PROPIEDADES DE LA MEDIDA DE LEBESGUE I

JUAN FERRERA

Primero vamos a probar tres propiedades que son generales para cualquier medida, aunque como nosotros solo hemos definido la Medida de Lebesgue, las pensamos en este contexto. Por ello todos los conjuntos que aparecen son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y μ es la medida de Lebesgue.

Proposición: Si $A \subset B$ son dos conjuntos medibles, y $\mu(A) < +\infty$, entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Demostración: Es consecuencia de que

$$B = (B \setminus A) \cup A$$

como unión disjunta, y por tanto $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$. Por último, como $\mu(A) < +\infty$, podemos restar. ♣

Diremos que una sucesión de conjuntos $\{A_k\}_k$ es creciente si

$$A_k \subset A_{k+1}$$

para todo k. Cuando los contenidos se den en el otro sentido, diremos que la sucesión es decreciente.

Proposición: Una sucesión de conjuntos medibles creciente, $\{A_k\}_k$, verifica que

$$\mu\Big(\bigcup_k A_k\Big) = \lim_k \mu(A_k).$$

Demostración: Primero observamos que si $\mu(A_k) = +\infty$ para algún k entonces la fórmula es trivial, ya que es $+\infty = +\infty$. (la union mide infinito porque mide mas que A_k, y como $\mu(A_j) = +\infty$ para todo $j \geq k$, también el límite es $+\infty$.)

Podemos por tanto supone sin pérdida de generalidad que $\mu(A_k) < +\infty$ para todo k. Escribimos la unión como una union disjunta:

$$A = \bigcup_k A_h = \bigcup_k B_k$$

donde $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ para $k \geq 2$ y $B_1 = A_1$.

Date: January 19, 2022 (1014).

Luego

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_k B_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \mu(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} (\mu(A_k) \setminus \mu(A_{k-1})) =$$

$$\mu(A_1) + \lim_m \sum_{k=2}^{m} (\mu(A_k) \setminus \mu(A_{k-1})) = \lim_m \mu(A_m).$$

♣

Observad que un resultado similar para sucesiones decrecientes es falso. En efecto, consideramos la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}$, si definimos $A_k = (k, +\infty)$, entonces $\mu(A_k) = +\infty$, sin embargo la intersección de los intervalos A_k es el vacío, que mide 0, es decir $\mu(\cap A_k) \neq \lim_k \mu(A_k)$. Sin embargo tenemos el siguiente reultado:

Proposición: Una sucesión de conjuntos medibles decreciente, $\{A_k\}_k$, tal que $\mu(A_1) < +\infty$, verifica que

$$\mu\Big(\bigcap_k A_k\Big) = \lim_k \mu(A_k).$$

Demostración: Definimos $B_k = A_1 \setminus A_k$. La sucesión $\{B_k\}_k$ es creciente, luego por la proposición anterior tenemos que

$$\mu\Big(\bigcup_k B_k\Big) = \lim_k \mu(B_k).$$

Pero $\mu(B_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k)$ y

$$\bigcup_k B_k = A_1 \setminus \Big(\bigcap_k A_k\Big).$$

Por tanto

$$\mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_k A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_k B_k\Big) = \lim_k \mu(B_k) = \mu(A_1) - \lim_k \mu(A_k),$$

lo cual nos da el resultado porque todo son números finitos. ♣

A continuación veremos un resultado propio de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Este resultado nos va a permitir probar que hay "muchos" conjuntos medibles Lebesgue (es decir medibles para la medida de Lebesgue que hemos introducido). Antes probamos un Lema.

Lema: Dados $R, Q \subset \mathbb{R}^n$ dos rectángulos, se tiene que

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap R) + \mu^*(Q \setminus R)$$

Demostración: La demostración de izquierda a derecha es trivial porque $Q = (Q \cap R) \cup (Q \setminus R)$ y por tanto $\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q \cap R) + \mu^*(Q \setminus R)$.

Para ver de derecha a izquierda, observamos que $Q \setminus R$ es unión de un número finito de rectángulos $Q_1, \dots, Q_m$. Por tanto

$$\mu^*(Q \cap R) + \mu^*(Q \setminus R) \leq \mu^*(Q \cap R) + \mu^*(Q_1) + \dots \mu^*(Q_m) =$$
$$v(Q \cap R) + v(Q_1) + \dots v(Q_m) = v(Q)$$

donde hemos usado que $Q \cap R$ es un rectángulo, y que si un rectángulo lo descomponemos como unión de rectángulos, su volumen es la suma de los volúmenes de los rectángulos de la descomposición. ♦

Proposición: Todo rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$ es medible Lebesgue
Demostración: Según la definición de medible, tenemos que probar que para cualquier conjunto arbitrario S, se tiene que

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap R) + \mu^*(S \setminus R).$$

La desigualdad de izquierda a derecha siempre es trivial por las propiedades de la medida exterior, ya que $S = (S \cap R) \cup (S \setminus R)$.

Para ver de derecha a izquierda, tomamos un recubrimiento arbitrario por una sucesión de rectángulos, $\{Q_k\}_k$ de S. Tenemos que

$$\{Q_k \cap Q\}_k \quad \text{recubre} \quad S \cap Q$$

y que

$$\{Q_k \setminus Q\}_k \quad \text{recubre} \quad S \setminus Q$$

luego

$$\mu^*(S \cap R) + \mu^*(S \setminus R) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q_k \cap Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q_k \setminus Q) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mu^*(Q_k \cap Q) + \mu^*(Q_k \setminus Q)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q_k) = \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k).$$

En estas desigualdades hemos usado que la medida exterior de la unión es menor o igual que la suma de las medidas exteriores, el Lema y que la medida exterior de un rectángulo es su volumen.

Volviendo a la fórmula, si tomamos ínfimos a la derecha, entre todas las sucesiones de rectángulos que recubren S, obtenemos que

$$\mu^*(S \cap R) + \mu^*(S \setminus R) \leq \mu^*(S).$$

♣