CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE CONVERGENCIA MONÓTONA

JUAN FERRERA

Vamos a empezar probando la regla de la suma para la integral de funciones medibles no negativas. Pero antes necesitamos observar el siguiente hecho

Proposición: Si f es una función medible no negativa, entonces existe una sucesión no decreciente de funciones simples $\{\varphi_k\}_k$ tal que

$$f = \lim_k \varphi_k$$

Demostración: Fijo k entero positivo. Para todo entero positivo $j \leq k2^k$, defino

$$E_j^k = f^{-1}\big([(j-1)2^{-k}, j2^{-k})\big).$$

Estos conjuntos son medibles por ser la imagen inversa de un intervalo a través de una función medible. Además son disjuntos dos a dos, y

$$\bigcup_{j=1}^{k2^k} E_j^k = \{x : f(x) < k\}.$$

Defino la función

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \aleph_{E_j^k}.$$

Es evidente que $\varphi_k \leq f$ para todo k, pero no es difícil ver que también $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ para todo k. Por último, para todo x se tiene que $f(x) - \varphi_k(x) < \frac{1}{2^k}$, de donde deducimos la convergencia. ♣

Ya podemos aplicar este resultado y el Teorema de Convergencia Monótona para deducir que la integral de la suma es la suma de las integrales (lo sabíamos solo para funciones simples)

Proposición: Si f, y g son dos funciones medibles no negativas, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g)d\mu = \int_{R^n} f d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu.$$

Date: February 6, 2022 (1145).

Demostración: Basta considerar dos sucesiones de funciones simples $\{\varphi_k\}_k$ y $\{\psi_k\}_k$ tal que

$$\{\varphi_k\}_k \uparrow f \qquad \{\psi_k\}_k \uparrow g$$

entonces tendremos que $\{\varphi_k + \psi_k\}_k \uparrow (f+g)$, y por tanto aplicando el TCM y el resultado conocido para funciones simples, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g)d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\lim_k (\varphi_k + \psi_k)\big) d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k + \psi_k) d\mu =$$

$$\lim_k \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k d\mu\Big) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu. \quad \clubsuit$$

Teorema de Convergencia monótona para series: Si $\{f_k\}_k$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu\Big)$$

Demostración:

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\lim_m \sum_{k=1}^{m} f_k\Big) d\mu =$$

$$\lim_m \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{k=1}^{m} f_k\Big) d\mu = \lim_m \sum_{k=1}^{m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu\Big)$$

Donde la primera igualdad se sigue del TCM, porque como las funciones f_k son no negativas, las sumas parciales forman una sucesión monótona, mientras que la segunda igualdad se sigue de la regla de la suma que acabamos de probar. $\spadesuit$

Terminamos con otra consecuencia del Teorema de Convergencia Monótona.

Lema de Fatou: Si $\{f_k\}_k$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_k f_k d\mu \leq \liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Demostración: Definimos

$$g_k = \inf_{m \geq k} f_m$$

Es una sucesión de funciones medibles no negativas (por ser ínfimo de funciones medibles no negativas) que verifica

$$\{g_k\}_k \uparrow \liminf_k f_k,$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_k f_k d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_k g_k d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} g_k d\mu =$$

$$\liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} g_k d\mu \leq \liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

donde la segunda igualdad es por el TCM y la última desigualdad se sigue de que $g_k \leq f_k$. ♠

Por último vamos a observar como las funciones no negativas que tienen integral impropia de Riemann son integrables en sentido Lebesgue y ambas integrales coinciden. Lo vamos a hacer para aquellas funciones con dominio una semirrecta (el caso de la integral impropia de una función no acotada es parecido).

Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función no negativa, integrable en el sentido de Riemann en cada intervalo $[a, M]$. Entonces siempre puedo intentar calcular

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx.$$

Este límite o bien es un número real o infinito (por ser no negativa a función). Pero además, como sabemos que

$$\int_a^M f(x)dx = \int_{[a,M]} f d\mu,$$

tenemos que

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_{[a,M]} f d\mu = \lim_{M_k\to\infty} \int_{[a,M_k]} f d\mu = \int_{[0,+\infty)} f d\mu$$

donde $(M_k)_k$ es unas sucesión arbitraria de números reales, creciente, tal que $\lim_k M_k = +\infty$, y donde la última igualdad se sigue del Teorema de Convergencia Monótona, ya que

$$\int_{[a,M_k]} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \aleph_{[a,M_k]} d\mu$$

y

$$\{f \aleph_{[a,M_k]}\} \uparrow f \aleph_{[a,+\infty)}$$

En resumen hemos probado

Proposición: Si $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, integrable en el sentido de Riemann en cada intervalo $[a, M]$, entonces la integral impropia en sentido Riemann y a integral en sentido Lebesgue coinciden.

Observad que la igualdad puede darse siendo $+\infty$ ambos valores. Además veremos que este resultado no es cierto si las funciones toman los dos signos.