FUNCIONES MEDIBLES

JUAN FERRERA

Vamos a definir lo que llamaremos funciones medibles. Las funciones medibles van a ser las que vamos a intentar integrar.

Definición: Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ medible, diremos que una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ es medible si $f^{-1}(G)$ es medible para todo $G \subset \mathbb{R}^m$ abierto.

Como para un conjunto ser medible es una condición muy poco restrictiva, ser función medible también es una condición muy poco restrictiva. En particular, toda función continua $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es medible ya que la imagen inversa de un abierto es abierto y por tanto medible..

Observación:
Como todo abierto G puede ser puesto como unión numerable de cubos abiertos (pensar esta afirmación que no es trivial) en la definición de función medible en lugar de pedir que $f^{-1}(G)$ sea medible para todo G abierto, se puede pedir que $f^{-1}(Q)$ sea medible para todo Q cubo abierto, ya que si $G = \cup_j Q_j$ entonces

$$f^{-1}(G) = \bigcup_j f^{-1}(Q_j).$$

Por tanto es medible por ser unión numerable de medibles.

Observación:
Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es medible y $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ es continua, entonces $\varphi \circ f$ es medible. Para verlo basta observar que

$$(\varphi \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}\Big(\varphi^{-1}(G)\Big)$$

y que $\varphi^{-1}(G)$ es abierto si lo es G por ser φ continua.

Proposición: $f : A \to \mathbb{R}^m$ es medible si y solo si sus componentes $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots m$, son medibles.
Demostración:

Date: January 26, 2022 (1089).

Cada componente f_i es la composición de f con la proyección $\pi_i(x_1, \dots x_m) = x_i$, que es una función continua. Luego si f es medible entonces f_i es medible.

Para ver el recíproco basta observar que dado un cubo abierto

$$Q = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_m, b_m)$$

tenemos que

$$f^{-1}(Q) = \bigcap_{j=1}^{m} f_i^{-1}(a_i, b_i)$$

(Hay que comprobar esta fórmula).

Por tanto si las f_i son medibles, los conjuntos $f_i^{-1}(a_i, b_i)$ son medibles y por tanto $f^{-1}(Q)$ es medible por ser intersección finita de conjuntos medibles. ♣

Ahora vemos que el hecho de ser medible se conserva por las operaciones usuales de funciones

Proposición: Si $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ son dos funciones medibles y $a \in \mathbb{R}$, entonces

(1) $f + g$ es medible.
(2) af es medible.
(3) $\langle f, g\rangle$ es medible.
(4) $||f||$ es medible.

Demostración: Recordemos que las operaciones entre funciones se definen punto a punto. Por ejemplo: $\langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$.

Empezamos por (2) que es la más fácil. La función af puede verse como la composición de f (medible) con $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definida como $\varphi(z) = az$, que es continua. Luego af es composición de medible con continua, y por tanto medible.

Para ver (1) y (3), observamos primero que la función $F : A \to \mathbb{R}^{2m}$ definida como

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x), g_1(x), \dots, g_m(x))$$

es medible porque lo son sus componentes ya que f y g son medibles.

Si la componemos con $+ : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definida como $+(x, y) = x + y$, que es continua, obtenemos (1).

Si la componemos con $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida como $\langle\ ,\ \rangle(x, y) = \langle x, y\rangle$, que es continua, obtenemos (3).

Por último (4) es consecuencia de que la norma es la raíz cuadrada (función continua) del producto escalar (medible por (3)). ♣

Terminamos caracterizando las funciones escalares medibles

Teorema: Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible y $f : A \to \mathbb{R}$, entonces son equivalentes:

(1) f medible.
(2) $\{x \in A : f(x) < \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(3) $\{x \in A : f(x) \leq \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(4) $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(5) $\{x \in A : f(x) \geq \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración: La demostración es un mero ejercicio conjuntista.

Primero vemos que $(2), (3), (4), (5)$ son equivalentes.

$(2) \Rightarrow (3)$. Es porque

$$\{x \in A : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\}$$

$(3) \Rightarrow (4)$. Es porque

$$\{x \in A : f(x) > \alpha\} = A \cap \{x \in A : f(x) \leq \alpha\}^c$$

$(4) \Rightarrow (5)$. Es porque

$$\{x \in A : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > \alpha - \frac{1}{k}\}$$

$(5) \Rightarrow (2)$. Es porque

$$\{x \in A : f(x) \leq \alpha\} = A \cap \{x \in A : f(x) > \alpha\}^c$$

Ahora vemos que (1) es equivalente a las otras condiciones.

$(1) \Rightarrow (2)$. Es porque $\{x \in A : f(x) < \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha)$ y $(-\infty, \alpha)$ es un abierto en $\mathbb{R}$.

Las otras condiciones (en particular (2) y (4) implican (1) porque para ver que f es medible basta ver que $f^{-1}(\alpha, \beta)$ es medible para $\alpha < \beta$ arbitrarios (quienes son los "cubos" en $\mathbb{R}$?). Pero

$$f^{-1}(\alpha, \beta) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \cap \{x \in A : f(x) < \beta\} \quad \spadesuit$$