DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Cálculo Diferencial (M3 y M4). Curso 2021–2022.

Teoremas de la función inversa e implícita. Multiplicadores de Lagrange. Hoja 6

56. Demuestra que la función $f(x, y, z) = (x^3 + y, e^y)$ admite una inversa local g de clase C^∞ en algún abierto que contiene al punto $(x, y) = (1, 0)$. Calcula $Dg((1, 1))$.

57. Demuestra que la función $f(x, y, z) = (x^2 - y, x - y^3, x^2 + z^2)$ admite una inversa local g de clase C^∞ en algún abierto que contiene al punto $(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Calcula $Dg((0, 0, 1))$.

58. Demuestra que la función $f(x, y) = (x^2 + y, x + y^2)$ admite una inversa local g de clase C^∞ en algún abierto que contiene al punto $(x, y) = (0, 1)$. Calcula $Dg(f(0, 1))$.

59. Comprueba que la ecuación $\log(xy) + \frac{y}{x} = 1$ define una función implícita $y = y(x)$, de clase C^∞, en un entorno del punto $(x, y) = (1, 1)$. Calcula la derivada $y'(1)$.

60. Comprueba que la ecuación $z^3 + x(z - y) = 1$ define una función implícita $z = z(x, y)$, de clase C^∞, en un entorno del punto $(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0)$. Estudia si $(0, 0)$ es un máximo o un mínimo local de z.

61. Demuestra que el sistema de ecuaciones
$$xu^3 + y^2v^3 = 1, \qquad 2xy^3 + uv^2 = 0,$$
define a x e y como funciones implícitas $x = x(u, v), y = y(u, v)$ en un entorno del punto $(x, y, u, v) = (0, 1, 0, 1)$. Prueba que la función $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ admite una inversa local g diferenciable alrededor de $(u, v) = (0, 1)$. Calcula la derivada direccional de g en el punto $(0, 1)$, según la dirección $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

62. Calcula los extremos absolutos de las siguientes funciones con las condiciones que se indican:
    (a) $f(x, y) = 3x + 2y$, sujeto a la condición $2x^2 + 3y^2 = 3$.
    (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeto a la condición $x^2 + y^2 = 1; x + y + z = 1$.

63. En los siguientes casos, calcula el máximo y el mínimo valor de la función f en el conjunto indicado C:
    (a) $f(x, y) = 2x + y;\ C = \{(x, y) : 0 \le y \le 4 - x^2\}$.
    (b) $f(x, y, z) = x + y + z;\ C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 2z^2;\ 0 \le z \le 2\}$.

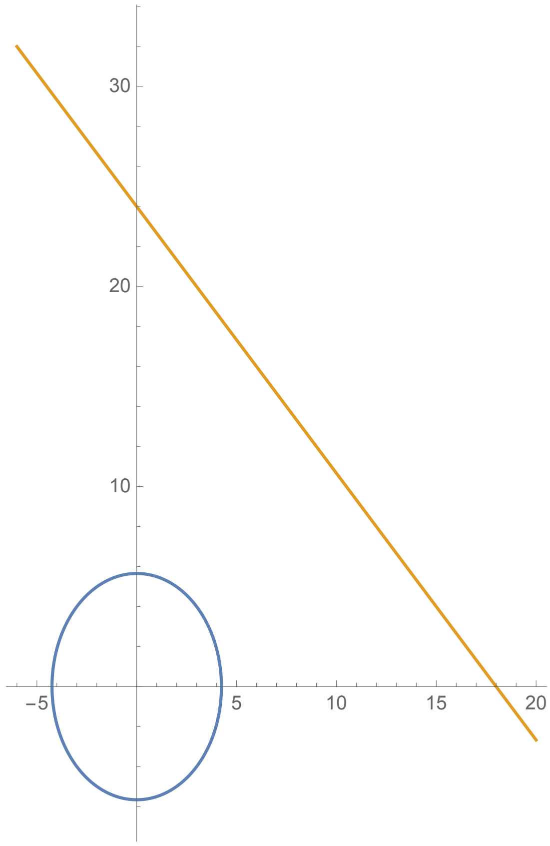
64. Considera la función $f(x, y, z) = 3x^2 - 6y^2 - 2z^3 + 6z$ y el conjunto
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 3\}.$$
Justifica la existencia de extremos absolutos y calcúlalos.

65. (a) Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = x(1 + y)$.

(b) Calcula los extremos relativos de f restringida al conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

66. Calcula la distancia de la elipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{32} = 1$ a la recta $4x + 3y = 72$.



67. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + xy = 1\}.$$

(a) Calcula el plano tangente a S en el punto $(1, -3, 2)$.

(b) Encuentra los puntos de S más cercanos al origen y justifica su existencia.

(c) ¿Hay puntos de S a distancia máxima del origen?