sen} x, \cos x)$.

b) $g(x, y) = x + \frac{y}{x}$ definida en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

c) $h(x, y) = \cos^3 \frac{1}{x^2 + y^2}$ definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

22. (**Principio de la aplicación contractiva**) Sean (E, d) un espacio métrico completo, una función $f : E \rightarrow E$ y $k \in [0, 1)$ tales que $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in E$. Demuestra que existe un único punto fijo de f , es decir, un punto $x^* \in E$ tal que $f(x^*) = x^*$. De hecho, prueba que si x_0 es cualquier punto de E y definimos la sucesión

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Tema 2

Cálculo diferencial en \mathbb{R}^n

2.1. Funciones diferenciables

Definición 2.1.1. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **diferenciable** en $x_0 \in A$ si existe una aplicación lineal $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ llamada **diferencial** de f en x_0 tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Se dice que f es diferenciable en A si lo es en cada punto de A .

Teorema 2.1.2. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $x_0 \in A$. Entonces $Df(x_0)$ queda determinada de forma única por f .

Demostración. Sean L_1 y L_2 dos aplicaciones lineales que satisfagan la definición de $Df(x_0)$, $e \in \mathbb{R}^n$ con $\|e\| = 1$ y $x = x_0 + \lambda e$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Como A es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset A$ y, así, $x \in A$ si $|\lambda| < \epsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|L_1(e) - L_2(e)\| &= \frac{\|L_1(\lambda e) - L_2(\lambda e)\|}{|\lambda|} \\ &= \frac{\|L_1(x - x_0) - L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &\leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - L_1(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|f(x) - f(x_0) - L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}. \end{aligned}$$

Ya que la última expresión tiene límite 0 cuando x tiende a x_0 , se tiene que $L_1(e) = L_2(e)$ con lo que, por linealidad, $L_1 = L_2$. \square

Observación 2.1.3. En general $Df(x_0)$ no está determinada de forma única, por ejemplo, si $A = \{x_0\}$.

Observación 2.1.4. *Examinando la demostración del Teorema 2.1.2 se observa que $Df(x_0)$ es única, si existe, en un rango más amplio de conjuntos que los abiertos.*

Hay otra forma de *derivar* una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Escribimos f en componentes, $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ y calculamos las **derivadas parciales** $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, para $j = 1, \dots, m$ e $i = 1, \dots, n$, derivando f_j con respecto de x_i mientras mantenemos fijas las demás variables.

Definición 2.1.5. *Sea $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$. Entonces $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, para $j = 1, \dots, m$ e $i = 1, \dots, n$ está dada por el siguiente límite, cuando existe:*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f_j(x_1, \dots, x_n)}{h}.$$

Teorema 2.1.6. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en A . Entonces las derivadas parciales existen y la matriz de $Df(x)$ con respecto a las bases canónicas está dada por*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

llamada **matriz jacobiana** de f , donde cada derivada parcial se evalúa en x .

Demostración. El elemento a_{ij} de la matriz de $Df(x)$ con respecto a las bases canónicas es la i -ésima componente del vector $Df(x)(e_j)$ siendo e_j el j -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Si $y = x + he_j$ con $h \in \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{\|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)\|}{\|y - x\|} = \frac{\|f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) - hDf(x)(e_j)\|}{|h|}.$$

Ya que la última expresión tiene límite 0 cuando h tiende a 0, se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_n) - ha_{ij}|}{|h|} = 0.$$

Por tanto,

$$a_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_n)}{h} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n).$$

□

Si $m = 1$, el vector cuyas componentes son iguales a las de $Df(x)$ se denomina **gradiente** de f en x y se denota por $\nabla f(x)$. Así, para cada $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

donde cada derivada parcial se evalúa en x .

Las funciones diferenciables son continuas:

Proposición 2.1.7. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en A . Entonces f es continua. De hecho, para cada $x_0 \in A$ existen $\delta, M > 0$ tales que si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(x_0)\| < M\|x - x_0\|$.

Demostración. Sean $x_0 \in A$ y $\epsilon > 0$. Ya que $Df(x_0)$ es una aplicación lineal, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|Df(x_0)(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\| \leq \|x - x_0\|$, con lo que

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|Df(x_0)(x - x_0)\| + \|x - x_0\| \leq (C + 1)\|x - x_0\|.$$

Por tanto, si $\|x - x_0\| < \min\{\delta, \frac{\epsilon}{C+1}\}$, entonces $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$. □

El que las derivadas parciales existan no asegura la diferenciableidad. Basta considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x, y \neq 0 \end{cases}$$

Se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$ pero f no es continua en $(0, 0)$. Sin embargo:

Teorema 2.1.8. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si las derivadas parciales existen y son continuas en A , entonces f es diferenciable en A .

Demostración. Sea $x \in A$. Por el Teorema 2.1.6, si $Df(x)$ existe, entonces su representación matricial debe ser la matriz jacobiana. Necesitamos probar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|y - x\| < \delta$ con $y \in A$, entonces

$$\|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)\| < \epsilon\|y - x\|.$$

Para ello, basta probarlo para cada componente de f por separado. Por tanto, podemos

suponer $m = 1$. Así, utilizando el teorema del valor medio, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) &= f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, y_2, \dots, y_n) \\
&\quad + f(x_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) \\
&\quad + f(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) - \dots - f(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) \\
&\quad + f(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, y_2, \dots, y_n) \right) (y_1 - x_1) \\
&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, c_2, y_3, \dots, y_n) \right) (y_2 - x_2) \\
&\quad + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, c_n) \right) (y_n - x_n)
\end{aligned}$$

donde c_i está entre x_i e y_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)\| &\leq \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, y_2, \dots, y_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \right| \right. \\
&\quad \left. + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, c_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right| \right) \|y - x\|.
\end{aligned}$$

La continuidad de las derivadas parciales hace el resto. \square

Las derivadas parciales de una función miden su variación en las direcciones particulares paralelas a los ejes. Las **derivadas direccionales** hacen lo mismo en otras direcciones:

Definición 2.1.9. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $v \in \mathbb{R}^n$ unitario. Entonces

$$D_v f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

es la derivada direccional de f en x_0 en la dirección v .

Observación 2.1.10. Si f es diferenciable en x_0 , entonces $D_v f(x_0) = Df(x_0) \cdot v$. Así, la derivada direccional de f en x_0 es máxima en la dirección del gradiente y ese valor máximo es $\|\nabla f(x_0)\|$.

La composición de funciones diferenciables también lo es:

Teorema 2.1.11 (Regla de la cadena). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $x_0 \in A$ con $f(A) \subset B$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en $f(x_0)$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f es diferenciable en x_0 , por la Proposición 2.1.7 existen $\delta_1, M > 0$ tales que si $\|x - x_0\| < \delta_1$, entonces $\|f(x) - f(x_0)\| < M\|x - x_0\|$. Ahora, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\|y - f(x_0)\| < \delta_2$, entonces

$$\|g(y) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(y - f(x_0))\| < \frac{\epsilon}{2M} \|y - f(x_0)\|.$$

Como $Dg(f(x_0))$ es una aplicación lineal, existe $N > 0$ tal que $\|Dg(f(x_0))(y)\| \leq N\|y\|$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$. Así, existe $\delta_3 > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta_3$, entonces

$$\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\| < \frac{\epsilon}{2N}\|x - x_0\|.$$

Pues bien, si $0 < \|x - x_0\| < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces

$$\begin{aligned} & \frac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) - Dg(f(x_0))(Df(x_0)(x - x_0))\|}{\|x - x_0\|} \\ & \leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} \\ & \quad + \frac{\|Dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0))\|}{\|x - x_0\|} < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Observación 2.1.12. La matriz jacobiana de $g \circ f$ en x es el producto de la matriz jacobiana de g en $f(x)$ con la de f en x .

Para el producto se tiene la siguiente regla:

Proposición 2.1.13. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Entonces gf es diferenciable y para cada $x \in A$,

$$D(gf)(x)(v) = Dg(x)(v)f(x) + g(x)Df(x)(v)$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Dados $x_0 \in A$ y $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces

$$|g(x)| \leq |g(x_0)| + 1 = C_1$$

$$\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\| < \frac{\epsilon}{3C_1}\|x - x_0\|$$

$$|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)| < \frac{\epsilon}{3\|f(x_0)\|}\|x - x_0\|$$

y

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3C_2}$$

donde $\|Df(x_0)(y)\| \leq C_2\|y\|$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Las dos últimas desigualdades son necesarias solamente si $f(x_0) \neq 0$ y $Df(x_0) \neq 0$. Así, si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} & \|(gf)(x) - (gf)(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)f(x_0) - g(x_0)Df(x_0)(x - x_0)\| \\ & \leq \|g(x)f(x) - g(x)f(x_0) - g(x)Df(x_0)(x - x_0)\| \\ & \quad + \|g(x)Df(x_0)(x - x_0) - g(x_0)Df(x_0)(x - x_0)\| \\ & \quad + \|g(x)f(x_0) - g(x_0)f(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)f(x_0)\| \leq \epsilon\|x - x_0\|. \end{aligned}$$

□

Finalicemos la sección con el teorema del valor medio:

Teorema 2.1.14 (Teorema del valor medio). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable y $x, y \in A$ tales que el segmento de recta que los une está contenido en A . Entonces existen c_1, \dots, c_m en dicho segmento tales que $f_i(y) - f_i(x) = Df_i(c_i)(y - x)$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración. Sea $i \in \{1, \dots, m\}$. la función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f_i((1-t)x + ty)$$

es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$. Por el teorema del valor medio para una variable, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(t_0)(1 - 0)$, es decir,

$$f_i(y) - f_i(x) = Df_i((1-t_0)x + t_0y)(y - x).$$

Basta tomar $c_i = (1-t_0)x + t_0y$. □

Definición 2.1.15. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cada $x, y \in A$, el segmento que los une está contenido en A .

Ejercicios

1. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones diferenciables y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Demuestra que $\lambda f + \mu g$ es diferenciable y $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$.
2. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Demuestra que $\frac{f}{g}$ es diferenciable y $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gDf - fDg}{g^2}$.
3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\|f(x)\| \leq C\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y cierto $C \in \mathbb{R}$. Demuestra que f es diferenciable en 0 y que $Df(0) = 0$.
4. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Demuestra que $DL(x) = L$.
5. Dada $f(x, y, z) = \frac{x \operatorname{sen} y}{z}$, calcula $\nabla f(x, y, z)$.
6. Da un ejemplo que muestre que la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto no implica necesariamente la diferenciableidad.
7. Demuestra que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0, 0)$.

8. Estudia la existencia de derivadas parciales y la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$b) g(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$c) h(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

9. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f = (f_1, \dots, f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Demuestra que f es diferenciable en $x \in A$ si y solo si lo es f_i para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.
10. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Prueba que ∇f es perpendicular a las superficies $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$.
11. Calcula los valores de las constantes a , b y c tales que la derivada direccional de $f(x, y, z) = ax^3z^2 + bxy^2 + cyz$ en el punto $(1, 2, -1)$ tenga un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje OZ . Con esos valores, determina el plano tangente a la superficie $f(x, y, z) = 0$ en el punto $(0, 0, 1)$.

12. Estudia la existencia de derivadas direccionales de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0 \\ 1 & \text{si } x, y \neq 0 \end{cases}$$

13. Usa la regla de la cadena para encontrar las diferenciales de las siguientes funciones, donde $f(x, y, z) = x^2 + yz$, $g(x, y) = y^3 + xy$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$:

$$a) F(x, y, z) = f(h(x), g(x, y), z).$$

$$b) G(x, y, z) = h(f(x, y, z)g(x, y)).$$

$$c) H(x, y, z) = g(f(x, y, h(x)), g(z, y)).$$

14. Dadas las funciones $f(x, y, z) = (\operatorname{sen}(xy + z), (x^2 + 1)^{yz})$ y $g(u, v) = (u + e^v, v + e^u)$, prueba que f es diferenciable en $(1, -1, 1)$, que g es diferenciable en $(0, \frac{1}{2})$ y que $h = g \circ f$ es diferenciable en $(1, -1, 1)$. Calcula $Dh(1, -1, 1)$.
15. Dadas las funciones $f(x, y) = (e^{x+y}, x - y, x^2)$ y $g(u, v, w) = (u^w, \operatorname{sen}(v + w))$, prueba que f es diferenciable en $(0, 0)$, que g es diferenciable en $(1, 0, 0)$ y que $h = g \circ f$ es diferenciable en $(0, 0)$. Calcula $Dh(0, 0)$.
16. Sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \log \frac{x+y}{2}$. Utiliza el teorema del valor medio para probar que

$$\log \frac{x+y}{2} \geq 1 - \frac{2}{x+y}$$

si $x + y \leq 2$.

17. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$. Prueba que f es constante.

18. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \operatorname{tag} \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudia en qué puntos f satisface la ecuación

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2f(x, y).$$

2.2. Derivadas de orden superior y teorema de Taylor

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, las derivadas parciales de orden superior se definen simplemente por iteración del proceso de derivación parcial, es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

o

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y así sucesivamente para órdenes superiores a 2. Para funciones $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la diferencial segunda se obtiene al diferenciar Df , si existe, del siguiente modo:

Definición 2.2.1. Sea $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ el espacio de aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m (identificable con \mathbb{R}^{nm} a través de las matrices asociadas con respecto a una base de \mathbb{R}^n y otra de \mathbb{R}^m). Ya que $Df : A \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, si diferenciamos Df en x_0 , obtenemos la aplicación lineal $D^2f(x_0) = D(Df)(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y definimos la aplicación bilineal $B_{x_0} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $B_{x_0}(x_1, x_2) = (D^2f(x_0)(x_1))(x_2)$. Las diferenciales de orden superior se definen de forma análoga.

Teorema 2.2.2. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable. Entonces la matriz de $D^2f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a la base canónica está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

llamada **matriz hessiana** de f , donde cada derivada parcial se evalúa en x .

Demostración. Basta aplicar el Teorema 2.1.6 a $Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$. \square

La matriz anterior es simétrica bajo ciertas condiciones:

Definición 2.2.3. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dado $p \in \mathbb{N}$, se dice que f es de clase C^p si existen todas las derivadas parciales de orden p de sus componentes y son continuas y se dice que es de clase C^∞ si es de clase C^p para todo $p \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Schwartz). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^2 . Entonces,

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i}$$

para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $k \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración. Podemos suponer $n = 2$ y $m = 1$. Sean $(x, y) \in A$ y $h, k \in \mathbb{R}$ próximos a 0. Si definimos la función $g_k(u) = f(u, y + k) - f(u, y)$, entonces

$$A_{h,k} = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y) = g_k(x + h) - g_k(x).$$

Así, por el teorema del valor medio, se tiene que

$$A_{h,k} = g'_k(c_{h,k})h = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_{h,k}, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_{h,k}, y) \right) h = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_{h,k}, d_{h,k})hk$$

para ciertos $c_{h,k}$ entre x y $x + h$ y $d_{h,k}$ entre y y $y + k$. Intercambiando los términos centrales de $A_{h,k}$ se obtiene de la misma forma que

$$A_{h,k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c'_{h,k}, d'_{h,k})hk$$

para ciertos $c'_{h,k}$ entre x y $x + h$ y $d'_{h,k}$ entre y y $y + k$. Igualando ambos resultados y haciendo tender h y k a 0 se obtiene la conclusión deseada gracias a la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden. \square

Analicemos a continuación la fórmula de Taylor.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Taylor). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{p+1} , $x \in A$ y $h \in \mathbb{R}^n$ tal que el segmento de recta que une x con $x + h$ está contenido en A . Entonces existe un punto c en ese segmento tal que

$$f(x + h) = P_p(f, x, h) + R_p(f, x, h)$$

siendo

$$P_p(f, x, h) = f(x) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) h_{i_1} \dots h_{i_k}$$

y

$$R_p(f, x, h) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{p+1}=1}^n \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{p+1}}}(c) h_{i_1} \cdots h_{i_{p+1}}.$$

A $P_p(f, x, h)$ se le llama **polinomio de Taylor** de orden p de f en x y a $R_p(f, x, h)$ **resto de Taylor** de orden p de f en x , el cual verifica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_p(f, x, h)}{\|h\|^p} = 0.$$

Demostración. Sea $g(t) = f(x + th)$ con $t \in [0, 1]$. Por el teorema de Taylor para una variable, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$g(1) - g(0) = \sum_{k=1}^p \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(p+1)}(t_0)}{(p+1)!}.$$

Para obtener la fórmula del teorema, solo resta comprobar por inducción que para todo $k \in \{1, \dots, p+1\}$ se tiene que

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x + th) h_{i_1} \cdots h_{i_k}.$$

De la acotación de las derivadas parciales de orden $p+1$ debido a su continuidad se obtiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_p(f, x, h)}{\|h\|^p} = 0.$$

□

El teorema de Taylor lleva a construir la **serie de Taylor** alrededor de x , la cual no tiene por qué converger a $f(x+h)$, incluso si f es de clase C^∞ . Si converge a f en $B(x, \epsilon)$ para cierto $\epsilon > 0$, decimos que f es **analítica** en x . Así, f es analítica en x si el resto converge a 0 cuando p tiende a ∞ .

Ejercicios

- Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existe y es continua. Prueba que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ también existe y que ambas derivadas parciales de segundo orden coinciden.
- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comprueba que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existen pero son distintas.

3. Estudia si las siguientes funciones verifican o no la tesis del teorema de Schwartz:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$b) g(x, y) = \begin{cases} x^2 y \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4. Dadas una función escalar $f(x, y)$ de clase C^2 , $g(u, v) = (u + v, u - v)$ y $h = f \circ g$, comprueba que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones en derivadas parciales con $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

$$b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$c) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^2 y.$$

6. Desarrolla las siguientes funciones mediante la fórmula de Taylor:

$$a) f(x, y) = x^3 + xy^2 + y^2 \text{ en potencias de } x - 1 \text{ e } y - 2.$$

$$b) g(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \text{ en } (0, 0).$$

$$c) h(x, y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x \text{ en } (0, 0) \text{ hasta orden } 8.$$

$$d) u(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + yz) - \log(1 + xz) \text{ en } (0, 0, 0) \text{ hasta orden } 2.$$

7. Utiliza la fórmula de Taylor para desarrollar la función $f(x, y) = \log(x + y)$ con $x, y > 0$ alrededor del punto $(1, 1)$. Prueba, además, que f es analítica en su dominio.

8. Da un ejemplo de una función de clase C^∞ que no sea analítica.

2.3. Extremos locales

Definición 2.3.1. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que $x_0 \in A$ es un punto de **máximo (mínimo) local** de f y que $f(x_0)$ es un valor máximo (mínimo) local de f si existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) para todo $x \in B(x_0, \epsilon)$. Un punto es un **extremo local** de f si es un máximo o un mínimo local y x_0 es un **punto crítico** de f si f es diferenciable en x_0 y $Df(x_0) = 0$.

Teorema 2.3.2. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $x_0 \in A$ un extremo local de f . Entonces x_0 es un punto crítico.

Demostración. Si $Df(x_0) \neq 0$, entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Df(x_0)(x) = c > 0$. Ahora encontramos $\delta > 0$ tal que si $\|h\| < \delta$, entonces

$$|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)| \leq \frac{c}{2\|x\|} \|h\|.$$

Sea $\lambda > 0$ tal que $\lambda\|x\| < \delta$. Entonces

$$|f(x_0 + \lambda x) - f(x_0) - Df(x_0)(\lambda x)| = |f(x_0 + \lambda x) - f(x_0) - \lambda c| \leq \frac{\lambda c}{2}$$

con lo que $f(x_0 + \lambda x) > f(x_0)$. Análogamente se obtiene que $f(x_0 - \lambda x) < f(x_0)$, luego x_0 no es un extremo local de f . \square

Observación 2.3.3. *Un punto crítico no tiene por qué ser un extremo local. Por ejemplo, $(0,0)$ es un punto crítico de la función $f(x,y) = y^2 - x^2$ pero no es un extremo local. A un punto de este tipo se le denomina **punto silla**.*

Teorema 2.3.4. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 y $x_0 \in A$ un punto crítico de f . Si la forma bilineal definida por la matriz hessiana de f en x_0 es definida negativa (positiva), entonces f tiene un máximo (mínimo) local en x_0 . Recíprocamente, si f tiene un máximo (mínimo) local en x_0 , entonces dicha forma bilineal es semidefinida negativa (positiva).*

Demostración. Supongamos en primer lugar que para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se tiene que $D^2f(x_0)(x,x) < 0$. Ya que la función $D^2f(x_0)(x,x)$ es continua como función de x y el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ es compacto, existe $x_1 \in S$ tal que

$$D^2f(x_0)(x,x) \leq D^2f(x_0)(x_1,x_1) < 0$$

para todo $x \in S$. Si $\epsilon = -D^2f(x_0)(x_1,x_1)$, entonces $D^2f(x_0)(x,x) \leq -\epsilon\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Ahora, ya que f es de clase C^2 , existe $\delta > 0$ tal que si $\|y - x_0\| < \delta$, entonces $y \in A$ y

$$|D^2f(y)(x,x) - D^2f(x_0)(x,x)| \leq \frac{\epsilon}{2}\|x\|^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además, por el teorema de Taylor

$$f(y) - f(x_0) = \frac{1}{2}D^2f(c)(y - x_0, y - x_0)$$

donde $c \in B(x_0, \delta)$. Por último, ya que

$$\begin{aligned} & D^2f(c)(y - x_0, y - x_0) \\ & \leq D^2f(x_0)(y - x_0, y - x_0) + |D^2f(c)(y - x_0, y - x_0) - D^2f(x_0)(y - x_0, y - x_0)| \\ & \leq -\epsilon\|y - x_0\|^2 + \frac{\epsilon}{2}\|y - x_0\|^2 = -\frac{\epsilon}{2}\|y - x_0\|^2 \end{aligned}$$

se tiene que

$$f(y) - f(x_0) \leq -\frac{\epsilon}{4}\|y - x_0\|^2 < 0$$

para todo $y \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$, es decir, f tiene un máximo local en x_0 .

Supongamos ahora que f tiene un máximo local en x_0 y que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $D^2f(x_0)(x, x) > 0$. La función $g(t) = -f(x_0 + tx)$ está definida cerca de 0, $g'(0) = 0$ y

$$g''(0) = -D^2f(x_0)(x, x) < 0$$

es decir, g tiene un máximo local en 0 con lo que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |t| < \delta$, entonces $g(t) < g(0)$ lo cual es una contradicción.

El caso del mínimo se prueba análogamente. □

Ejercicios

1. Estudia los extremos locales de las funciones siguientes:

a) $a(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

b) $b(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$.

c) $c(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$.

d) $d(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

e) $e(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$.

f) $f(x, y, z) = \cos 2x \sin y + z^2$.

g) $g(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^4} dt$.

h) $h(x, y) = xye^{x+2y}$.

i) $i(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$.

2. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto con \overline{A} compacto y $f : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en su dominio, diferenciable en A y nula en $\partial(A)$. Demuestra que existe $x_0 \in A$ tal que $Df(x_0) = 0$.

3. Sean $f(x, y) = (y + e^x, \sin(x + y))$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que $\nabla g(1, 0) = (1, -1)$ y su matriz hessiana en $(1, 0)$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Estudia si $g \circ f$ tiene un extremo local en $(0, 0)$.

4. Dada la función $f(x, y) = a(x^2y + 2xy + y^2 + \cos(x + y)) + x^2(a^2 - y)$, discute la existencia de extremos locales en el origen según los valores de a .

2.4. Teorema de la función inversa

Sean $L_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \text{existe } A^{-1}\}$ y $\mathcal{L}^{-1} : L_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ la aplicación que transforma A en A^{-1} .

Lema 2.4.1. $L_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es un subconjunto abierto de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (identificado $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con \mathbb{R}^{n^2}) y \mathcal{L}^{-1} es de clase C^∞ .

Demostración. La aplicación $\det : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ el determinante de su matriz asociada respecto a la base canónica de \mathbb{R}^n es continua y $L_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. De la expresión explícita de la inversa de una matriz se obtiene que \mathcal{L}^{-1} es de clase C^∞ . \square

Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en A , se denota por $Jf(x)$ al determinante de la matriz jacobiana de f en x para cada $x \in A$ y se denomina **jacobiano** de f en x .

Teorema 2.4.2 (de la función inversa). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^p y $x_0 \in A$ tal que $Jf(x_0) \neq 0$. Entonces, existen abiertos U y V conteniendo a x_0 y $f(x_0)$, respectivamente, con $U \subset A$, tales que $f(U) = V$ y la restricción de f a U tiene una inversa de clase C^p $f^{-1} : V \longrightarrow U$ verificando $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$ para todo $x \in U$.

Demostración. Basta demostrar el teorema cuando $Df(x_0) = I$. Para ver que esto es suficiente para obtener el caso general, sea $A = Df(x_0)$. Entonces A^{-1} existe y

$$D(A^{-1} \circ f)(x_0) = DA^{-1}(f(x_0)) \circ Df(x_0) = A^{-1} \circ Df(x_0) = I.$$

Si el teorema es cierto para $A^{-1} \circ f$, entonces también lo es para f . De hecho, si g es una inversa de $A^{-1} \circ f$, entonces $g \circ A^{-1}$ lo es de f .

También podemos suponer que $x_0 = f(x_0) = 0$ pues si hemos demostrado el teorema en este caso particular, el caso general se obtiene considerando $h(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$. En efecto, $h(0) = 0$, $Dh(0) = Df(x_0)$ y si h tiene una inversa cerca de $x = 0$, entonces una inversa de f cerca de x_0 será $f^{-1}(y) = h^{-1}(y - f(x_0)) + x_0$.

Sea ahora $g(x) = x - f(x)$. Entonces $Dg(0) = 0$ y g es de clase C^p , luego existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$, entonces $\|\nabla g_i(x)\| < \frac{1}{2n}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, donde $g = (g_1, \dots, g_n)$. Por el teorema del valor medio, dado $x \in \overline{B}(0, \delta)$, existen $c_1, \dots, c_n \in \overline{B}(0, \delta)$ tales que $g_i(x) = Dg_i(c_i)(x)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. En consecuencia, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$\|g(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |g_i(x)| = \sum_{i=1}^n |Dg_i(c_i)(x)| \leq \sum_{i=1}^n \|\nabla g_i(c_i)\| \|x\| < \frac{\|x\|}{2} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Esto muestra que $g(\overline{B}(0, \delta)) \subset B(0, \frac{\delta}{2})$. Además, dado $y \in \overline{B}(0, \frac{\delta}{2})$, la función

$$g_y(x) = y + x - f(x)$$

verifica que $g_y(\overline{B}(0, \delta)) \subset \overline{B}(0, \delta)$. En efecto, si $x \in \overline{B}(0, \delta)$, entonces

$$\|g_y(x)\| = \|y + g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

La función g_y es también contractiva pues si $x_1, x_2 \in \overline{B}(0, \delta)$, entonces, aplicando de nuevo el teorema del valor medio, se tiene que

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|g(x_1) - g(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Por tanto, el principio de la aplicación contractiva implica que g_y tiene un único punto fijo $x \in \overline{B}(0, \delta)$, con lo que $f(x) = y$. Así, f tiene una inversa $f^{-1} : \overline{B}(0, \frac{\delta}{2}) \rightarrow \overline{B}(0, \delta)$.

La inversa f^{-1} es continua. En efecto, si $x_1, x_2 \in \overline{B}(0, \delta)$, entonces

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

y, por lo tanto, $\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|$. Así, si $y_1, y_2 \in \overline{B}(0, \frac{\delta}{2})$, entonces

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|.$$

Ya que $Df(0) \in L_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $Df : A \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es continua, por el Lema 2.4.1 y para δ suficientemente pequeño se tiene que $Df(x) \in L_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ para todo $x \in B(0, \frac{\delta}{2})$. Sean ahora $y_1, y_2 \in B(0, \frac{\delta}{2})$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - (Df(x_2))^{-1}(y_1 - y_2)\|}{\|y_1 - y_2\|} \\ &= \frac{\|x_1 - x_2 - (Df(x_2))^{-1}(f(x_1) - f(x_2))\|}{\|f(x_1) - f(x_2)\|} \\ &= \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|f(x_1) - f(x_2)\|} \frac{\|(Df(x_2))^{-1}(Df(x_2)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2))\|}{\|x_1 - x_2\|} \\ &\leq 2C \frac{\|Df(x_2)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|} \end{aligned}$$

donde $\|(Df(x_2))^{-1}(y)\| \leq C\|y\|$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. La última expresión tiene límite 0 cuando x_1 tiende a x_2 . Así, f^{-1} es diferenciable en y_2 y $Df^{-1}(y_2) = (Df(x_2))^{-1}$. Tomamos, entonces, $V = B(0, \frac{\delta}{2})$ y $U = f^{-1}(V)$.

Solo queda probar que f^{-1} es de clase C^p . Ya que $Df^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \circ Df \circ f^{-1}$, se tiene que Df^{-1} es continua y, por tanto, f^{-1} es de clase C^1 . Inductivamente se obtiene el resultado. \square

Ejercicios

1. Prueba que la función $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ es localmente invertible cerca de todo punto, pero que no es globalmente invertible.
2. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $Jf(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Prueba que la imagen de cualquier subconjunto abierto de A es abierto. Muestra con un ejemplo que esto ya no es cierto, en general, si $Jf(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in A$.
3. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^p con $p \geq 1$ y $x_0 \in A$. Muestra mediante un ejemplo que la condición $Jf(x_0) \neq 0$ no es necesaria para que f tenga inversa local cerca de x_0 . Sin embargo, prueba que sí lo es para que dicha inversa sea diferenciable.
4. Prueba que $f(x, y, z) = (e^x, \sin(x+y), e^z)$ es localmente invertible cerca del origen y que hay puntos donde no se cumplen las hipótesis del teorema de la función inversa.
5. Prueba que $f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$ tiene inversa local diferenciable cerca de todo punto y que es, además, globalmente inyectiva.
6. Prueba que $f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$ es localmente invertible cerca de todo punto y que, además, es globalmente invertible calculando su función inversa.
7. Prueba que la función $f(x, y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2+1}, x \right)$ posee inversa diferenciable cerca de $(1, 1)$. Calcula $Df^{-1}(0, 1)$.

2.5. Teorema de la función implícita

Teorema 2.5.1 (de la función implícita). Sean $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ abierto, $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^p y $(x_0, y_0) \in A$ tales que $F(x_0, y_0) = 0$ y

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

donde cada derivada parcial se evalúa en (x_0, y_0) . Entonces, existen abiertos U de \mathbb{R}^n y V de \mathbb{R}^m conteniendo a x_0 e y_0 , respectivamente y una única función $f : U \rightarrow V$ de clase C^p tales que $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in U$.

Demostración. La función $G : A \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definida por $G(x, y) = (x, F(x, y))$ es de clase C^p y $JG(x_0, y_0) \neq 0$. Por el teorema de la función inversa, existen abiertos W y

W' conteniendo a (x_0, y_0) y $(x_0, 0)$ respectivamente, con $W \subset A$, tales que $G(W) = W'$ y la restricción de G a W tiene una inversa de clase C^p $G^{-1} : W' \rightarrow W$. Existen abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ con $x_0 \in U$ e $y_0 \in V$ tales que $U \times V \subset W$. De esta forma, $G : U \times V \rightarrow G(U \times V) = W''$ y $G^{-1} : W'' \rightarrow U \times V$ son de clase C^p . Ahora, $G^{-1}(x, z) = (x, H(x, z))$ donde $H : W'' \rightarrow V$ es de clase C^p . Si $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la proyección dada por $\pi(x, y) = y$, entonces

$$F(x, H(x, z)) = (\pi \circ G)(x, H(x, z)) = (\pi \circ G \circ G^{-1})(x, z) = z.$$

Defínase $f : U \rightarrow V$ por $f(x) = H(x, 0)$. Entonces $F(x, f(x)) = 0$ y como H es de clase C^p , f también lo es. La unicidad de H nos da la de f . \square

Observación 2.5.2. De la expresión $F(x, f(x)) = 0$ se obtiene mediante la regla de la cadena que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xu + yv^2 = 0 \\ xv^3 + y^2u^6 = 0 \end{cases}$$

estudia si se pueden despejar unas únicas u y v en términos de x e y cerca de $x = 1$, $y = -1$, $u = 1$, $v = -1$. Calcula, además, si existe, $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $x = 1$, $y = -1$.

2. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w = -2 \\ x + z + u^2 + w = -2 \end{cases}$$

estudia si se pueden despejar unas únicas u , v y w en términos de x , y y z cerca de $x = y = z = 0$, $u = v = 0$, $w = -2$.

3. Prueba que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xu^3 + y^2v^3 = 1 \\ 2xy^3 + uv^2 = 0 \end{cases}$$

define x e y como funciones implícitas diferenciables de u y v cerca del punto $x = 0$, $y = 1$, $u = 0$, $v = 1$, digamos $x = f(u, v)$ e $y = g(u, v)$. Demuestra, además, que la función $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$ admite inversa diferenciable cerca del punto $(0, 1)$.

4. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - v - w = 0 \\ y - v^2 - w^2 = 0 \\ u - v^3 - w^3 = 0 \end{cases}$$

halla un punto $(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^5$ tal que cerca de él el sistema defina implícitamente tres funciones diferenciables $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ y $w = h(x, y)$, siendo la derivada direccional de f en (x_0, y_0) máxima según la dirección del vector $(1, 0)$ con valor 3.

5. Sea $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 + xy + ay$ siendo a un parámetro real.

a) ¿Para qué valores de a la ecuación $f(x, y) = 0$ define y como función implícita de clase C^∞ de x cerca de $(0, 0)$? ¿Define la anterior ecuación a x como función implícita diferenciable de y cerca de $(0, 0)$ para algún valor de a ?

b) Sea $y = g(x)$ la función implícita determinada por $f(x, y) = 0$, definida en un abierto U que contiene a 0. Calcula el valor de a para que el polinomio de Taylor de orden 2 de g en 0 valga 1 en $x = 1$. ¿Para qué valores de a tiene g un extremo local en $x = 0$?

c) Sea $h(x, y) = (e^{x+y} + x^2 - 1, g(x) + y \cos x)$ con $(x, y) \in U \times \mathbb{R}$. Prueba que h admite función inversa diferenciable cerca de $(0, 0)$ y que $H = h \circ h + h^{-1}$ es diferenciable en $(0, 0)$. Calcula $DH(0, 0)$.

6. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy - z^2 = 0 \\ x + y + z = 1 \\ (3z - 1)^2 t^2 + 3z^2 + 2z = 1 \end{cases}$$

determina el subconjunto de puntos de \mathbb{R}^4 para los que cerca de ellos el sistema anterior define una única función implícita $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ de clase C^∞ . Halla f , g y h .

7. Prueba que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy = \pi^2 \end{cases}$$

define implícitamente una función $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ cerca del punto $(0, 0, \pi)$. Calcula $f'_1(0)$, $f'_2(0)$, $f''_1(0)$, $f''_2(0)$ y $Df(0)$.

8. Sea $f(x, y, u, v) = (e^{2x} + e^{2y} - e^v - u, x - y + u - v - 1)$.

a) Prueba que f define u y v como función implícita de clase C^∞ de x e y cerca de $(0, 0, 1, 0)$, digamos $(u, v) = g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$.

- b) Prueba que g posee una inversa de clase C^∞ en un abierto U que contiene a $(0, 0)$.
- c) Si $h(u, v) = (h_1(u, v), h_2(u, v))$ es la inversa local de g , calcula $Dh(1, 0)$.
- d) Comprueba que $\frac{\partial h_1}{\partial u} + \frac{\partial h_1}{\partial v} + \frac{\partial h_2}{\partial u} + \frac{\partial h_2}{\partial v} = \frac{e^v + 1}{e^v + u}$.

2.6. Extremos condicionados

Teorema 2.6.1 (de los multiplicadores de Lagrange). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f, g_1, \dots, g_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $m < n$ funciones de clase C^1 y $x_0 \in A$ tales que los vectores $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_m(x_0)$ son linealmente independientes y la función f restringida al conjunto $B = \{x \in A : g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\}$ tiene un máximo o un mínimo local en x_0 . Entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(x_0)$.

Demostración. El rango de la matriz jacobiana de $g = (g_1, \dots, g_m)$ en x_0 es m y podemos suponer que el menor formado por las últimas m columnas es no nulo. Denotemos por u al vector de \mathbb{R}^{n-m} formado por las $n-m$ primeras coordenadas de $x \in B$ y por v al vector de \mathbb{R}^m formado por las m últimas. Así, $x = (u, v)$ y, en particular, $x_0 = (u_0, v_0)$. Por el teorema de la función implícita, existen abiertos U de \mathbb{R}^{n-m} y V de \mathbb{R}^m conteniendo a u_0 y v_0 , respectivamente y una única función $h : U \rightarrow V$ de clase C^1 tales que $g(u, h(u)) = 0$ para todo $u \in U$. Además, se tiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_{n-m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial u_{n-m}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial v_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial v_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_{n-m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial u_{n-m}} \end{pmatrix}$$

donde cada derivada parcial de h se evalúa en u_0 y cada una de g en x_0 .

Puesto que la función $f(u, h(u))$ tiene un extremo local en u_0 , entonces

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \dots \frac{\partial f}{\partial u_{n-m}} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial v_1} \dots \frac{\partial f}{\partial v_m} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_{n-m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial u_{n-m}} \end{pmatrix} = (0 \dots 0)$$

donde cada derivada parcial de f se evalúa en x_0 y cada una de h en u_0 . Entonces

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \dots \frac{\partial f}{\partial u_{n-m}} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial v_1} \dots \frac{\partial f}{\partial v_m} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial v_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial v_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_{n-m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial u_{n-m}} \end{pmatrix} = (0 \dots 0)$$

donde cada derivada parcial se evalúa en x_0 .

Basta entonces tomar

$$(\lambda_1 \dots \lambda_m) = \left(\frac{\partial f}{\partial v_1} \dots \frac{\partial f}{\partial v_m} \right) \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial v_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial v_m} \end{array} \right)^{-1}.$$

□

A los valores λ_i en el teorema anterior se les llama **multiplicadores de Lagrange**.

Ejercicios

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por $(-1, 0)$ y tiene una inclinación de 45° . Determina el mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en A .
2. Calcula los extremos de $f(x, y) = x^2 - y^2$ en la circunferencia de centro el origen y radio 1.
3. Determina los extremos de $f(x, y, z) = x + y + z$ con $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.
4. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + axy + bz$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Obtén una relación entre los parámetros a y b que sea una condición necesaria para que el punto $(1, 1, 1)$ sea extremo local de f sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

b) Supuesta verificada la condición anterior, estudia para qué valores de a y b el punto $(1, 1, 1)$ es máximo, mínimo o no es extremo local.

5. Sea C el arco de la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z = 16 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

contenido en el primer octante. Encuentra los puntos de C más cercanos y más lejanos al origen.

6. Calcula los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.
7. Calcula los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ sobre el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 1\}$.
8. Halla el paralelepípedo de mayor volumen inscrito en un elipsoide dado

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde a, b y c son constantes positivas.

9. Suponiendo que entre todas las cajas de cartón rectangulares en las que se han empleado 10 m^2 de cartón, hay una de volumen máximo, halla sus dimensiones.

Apéndice

Funciones convexas

Definición. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cada $x, y \in A$, el segmento que los une está contenido en A .

Proposición. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y solo si $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in A$ para todo $x_1, \dots, x_k \in A$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Demostración. La prueba del solo si se basa en la descomposición

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \right) + \lambda_3 x_3.$$

□

Definición. Se define la **envoltura convexa** de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mediante

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

El resultado siguiente se obtiene fácilmente:

Proposición. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. $co(A)$ es el menor conjunto convexo que contiene a A .
2. A es convexo si y solo si $A = co(A)$.

Definición. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Se dice que una función $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ es **convexa** si

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

para todo $x, y \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Observación. Se comprueba fácilmente que la definición anterior coincide con la noción geométrica de función convexa real de variable real.

Proposición. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, la función $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y solo si

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(x_i)$$

para todo $x_1, \dots, x_k \in A$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Demostración. La prueba por inducción del solo si se basa de nuevo en la descomposición utilizada anteriormente. \square

Teorema. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, la función $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y solo si

$$\text{epi}(\varphi) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \varphi(x) \leq t\}$$

es convexo.

Demostración. En la prueba del si basta tomar $t = \varphi(x)$. \square

Teorema. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto convexo y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Entonces φ es convexa si y solo si

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geq \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle$$

para todo $x, y \in A$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que φ es convexa. Dados $x, y \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), \lambda(y - x) \rangle + r(\lambda) &= \varphi(x + \lambda(y - x)) \\ &= \varphi((1 - \lambda)x + \lambda y) \\ &\leq (1 - \lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \\ &= \varphi(x) + \lambda(\varphi(y) - \varphi(x)). \end{aligned}$$

Luego

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geq \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{r(\lambda)}{\lambda}.$$

Ya que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{r(\lambda)}{\lambda} = 0$, se tiene el resultado.

Veamos ahora el recíproco. Sean $x, y \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$. Si $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, se tiene que $\varphi(x) - \varphi(z) \geq \langle \nabla \varphi(z), x - z \rangle$ y $\varphi(y) - \varphi(z) \geq \langle \nabla \varphi(z), y - z \rangle$. Por tanto,

$$\lambda(\varphi(x) - \varphi(z)) + (1 - \lambda)(\varphi(y) - \varphi(z)) \geq \langle \nabla \varphi(z), \lambda(x - z) + (1 - \lambda)(y - z) \rangle = 0$$

obteniéndose así la convexidad de φ . \square

Teorema. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto convexo y $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 .

1. φ es convexa si y solo si $D^2\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in A$.
2. Si $D^2\varphi(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces φ es estrictamente convexa.

Demostración.

1. Supongamos en primer lugar que φ es convexa, sean $x, x + h \in A$ y consideremos $f(t) = \varphi(x + th)$ con $t \in [0, 1]$. Se tiene que

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + R_2(t)$$

es decir,

$$\varphi(x + th) = \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), th \rangle + \frac{1}{2}D^2\varphi(x)(h)t^2 + R_2(t)$$

con $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0$. Por tanto,

$$\frac{1}{2}D^2\varphi(x)(h) \geq -\frac{R_2(t)}{t^2}$$

obteniéndose el resultado.

Recíprocamente, sean $x, x + h \in A$ y consideremos $f(t) = \varphi(x + th)$ con $t \in [0, 1]$. Existe $c \in [0, 1]$ tal que

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(c)$$

es decir,

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), h \rangle + \frac{1}{2}D^2\varphi(x + ch)(h) \geq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), h \rangle$$

con lo que φ es convexa.

2. Basta reescribir la prueba del si del apartado anterior.

\square

Teorema. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto convexo y $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y convexa. Si a es un punto crítico de φ , entonces es un mínimo absoluto.

Demostración. El resultado se obtiene debido a que

$$\varphi(x) - \varphi(a) \geq \langle \nabla \varphi(a), x - a \rangle = 0$$

para todo $x \in A$. □

Teorema (Condiciones de Kuhn-Tucker). Consideremos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto convexo; $\varphi, f_1, \dots, f_k : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas de clase C^1 y

$$B = \{x \in A : f_1(x) \leq 0, \dots, f_k(x) \leq 0\}.$$

Supongamos que existen $a \in B$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_k \leq 0$ que satisfacen las **condiciones de Kuhn-Tucker**:

1. $\nabla \varphi(a) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i(a)$.
2. $\lambda_i f_i(a) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Entonces a es un mínimo absoluto de φ en B .

Demostración. Sea $F = \varphi - \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$. Puesto que $\lambda_1, \dots, \lambda_k \leq 0$, se tiene que F es convexa. Además, $\nabla F(a) = 0$, es decir, a es un punto crítico de F , luego es un mínimo absoluto. Por tanto, $\varphi(a) \leq \varphi(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x)$ para todo $x \in A$. Finalmente, para todo $x \in B$ se tiene que $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) \geq 0$, obteniéndose el resultado. □

Ejercicios

1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto convexo y $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Prueba que si φ es convexa, entonces

$$\langle \nabla \varphi(x) - \nabla \varphi(y), x - y \rangle \geq 0$$

para todo $x, y \in A$.

2. Estudia la convexidad de las funciones siguientes:

a) $f(x, y) = x^4 + y^2 + 1$.

b) $g(x, y) = e^{ax+by}$.

c) $h(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz$.

Bibliografía

- [BGMV] M. Besada, F.J. García, M.Á. Mirás y C. Vázquez, *Cálculo de varias variables. Cuestiones y ejercicios resueltos*, Prentice Hall (2001).
- [BRV] F. Bombal, L. Rodríguez y G. Vera, *Problemas de Análisis matemático*, volúmenes 1 y 2, AC (1987 y 1988, respectivamente).
- [FVV] C. Fernández, F.J. Vázquez y J.M. Vegas, *Cálculo Diferencial de Varias Variables*, Thomson (2002).
- [MH] J.E. Marsden y M.J. Hoffman, *Análisis clásico elemental*, Addison-Wesley Iberoamericana, 2ª edición (1998).
- [MT] J.E. Marsden y A.J. Tromba, *Cálculo vectorial*, Addison Wesley Longman, 4ª edición (1998).