# PROPIEDADES DE LA MEDIDA DE LEBESGUE II

JUAN FERRERA

Una vez probado que todo rectángulo es medible, podemos probar que muchos conjuntos son medibles. Lo primero que vemos es que todo conjunto abierto es unión numerable de rectángulos.

**Proposición**: $G \subset \mathbf{R}^n$ abierto se puede expresar como una unión numerable de rectángulos.

**Demostración**: Cualquier abierto $G$ se puede escribir como unión numerable de abiertos acotados ya que

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big( G \cap B(0,k) \Big)$$

y por tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que $G$ es acotado.

Una vez hecha esta reducción, consideramos un cubo $Q$ que contenga a $G$. Dividimos cada arista por cuatro, nos sale un teselado de cubos cuya unión es $Q$ (en total nos salen $4^n$). Nos quedamos con aquellos cubos que estén contenidos en $G$.

Los restantes cubos los dividimos en $2^n$ cubos, por medio del procedimiento de dividir cada arista por la mitad. Nos quedamos con los que estén contenidos en $G$, y los restantes los volvemos a dividir repitiendo el proceso infinitamente.

En cada paso nos hemos quedado con una cantidad finita de cubos, y repetimos el proceso una cantidad numerable de veces, luego "al final" tenemos una cantidad numerable de cubos (que por tanto podemos poner como una sucesión). Llamo $\{Q_j\}_j$ a esa sucesión. Se tiene que $G = \cup_j Q_j$. Veamoslo:

Es claro que cualquier $Q_j \subset G$ por la forma en que los hemos ido escogiendo, luego $\cup_j Q_j \subset G$. Veamos el otro contenido.

Sea $x \in G$, la distancia de $x$ al complementario de $G$, $d(x, G^c)$, es positiva porque $G^c$ es cerrado. Como el diámetro de los cubos que vamos obteniendo en cada división tiende a cero, en un momento determinado ese diámetro será menor que $\frac{1}{2}d(x, G^c)$, como $x$ tiene que pertenecer a alguno de esos cubos, ese cubo tiene que estar contenido en $G$ y por tanto es uno de los $Q_j$ que escogemos en ese nivel. $\clubsuit$

*Date*: January 19, 2022 (1021).

Observad que los cubos $Q_j$ se pueden cortar en caras, pero tomando cubos semi abiertos, se puede obtener la unión disjunta.

**Corolario**: Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es medible.

**Demostración**: Las uniones numerables de conjuntos medibles son medible. ♣

**Corolario**: Todo cerrado es medible
**Demostración**: Los complementarios de medibles son medibles. ♣

Una intersección numerable de conjuntos abiertos decimos que es un conjunto $G_\delta$. Mientras que una unión numerable de cerrados decimos que es un conjunto $F_\sigma$

**Corolario**: Los conjuntos $G_\delta$ y los conjuntos $F_\sigma$ son medibles.

Terminamos con un teorema que caracteriza perfectamente como son los conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

**Teorema**: Dado $A \subset \mathbf{R}^n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $A$ es medible.
(2) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $G$ abierto tal que $A \subset G$ y $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.
(3) $A = D \setminus N$ donde $D$ es un $G_\delta$ y $N$ tiene medida cero.
(4) $A = C \cup N$ donde $C$ es un $F_\sigma$ y $N$ tiene medida cero.
(5) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $F$ cerrado tal que $F \subset A$ y $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

**Demostración**:
(1) $\Rightarrow$ (2). Suponemos primero que $A$ es acotado. Dado $\varepsilon > 0$, como $\mu(A) < +\infty$, por la definición de ínfimo, existe $\{Q_j\}_j$ recubrimiento de $A$ por rectángulos abiertos tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) < \mu(A) + \varepsilon$$

$G = \cup Q_j$ contiene a $A$, es abierto, y

$$\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) - \mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) - \mu(A) < \varepsilon.$$

En el caso general defino

$$A_k = \{x \in A : k - 1 \leq ||x|| < k\},$$

son conjuntos medibles, disjuntos dos a dos y acotados, cuya unión es $A$. Fijado $\varepsilon > 0$, tengo que para todo $k$ existe $G_k \supset A_k$ abierto tal que $\mu(G_k \setminus A_k) < \varepsilon 2^{-k}$.

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

es abierto, contiene a $A$ y

$$\mu(G \setminus A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Para todo $k$ tomo $G_k \supset A$, abierto, tal que $\mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k}$. $D = \cap G_k$ es un $G_\delta$ que contiene a $A$.

$$\mu(D \setminus A) \le \mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k}$$

para todo $k$, y por tanto $\mu(D \setminus A) = 0$. Como $A = D \setminus (D \setminus A)$, definiendo $N = D \setminus A$ obtengo el resultado.
(3) $\Rightarrow$ (1). Trivial por ser $A$ diferencia de dos medibles.
(1) $\Rightarrow$ (5). Sea $\varepsilon > 0$. Si $A$ es medible, entonces $A^c$ también es medible, y por (2) existe $G \supset A$ abierto tal que $\mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Sea $F = G^c$, es cerrado, está contenido en $A$, y

$$A \setminus F = (A^c)^c \cap F^c = G \cap (A^c)^c = G \setminus A^c,$$

luego $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.
(5) $\Rightarrow$ (4). Es como (2) $\Rightarrow$ (3).
(4) $\Rightarrow$ (1). Trivial. ♠

En Probabilidad habreis hablado de los conjuntos borelianos, o conjuntos medibles Borel, así como de la $\sigma$-algebra de Borel.

La sigma algebra de Borel es la mínima $\sigma$-algebra que contiene a los abiertos. La $\sigma$-algebra de Lebesgue, que es la que nosotros hemos definido, contiene a los abiertos, por tanto contiene a la $\sigma$-algebra de Borel, de hecho es estrictamente más grande.

Según el Teorema anterior, teniendo en cuenta que los $G_\delta$ (y los $F_\sigma$) son borelianos, las dos $\sigma$-algebras se diferencian en los conjuntos de medida 0.