TEOREMA DE CONVERGENCIA MONÓTONA

JUAN FERRERA

El Teorema de Convergencia Monótona es una herramienta muy potente y útil, que nos permitirá probar en particular que la integral de Lebesgue y la integral de Riemann de una función integrable Riemann coinciden. Es decir que la integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann en el sentido de que permite integrar todas las funciones integrables Riemann, y permite así mismo utilizar las técnicas de la integral de Riemann para el cálculo de las integrales.

Para qué sirve introducir la integral de Lebesgue? En primer lugar porque hay funciones que no son integrables Riemann pero si son integrables Lebesgue. Un ejemplo sencillo es la función $\aleph_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}$. Es una función acotada, definida en un rectángulo (un intervalo), pero no es integrable Riemann porque es discontinua en todos los puntos. Sin embargo en nuestro contexto, es una función simple no negativa y por tanto ya hemos definido su integral, que es:

$$\int_{\mathbf{R}} \aleph_{\mathbf{Q}\cap[0,1]} d\mu = 1 \times \mu(\mathbf{Q} \cap [0,1]) = 0$$

Además la integral de Lebesgue no exige que el dominio de la función esté acotado, ni que la función esté acotada. Esto resuelve el problema de la integración impropia en varias variables que no es tan sencillo de definir como en una variable ya que si queremos integrar en el sentido Riemann una función definida en todo $\mathbf{R}^n$ de la forma como hacemos en una variable, la **forma de los dominios acotados** que tendríamos que coger para poder integrar y luego tomar límite, podría influir en el resultado final.

Pero otra propiedad que tiene la integral de Lebesgue, es que se pueden probar teoremas muy potentes de forma bastante sencilla. En particular los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada, así como el Teorema de Tonelli. Hoy vamos a ver el primero de ellos. Empezamos con un lema.

Lema: Sea φ una función simple. Sea $\{A_k\}$ una sucesión de conjuntos medibles tal que $\{A_k\} \uparrow A$, es decir $A_k \subset A_{k+1}$ y $\cup_k A_k = A$. Entonces

$$\int_A \varphi d\mu = \lim_k \int_{A_k} \varphi d\mu$$

Date: February 11, 2022 (736).

Demostración:

Si escribimos φ como

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \aleph_{E_j},$$

entonces

$$\lim_k \int_{A_k} \varphi d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \aleph_{A_k} = \lim_k \int_{\mathbf{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \aleph_{E_j} \aleph_{A_k} \right) d\mu =$$

$$\lim_k \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} \aleph_{E_j} \aleph_{A_k} d\mu = \lim_k \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(E_j \cap A_k) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lim_k \mu(E_j \cap A_k) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(E_j \cap A) = (*)$$

Esta última igualdad es consecuencia de un resultado que vimos hace unos días que nos decía que la medida de una unión creciente de conjuntos medibles era el límite de las medidas. (Observad que $\{E_j \cap A_k\}_k \uparrow E_j \cap A$).

Siguiendo con las igualdades, tenemos

$$(*) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} \aleph_{E_j \cap A} d\mu = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_{A} \aleph_{E_j} d\mu =$$

$$\int_A \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \aleph_{E_j} \Big) d\mu = \int_A \varphi d\mu. \qquad \blacklozenge$$

Antes de probar el Teorema de Convergencia Monótona (TCM), introducimos notación. Si $\{f_k\}_k$ es una sucesión de funciones medibles, escribiremos $\{f_k\}_k \uparrow$ para indicar que la sucesión es no decreciente, en el sentido de que $f_k \leq f_{k+1}$ para todo k. Cuando esto sucede, $\lim_k f_k(x)$ existe para todo $x \in \mathbf{R}^n$, admitiendo como posible límite $+\infty$. De esta forma podemos escribir $f(x) = \lim_k f_k(x)$ para todo x, y tenemos definida una función (que puede tomar valores $+\infty$) que será medible por lo visto en la lección anterior.

Esta situación la simplificamos con la siguiente notación:

$$\{f_k\}_k \uparrow f$$

Teorema de Convergencia Monótona: Si para todo k, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ es medible y no negativa y $\{f_k\}_k \uparrow f$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Demostración: Como $f_k \leq f_{k+1}$, la sucesión de valores

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right\}_k$$

es no decreciente y está acotada por $\int f d\mu$, y por tanto existe

$$\lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Vamos a ver la otra desigualdad. Sea $\varphi \leq f$ una función simple. Fijamos $c < 1$, y denotamos

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : c\varphi(x) \leq f_k(x)\}$$

A_k es un conjunto medible porque está definido por desigualdades de funciones medibles. Además $A_k \subset A_{k+1}$ por ser $f_k \leq f_{k+1}$. Por último, el hecho de que $f = \lim_k f_k$ y de que $c < 1$ implica que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{R}^n$$

Luego, por el lema anterior, tenemos que

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} c\varphi d\mu = \lim_k \int_{A_k} c\varphi d\mu \leq \lim_k \int_{A_k} f_k d\mu \leq \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Haciendo tender $c \to 1^-$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \lim_k \int_n f_k d\mu,$$

y tomando supremos en todas las posibles $\varphi \leq f$ no negativas y simples, obtenemos (por la definición de integral) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu. \qquad \spadesuit$$

Observación: El resultado también es cierto si todas las hipótesis las exigimos en casi todo punto. Es decir: $f_k \leq f_{k+1}$ c.t.p., y $f = \lim_k f_k$ c.t.p. No lo vamos a probar, pero es fácil darse cuenta de que es así, ya que podemos modificar todas las funciones en un conjunto de medida cero, de forma que sí se cumplan las hipótesis, entonces aplicamos el teorema, y luego tenemos en cuenta que las integrales de las funciones originales y de las modificadas son iguales.

Por último, aplicamos el TCM para comparar la integral de Riemann con la integral de Lebesgue.

Teorema: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ es integrable Riemann, entonces la integral de Riemann y la de Lebesgue de f coinciden.

$$\int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f(x)dx$$

Demostración: Ya vimos que f es medible. Como es integrable Riemann, tenemos que

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P L(f, P)$$

y por tanto existe una sucesión de particiones P_k tal que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_k L(f, P_k)$$

por la definición de supremo. Además podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada intervalo de P_{k+1} está contenido en un intervalo de P_k (es decir, P_{k+1} es más fina que P_k) ya que si no fuese así, modificariamos P_{k+1} dividiendo sus intervalos cuando hiciese falta.

Ahora observamos que

$$\varphi_k = \sum_{S \in P_k} m_S(f) \aleph_S$$

donde $m_S(f) = \inf\{f(x) : x \in S\}$, es una función simple, cuya integral es precisamente:

$$\int_{[a,b]} \varphi_k d\mu = \sum_{S \in P_k} m_S(f)\mu(S) = L(f, P_k),$$

además, $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ por ser P_{k+1} más fina que P_k y $\lim_k \varphi_k(x) = f(x)$ en todo punto donde f sea continua, es decir en casi todo punto. Todo esto junto nos dice (aplicando TCM) que

$$\int_{[a,b]} f d\mu = \lim_k \int_{[a,b]} \varphi_k d\mu = \lim_k L(f, P_k) = \int_a^b f(x)dx. \quad \spadesuit$$