TEOREMA DE CONVERGENCIA DOMINADA

JUAN FERRERA

El objetivo de esta lección es probar el siguiente teorema:

Teorema de Convergencia Dominada:

Sean $\{f_k\}_k$ es una sucesión de funciones medibles, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ una función integrable tal que $|f_k| \leq g$ c.t.p. para todo k. Si $\{f_k\}_k$ converge a f c.t.p. entonces f es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu.$$

Demostración: La función f es medible por ser límite en casi todo punto de funciones medibles. pero además

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k| d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu < +\infty$$

porque g es integrable, luego f es integrable.

(Observad que el hecho de que las funciones f_k estén dominadas por g implica que las f_k realmente son integrables. No lo pedimos explícitamente en el enunciado, pero de hecho si lo estamos pidiendo. Además, a nuestros efectos pedir propiedades c.t.p. es lo mismo que pedirlas en todo punto, ya que las integrales de funciones en conjuntos de medida 0 valen siempre 0.)

Por otra parte, como $|f_k| \leq g$ (podemos suponer que lo es en todo punto), tenemos que $f_k + g \geq 0$ para todo k, y por tanto podemos aplicarles el Lema de Fatou, luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} (g + f) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_k (g + f_k) d\mu =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_k (g + f_k) d\mu \leq \liminf_k \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (g + f_k) d\mu \Big) =$$

$$\liminf_k \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \Big) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu + \liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Date: February 6, 2022 (1149).

Donde hemos usado el Lema de Fatou, y un par de veces la regla de la suma para funciones integrables. Restando en ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Analogamente, como $(-f_k) + g \geq 0$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-f) d\mu \leq \liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} (-f_k) d\mu,$$

y por tanto

$$\limsup_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Concluimos por tanto que

$$\lim \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Observación: El Teorema de Convergencia Dominada es muy fuerte, en particular implica el Teorema de Convergencia Monótona cuando la función límite sabemos que es integrable. La ventaja que tiene el Teorema de Convergencia Monótona es que lo podemos aplicar sin saber a priori si la función límite es integrable (nos puede dar una igualdad del tipo $+\infty = +\infty$). De hecho muchas veces se usa para estudiar si una función es integrable. Tiene en todo caso la restricción de que las funciones tienen que ser no negativas, aunque no es difícil ver que también se puede aplicar si todas las funciones están acotadas por debajo por una función integrable.