





# CÁLCULO INTEGRAL

Juan Diego Barrado Daganzo, Mario Calvarro Marines  
e Iker Muñoz Martínez

27 de febrero de 2022



# CONCEPTO DE MEDIDA

---

En general, la teoría de la integración está sustentada mayoritariamente por el concepto de medida que se tiene en el espacio sobre el que se integra. Pueden darse dos situaciones, que se defina una medida y a partir de ahí la integral correspondiente o puede ocurrir que se defina la integral y a partir de la misma se mida. Nosotros optaremos por definir todo lo relativo a la medida de forma previa, para que la teoría de integración que se desarrollará después esté sustentada en las propiedades métricas con las que dotemos a  $\mathbb{R}^n$  a través de la definición de dicha medida.

## MEDIDA

El concepto fundamental de esta sección es comprender qué entendemos por medida y que propiedades tiene, así como demostrar que la medida de Lebesgue es un buen instrumento de medida para trabajar en  $\mathbb{R}^n$ .

---

### Definición (Rectángulo)

Definimos un rectángulo en  $\mathbb{R}^n$  como el conjunto;

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

Además, definimos como **volumen** de  $Q$  a

$$v(Q) = (b_n - a_n) \cdots (b_1 - a_1)$$

---

### Definición (Medida exterior de Lebesgue)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , definimos como **medida exterior** de  $A$  a:

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k); \text{ donde } \{Q_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ y } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

---

### Observación

Podemos restringir las familias  $\{Q_k\}$  a aquellas que tengan  $\text{diam } Q_k < \delta$  para un cierto delta y la definición no cambia. Esto es así porque, en el fondo, el conjunto de sumatorios de volúmenes que estamos escogiendo es el mismo, ya que para familias con algún  $Q_k$  de diámetro mayor, éste se puede dividir en varios rectángulos más pequeños cuyo volumen suman el de  $Q_k$  pero cuyo diámetro es menor que dicho delta.

---

### Definición (Medida nula)

Decimos que  $A$  tiene medida nula si podemos encontrar recubrimientos de  $A$  con sumatorio de volúmenes tan pequeños como queramos, es decir:

$$\mu^*(A) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \{Q_k\} \text{ rec. de } A : \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$$

---

## Ejemplos

1. Si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : v(Q(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ , luego es de medida nula.
2. Si  $N$  numerable, entonces podemos escribir  $N = \{x_k\}$ , para cada  $x_k$  podemos encontrar  $Q_k(x_k) : v(Q_k(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$  que lo contenga, luego se tiene que es de medida nula.

## Proposición

La medida exterior de Lebesgue cumple las siguientes propiedades:

- **Invariante por traslaciones:**

$$A \subset \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu^*(c + A) = \mu^*(A)$$

- **Covariante con respecto a la inclusión:**

$$A \subset B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

- **Semiaditividad:**

$$A, B \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

## Demostración:

- Trivial
- Si  $\mu^*(B) = +\infty$  es trivial, luego suponemos que no.  
Sea  $\{Q_k\}$  un recubrimiento de  $B$ , como  $A \subset B \Rightarrow \{Q_k\}$  es un recubrimiento de  $A$ , luego<sup>1</sup>

$$\forall \{Q_k\} : \mu^*(A) < \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

- Si  $\mu^*(A) = +\infty$  o  $\mu^*(B) = +\infty$  es trivial.  
Suponiendo ambos finitos, entonces para  $\varepsilon > 0$  se tiene que:

$$\begin{cases} \exists \{Q_k\} \text{ rec. de } A: \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \{R_k\} \text{ rec. de } B: \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(B) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Consideremos  $\{Q_k, R_k\} = \{S_j\}$  donde  $S_j = \begin{cases} Q_{\frac{j}{2}}, j \text{ par} \\ R_{\frac{j+1}{2}}, j \text{ impar} \end{cases}$ . Tenemos trivialmente que  $\{S_j\}$  es rec. de  $A \cup B$ , luego:

$$\mu^*(A \cup B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(S_j) = \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) + \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon$$

Y como dicha desigualdad es para cualquier  $\varepsilon > 0$  se tiene la desigualdad del enunciado.

## Proposición

En cualquier rectángulo, la medida exterior y su volumen coinciden, esto es:

$$\forall Q \subset \mathbb{R}^n : v(Q) = \mu^*(Q)$$

---

<sup>1</sup>Puesto que si eres menor que todos los elementos de un conjunto eres menor o igual que su ínfimo.

Demostración:

■  $\mu^*(Q) \leq v(Q)$ :

Tomamos  $\varepsilon > 0$  y consideramos la familia  $\{Q_k\}$  recubrimiento de  $Q$  donde  $Q_1 = Q$  y  $\forall k \geq 2 : v(Q_k) < \varepsilon/2^k$ . De este modo,  $\{Q_k\}$  es rec. de  $Q$  y además

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) = v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} v(Q_k) < v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < v(Q) + \varepsilon$$

Por tanto, por ser ínfimo y ser para todo epsilon, se tiene:

$$\mu^*(Q) \leq v(Q) + \varepsilon \Rightarrow \mu^*(Q) \leq v(Q)$$

■  $v(Q) \leq \mu^*(Q)$ :

Observamos que  $\overline{Q}$  es la unión de las caras de  $Q$  que denotaremos por  $C_i$ , por tanto:

$$v(Q) = v(\overline{Q}) \qquad \mu^*(Q) \leq \mu^*(\overline{Q})$$

$$\mu^*(\overline{Q}) = \mu^*(Q \cup (C_1, \dots, C_m)) \leq \mu^*(Q) + \mu^*(C_1) + \dots + \mu^*(C_m) = \mu^*(Q)$$

Luego, concluimos que un cubo cualquiera tiene la misma medida que el mismo cubo, pero cerrado. Por tanto, podemos suponer que  $Q$  es cerrado y por ser acotado en  $\mathbb{R}^n$  es compacto.

Si el volumen es menor que todos los posibles sumatorios, entonces tendrá que ser menor que el ínfimo, luego basta probar que  $v(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)$ ,  $\forall \{Q_k\} \ Q \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ .

Como  $Q$  lo podíamos considerar compacto, se tiene que dado un recubrimiento  $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ :

$$Q \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_N \Rightarrow v(Q) \leq v(Q_1) + \dots + v(Q_N) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)$$

## Definición

Definimos el **diámetro de un conjunto** como:

$$\text{diam } A = \sup\{|x - t| : x \in A, t \in B\}$$

Y definimos la **distancia entre dos conjuntos** como:

$$d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$$

## Proposición

Para conjuntos a distancia positiva, la medida exterior tiene la propiedad aditiva:

$$d(A, B) > 0 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Demostración:

Si  $\mu^*(A \cup B) = +\infty$  entonces es trivial, por tanto, podemos suponer que es finito.

Como conocemos una desigualdad, basta solo probar la otra. Tomamos  $\delta > 0 : \delta < \frac{d(A, B)}{2}$  y  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \{Q_k\}$  rectángulos :  $\text{diam } Q_k < \delta$  de forma que  $A \cup B \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ , es decir, recubren y además  $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A \cup B) + \varepsilon$ .

Estos  $Q_k$  tienen la propiedad de que, o bien  $Q_k \cap A = \emptyset$ , o bien  $Q_k \cap B = \emptyset$ , ya que si no fuese así existirían  $a, b \in \mathbb{R}^n : d(a, b) < \text{diam } Q_k < \delta < d(A, B)$  lo cual es absurdo.

Podemos dividir el recubrimiento entonces en dos conjuntos:

$$\begin{cases} C := \{Q_k : Q_k \cap A \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } A \\ D := \{Q_k : Q_k \cap B \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } B \end{cases}$$

Y no incluimos los que no cortan a ninguno puesto que esos sobran, en consecuencia:

$$\mu^*(A \cup B) + \varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) \geq \sum_C \sum_{D} v(Q_k) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Y como es para todo epsilon, se tiene la desigualdad que nos faltaba.

### Teorema

La medida exterior de Lebesgue cumple las siguientes propiedades:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$
2.  $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3.  $\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$

Demostración:

La propiedad 2 ya la tenemos demostrada, y la propiedad uno viene de aplicar la 2 a un conjunto numerable, puesto que el vacío pertenece a él y este es de medida nula.

Para demostrar la 3, si  $\exists k : \mu^*(A_k) = +\infty$  es trivial, luego suponemos que  $\mu^*(A_k) < +\infty$  y tomamos  $\varepsilon > 0$ , entonces para cada  $A_k$  hay un recubrimiento que verifica:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists \{Q_j^k\}_{j=1}^{\infty} : A_k \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k : \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j^k) < \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

De este modo, como cada  $A_k$  está contenido en la unión sobre  $j$  de un conjunto  $\{Q_j^k\}$  para  $k$  concreto, la unión de todos los  $A_k$  está contenida en la unión sobre  $k$  de dichos recubrimientos, es decir:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k \right) = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_j^k$$

Como  $\{Q_j^k\}$  es numerable, lo anterior es una unión numerable de conjuntos numerables, entonces:

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{j,k} v(Q_j^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j^k) < \sum_{k=1}^{\infty} \left( \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \right) + \varepsilon$$

Y como es para todo  $\varepsilon$  se tiene la desigualdad.

### Observación

La condición de  $d(A, B) > 0$  para que la medida exterior de la unión sea la suma de las medidas exteriores no se puede relajar, es decir, existen conjuntos disjuntos en  $\mathbb{R}^n$  con  $d(A, B) > 0$  para los cuales la medida de la suma no es la suma de las medidas.

$$\exists A, B : A \cap B = \emptyset \wedge \mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

### Definición (Conjunto Medible)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , se dice que es **medible** si y sólo si

$$\forall S \subset \mathbb{R}^n : \mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$$

### Teorema (De Caratheodory)

Los conjuntos medibles forman una  $\sigma$ -álgebra y la medida exterior de Lebesgue, es decir:



- $\emptyset \in F_\sigma$
- $A \in F_\sigma \Rightarrow A^c \in F_\sigma$
- $\forall k \in \mathbb{N} : A_k \in F_\sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F_\sigma$

Además, la medida exterior de Lebesgue es  $\sigma$ -aditiva cuando la restringimos a los conjuntos medibles, es decir:

$$\mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Una vez restringida a la  $\sigma$ -álgebra, la medida exterior de Lebesgue cumple la definición de medida y se denota simplemente por  $\mu$ .

### Proposición

Todo conjunto  $A$  de medida nula es medible.

Demostración:

La desigualdad  $\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$  siempre es cierta, luego hay que demostrar la otra, es decir:

$$\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \leq \mu^*(S)$$

Pero esta es trivial, puesto que el primer sumando vale cero ya que es subconjunto de  $A$  y el segundo es subconjunto de  $S$ .

### Proposición

Los rectángulos  $Q$  son conjuntos medibles.

Demostración:

Siempre se cumple que  $\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c)$ , luego solo es necesario ver la otra  $\mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c) \leq \mu^*(S)$ ?

Tomemos un recubrimiento cualquiera de  $S$ , es decir:

$$\{Q_j\} : S \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$$

Observamos que  $\{Q_j \cap Q\}$  siempre son rectángulos que recubren a  $S \cap Q$ , luego:

$$\mu^*(S \cap Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j \cap Q)$$

A su vez,  $\{Q_j \cap Q^c\}$  recubren a  $S \cap Q^c$ , pero no tienen porqué ser rectángulos. Sin embargo, sí son una unión finita de estos, es decir, para cada  $Q_j \cap Q^c$  podemos escribir esta como  $Q_j \cap Q^c = R_1 \cup \dots \cup R_m$ , por tanto, podemos recubrir mediante rectángulos como:

$$S \cap Q^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \cap Q^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i^j \right) \Rightarrow \mu^*(S \cap Q^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(R_i^j)$$

$$R_1 \cup \dots \cup R_m \cup (Q_j \cap Q) = Q_j \Rightarrow v(Q_j) = v(R_1) + \dots + v(R_m) + v(Q_j \cap Q)$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j \cap Q) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( v(Q_j \cap Q) + v(R_1^j) + \dots + v(R_m^j) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j)$$

### Proposición

- Todo conjunto abierto es medible
- Todo cerrado es medible
- Las uniones numerables de cerrados son medibles
- Las intersecciones numerables de abiertos son medibles

### Proposición

Si  $A \subset B$ , ambos son conjuntos medibles y  $\mu(A) < \infty$ , entonces:

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Demostración:

Escribimos  $B$  como unión disjunta de conjuntos de la forma  $B = A \cup (B \setminus A)$ , esto implica que  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

---

### Definición (Sucesión creciente de conjuntos)

Decimos que una sucesión de conjuntos  $\{A_k\}$  es creciente y lo denotamos por  $\{A_k\} \uparrow$  si y sólo si  $A_k \subset A_{k+1} : \forall k \in \mathbb{N}$ .

---

### Proposición

Si tenemos una familia de conjuntos crecientes  $\{A_k\} \uparrow$  medibles, entonces se tiene que:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

Demostración:

Si alguno tiene medida infinita se tiene trivialmente, luego podemos suponer que  $\forall k. \in \mathbb{N} : \mu(A_k) < \infty$ .

En primer lugar, vamos a construir la siguiente sucesión de conjuntos:

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ \vdots \\ B_k = A_k \setminus A_{k-1} \end{cases} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Sin embargo, como  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  son disjuntos dos a dos, tenemos que:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) - \mu(\emptyset) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

---

### Definición (Sucesión decreciente de conjuntos)

Decimos que una sucesión de conjuntos  $\{A_k\}$  es decreciente y lo denotamos por  $\{A_k\} \downarrow$  si y sólo si  $A_{k+1} \subset A_k : \forall k \in \mathbb{N}$ .

### Proposición

Si tenemos una familia de conjuntos decrecientes  $\{A_k\} \downarrow$  medibles y  $\exists k \in \mathbb{N} : \mu(A_k) < \infty$ , entonces se tiene que:

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

Demostración:

Completamente análoga a su homóloga anterior.

### Teorema

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Son equivalentes:

1.  $A$  es medible.
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists G \supset A$  abierto :  $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$
3.  $A = D \setminus N : D$  es  $G_\delta$ ,  $\mu(N) = 0$
4.  $A = C \cup N : C$  es  $F_\sigma$ ,  $\mu(N) = 0$
5.  $\forall \varepsilon > 0, \exists F \subset A$  cerrado :  $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$

Demostración:

■  $1 \Rightarrow 2$ :

Supongamos primero que  $A$  es acotado. Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\mu(A) < +\infty$  por ser acotado, entonces  $\exists \{Q_k\}_{k=1}^{\infty} : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$  de forma que  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Q_k) < \mu(A) + \varepsilon$ .

Como el volumen no depende de que los rectángulos sean abiertos o cerrados, consideramos los  $Q_k$  rectángulos abiertos de modo que:

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ abierto : } A \subset G$$

Como  $\mu(A) < +\infty$ , entonces podemos ver que:

$$\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Q_k) - \mu(A) < \varepsilon$$

En general, si  $A$  no es acotado, definimos:

$$A_k := \{x \in A : k-1 \leq \|x\| < k\}$$

[DIBUJO]

Los conjuntos  $A_k$  son la intersección de  $A$  con coronas disjuntas 2 a 2 concéntricas que descomponen  $A$  como:

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Si fijamos  $\varepsilon > 0$  y como  $\mu(A) < +\infty$ , podemos aplicar el razonamiento anterior para acotados en cada  $A_k$ , luego:

$$\exists G_k \supset A_k \text{ abierto : } \mu(G_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Por tanto, si consideramos  $G$  como la unión de los  $G_k$ , tenemos:

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \text{ es un abierto : } G \supset A$$

Y se cumple que:

$$\mu(G \setminus A) = \mu\left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k\right) \setminus A\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (G_k \setminus A_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k - A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

■  $2 \Rightarrow 3$ :

$\forall k \in \mathbb{N}$ , consideramos  $G_k \subset A$  abierto tal que  $\mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k}$ , después definimos el conjunto:

$$D := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \text{ que es } G_\delta : D \supset A$$

Como  $A = D \setminus (D \setminus A)$ , definimos entonces  $N = D \setminus A$  y ocurre que:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mu(D \setminus A) \leq \mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k} \Rightarrow \mu(N) = 0$$

■  $3 \Rightarrow 1$ :

Tenemos  $A = D \setminus N$ , o lo que es lo mismo, que  $A = D \cap N^c$ .  $D$  es medible por hipótesis, y  $N^c$  es el complementario de un medible, que es medible<sup>2</sup>. Como las intersecciones de medibles son medibles,  $A$  es medible.

■  $1 \Rightarrow 5$ :

Sea  $\varepsilon > 0$ , como  $A$  es medible, entonces  $A^c$  también lo es y, por el apartado 2, tenemos que:

$$\exists G \supset A^c \text{ abierto} : \mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$$

Sea  $F := G^c$  cerrado, como  $A^c \subset G \Rightarrow F = G^c \subset (A^c)^c = A$ , por tanto:

$$A \setminus F = (A^c)^c \setminus F = (A^c)^c \cap F^c = G \cap (A^c)^c = G \setminus A^c$$

Luego, se tiene que:

$$\mu(A \setminus F) = \mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$$

■  $5 \Rightarrow 4$ : (Similar a  $2 \Rightarrow 3$ )

$\forall k \in \mathbb{N}$ , consideramos  $F_k \subset A : \mu(A \setminus F_k) < \frac{1}{k}$ , después definimos el conjunto:

$$C := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \text{ es } F_\sigma : C \subset A$$

Y la demostración es análoga a la implicación  $2 \Rightarrow 3$ .

■  $4 \Rightarrow 1$

De nuevo y por similitud con  $3 \Rightarrow 1$ ,  $A = C \cup N$  es medible por ser unión de medibles.

---

<sup>2</sup>Por el teorema de Caratheodory

# FUNCIONES MEDIBLES

---

Comprobadas las propiedades que tiene la medida sobre conjuntos medibles, nos interesa saber qué funciones nos permiten conservar propiedades de medida interesantes. Es aquí donde juegan un papel fundamental las funciones medibles que permiten asegurar que las preimágenes de abiertos son medibles y, por ello, al trabajar sobre abiertos no debemos preocuparnos sobre las propiedades de medibilidad ya que se conservan también en el conjunto de partida.

## FUNCIONES MEDIBLES

---

### Definición

Sea  $A \subset \mathbb{R}^m$  medible y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definimos una función **medible** como aquella que verifica:

$$\forall G \subset \mathbb{R}^m \text{ abierto, } f^{-1}(G) \text{ es medible.}$$

---

### Proposición

1. Sea una función  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , si es continua, entonces es medible.
2. Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función medible y  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función continua<sup>3</sup>, entonces  $\varphi \circ f$  es medible.

### Observación:

Como podemos expresar un abierto como recubrimiento de bolas (que con la norma infinito serían cubos) tenemos que  $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ , de este modo, se tiene que  $f^{-1}(G) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(Q_k)$  y, en consecuencia, podemos redefinir el concepto de función medible de la siguiente forma:

$$f \text{ medible} \Leftrightarrow f^{-1}(Q) \text{ medible, } \forall Q \subset \mathbb{R}^m \text{ cubo abierto.}$$

### Proposición

Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función, es medible si y sólo si cada una de sus componentes es medible.

### Demostración:

■  $\Rightarrow$

Cada componente se puede expresar como:

$$f_i = \pi_i \circ f$$

Donde  $f$  es medible por hipótesis y  $\pi_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$  es continua.

---

<sup>3</sup>En general, la composición de medibles no tiene porqué ser medible

■  $\Leftarrow$

Dado  $Q = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_m, b_m)$  cubo abierto, tenemos que  $f^{-1}(Q) = \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(a_i, b_i)$ . Esto es así porque:

$$x \in f^{-1}(Q) \Leftrightarrow f(x) \in Q \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : f_i(x) \in (a_i, b_i)$$

### Proposición

Sean  $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  medibles, se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $f + g$  medible.
2.  $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot f$  medible.
3.  $\langle f, g \rangle$  medible.
4.  $\|f\|$  medible.

Demostración:

1. Definimos la función  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  de la forma:

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x), g_1(x), \dots, g_m(x))$$

Y por hipótesis, como las funciones son medibles y cada componente es medible, entonces  $F$  es medible. Del mismo modo, definimos:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

que trivialmente es continua, por tanto:

$$(f + g)(x) = (+ \circ F)(x)$$

Es medible por composición de medibles con continuas.

2. Trivial
3. Utilizando la misma función  $F$  definida en el primer apartado, tenemos que la función:

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

es continua, luego por composición de nuevo se tiene:

$$\langle f, g \rangle(x) = (\langle, \rangle \circ F)(x)$$

que es medible.

4. Completamente análogo a antes, se trata de ver la siguiente igualdad  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$  y demostrar que es la composición con:

$$\begin{aligned} \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ u &\mapsto \sqrt{u} \end{aligned}$$

que es continua.

Esta función es continua. Por tanto, observamos que podemos definir la norma de funciones medibles como composición:

$$\|f\|(x) = (\|\cdot\| \circ F)(x)$$

Como la función producto escalar es continua, y la función  $F$  es medible, la composición es medible.

### Teorema

Sea  $A \subset \mathbb{R}^m$  medible y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , son equivalentes:

1.  $f$  medible.
2.  $\{x \in A : f(x) < \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha)$ , es medible  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
3.  $\{x \in A : f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha]$ , es medible  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
4.  $\{x \in A : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, +\infty)$ , es medible  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
5.  $\{x \in A : f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}[\alpha, +\infty)$ , es medible  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Demostración:

Veamos primero que  $2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ :

■  $2 \Rightarrow 3$

Basta con observar que:

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(-\infty, \alpha + \frac{1}{k}\right)$$

Por hipótesis,  $\forall k \in \mathbb{N} : f^{-1}(-\infty, \alpha + \frac{1}{k})$  son medibles y, como la intersección numerable de medibles es medible por formar una  $\sigma$ -álgebra,  $f^{-1}(-\infty, \alpha]$  es medible.

■  $3 \Rightarrow 4$

Basta con observar que:

$$f^{-1}(\alpha, \infty) = A \cap (f^{-1}(-\infty, \alpha])^c$$

Por hipótesis,  $f^{-1}(-\infty, \alpha]$  es medible, y como los conjuntos medibles forman una  $\sigma$ -álgebra por el Lema de Caratheodory, su complementario también es medible. Como  $A$  es medible, la intersección también es medible.

■  $4 \Rightarrow 5$

Basta con observar que:

$$f^{-1}[\alpha, +\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(\alpha - \frac{1}{k}, +\infty\right)$$

Por hipótesis,  $\forall k \in \mathbb{N} : f^{-1}(\alpha - \frac{1}{k}, \infty)$  son medibles y, como la intersección numerable de medibles es medible por formar una  $\sigma$ -álgebra,  $f^{-1}[\alpha, +\infty)$  es medible.

■  $5 \Rightarrow 2$

Basta con observar que:

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = A \cap (f^{-1}[\alpha, +\infty))^c$$

Por hipótesis,  $f^{-1}[\alpha, +\infty)$  es medible y, como los conjuntos medibles forman una  $\sigma$ -álgebra, por el Lema de Caratheodory, su complementario también es medible. Como  $A$  es medible, la intersección también es medible.

Veamos que  $1 \Rightarrow 2$ :

Como  $(-\infty, \alpha)$  es un abierto y  $f$  es medible,  $f^{-1}(-\infty, \alpha)$  es medible.

Veamos que  $2$  y  $4 \Rightarrow 1$ :

Sea  $(\alpha, \beta)$  intervalo abierto tal que  $\alpha < \beta$ , entonces:

$$f^{-1}(\alpha, \beta) = f^{-1}(\alpha, \infty) \cap f^{-1}(-\infty, \beta)$$

Como  $f^{-1}(\alpha, \infty)$  y  $f^{-1}(-\infty, \beta)$  son medibles por hipótesis y la intersección de medibles es medible,  $f^{-1}(\alpha, \beta)$  es medible.

Vamos a ver que la propiedad de ser medible se conserva por sucesiones. Ello nos va a permitir ver que hay muchas funciones medibles más allá de las funciones continuas que ya sabemos que son medibles. Como vamos a tomar límites, nos van a aparecer valores infinitos. Por ello va a ser útil admitir funciones que tomen valores infinitos. Consideraremos funciones del estilo:

$$f : A \rightarrow [-\infty, \infty] = \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Donde  $\text{dom} f = \{x \in A : f(x) \in \mathbb{R}\}$

### Definición (Función Medible en $\bar{\mathbb{R}}$ )

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  una función que toma valores en  $\bar{\mathbb{R}}$ , decimos que ésta es medible si y sólo si:

- $f^{-1}(+\infty)$  es medible
- $f^{-1}(-\infty)$  es medible
- $f : \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible.

Donde  $\text{dom} f = \{x \in A : f(x) \in \mathbb{R}\}$

### Observación

Podemos descomponer  $A$  en forma disjunta como:

$$A = (\text{dom} f) \sqcup (f^{-1}(+\infty)) \sqcup (f^{-1}(-\infty))$$

De lo que se sigue que:

$$\text{dom} f = A \setminus (f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(-\infty))$$

Por tanto, que si  $A$ ,  $f^{-1}(+\infty)$  y  $f^{-1}(-\infty)$  son conjuntos medibles,  $\text{dom} f$  también lo es.

### Proposición

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible y sea  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones donde  $\forall k \in \mathbb{N} : f_k : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  es medible, entonces:

$$f = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{f_k\} \text{ es medible} \qquad f = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{f_k\} \text{ es medible}$$

### Demostración:

- Podemos expresar  $f^{-1}(-\infty)$  como:

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(-\infty)$$

Por hipótesis, las  $f_k$  son medibles, y por tanto  $f_k^{-1}(-\infty)$  es medible, como la intersección numerable de medibles es medible,  $f^{-1}(-\infty)$  es medible.

- Del mismo modo,  $f^{-1}(+\infty)$  se puede expresar como:

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) > m\}$$

puesto que tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) > m\} &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : y \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) > m\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : \exists k_m \in \mathbb{N} : f_{k_m}(y) > m \Leftrightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(y) = +\infty \Leftrightarrow y \in f^{-1}(+\infty) \end{aligned}$$

Como se trata de la intersección numerable de una unión numerable de conjuntos medibles,  $f^{-1}(+\infty)$  es medible.



- Por último, para ver que la función  $f$  es medible, hay que ver que para cualquier  $\alpha$  el conjunto  $f^{-1}(-\infty, \alpha]$  es medible. Para ello, expresamos dicho conjunto como:

$$\{x \in \text{dom} f : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \text{dom} f_k : f_k(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(-\infty, \alpha]$$

Como las  $f_k$  son medibles, se trata de una intersección numerable de conjuntos medibles, que es medible. Veamos que dicha igualdad es cierta:

$$\{x \in \text{dom} f : f(x) \leq \alpha\} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R} \wedge f(x) \leq \alpha \Leftrightarrow \mathbb{R} \ni \sup f_k(x) \leq \alpha \Leftrightarrow f_k(x) \leq \alpha : \forall k \in \mathbb{N}$$

Para la demostración del ínfimo, basta ver que  $f = \inf f_k = -\sup_k(-f_k)$

### Proposición

Sea  $A \subset \mathbb{R}^m$  medible y  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones donde  $\forall k \in \mathbb{N} : f_k : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  son medibles, entonces:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k \wedge \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \text{ son medibles}$$

Demostración:

Observamos que:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k &= \inf_{m \in \mathbb{N}} \left( \sup_{k \geq m} f_k \right) \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \left( \inf_{k \geq m} f_k \right) \end{aligned}$$

Como hemos visto que los supremos de funciones medibles son funciones medibles y los ínfimos también, queda demostrado.

### Proposición

Sea  $A \subset \mathbb{R}^m$  medible y  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones donde  $\forall k \in \mathbb{N} : f_k : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  son medibles, entonces si definimos el conjunto:

$$A_0 = \left\{ x : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right\} \text{ es medible.}$$

la restricción de  $f$  a ese conjunto es medible:

$$f : A_0 \rightarrow [-\infty, \infty] \text{ es medible}$$

Demostración:

Podemos expresar  $A$  como la siguiente descomposición:

$$A_0 = A_{\infty} \cup D_0 \cup A^{\infty} : \begin{cases} A_{\infty} = \{x \in A : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = -\infty\} \\ A^{\infty} = \{x \in A : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \infty\} \\ D_0 = \{x \in A : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

Por tanto, si expresamos de la forma adecuada:

$$A_{\infty} = \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right)^{-1}(-\infty) \text{ es medible.} \quad A^{\infty} = \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right)^{-1}(\infty) \text{ es medible.}$$

$$D_0 \subset \text{dom} \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k \right) \cap \text{dom} \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) = D \text{ medible.}$$

$$D_0 = \{x \in D : \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)\} = \{x \in D : g(x) = 0\} = g^{-1}(\{0\}) \text{ medible}$$

En consecuencia, concluimos que  $A_0$  es medible.

---

**Definición (Propiedad en casi todo punto)**

Decimos que una propiedad  $P$  se cumple en **casi todo punto** si y sólo si:

$$\exists N \subset \mathbb{R}^n : \mu(N) = 0 \wedge P \text{ se cumple } \forall x \notin N$$

Es decir, solo NO se verifica en un conjunto de medida nula.

---

**Proposición**

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones tales que son iguales c.t.p. y una de las dos es medible, entonces la otra lo es.

Demostración:

Sea  $G$  abierto hay que ver que  $g^{-1}(G)$  es abierto:

$$g^{-1}(G) = (f^{-1}(G) \setminus N_1) \cup N_2 \text{ medible}$$

Donde  $N_1, N_2$  de medida 0 ( $N_1, N_2 \subset N$ )

**Proposición**

Si  $f$  es el límite de una sucesión de funciones medibles  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  en casi todo punto, entonces  $f$  es medible.

$$\forall k \in \mathbb{N} : f_k \text{ medible y } \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f \text{ (c.t.p.)} \Rightarrow f \text{ medible}$$

Demostración:

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\tilde{f}(x) = \limsup f_k(x)$$

Por ser las  $f_k$  medibles y ser  $\tilde{f}$  el límite superior de funciones medibles, entonces  $\tilde{f}$  es medible y como  $f = \tilde{f}$  (c.t.p.) entonces tenemos que  $f$  es medible.

---

**Definición (Función Característica)**

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cualquiera, definimos la **función característica** de dicho conjunto como:

$$\chi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida como } \chi_E(x) : \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Trivialmente, tenemos que  $\chi_E$  es medible  $\Leftrightarrow E$  es medible.

---

**Definición (Función Simple)**

Sea  $\chi_{E_k}$  la función característica del conjunto  $E_k$  y  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  un número cualquiera, definimos una **función simple** como:

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k} \text{ es medible}$$

Donde cabe destacar que el sumatorio es **finito**.

---

**Proposición**

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en c.t.p., entonces es medible.

Demostración:

Podemos expresar la función  $f$  de la siguiente forma:

$$f \cdot \chi_{[-N, N]^n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$$

Nos restringimos a ese cubo  $Q$  y, para cada  $k$ , dividimos  $Q$  en cubos semiabiertos de lado  $\frac{1}{2^k}$ , de forma que para un  $k$  fijo, tenemos el conjunto de cubos  $\{Q_j^k\}_{j=1}^\infty$  donde cada  $Q_j$  tiene lado  $\frac{1}{2^k}$ , es decir:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \{Q_j^k\}_{j=1}^\infty \text{ de lado } \frac{1}{2^k} : Q = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k$$

A su vez, definimos  $C_j^k := \inf\{f(x) : x \in Q_j^k\}$  y para cada  $k$ , tomamos la función:

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^\infty c_j^k \cdot \chi_{Q_j^k} \text{ medible}$$

Para ver que  $f$  es medible, basta ver que aquellos puntos donde la función  $f$  sea continua ocurre que  $\varphi_k(x_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$ . Veámoslo:

Si  $f$  es continua en  $x \in [-N, N]^n$ , entonces podemos decir que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{ si } \|y - x\| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Podemos tomar un  $k_0 : Q_j^{k_0}$  contiene a  $x$  y verifica  $Q_j^{k_0} \subset B(x, \delta)$ , luego en este caso tenemos:

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_0, Q_j^k \subset B(x, \delta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall y \in Q_j^k, \|y - x\| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |c_j^k - f(x)| \leq \varepsilon \text{ donde } c_j^k = \varphi_k(x) \Rightarrow \\ \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 : \text{ si } k \geq k_0 \Rightarrow |\varphi_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim \varphi_k(x) = f(x) \end{aligned}$$

### Definición (Oscilación)

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x_0 \in [a, b]$  un punto del dominio, se define la **oscilación de la función en ese punto** como:

$$o(f, x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (\sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\})$$

### Proposición

Una función  $f$  es continua en un punto  $x_0$  si y sólo si  $o(f, x_0) = 0$ .

### Teorema (de Lebesgue)

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, entonces dicha función es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad de  $f$  tiene medida nula.

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \text{ continua c.t.p.}$$

Demostración:

Como  $f$  es acotada, tenemos que  $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$  y denotamos por el conjunto de puntos de discontinuidad a  $D = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ discontinua en } x\}$ .

■  $\Leftarrow$ : supongamos que  $\mu(D) = 0$ .

Tomamos  $\varepsilon > 0$  y denotamos por  $D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : o(f, x) < \varepsilon\}$ , que es cerrado porque si tomamos  $x_0 \notin D_\varepsilon \Rightarrow o(f, x_0) \geq \varepsilon$ , entonces:

$$\exists \delta_0 > 0 : \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} < \varepsilon$$

De este modo, para cualquier  $x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ , podemos escoger un  $\delta_1 = \delta_0 - |x_1 - x_0|$  y tenemos que:

$$\sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)\} < \varepsilon \Rightarrow o(f, x_1) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \notin D_\varepsilon$$

Con lo que su complementario es abierto, luego  $D_\varepsilon$  es cerrado y por ser acotado, también tenemos que es compacto con medida 0 (porque  $D_\varepsilon \subset D$ ).

Como tiene medida nula:

$$\exists \{I_n\}_{n=1}^\infty : D_\varepsilon \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ y } \sum_{n=1}^\infty \mu(I_n) < \varepsilon$$

Pero, al ser compacto, se tiene que:

$$D_\varepsilon \subset I_1 \cup \dots \cup I_N : \mu(I_1) + \dots + \mu(I_N) < \varepsilon$$

*Dibujoparticion*

Con este recubrimiento finito, generamos una partición formada por  $a$ ,  $b$  y todos los extremos de los intervalos  $I_j$  que denotaremos por  $P$ . Dicha partición, la expresaremos en términos de otras dos:  $P_1$  que será la formada por los intervalos de la partición  $P$  contenidos en algún  $I_j$  y  $P_2$  formada por los otros (que en particular no cortan a  $D_\varepsilon$ , luego la oscilación en estos es  $< \varepsilon$ ). De este modo, tenemos  $P = P_1 \cup P_2$ .

Para cada intervalo  $I \in P_2$ , realizamos el siguiente procedimiento:

$$\forall I \in P_2 : (x \in I \Rightarrow o(f, x) < \varepsilon) \Rightarrow \exists I_x \subset I : \forall y, z \in I_x : |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

Y esto puede hacerse porque para cada  $x$ , podemos encontrar un  $\delta$  de forma que en  $(x - \delta, x + \delta)$  la oscilación es menor que  $\varepsilon$  y precisamente ese sería un posible  $I_x$ .

Recubrimos  $I$  (que es compacto por ser cerrado) por una cantidad finita de estos  $I_x$  y, de esta manera, obtenemos en forma de partición (quitando trozos de intervalos si fuese necesario para que sean disjuntos) el intervalo  $I$  inicial. Esto, genera otra partición de la parte que correspondía a  $P_2$  que denotamos por  $P_2^*$  y definimos  $P^* := P_1 \cup P_2^*$  como nueva partición del intervalo.

De este modo, tenemos que:

$$\begin{aligned} U(f, P^*) - L(f, P^*) &= \sum_{I \in P^*} \left( \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right) \mu(I) = \\ &= \sum_{I \in P_1} \left( \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right) \mu(I) + \sum_{I \in P_2^*} \left( \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right) \mu(I) \leq \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon(b - a) = (b - a + 2M)\varepsilon \end{aligned}$$

Por el Criterio de Cauchy,  $f$  es integrable Riemann.

■  $\Rightarrow$ : supongamos que  $f$  es integrable Riemann.

Como  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{\frac{1}{n}}$ , basta con ver que  $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(D_{\frac{1}{n}}) = 0$ . Para ello, tomamos  $\varepsilon > 0$  y una partición  $P$  de  $[a, b]$  de forma que  $U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{n}$ .

Denotamos por  $P_1$  a los intervalos de  $P$  que cortan a  $D_{\frac{1}{n}}$  (con esto estamos asumiendo que los puntos de  $D_{\frac{1}{n}}$  no son puntos de los extremos de la partición, pero no pasaría nada porque ese conjunto es de medida nula y la integral es la misma). De este modo, tenemos que:

$$\frac{\varepsilon}{n} > \sum_{I \in P_1} \left( \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right) \mu(I) \geq \frac{1}{n} \sum_{I \in P_1} \mu(I)$$

(*Dibujo*) Sin embargo, esto quiere decir que:

$$\sum_{I \in P_1} \mu(I) < \varepsilon \text{ pero } D_{\frac{1}{n}} \subset \bigcup_{I \in P_1} I \Rightarrow \mu(D_{\frac{1}{n}}) = 0$$

### Observación

Recordemos que llamamos función simple a una función con la estructura:

$$\varphi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{E_k}$$

Dicha función cumple que:

- Es una función medible.
- Solo toma un número finito de valores.
- Cualquier función  $\varphi$  que sea medible y solo tome un número finito de valores  $(\beta_1, \dots, \beta_r)$  es una función simple, puesto que podemos expresar dicha función como:

$$E_j = \varphi^{-1}(\{\beta_j\}), \text{ medible} \quad \varphi = \sum_{k=1}^r \beta_j \chi_{E_j} \Rightarrow \varphi \text{ es simple.}$$

### **Proposición**

Si una función  $f$  es integrable Riemann, entonces dicha función también es medible.

### Demostración:

Por el teorema de antes,  $\mu(D) = 0$  lo que implica que  $f$  es continua en c.t.p. y, por tanto, es medible.

---

### **Definición (Integral)**

Sea  $\varphi$  función simple no negativa:

$$\varphi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \chi_{E_k} \text{ donde } (\alpha_k > 0)$$

Definimos la **integral** de dicha función como:

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(E_k)$$

---

*Dibujoxnonegativacomodosχquepuedensernegativa*

### Observación:

Como la medida de dichos conjuntos puede ser infinito y los valores  $\alpha_k = 0$ , es necesario que definamos  $0 \cdot (+\infty) = 0$  para poder dar una definición consistente de  $I(\varphi) \in [0, +\infty]$ .

### **Proposición**

Sea  $\varphi$  función simple, es posible escribir dicha función de distintas formas:

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^p \beta_i \chi_{D_i}$$

entonces la integral coincide para cualquiera que sea la forma escogida:

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^p \beta_i \mu(D_i)$$

luego la integral tiene una definición consistente.

Demostración:

La demostración se deja como ejercicio de las hojas, se trata de utilizar que entre dos cualesquiera puedo pasar por la forma canónica y esta integral es la de la definición.

### Proposición

1. Sea  $c > 0$  y  $\varphi$  simple no negativa, entonces  $I(c \cdot \varphi) = c \cdot I(\varphi)$ .
2. Sean  $\varphi, \psi$  simples no negativas, entonces  $I(\varphi + \psi) = I(\varphi) + I(\psi)$
3. Si  $\varphi \leq \psi$  c.t.p, entonces  $I(\varphi) \leq I(\psi)$
4. Si  $\varphi = \psi$  c.t.p, entonces  $I(\varphi) = I(\psi)$

Demostración:

(Dibujo punto 3).

### Observación

Los conjuntos no tienen porque ser intervalos, si fuese este el caso sería, en el fondo, integrabilidad Riemann.

---

### Definición (Integral de Lebesgue)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible, definimos la **integral de Lebesgue de  $f$**  de la siguiente<sup>4</sup> forma:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f} I(\varphi) \in [0, +\infty]$$

Donde las funciones  $\varphi$  son simples no negativas.

---

### Proposición

Sea  $\varphi$  simple no negativa, la integral de Lebesgue coincide con la integral definida para este tipo de funciones:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu = I(\varphi)$$

Demostración:

En primer lugar, la primera desigualdad la tenemos por ser el supremo de las Integrales de las funciones simples menores o iguales que  $\varphi$ , es decir:

$$\varphi \leq \varphi \Rightarrow I(\varphi) \leq \sup_{\psi \leq \varphi} I(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu$$

Si  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu = +\infty$ , entonces tenemos que:

$$\forall M > 0, \exists \psi \leq \varphi : I(\psi) \geq M \Rightarrow M \leq I(\psi) \leq I(\varphi) \Rightarrow \forall M > 0 : I(\varphi) \geq M \Rightarrow I(\varphi) = +\infty$$

Si  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu < +\infty$ , entonces tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \psi \leq \varphi : I(\psi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu - \varepsilon \Rightarrow I(\varphi) \geq I(\psi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu - \varepsilon \Rightarrow I(\varphi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu$$

### Proposición

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  dos funciones medibles tal que  $f \leq g$  c.t.p., entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu.$$

---

<sup>4</sup>La definición no cambia si las funciones  $\varphi \leq f$  en c.t.p.

Demostración:

Se deja como ejercicio.

### Corolario

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  dos funciones medibles tal que  $f = g$  c.t.p., entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu$$

---

### Definición (Integral en un conjunto)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible, entonces definimos **la integral de  $f$  sobre  $A$**  como:

$$\int_A f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_A \, d\mu$$

---

Observación:

En general se trabajará con funciones no infinitas para evitar que la integral sea infinita trivialmente.

### Proposición

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible, entonces el conjunto  $\{(x, f(x))\}$  que definimos como la gráfica  $f$  tiene medida 0.

### Lema

Sea  $\varphi$  función simple no negativa y  $\{A_k\}_{k=1}^\infty \uparrow A$  una sucesión creciente ( $A_k \subset A_{k+1} : \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$ ) de conjuntos medibles convergentes a  $A$ , entonces:

$$\int_A \varphi \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} \varphi \, d\mu.$$

Demostración:

Tenemos que  $\varphi = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{E_j}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} \varphi \, d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \chi_{A_k} \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{E_j} \cdot \chi_{A_k} \right) \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{E_j \cap A_k} \right) \, d\mu = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left( \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j \cap A_k} \, d\mu \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \mu(E_j \cap A_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_j \cap A_k) = \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \mu(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^m \left( \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j \cap A} \, d\mu \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{E_j} \chi_A \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \chi_A \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu \end{aligned}$$

### Teorema (Convergencia Monótona)

Supongamos una sucesión creciente de funciones  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \uparrow f$  convergente<sup>5</sup> a  $f$  donde cada función  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu$$

El teorema también es válido si la convergencia es en c.t.p.

---

<sup>5</sup>Esto quiere decir que  $f_k \leq f_{k+1}$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  de forma puntual

Demostración:

Por la monotonía de la sucesión, tenemos que:

$$\forall k \in \mathbb{N} : f_k \leq f \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

Por tanto, tenemos asegurada la convergencia de la sucesión de integrales por ser acotada superiormente y creciente:

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right\}_{k=1}^{\infty} \uparrow \wedge \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

Fijamos  $\varphi \leq f$  simple no negativa y un  $c < 1$ . De este modo, definimos la siguiente sucesión de conjuntos:

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : c \cdot \varphi(x) \leq f_k(x)\}$$

Dicho conjunto es medible para cada  $k$  por ser el conjunto de puntos donde una función vale más que 0.

Por ser creciente la sucesión de funciones, es decir,  $f_k \leq f_{k+1}$ , entonces tenemos que:

$$A_k \subset A_{k+1} \Rightarrow \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow \mathbb{R}^n \text{ ya que } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_k = \mathbb{R}^n$$

Si  $f(x) = \infty$ , entonces tenemos que:

$$\lim_k f_k(x) = +\infty \Rightarrow c \cdot \varphi(x) \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N} : c \cdot \varphi(x) < f_k(x) \Rightarrow x \in A_k$$

Por otro lado, si tenemos que  $0 < f(x) < \infty$ , entonces:

$$\varphi(x) \leq f(x) \Rightarrow c \cdot \varphi(x) < f(x) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : c \cdot \varphi(x) < f_k(x) \Rightarrow x \in A_k$$

Por tanto, por el lema anterior, al tener la sucesión creciente de los  $A_k$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu &= c \cdot \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{x: f(x)=0\}} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{x: f(x)=0\}} c \cdot \varphi d\mu = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} c \cdot \varphi d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f_k d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \end{aligned}$$

De este modo, como el  $c$  es arbitrario, si se hace tender a 1, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \stackrel{\forall \varphi}{\Rightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Y ya tendríamos demostradas las dos desigualdades.

### Observación

Este resultado sigue siendo cierto si se toman las hipótesis solo en c.t.p. Si ocurriese que  $f_k \leq f$  no se cumpliera en un conjunto de medida nula, tomamos  $f'_k$  que vale  $f_k$  en todos los puntos donde se cumple y 0 en los que no. Como, por definición,  $f_k = f'_k$  en c.t.p. la integral es la misma y la demostración no se ve alterada.

### **Teorema**

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función acotada e integrable Riemann, entonces  $f$  es integrable Lebesgue y verifica:

$$\int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f(x) dx$$



Demostración:

Por ser acotada,  $\exists M > 0 : f \leq M \chi_{[a,b]}$ , lo que implica que  $\int f d\mu \leq \int M \cdot \chi_{[a,b]}$ , es decir, que es integrable Lebesgue.

Además, por ser integrable Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sup_{P \in \mathcal{P}} L(f, P) \Rightarrow \exists \{P_k\}_{k=1}^\infty : P_k \leq P_{k+1} : \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} L(f, P_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{S \in P_k} \inf\{f(x) : x \in S\} \mu(S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \underbrace{\left( \sum m_S(f) \cdot \chi_S \right)}_{\text{funcion simple}} d\mu = \int_{[a,b]} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu \end{aligned}$$

Donde  $f_k = \sum m_S(f) \chi_S$  y vemos que por ser crecientes las particiones que hemos tomado, dicha sucesión también lo es y por ello podemos aplicar el teorema.

### Proposición

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  medible no negativa, entonces  $\exists \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  sucesión de funciones simples tal que  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \uparrow f$  es creciente y converge **puntualmente**<sup>6</sup> a  $f$ .

Demostración:

(Dibujo) Fijado un entero  $k > 0$ , definimos los siguientes conjuntos:

$$E_j^k := f^{-1}([(j-1) \cdot 2^{-k}, j \cdot 2^{-k}])$$

Con dicha definición, es sencillo ver que los conjuntos son medibles, disjuntos y su unión queda como

$$\bigcup_{j=1}^{k \cdot 2^k} E_j^k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < k\}$$

Definimos la siguiente función simple:

$$\varphi := \sum_{j=1}^{k \cdot 2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_j^k}$$

Esto genera una sucesión de funciones creciente que denotamos por  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \uparrow$ .

Luego, por la definición que se ha dado de los  $E_j^k$ , dado  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists k \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : k > f(x) \Rightarrow x \in E_j^k$  para algún  $j$  y, por tanto:

$$0 < f(x) - \varphi_k(x) < \frac{1}{2^k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$$

### Proposición

Si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones medibles no negativas, entonces la integral es aditiva, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu$$

Demostración:

Por la proposición anterior, existen dos sucesiones  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  y  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  convergentes a  $f$  y a  $g$  respectivamente. De este modo, es trivial comprobar que  $\{\varphi_k + \psi_k\}_{k=1}^\infty$  converge a  $f + g$  y por el Teorema de Convergencia Monótona, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k + \psi_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k d\mu \right) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu$$

<sup>6</sup>Si la función  $f$  es acotada, entonces la convergencia es **uniforme**

### Proposición

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible no negativa y  $c \in \mathbb{R}^+$ , entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (cf) \, d\mu = c \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$$

Demostración:

Completamente análoga a la anterior y se deja como ejercicio.

### Teorema (Convergencia monótona para series)

Sea  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^\infty f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu \right)$$

Demostración:

La demostración es prácticamente consecuencia de los enunciados anteriores:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^\infty f_k \right) d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^m f_k \right) d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^m f_k \right) d\mu = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu \right) = \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu \right) \end{aligned}$$

### Lema (De Fatou)

Sea  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu \right)$$

Demostración:

Definimos las funciones  $g_k = \inf_{m \geq k} f_m \geq 0$  medibles de modo que estas forman una sucesión creciente  $\{g_k\}_{k=1}^\infty \uparrow$ . En consecuencia, basta ver que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu$$

### Proposición

Las integrales impropias se soportan por la integral de Lebesgue:

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \int_{[a, \infty)} f(x) \, d\mu \qquad \int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a, b]} f(x) \, d\mu$$

Demostración:

■ Primera

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) \, dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) \, dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^\infty f(x) \chi_{[a, M]} \, dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[a, +\infty]} f \chi_{[a, M]} \, d\mu = \\ &= \int_{[a, +\infty]} f \chi_{[a, +\infty]} \, d\mu = \int_{[a, +\infty]} f \, d\mu. \end{aligned}$$

■ Segunda

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{b - \frac{1}{k}} f(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, b - \frac{1}{k}]} f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f \chi_{[a, b - \frac{1}{k}]} \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \chi_{[a, b]} \, d\mu = \int_{[a, b]} f \, d\mu.$$

# FUNCIONES INTEGRABLES

---

Hasta ahora no hemos hecho más que definir la integral y las propiedades que tiene y todo ello mayoritariamente para funciones no negativas. En esta sección, el objetivo es ampliar las miras y dar una definición consistente con las propiedades ya vistas para funciones no negativas y así poder sacarle completamente partido al concepto de integral.

---

## Definición

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible<sup>7</sup>, entonces diremos que es integrable si y sólo si:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\mu < +\infty$$

---

## Definición

Dada una función medible  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos:

$$f^+ := \max\{f, 0\} \qquad f^- := -\min\{f, 0\}$$

(Dibujo)

que verifican las siguientes propiedades:

1.  $f^+ \wedge f^-$  son medibles y no negativas.
2.  $f^+ - f^- = f$ .
3.  $f^+ + f^- = |f|$
4.  $f^+ \leq |f| \wedge f^- \leq |f|$

---

## Proposición

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable, entonces  $f^+$  y  $f^-$  son integrables, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, d\mu < +\infty \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, d\mu < +\infty$$

Demostración:

Basta con ver que ambas funciones están acotadas por el módulo de  $f$  y, por tanto, si  $f$  es integrable, estas también lo son.

En consecuencia, podemos dar una definición alternativa de la que se ha dado de función integrable que es completamente compatible e intercambiable con la que se ha dado anteriormente.

---

<sup>7</sup>No necesariamente negativa

---

### Definición

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, entonces podemos expresar su integral como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, d\mu$$

---

### Observación

Podríamos dar la misma definición de integrabilidad que se dió para funciones arbitrarias, pero ahora para funciones que toman valores en la recta ampliada. Sin embargo, cabe observar que  $A = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < \infty\}$  tiene que tener medida en caso de que dicha función sea integrable, puesto que:

$$\mu(A) > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : k \cdot \chi_A \leq |f| \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\mu \geq I(k\chi_A) = k \cdot \mu(A)$$

### Proposición

Supongamos que tenemos dos funciones  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  y tales que  $f = g$  (c.t.p.), entonces tenemos que:

$$f \text{ integrable} \Leftrightarrow g \text{ integrable}$$

Y además las integrales coinciden:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu$$

### Demostración:

Como ya lo tenemos demostrado para funciones no negativas, basta con trabajar con las funciones  $f^+$  y  $f^-$ , es decir:

$$f = g \text{ c.t.p.} \Rightarrow \begin{cases} f^+ = g^+ \\ f^- = g^- \end{cases} \text{ c.t.p.} \Rightarrow \int f = \int f^+ - \int f^- = \int g^+ - \int g^- = \int g$$

### Proposición

Son equivalentes:

- $f$  integrable
- $|f|$  integrable
- $f^+$  y  $f^-$  integrables

### Demostración:

- FALTAN LOS OTRO DOS APARTADOS.
- 3)  $\rightarrow$  1)

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty \Rightarrow f \text{ integrable}$$

### Lema

Sea  $f$  una función integrable, si  $f = g - h$  con ambas funciones medibles, no negativas e integrables, entonces se verifica:

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu - \int h \, d\mu$$

Demostración:

Suponemos sin pérdida de generalidad que las funciones toman valores en  $\bar{\mathbb{R}}$ , puesto que más adelante se explica como generalizar dicho lema. De este modo, podemos expresar  $f$  como:

$$f = f^+ - f^- = g - h \Rightarrow f^+ + h = f^- + g$$

Como todo son funciones no negativas e integrables, la integral de la suma es la suma de las integrales, por tanto:

$$\int f^+ + \int h = \int (f^+ + h) = \int (f^- + g) = \int f^- + \int g \Rightarrow \int f^+ - \int f^- = \int g - \int h$$

Observación

Este lema es válido para funciones que toman valores en  $\bar{\mathbb{R}}$  porque el conjunto donde los valores no son reales es de medida nula. Por tanto, las funciones son iguales en c.t.p. a las funciones de la hipótesis y para esas la demostración es válida, luego para estas también.

### **Teorema (Operaciones de Integrabilidad)**

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones integrables, entonces la integral de la suma es:

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Del mismo modo, para  $\alpha \in \mathbb{R}$  la integral del producto por  $\alpha$  es:

$$\int (\alpha \cdot f) d\mu = \alpha \int f d\mu$$

Demostración:

Por la desigualdad triangular,  $|f + g| \leq |f| + |g|$  y como ambas son funciones no negativas, se les puede aplicar el lema:

$$\int |f + g| \leq \int |f| + \int |g| < \infty$$

De este modo, ya sabemos que al menos la suma es integrable, ahora veamos que la integral es justo la suma de las integrales. Para ello, expresamos la suma de la siguiente forma:

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

Como dichas funciones son no negativas y son integrables, tenemos que

$$\int (f + g) = \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) = \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- = \int f + \int g$$

Cabe observar que es necesario el lema para probar dicha demostración puesto que no se tiene en general la igualdad:

$$f^+ + g^+ = (f + g)^+$$

### **Teorema (De convergencia dominada)**

Sea  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow f$  una sucesión convergente c.t.p. a una función  $f$ , donde las funciones  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son medibles y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función integrable que acota a  $f$  c.t.p., es decir,  $|f_k| \leq g$  c.t.p., entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Demostración:

Sabemos que  $|f| \leq g$  c.t.p  $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu < +\infty$$

Por lo que  $f$  es integrable (por la misma razón  $f_k$  son integrables).

Como  $|f_k| \leq g \Rightarrow g + f_k \geq 0 \Rightarrow \{g + f_k\}_{k=1}^\infty$  aplicamos el lema de Fatou(\*):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} (f + g) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k + g) d\mu = \\ \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} (f_k + g) d\mu &\leq^* \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f_k + g) d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu \right) = \\ &= \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right) + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu \Rightarrow \\ \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \end{aligned}$$

Tomando ahora:  $\{-f_k + g\}_{k=1}^\infty (\geq 0)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (-f) d\mu &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (-f_k) d\mu \Rightarrow \\ - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( - \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right) = - \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right) \Rightarrow \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \end{aligned}$$

### Definición

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,  $f(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \wedge y \in \mathbb{R}^n$ . Llamamos **secciones** de  $f$  a:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow, f_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f_x(y) = f(x, y)$$

### Teorema (De Tonelli)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty)$  medible. Entonces:

1.  $f_x$  son medibles c.t.p  $x$ .
2.  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible.

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f_x d\mu$$

3. Tenemos que :

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f d\mu_{nm} = \int_{\mathbb{R}^n} F d\mu_n$$

o lo que es lo mismo:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy$$

Si tenemos  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tal que,  $A_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in A\}$ .

### Proposición (Principio de Cavalieri)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  medible. Entonces:

1.  $A_x$  es medible c.t.p  $x$ .

2.  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible.

$$F(x) = \mu_m(A_x)$$

3.  $\mu_{nm}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(A_x) d\mu_m$

Ejemplo:

Sea  $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in E\}$  (Dibujo)

Si tomamos  $E \subset \mathbb{R}$  no medible:

$$A_y = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y \neq 0 \\ E & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Por lo que c.t.p es necesario.

**Corolario**

Si  $\mu_{n+m}(A) = 0 \Rightarrow$

$$\mu_m(A_x) = 0 \text{ c.t.p } x.$$

**Lema**

Si  $f, g$  verifican el  $T^q$  de Tonelli y  $a, b \in \mathbb{R}^+$ . Entonces:  $af + bg$  cumple el  $T^q$  de Tonelli.

Demostración:

Debemos ver que:

$$(af + bg)_x = af_x + bg_x$$

Tras esto, al ser combinación lineal de medibles será medible el resultado.

Por tanto,

$$F_{af+bg} = aF_f + bF_g$$

**Lema**

Si  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  cumple el  $T^q$  de Tonelli y  $(f_k) \uparrow f \Rightarrow f$  cumple el  $T^q$  de Tonelli.

Demostración:

1. Debemos observar que:

$$f_x = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k)_x, \quad (f_k)_x \uparrow f_x$$

y saber que límite de medibles es medible.

2. Como:

$$F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k, \quad \{F_k\}_{k=1}^\infty \uparrow F$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} (f_k)_x d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} f_x d\mu$$

3. Como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} F_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f_k d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

Como consecuencia de estos lemas el principio de Cavalieri es equivalente al teorema de Tonelli, es decir, basta con probar este principio para probar el teorema de Tonelli.

Cambiando notaciones tenemos pues,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \dots \left( \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1.$$

Ejemplo: Si  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ :

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) \chi_A(x, y) dx dy = \\ \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \chi_A(y) dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$