PROBLEMAS III

JUAN FERRERA

(1) Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ medible. Probar que si $\mu\big(f^{-1}(+\infty)\big) > 0$ entonces
$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = +\infty$$
mientras que si $\mu\big(f^{-1}(+\infty)\big) = 0$, entonces
$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu$$
donde g se define de la siguiente forma: Si $f(x) = +\infty$, entonces $g(x) = 0$, en caso contrario $g(x) = f(x)$.

(2) Poner un ejemplo de dos funciones f y g tales que
$$(f + g)^+ \neq f^+ + g^+$$

(3) Probar las siguientes fórmulas:
   (a) $\lim_n \int_0^1 \frac{n \sin \frac{x^2}{n}}{x^2} dx = 1$.
   (b) $\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)}$.
   (c) $\int_0^1 \log \frac{1}{1-x} dx = 1$.
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n+1} e^{2x^2} dx = \frac{e-1}{2}$.

(4) Comprueba los siguientes límites
   (a) $\lim_n \int_0^1 n \log(1 + \frac{x^2}{n}) dx = \frac{1}{3}$,
   (b) $\lim_n \int_0^1 n \log(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}) dx = +\infty$,
   (c) $\lim_n \int_0^1 n \log(1 + \frac{x^4}{n^2}) dx = 0$

(5) Consideramos la sucesión de funciones $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$. Comprueba que
$$\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Big) dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \Big)$$

(6) Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ como
$$f_n(x) = n \log \frac{1 + nx^2}{nx^2}$$
   (a) Estudiar si las funciones f_n son integrables, in en caso afirmativo calcular su integral.

Date: February 6, 2022 (1150).

(b) Calcular $f(x) = \lim_n f_n(x)$, y estudiar si la función f es integrable.

(c) Calcular $\lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

(7) Expresa la integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

como la suma de una serie numérica. Deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

(Examen 2019).

(8) Prueba que si tengo una sucesión no creciente de funciones medibles no negativas $(f_k)_k$, tal que $(f_k)_k \downarrow f$, en general no se cumple

$$\lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

(9) Prueba que si tengo una sucesión no creciente de funciones medibles no negativas $(f_k)_k$, tal que $(f_k)_k \downarrow f$, y f_1 es integrable, entonces

$$\lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

(10) Comprueba que las siguientes funciones no son integrables en el sentido Lebesgue en $[0, \infty)$, aunque si son integrables en el sentido impropio de Riemann:

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \aleph_{[n-1,n)}(x)$

(b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

(11) Sea $q > 0$. Calcula una expresión para

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^q}$$

como una serie numérica y deduce una expresión de π como serie de números racionales. (Examen 2020)

(12) Prueba que la función

$$f(x,y) = \frac{e^{-n\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

es integrable en $\mathbf{R}^2$ y calcula su integral. Deducir que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)} = +\infty$$

(Examen 2021)