CÁLCULO INTEGRAL

Juan Diego Barrado Daganzo, Mario Calvarro Marines
e Iker Muñoz Martínez

15 de febrero de 2022

CONCEPTO DE MEDIDA

En general, la teoría de la integración está sustentada mayoritariamente por el concepto de medida que se tiene en el espacio sobre el que se integra. Pueden darse dos situaciones, que se defina una medida y a partir de ahí la integral correspondiente o puede ocurrir que se defina la integral y a partir de la misma se mida. Nosotros optaremos por definir todo lo relativo a la medida de forma previa, para que la teoría de integración que se desarrollará después esté sustentada en las propiedades métricas con las que dotemos a $\mathbb{R}^n$ a través de la definición de dicha medida.

MEDIDA

El concepto fundamental de esta sección es comprender qué entendemos por medida y que propiedades tiene, así como demostrar que la medida de Lebesque es un buen intrumento de medida para trabajar en $\mathbb{R}^n$.

Definición (Rectángulo)

Definimos un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ como el conjunto;

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

*Además, definimos como **volumen** de Q a*

$$v\left(Q\right) = \left(b_n - a_n\right) \cdots \left(b_1 - a_1\right)$$

Definición (Medida exterior de Lebesque)

*Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos como **medida exterior** de A a:*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} v\left(Q_k\right); \ \textit{donde } \{Q_k\}_{k=1}^{\infty} \textit{ y } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

<u>Observación</u>

Podemos restringir las familias $\{Q_k\}$ a aquellas que tengan diam $Q_k < \delta$ para un cierto delta y la definición no cambia. Esto es así porque, en el fondo, el conjunto de sumatorios de volúmenes que estamos escogiendo es el mismo, ya que para familias con algún Q_k de diámetro mayor, éste se puede dividir en varios rectángulos más pequeños cuyo volumen suman el de Q_k pero cuyo diámetro es menor que dicho delta.

Definición (Medida nula)

Decimos que A tiene medida nula si podemos encontrar recubrimientos de A con sumatorio de volúmenes tan pequeños como queramos, es decir:

$$\mu^*\left(A\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \{Q_k\} \textit{ rec. de } A: \sum_{k=1}^{\infty} v\left(Q_k\right) < \varepsilon$$

Ejemplos

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}: \; v\left(Q\left(x_0\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, luego es de medida nula.
2. Si N numerable, entonces podemos escribir $N = \{x_k\}$, para cada x_k podemos encontrar $Q_k\left(x_k\right) : v\left(Q_k\left(x_k\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ que lo contenga, luego se tiene que es de medida nula.

Proposición

La medida exterior es invariante por traslaciones, es decir:

$$A \subset \mathbb{R}^n, \; c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu^*\left(c + A\right) = \mu^*\left(A\right)$$

Proposición

La medida exterior es covariante con respecto a la inclusión:

$$A \subset B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu^*\left(A\right) \leq \mu^*\left(B\right)$$

Demostración:

Si $\mu^*\left(B\right) = +\infty$ es trivial, luego suponemos que no.

Sea $\{Q_k\}$ un recubrimiento de B, como $A \subset B \Rightarrow \{Q_k\}$ es un recubrimiento de A, luego[1]

$$\forall \{Q_k\} : \mu^*\left(A\right) < \sum_{k=1}^{\infty} v\left(Q_k\right) \Rightarrow \mu^*\left(A\right) \leq \mu^*\left(B\right)$$

Proposición

Sean $A, B \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu^*\left(A \cup B\right) \leq \mu^*\left(A\right) + \mu^*\left(B\right)$.

Demostración:

Si $\mu^*\left(A\right) = +\infty$ o $\mu^*\left(B\right) = +\infty$ es trivial.

Suponiendo ambos finitos, entonces para $\varepsilon > 0$ se tiene que:

$$\begin{cases} \exists \{Q_k\} \text{ rec. de A: } \sum_{k=1}^{\infty} v\left(Q_k\right) < \mu^*\left(A\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \{R_k\} \text{ rec. de B: } \sum_{k=1}^{\infty} v\left(R_k\right) < \mu^*\left(A\right) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Consideremos $\{Q_k, R_k\} = \{S_j\}$ donde $S_j = \begin{cases} Q_{\frac{j}{2}}, \; j \text{ par} \\ R_{\frac{j+1}{2}}, \; j \text{ impar} \end{cases}$. Tenemos trivialmente que $\{S_j\}$ es rec. de $A \cup B$, luego:

$$\mu^*\left(A \cup B\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v\left(S_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} v\left(Q_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty} v\left(R_k\right) < \mu^*\left(A\right) + \mu^*\left(B\right) + \varepsilon$$

Y como dicha desigualdad es para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene la desigualdad del enuncaido.

Proposición

En cualquier rectángulo, la medida exterior y su volumen coinciden, esto es:

$$\forall Q \subset \mathbb{R}^n : v\left(Q\right) = \mu^*\left(Q\right)$$

[1] Puesto que si eres menor que todos los elementos de un conjunto eres menor o igual que su ínfimo.

Demostración:

- $\mu^*(Q) \leq v(Q)$:

  Tomamos $\varepsilon > 0$ y consideramos la familia $\{Q_k\}$ recubrimiento de Q donde $Q_1 = Q$ y $\forall k \geq 2 : v(Q_k) < \varepsilon/2^k$. De este modo, $\{Q_k\}$ es rec. de Q y además

  $$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) = v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} v(Q_k) < v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < v(Q) + \varepsilon$$

  Por tanto, por ser ínfimo y ser para todo epsilon, se tiene:

  $$\mu^*(Q) \leq v(Q) + \varepsilon \Rightarrow \mu^*(Q) \leq v(Q)$$

- $v(Q) \leq \mu^*(Q)$:

  Observamos que $\overline{Q}$ es la unión de las caras de Q que denotaremos por C_i, por tanto:

  $$v(Q) = v\left(\overline{Q}\right) \qquad \mu^*(Q) \leq \mu^*\left(\overline{Q}\right)$$

  $$\mu^*\left(\overline{Q}\right) = \mu^*(Q \cup (C_1, \ldots, C_m)) \leq \mu^*(Q) + \mu^*(C_1) + \ldots + \mu^*(C_m) = \mu^*(Q)$$

  Luego, concluimos que un cubo cualquiera tiene la misma medida que el mismo cubo, pero cerrado. Por tanto, podemos suponer que Q es cerrado y por ser acotado en $\mathbb{R}^n$ es compacto.

  Si el volumen es menor que todos los posibles sumatorios, entonces tendrá que ser menor que el ínfimo, luego basta probar que $v(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)\,,\ \forall \{Q_k\}\ Q \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$.

  Como Q lo podíamos considerar compacto, se tiene que dado un recubrimiento $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$:

  $$Q \subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_N \Rightarrow v(Q) \leq v(Q_1) + \ldots + v(Q_N) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)$$

Definición

Definimos el ***diámetro de un conjunto*** *como:*

$$\text{diam } A = \sup\{||x-t|| : \ x \in A,\ t \in B\}$$

Y definimos la ***distancia entre dos conjuntos*** *como:*

$$d(A,B) = \text{ínf}\{||x-y|| : x \in A,\ y \in B\}$$

Proposición

Para conjuntos a distancia positiva, la medida exterior tiene la propiedad aditiva:

$$\mathrm{d}(A,B) > 0 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Demostración:

Si $\mu^*(A \cup B) = +\infty$ entonces es trivial, por tanto, podemos suponer que es finito.

Como conocemos una desigualdad, basta solo probar la otra. Tomamos $\delta > 0 : \ \delta < \frac{\mathrm{d}(A,B)}{2}$ y $\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \{Q_k\}$ rectángulos : diam $Q_k < \delta$ de forma que $A \cup B \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$, es decir, recubren y además $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A \cup B) + \varepsilon$.

Estos Q_k tienen la propiedad de que, o bien $Q_k \cap A = \emptyset$, o bien $Q_k \cap B = \emptyset$, ya que si no fuese así existirían $a, b \in \mathbb{R}^n : d(a,b) <$ diam $Q_k < \delta < d(A,B)$ lo cual es absurdo.

Podemos dividir el recubrimiento entonces en dos conjuntos:

$$\begin{cases} C := \{Q_k : Q_k \cap A \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } A \\ D := \{Q_k : Q_k \cap B \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } B \end{cases}$$

Y no incluimos los que no cortan a ninguno puesto que esos sobran, en consecuencia:

$$\mu^*(A \cup B) + \varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} v\left(Q_k\right) \geq \sum_{C}^{\infty} v\left(Q_k\right) + \sum_{D}^{\infty} v\left(Q_k\right) \geq \mu^*\left(A\right) + \mu^*\left(B\right)$$

Y como es para todo epsilon, se tiene la desigualdad que nos faltaba.

Teorema

La medida exterior de Lebesgue cumple las siguientes propiedades:

1. $\mu^*\left(\emptyset\right) = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*\left(A\right) \leq \mu^*\left(B\right)$
3. $\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(A_k\right)$

Demostración:

La propiedad 2 ya la tenemos demostrada, y la propiedad uno viene de aplicar la 2 a un conjunto numerable, puesto que el vacío pertenece a él y este es de medida nula.

Para demostrar la 3, si $\exists k : \mu^*\left(A_k\right) = +\infty$ es trivial, luego suponemos que $\mu^*\left(A_k\right) < +\infty$ y tomamos $\varepsilon > 0$, entonces para cada A_k hay un recubrimiento que verifica:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists \{Q_j^k\}_{j=1}^{\infty} : A_k \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k : \sum_{j=1}^{\infty} v\left(Q_j^k\right) < \mu^*\left(A_k\right) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

De este modo, como cada A_k está contenido en la unión sobre j de un conjunto $\{Q_j^k\}$ para k concreto, la unión de todos los A_k está contenida en la unión sobre k de dichos recubrimientos, es decir:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k\right) = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_j^k$$

Como $\{Q_j^k\}$ es numerable, lo anterior es una unión numerable de conjuntos numerables, entonces:

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{j,k} v\left(Q_j^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v\left(Q_j^k\right) < \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu^*\left(A_k\right) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(A_k\right)\right) + \varepsilon$$

Y como es para todo ε se tiene la desigualdad.

Observación

La condición de $d(A,B) > 0$ para que la medida exterior de la unión sea la suma de las medidas exteriores no se puede relajar, es decir, existen conjuntos disjuntos en $\mathbb{R}^n$ con $d(A,B) > 0$ para los cuales la medida de la suma no es la suma de las medidas.

$$\exists A, B : A \cap B = \emptyset \ \wedge \ \mu^*\left(A \cup B\right) < \mu^*\left(A\right) + \mu^*\left(B\right)$$

Definición (Conjunto Medible)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice que es ***medible*** *si y sólo si*

$$\forall S \subset \mathbb{R}^n : \mu^*\left(S\right) = \mu^*\left(S \cap A\right) + \mu^*\left(S \cap A^c\right)$$

Teorema (De Caratheodory)

Los conjuntos medibles forman una σ-algebra y la medida exterior de Lebesgue, es decir:

- $\emptyset \in F_\sigma$
- $A \in F_\sigma \Rightarrow A^c \in F_\sigma$
- $\forall k \in \mathbb{N} : A_k \in F_\sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F_\sigma$

Además, la medida exterior de Lebesque es σ-aditiva cuando la restringimos a los conjuntos medibles, es decir:

$$\mu^* \left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Una vez restringida a la $\sigma-$álgebra, la medida exterior de Lebesque cumple la definición de medida y se denota simplemente por μ.

Proposición

Todo conjunto A de medida nula es medible.

<u>Demostración</u>:

La desigualdad $\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$ siempre es cierta, luego hay que demostrar la otra, es decir:

$$\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \leq \mu^*(S)$$

Pero esta es trivial, puesto que el primer sumando vale cero ya que es subconjuntos de A y el segundo es subconjunto de S.

Proposición

Los rectángulos Q son conjuntos medibles.

<u>Demostración</u>:

Siempre se cumple que $\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c)$, luego solo es necesario ver la otra ¿$\mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c) \leq \mu^*(S)$?

Tomemos un recubrimiento cualquiera de S, es decir:

$$\{Q_j\} : S \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$$

Observamos que $\{Q_j \cap Q\}$ siempre son rectángulos que recubren a $S \cap Q$, luego:

$$\mu^*(S \cap Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j \cap Q)$$

A su vez, $\{Q_j \cap Q^c\}$ recubren a $S \cap Q^c$, pero no tienen porqué ser rectángulos. Sin embargo, sí son una unión finita de estos, es decir, para cada $Q_j \cap Q^c$ podemos escribir esta como $Q_j \cap Q^c = R_1 \cup \cdots \cup R_m$, por tanto, podemos recubrir mediante rectángulos como:

$$S \cap Q^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \cap Q^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i^j \right) \Rightarrow \mu^*(S \cap Q^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v\left(R_i^j\right)$$

$$R_1 \cup \cdots \cup R_m \cup (Q_j \cap Q) = Q_j \Rightarrow v(Q_j) = v(R_1) + \ldots + v(R_m) + v(Q_j \cap Q)$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j \cap Q) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(v(Q_j \cap Q) + v\left(R_1^j\right) + \ldots + v\left(R_m^j\right) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j)$$

Proposición

- *Todo conjunto abierto es medible*
- *Todo cerrado es medible*
- *Las uniones numerables de cerrados son medibles*
- *Las intersecciones numerables de abiertos son medibles*

Proposición

Si $A \subset B$, ambos son conjuntos medibles y $\mu(A) < \infty$, entonces:

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Demostración:

Escribimos B como unión disjunta de conjuntos de la forma $B = A \cup (B \setminus A)$, esto implica que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Definición (Sucesión creciente de conjuntos)

Decimos que una sucesión de conjuntos $\{A_k\}$ es creciente y lo denotamos por $\{A_k\} \uparrow$ si y sólo si $A_k \subset A_{k+1} : \forall k \in \mathbb{N}$.

Proposición

Si tenemos una familia de conjuntos crecientes $\{A_k\} \uparrow$ medibles, entonces se tiene que:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

Demostración:

Si alguno tiene medida infinita se tiene trivialmente, luego podemos suponer que $\forall k. \in \mathbb{N} : \mu(A_k) < \infty$.

En primer lugar, vamos a construir la siguiente sucesión de conjuntos:

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ \vdots \\ B_k = A_k \setminus A_{k-1} \end{cases} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Sin embargo, como $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos, tenemos que:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) - \mu(\emptyset) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

Definición (Sucesión decreciente de conjuntos)

Decimos que una sucesión de conjuntos $\{A_k\}$ es decreciente y lo denotamos por $\{A_k\} \downarrow$ si y sólo si $A_{k+1} \subset A_k : \forall k \in \mathbb{N}$.

Proposición

Si tenemos una familia de conjuntos decrecientes $\{A_k\} \downarrow$ medibles y $\exists k \in \mathbb{N} : \mu(A_k) < \infty$, entonces se tiene que:

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

Demostración:

Completamente análoga a su homóloga anterior.

Teorema

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

1. *A es medible.*
2. *$\forall \varepsilon > 0,\ \exists G \supset A$ abierto : $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$*
3. *$A = D \setminus N : D$ es $G_\delta,\ \mu(N) = 0$*
4. *$A = C \cup N : C$ es $F_\sigma,\ \mu(N) = 0$*
5. *$\forall \varepsilon > 0,\ \exists F \subset A$ cerrado : $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$*

Demostración:

- $1 \Rightarrow 2$:

  Supongamos primero que A es acotado. Dado $\varepsilon > 0$, como $\mu(A) < +\infty$ por ser acotado, entonces $\exists \{Q_k\}_{k=1}^{\infty} : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ de forma que $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu(A) + \varepsilon$.

  Como el volumen no depende de que los rectángulos sean abiertos o cerrados, consideramos los Q_k rectángulos abiertos de modo que:

  $$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ abierto} : A \subset G$$

  Como $\mu(A) < +\infty$, entonces podemos ver que:

  $$\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Q_k) - \mu(A) < \varepsilon$$

  En general, si A no es acotado, definimos:

  $$A_k := \{x \in A : k - 1 \leq ||x|| < k\}$$

  [DIBUJO]

  Los conjuntos A_k son la intersección de A con coronas disjuntas 2 a 2 concéntricas que descomponen A como:

  $$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

  Si fijamos $\varepsilon > 0$ y como $\mu(A) < +\infty$, podemos aplicar el razonamiento anterior para acotados en cada A_k, luego:

  $$\exists G_k \supset A_k \text{ abierto} : \mu(G_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

  Por tanto, si consideramos G como la unión de los G_k, tenemos:

  $$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \text{ es un abierto} : G \supset A$$

  Y se cumple que:

  $$\mu(G \setminus A) = \mu\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k\right) \setminus A\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (G_k \setminus A_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k - A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 3$:
  $\forall k \in \mathbb{N}$, consideramos $G_k \subset A$ abierto tal que $\mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k}$, después definimos el conjunto:

  $$D := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \text{ que es } G_\delta : D \supset A$$

  Como $A = D \setminus (D \setminus A)$, definimos entonces $N = D \setminus A$ y ocurre que:

  $$\forall k \in \mathbb{N} : \mu(D \setminus A) \leq \mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k} \Rightarrow \mu(N) = 0$$

- $3 \Rightarrow 1$:

  Tenemos $A = D \setminus N$, o lo que es lo mismo, que $A = D \cap N^c$. D es medible por hipótesis, y N^c es el complementario de un medible, que es medible[2]. Como las intersecciones de medibles son medibles, A es medible.

- $1 \Rightarrow 5$:

  Sea $\varepsilon > 0$, como A es medible, entonces A^c también lo es y, por el apartado 2, tenemos que:

  $$\exists G \supset A^c \text{ abierto} : \mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$$

  Sea $F := G^c$ cerrado, como $A^c \subset G \Rightarrow F = G^c \subset (A^c)^c = A$, por tanto:

  $$A \setminus F = (A^c)^c \setminus F = (A^c)^c \cap F^c = G \cap (A^c)^c = G \setminus A^c$$

  Luego, se tiene que:

  $$\mu(A \setminus F) = \mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$$

- $5 \Rightarrow 4$: (Similar a $2 \Rightarrow 3$)
  $\forall k \in \mathbb{N}$, consideramos $F_k \subset A : \mu(A \setminus F_k) < \frac{1}{k}$, después definimos el conjunto:

  $$C := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \text{ es } F_\sigma : \ C \subset A$$

  Y la demostración es análoga a la implicación $2 \Rightarrow 3$.

- $4 \Rightarrow 1$

  De nuevo y por similitud con $3 \Rightarrow 1$, $A = C \cup N$ es medible por ser unión de medibles.

[2] Por el teorema de Caratheodory

FUNCIONES MEDIBLES

Comprobadas las propiedades que tiene la medida sobre conjuntos medibles, nos interesa saber qué funciones nos permiten conservar propiedades de medida interesantes. Es aquí donde juegan un papel fundamental las funciones medibles que permiten asegurar que las preimágenes de abiertos son medibles y, por ello, al trabajar sobre abiertos no debemos preocuparnos sobre las propiedades de medibilidad ya que se conservan también en el conjunto de partida.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible y $f : A \to \mathbb{R}^n$, definimos una función ***medible*** *como aquella que verifica:*

$$\forall G \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto, } f^{-1}(G) \text{ es medible.}$$

Observación

1. Sea una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Entonces es medible, ya la las preimagenes de abiertos son abiertos por ser f continua.
2. Como podemos expresar un abierto como recubrimiento de bolas (que con la norma infinito serían cubos) tenemos que $G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$, de este modo, se tiene que $f^{-1}(G) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(Q_k)$ y, en consecuencia, podemos redefinir el concepto de función medible de la siguiente forma:
$$f \text{ medible} \Leftrightarrow f^{-1}(Q) \text{ medible, } \forall Q \subset \mathbb{R}^m \text{ cubo abierto.}$$
3. Sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función medible y $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ una función continua[3], entonces $\varphi \circ f$ es medible. Para verlo, basta con observar que
$$(\varphi \circ f)^{-1} = f^{-1}\left(\varphi^{-1}(G)\right)$$
Como φ es continua, $\varphi^{-1}(G)$ es abierto, y como f es medible por la observación anterior también lo es f^{-1}

Proposición

Sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función, es medible si y sólo si cada una de sus componentes f_i es medible.

Demostración:

- $\Longrightarrow$

  Cada componente de f se puede expresar como la composición:
$$f_i = \pi_i \circ f$$
  Donde f es medible por hipótesis y $\pi_i(x_1, \ldots, x_m) = x_i$ es la proyección, que es una función continua.

- $\Longleftarrow$

  Sea el cubo abierto $Q = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_m, b_m)$. Entonces se cumple que
$$f^{-1}(Q) = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(a_i, b_i)$$
  Esto se debe a que:
$$x \in f^{-1}(Q) \Rightarrow f(x) \in Q \Rightarrow f_i(x) \in (a_i, b_i) \Rightarrow f_i^{-1}(x) \in (a_i, b_i) : \forall i \in \mathbb{N}$$

[3] En general, la composición de medibles no tiene porqué ser medible

Recíprocamente;

$$x \in f_i^{-1} \in (a_i, b_i) : \forall i = 1, \ldots, m \Rightarrow f_i\,(x) \in (a_i, b_i) : \forall i = 1, \ldots, m \Rightarrow f(x) \in Q$$

Así, como los f_i son medibles, los conjuntos $f_i^{-1} \in (a_i, b_i)$ también lo son, y como los conjuntos medibles forman una $\sigma-$ álgebra por el Lema de Caratheodory, la intersección finita es medible; es decir, $f^{-1}(Q)$ es medible.

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ medibles. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. *$f + g$ es medible.*
2. *$a \cdot f : \forall a \in \mathbb{R}$ es medible.*
3. *$\langle f, g \rangle$ es medible.*
4. *$||f||$ es medible.*

Demostración:

1. Definimos la función $F : A \to \mathbb{R}^{2m}$ de la forma:

$$F\,(x) = (f_1\,(x)\,, \ldots, f_m\,(x)\,, g_1\,(x)\,, \ldots, g_m\,(x))$$

Por hipótesis, como las funciones f, g son medibles, cada componente es medible. Así, F es medible. Del mismo modo, definimos la función suma:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

Esta función es trivialmente continua. Por tanto, observamos que podemos definir la suma de funciones medibles como composición:

$$(f + g)\,(x) = (+ \circ F)\,(x)$$

Como la función suma es continua, y la función F es medible, la composición es medible.

2. Trivial

3. Utilizando la misma función F definida en el primer apartado, definimos la función producto escalar:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Esta función es continua. Por tanto, observamos que podemos definir la producto escalar de funciones medibles como composición:

$$\langle f, g \rangle\,(x) = (\langle \cdot, \cdot \rangle \circ F)\,(x)$$

Como la función producto escalar es continua, y la función F es medible, la composición es medible.

4. Observando la igualdad $||f|| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$, definimos la función raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} \surd : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ u &\mapsto \sqrt{u} \end{aligned}$$

Esta función es continua. Por tanto, observamos que podemos definir la norma de funciones medibles como composición:

$$||f||\,(x) = (|| \cdot || \circ F)\,(x)$$

Como la función producto escalar es continua, y la función F es medible, la composición es medible.

Teorema

Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ medible y $f : A \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. *f medible.*
2. *$\{x \in A : f(x) < \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha)$, es medible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*
3. *$\{x \in A : f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha]$, es medible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*
4. *$\{x \in A : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, +\infty)$, es medible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*
5. *$\{x \in A : f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}[\alpha, +\infty)$, es medible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*

Demostración:

Veamos primero que 2 $\iff$ 3 $\iff$ 4 $\iff$ 5:

- 2 $\implies$ 3. Basta con observar que:
$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(-\infty, \alpha + \frac{1}{k}\right)$$
Por hipótesis, $f^{-1}\left(-\infty, \alpha + \frac{1}{k}\right)$ son medibles $\forall k \in \mathbb{N}$, y como la intersección numerable de medibles es medibles por formar una $\sigma-$álgebra, $f^{-1}(-\infty, \alpha]$ es medible.
- 3 $\implies$ 4. Basta con observar que:
$$f^{-1}(\alpha, \infty) = A \cap \left(f^{-1}(-\infty, \alpha]\right)^c$$
Por hipótesis, $f^{-1}(-\infty, \alpha]$ es medible, y como los conjuntos medibles forman una $\sigma-$ álgebra por el Lema de Caratheodory, su complementario también es medible. Como A es medible, la intersección también es medible.
- 4 $\implies$ 5. Basta con observar que:
$$f^{-1}[\alpha, +\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(\alpha - \frac{1}{k}, +\infty\right)$$
Por hipótesis, $f^{-1}\left(\alpha - \frac{1}{k}, \infty\right)$ son medibles $\forall k \in \mathbb{N}$, y como la intersección numerable de medibles es medibles por formar una $\sigma-$álgebra, $f^{-1}[\alpha, +\infty)$ es medible.
- 5 $\implies$ 2. Basta con observar que:
$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = A \cap \left(f^{-1}[\alpha, +\infty)\right)^c$$
Por hipótesis, $f^{-1}[\alpha, +\infty)$ es medible, y como los conjuntos medibles forman una $\sigma-$ álgebra por el Lema de Caratheodory, su complementario también es medible. Como A es medible, la intersección también es medible.

Veamos que 1 $\implies$ 2. Como $(-\infty, \alpha)$ es un abierto y f es medible, $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ es medible.

Finalmente, veamos que 2&4 $\implies$ 1. Sea (α, β) intervalo abierto tal que $\alpha < \beta$. Entonces
$$f^{-1}(\alpha, \beta) = f^{-1}(\alpha, \infty) \cap f^{-1}(-\infty, \beta)$$
Como $f^{-1}(\alpha, \infty)$ y $f^{-1}(-\infty, \beta)$ son medibles por hipótesis y la intersección de medibles es medible, $f^{-1}(\alpha, \beta)$ es medible. □

Vamos a ver que la propiedad de ser medible se conserva por sucesiones. Ello nos va a permitir ver que hay muchas funciones medibles más allá de las funciones continuas que ya sabemos que son medibles. Como vamos a tomar límites, nos van a aparecer valores infinitos. Por ello va a ser útil admitir funciones que tomen valores infinitos.Consideraremos funciones del estilo:
$$f : A \to [-\infty, \infty] = \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$
Donde $\text{dom} f = \{x \in A : f(x) \in \mathbb{R}\}$

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Decimos que $f : A \to [-\infty, \infty]$ es medible si $f^{-1}(+\infty)$, $f^{-1}(-\infty)$ son conjuntos me y además $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ es una función medible.

Observación

Podemos descomponer A de forma disjunta:

$$A = (\mathrm{dom} f) \sqcup \left(f^{-1}(+\infty)\right) \sqcup \left(f^{-1}(-\infty)\right)$$

De lo que se sigue que

$$\mathrm{dom} f = A \setminus \left(f^{-1}(+\infty) \sqcup f^{-1}(-\infty)\right)$$

Es decir, que si $A, f^{-1}(+\infty)$, $f^{-1}(-\infty)$ son conjuntos medibles, $\mathrm{dom} f$ también lo es.

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible y sea $f_k : A \to [-\infty, \infty]$ una sucesión de funciones medibles. Entonces:

$$f = \sup_k f_k \text{ es medible}$$

Demostración:

$f^{-1}(-\infty)$ es un conjunto medible ya que

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(-\infty)$$

Por hipótesis, las f_k son medibles, y por tanto f_k^{-1}. Además, como la intersección numerable de medibles es medibles, $f^{-1}(-\infty)$ es medible.

$f^{-1}(+\infty)$ también es un conjunto medible ya que

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) > m\}$$

Como se trata de la intersección numerable de la unión numerable de conjuntos medibles, $f^{-1}(+\infty)$ es medible. Probemos dicha fórmula:

$$y \in f^{-1}(+\infty) \iff \sup_k f_k(y) = +\infty$$

Recíprocamente

$$y \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) > m\} \iff y \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) > m\} : \forall m$$
$$\iff \forall m,\ \exists k_m : f_{k_m}(y) > m \iff \sup_k f_k(y) = +\infty$$

Por último, vamos que $f(\mathrm{dom} f)$ es medible. Observamos que

$$\{x \in \mathrm{dom} f : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathrm{dom} f_k : f_k(x) \leq \alpha\}$$

Como las f_k son medibles, se trata de una intersección numerable de conjuntos medibles, que es medible. Veamos la igualdad:

$$\{x \in \mathrm{dom} f : f(x) \leq \alpha\} \iff f(x) \in \mathbb{R} \& f(x) \leq \alpha \iff \mathbb{R} \ni \sup f_k(x) \leq \alpha \iff f_k(x) \leq \alpha : \forall k \in \mathbb{N}$$

Corolario

Si f_k medibles $\implies f = \inf_k f_k$ es medible.

Demostración:

Ya que $f = \text{ínf} f_k = -\sup_k (-f_k)$

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ medible y $f_k : A \to [-\infty, \infty]$ medibles. Entonces:

$$\limsup_{k\to\infty} f_k \wedge \liminf_{k\to\infty} f_k \text{ son medibles}$$

Demostración:

Observamos que:

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_m \sup_{k\geq m} f_k$$
$$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_m \inf_{k\geq m} f_k$$

Ejemplo:

Proposición

Sea A medible y $f_k : A \to [-\infty, \infty]$ medibles. Entonces:

$$A_0 = \{x : \exists \lim_{k\to\infty} f_k(x)\} \text{ es medible.}$$

y

$$f : A_0 \to [-\infty, \infty] \text{ es medible}$$

Demostración:

Tenemos que $A_0 = A_\infty \cup D_0 \cup A^\infty$ donde $A_\infty = \{x : \liminf_{k\to\infty} f_k(x) = \limsup_{k\to\infty} f_k(x) = -\infty\}$, $A^\infty = \{x : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \infty\}$ y $D_0 = \{x : \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbb{R}\}$. Es decir,

$$A_\infty = \left(\liminf_{k\to\infty} f_k\right)^{-1} (-\infty) \text{ es medible.}$$

$$A^\infty = \left(\liminf_{k\to\infty} f_k\right)^{-1} (\infty) \text{ es medible.}$$

$$D_0 \subset \text{dom}\left(\limsup_{k\to\infty} f_k\right) \cap \text{dom}\left(\liminf_{k\to\infty} f_k\right) = D \text{ medible.}$$

$$D_0 = \{x \in D : \limsup_{k\to\infty} f_k(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\} = \{x \in D : g(x) = 0\} = g^{-1}(\{0\}) \text{ medible } \Longrightarrow$$

A_0 es medible.

Tenemos que $f = \lim_{k\to\infty} f_k = \limsup_{k\to\infty} f_k = \liminf_{k\to\infty} f_k$

Definición

*Decimos que P se cumple en **casi todo punto** $\Longleftrightarrow$*

$$\exists N \subset \mathbb{R}^m : \mu(N) = 0 \wedge P \text{ se cumple } \forall x \notin N$$

Ejemplo: $f = g$ ctp. si $\exists N : \mu(N) = 0 : f(x) = g(x)\,,\ \forall x \notin N\ (x \in A)$

Obs:

$$\begin{cases} f = g\text{ctp} \\ f \text{ medible} \end{cases} \Longrightarrow g \text{ medible}$$

Sea G abierto ¿$g^{-1}(G)$ abierto?

$$g^{-1}(G) = \left(f^{-1}(G) \setminus N_1\right) \cup N_2 \text{ medible}$$

Donde N_1, N_2 de medida 0 $(N_1, N_2 \subset N)$

Obs: $f = limf_k$ ctp con f_k medibles. Entonces f es medible:

Demostración:

$$\exists N : \mu(N) : f(x) = \lim f_k(x), \ \forall x \in \forall \setminus N$$
$$\tilde{f}(x) = \limsup f_k(x) : \tilde{f} : A \to \overline{\mathbb{R}} \text{ medible } \implies \tilde{f} = f \text{ ctp } \implies f \text{ medible}$$

1. Sea
$$\chi_E(x) : \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E \\ 0 \text{ si } x \notin E \end{cases}$$
$$\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ E \subset \mathbb{R}^n \implies$$
χ_E es medible $\iff$ E es medible.

   Observamos que $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]=0}$ ctp. $(\mu(\mathbb{Q}) = 0)$.

2. Sea
$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k} \text{ es medible}$$
Que se denomina función simple.

   Proposición

3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua ctp. Entonces es medible.*

   Demostración:

   Observamos que:
$$f \cdot \chi_{[-N,N]^n} \to_{N\to\infty} f$$
"Trabajamos" con ese cubo Q y lo dividimos en $\forall k : \{Q_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ de lado $\frac{1}{2^k}$: $Q = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^k$. $Q = [-N, N)^m$

   A su vez, definimos $C_j^k = \inf\{f(x) : x \in Q_j^k\}$ y
$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^k \chi_{Q_j^k} \text{ medible}$$
¿$\varphi_k \to^k f \cdot \chi_{[-N,N]}$ ctp?

   Si f es continua en $x \in [-N, N]^n \implies$
$$\{\varphi_k(x)\}_k \to f(x) \implies f(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$$
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \text{ si } ||y - x|| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$
Sea $k_0 : Q_j^{k_0}$ que contiene a x, verifica $Q_j^{k_0} \subset B(x, \delta) \implies$
$$\forall k \geq k_0, \ Q_j^k \subset B(x, \delta) \implies$$
$$\forall y \in Q_j^k, \ ||y - x|| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon \implies |c_j^k - f(x)| \leq \varepsilon \text{ donde } c_j^k = \varphi_k(x) \implies$$
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists k_0 : \text{ si } k \geq k_0 \implies |\varphi_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \implies \lim \varphi_k(x) = f(x)$$

Definición

*Definimos como **oscilación** a:*

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a, b]$:
$$o(f, x_0) = \lim_{\delta\to o^+} (\sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\})$$

Proposición

f es cont en x_0 $\iff o(f,x_0)=0$

Teorema (de Lebesgue)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada, es integrable Riemann $\iff$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f tiene medida 0.

<u>Demostración</u>:

Sea $|f(x)|\leq M,\ \forall x\in[a,b]$ y $D=\{x: f \text{ discontinua en } x\}$ Supongamos que $\mu(D)=0$. Tomamos $\varepsilon>0$, $D_\varepsilon=\{x: o(f,x)<\varepsilon\}$ que es cerrado:

Tenemos que si $x\notin D_\varepsilon \implies o(f,x)>\varepsilon \implies \exists\delta$:

$$\sup\{|f(y)-f(x)|: x,y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\}$$

Sea $x_1\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \implies$

$$\sup\{|f(y)-f(x)|: x,y\in(x_1-\delta,x_1+\delta)\}<\varepsilon \implies o(f,x_1)<\varepsilon \implies x_1\notin D_\varepsilon$$

Por lo que es cerrado y, por tanto, compacto con medida 0 (hipótesis). Como $D_\varepsilon\subset D \implies \mu(D_\varepsilon)=0$

Por tanto, $\exists\{I_n\}_{n=1}^\infty: D_\varepsilon\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$ y $\sum_{n=1}^\infty\mu(I_n)<\varepsilon \implies$. Como es compacto:

$$D_\varepsilon\subset I_1\cup\ldots\cup I_N,\ (\mu(I_1)+\ldots+\mu(I_N)<\varepsilon)$$

(Dibujo partición).

Con este recubrimiento generamos una partición formada por P_1 y $P_2: P=P_1\cup P_2$. ($P_1 = I_1\cup\ldots\cup I_N$?). Entonces:

$$\forall I\in P_2, \text{ si } x\in I: o(f,x)<\varepsilon \implies \exists I_x\subset I: |f(y)-f(z)|<\varepsilon,\ \forall y,z\in I_x$$

Recubrimos I (que es compacto) con una cantidad finita de $I_x \implies P_2^*$. Definimos

$$P^*=P_2\cup P_2^*$$

Tenemos:

$$U(f,P^*)-L(f,P^*):$$

$$\sum_{I\in P^*}\left(\sup_{x\in I}f(x)-\inf_{x\in I}f(x)\right)\mu(I)=\sum_{I\in P_1}()+\sum_{I\in P_2^*}()\leq 2M\varepsilon+\varepsilon(b-a)=(b-a+2M)\varepsilon$$

Por Cauchy, f es integrable Rienmann.

Veamos que $\mu(D)=0$. Como $D=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_{\frac{1}{n}}$. Basta ver que $\mu\left(D_{\frac{1}{n}}\right)=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Tomamos $\varepsilon>0$, P de $[a,b]$:

$$U(f,P)-L(l,P)<\frac{\varepsilon}{n}$$

P_1 los intervalos de P que corta a $D_{\frac{1}{n}}$. (No sé si es n o m).

$$\frac{\varepsilon}{n}>\sum_{I\in P_1}\left(\sup_{x\in I}f(x)-\inf_{x\in I}f(x)\right)\mu(I)\geq\frac{1}{n}\sum_{I\in P_1}\mu(I)$$

(*Dibujo*)

$$\sum_{I\in P_1}\mu(I)<\varepsilon\ \wedge\ D_{\frac{1}{n}}\subset\bigcup_{I\in P_1}I \implies$$

$$\mu\left(D_{\frac{1}{m}}\right)=0.$$

Recordemos que llamamos función simple a:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \aleph E_k$$

que cumple:

- Es medible.
- Solo toma un nº finito de valores
- Si φ es medible y solo toma un nº finito de valores $(\beta_1, \dots, \beta_r)$:

$$E_j = \varphi^{-1}\left(\{\beta_j\}\right), \text{ medible}$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} \beta_j \aleph E_j \implies \varphi \text{ es simple.}$$

Definición

Sea φ función simple no negativa:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \aleph E_k, \ \ (\alpha_k > 0)$$

Definimos:

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(E_k)$$

(*Dibujo $\aleph$ no negativa como dos $\aleph$ que pueden ser negativas*).

<u>Obs</u>: Asumimos que $0 \cdot (+\infty) = 0 \implies I(\varphi) \in [0, +\infty]$

Proposición

Sea φ función simple es posible escribirla de distintas formas:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \aleph_{E_i} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \aleph_{D_i}$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \mu(D_i)$$

<u>Demostración</u>:

Problema II hoja 3. Utilizamos que una de las formas es la canónica.

¡¡Cambiar χ por función indicatriz!!

<u>Obs</u>: Este resultado prueba que la definición de $I(\varphi)$ es consistente.

Proposición

1. *$c > 0$, φ simple no negativo $I(c\varphi) = cI(\varphi)$.*
2. *φ, ψ simples no negativas $\implies I(\varphi + \psi) = I(\varphi) + I(\psi)$*
3. *$\varphi \leq \psi$ c.t.p $\implies I(\varphi) \leq I(\psi)$*

4. $\varphi = \psi$ *c.t.p* $\implies I(\varphi) = I(\psi)$

Demostración:

(*Dibujo punto 3*).

Obs: Los conjuntos no tienen porque ser intervalos, si fuese este el caso sería, en el fondo, integrabilidad Rienmann.

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ *medible. Definimos como* ***integral (Lebesgue) de*** f *a:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leq f \ c.t.p \\ \varphi \ simple}} I(\varphi) \in [0, +\infty]$$

Proposición

Sea φ *simple no negativa* $\implies$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu = I(\varphi)$$

Demostración:

$$\varphi \leq \varphi \implies I(\varphi) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu$$

Si $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu = +\infty \implies$

$$\forall M > 0, \ \exists \psi \leq \varphi : I(\psi) \geq M \implies$$

$$M \leq I(\psi) \leq I(\varphi) \implies I(\varphi) \geq M, \ \forall M \implies I(\varphi) = +\infty$$

Si $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi d\mu < +\infty \implies$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \psi \leq \varphi : I(\psi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu - \varepsilon \implies$$

$$I(\varphi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu - \varepsilon \implies I(\varphi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu$$

Proposición

Sea $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ *medibles tal que* $f \leq g$ *c.t.p. Entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \int_{R^n} g d\mu.$$

Demostración:

Ejercicio.

Corolario

Si $f = g$ *c.t.p* $\implies$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu$$

Definición

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ *medible,* $f : A \to [0, +\infty]$ *medible:*

$$\int_A f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \aleph_A d\mu.$$

Obs: En general se trabajará con funciones no infinitas para evitar que la integral sea infinita trivialmente.

Inciso:
Obs: Si f medible $\Rightarrow$ gráfica f tiene medida 0.

Ej:

- Sea φ curva de Peano:
$$\varphi : [0,1] \to [0,1]^2 \text{ continua}$$
$$\mu\left(\varphi\left([0,1]\right)\right) = 1$$

- La gráfica de la función de Weierstrass tiene longitud infinita.

Fin inciso.

Lema

Sea φ función simple $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow A$ con A_k medibles $\left(A_k \subset A_{k+1} : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = A\right)$. Entonces:

$$\int_A \varphi d\mu = \lim_k \int_A \varphi d\mu.$$

<u>Demostración</u>:

Tenemos que $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}, \ \alpha_j \geq 0, \ \forall 0 < j < m+1$. Entonces:

$$\lim_k \int_A \varphi d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^m} \varphi \chi_{A_k} d\mu =$$

$$\lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j} \chi_{A_k} = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j \cap A_k} \right) d\mu =$$

$$= \lim_k \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j \cap A_k} d\mu = \lim_k \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu \left(E_j \cap A_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lim_k \mu \left(E_j \cap A_k\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu \left(E_j \cap A\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j \cap A} d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j} \chi_A =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \chi_A d\mu = \int_A \varphi d\mu$$

Teorema (Convergencia Monótona)

Sea $f_k : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ medible. Consideremos que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow f$ c.t.p. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu.$$

<u>Demostración</u>:

Observemos que:

$$f_k \leq f \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

Además:

$$\{\int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu\}_{k=1}^{\infty} \uparrow \Rightarrow \exists \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

Por otro lado:

Fijamos $\varphi \leq f$ simple no negativa. Fijamos $C < 1 :$

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : c\varphi\left(x\right) < f_k\left(x\right)\}, \text{ que es medible.}$$

Como $f_k \leq f_{k+1} \Rightarrow$

$$A_k \subset A_{k+1} \Rightarrow \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow \mathbb{R}^n.$$

Ya que dado $x \in \mathbb{R}^n$, como $\lim_k f_k\left(x\right) = f\left(x\right) \ \left(\forall x : f\left(x\right) \neq 0\right), \ f\left(x\right) > 0$. Si?

$$f\left(x\right) = +\infty \Rightarrow \lim_k f_k\left(x\right) = +\infty \Rightarrow$$

$$c\varphi\left(x\right) \in \mathbb{R}, \ \exists k : f\varphi\left(x\right) < f_k\left(x\right) \Rightarrow x \in A_k$$

y si:

$$0 < f\left(x\right) < \infty \ \varphi\left(x\right) \leq f\left(x\right) \Rightarrow c\varphi\left(x\right) < f\left(x\right) \ \lim_k f_k\left(x\right) = f\left(x\right) \Rightarrow \exists k : c\varphi\left(x\right) < f_k\left(x\right)$$

Entonces:

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu = c \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{x : f(x) = 0\}} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{x : f(x) = 0\}} c\varphi d\mu =$$

$$= \lim_k \int_{A_k} c\varphi d\mu \leq \lim_k \int_{A_k} f_k d\mu \leq \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu.$$

A su vez:

$$c \to 1^- \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Teorema

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ acotada integrable Rienmann. Entonces f es integrable Lebesgue y

$$\int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f(x)\, dx$$

Demostración:

Sabemos que $\exists M > 0 :$

$$f \leq M\chi_{[a,b]}$$

A su vez,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup_P L(f,P) \Rightarrow \exists \{P_k\}_{k=1}^{\infty} : P_n \leq ?P_{n+1} : \int_a^b f(x)\, dx = \lim_k L(f, P_n) =$$

$$= \lim_k \sum_{S \in P_k} \inf\{f(x) : x \in S\} \mu(S) = \lim_k \int_{[a,b]} \left(\sum m_S(f) \cdot \chi_S \right) d\mu = \int_{[a,b]} \lim_k f_k d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu.$$

Donde $f_k = \sum m_S(f) \chi_S$.