

# CÁLCULO INTEGRAL

Juan Diego Barrado Daganzo, Mario Calvarro Marines  
e Iker Muñoz Martínez

22 de marzo de 2022



# CONCEPTO DE MEDIDA

---

En general, la teoría de la integración está sustentada mayoritariamente por el concepto de medida que se tiene en el espacio sobre el que se integra. Pueden darse dos situaciones, que se defina una medida y a partir de ahí la integral correspondiente o puede ocurrir que se defina la integral y a partir de la misma se mida. Nosotros optaremos por definir todo lo relativo a la medida de forma previa, para que la teoría de integración que se desarrollará después esté sustentada en las propiedades métricas con las que dotemos a  $\mathbb{R}^n$  a través de la definición de dicha medida.

## MEDIDA

El concepto fundamental de esta sección es comprender qué entendemos por medida y que propiedades tiene, así como demostrar que la medida de Lebesgue es un buen instrumento de medida para trabajar en  $\mathbb{R}^n$ .

---

### Definición (Rectángulo)

Definimos un rectángulo en  $\mathbb{R}^n$  como el conjunto;

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

Además, definimos como **volumen** de  $Q$  a

$$v(Q) = (b_n - a_n) \cdots (b_1 - a_1)$$

---

### Definición (Medida exterior de Lebesgue)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , definimos como **medida exterior** de  $A$  a:

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k); \text{ donde } \{Q_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ y } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

---

### Observación

Podemos restringir las familias  $\{Q_k\}$  a aquellas que tengan  $\text{diam } Q_k < \delta$  para un cierto delta y la definición no cambia. Esto es así porque, en el fondo, el conjunto de sumatorios de volúmenes que estamos escogiendo es el mismo, ya que para familias con algún  $Q_k$  de diámetro mayor, éste se puede dividir en varios rectángulos más pequeños cuyo volumen suman el de  $Q_k$  pero cuyo diámetro es menor que dicho delta.

---

### Definición (Medida nula)

Decimos que  $A$  tiene medida nula si podemos encontrar recubrimientos de  $A$  con sumatorio de volúmenes tan pequeños como queramos, es decir:

$$\mu^*(A) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \{Q_k\} \text{ rec. de } A : \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$$

---

## Ejemplos

1. Si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : v(Q(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ , luego es de medida nula.
2. Si  $N$  numerable, entonces podemos escribir  $N = \{x_k\}$ , para cada  $x_k$  podemos encontrar  $Q_k(x_k) : v(Q_k(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$  que lo contenga, luego se tiene que es de medida nula.

## Proposición

La medida exterior de Lebesgue cumple las siguientes propiedades:

- **Invariante por traslaciones:**

$$A \subset \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu^*(c + A) = \mu^*(A)$$

- **Covariante con respecto a la inclusión:**

$$A \subset B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

- **Semiaditividad:**

$$A, B \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

## Demostración:

- Trivial
- Si  $\mu^*(B) = +\infty$  es trivial, luego suponemos que no.  
Sea  $\{Q_k\}$  un recubrimiento de  $B$ , como  $A \subset B \Rightarrow \{Q_k\}$  es un recubrimiento de  $A$ , luego<sup>1</sup>

$$\forall \{Q_k\} : \mu^*(A) < \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

- Si  $\mu^*(A) = +\infty$  o  $\mu^*(B) = +\infty$  es trivial.  
Suponiendo ambos finitos, entonces para  $\varepsilon > 0$  se tiene que:

$$\begin{cases} \exists \{Q_k\} \text{ rec. de } A: \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \{R_k\} \text{ rec. de } B: \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(B) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Consideremos  $\{Q_k, R_k\} = \{S_j\}$  donde  $S_j = \begin{cases} Q_{\frac{j}{2}}, j \text{ par} \\ R_{\frac{j+1}{2}}, j \text{ impar} \end{cases}$ . Tenemos trivialmente que  $\{S_j\}$  es rec. de  $A \cup B$ , luego:

$$\mu^*(A \cup B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(S_j) = \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) + \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon$$

Y como dicha desigualdad es para cualquier  $\varepsilon > 0$  se tiene la desigualdad del enunciado.

## Proposición

En cualquier rectángulo, la medida exterior y su volumen coinciden, esto es:

$$\forall Q \subset \mathbb{R}^n : v(Q) = \mu^*(Q)$$

---

<sup>1</sup>Puesto que si eres menor que todos los elementos de un conjunto eres menor o igual que su ínfimo.

Demostración:

■  $\mu^*(Q) \leq v(Q)$ :

Tomamos  $\varepsilon > 0$  y consideramos la familia  $\{Q_k\}$  recubrimiento de  $Q$  donde  $Q_1 = Q$  y  $\forall k \geq 2 : v(Q_k) < \varepsilon/2^k$ . De este modo,  $\{Q_k\}$  es rec. de  $Q$  y además

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) = v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} v(Q_k) < v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < v(Q) + \varepsilon$$

Por tanto, por ser ínfimo y ser para todo epsilon, se tiene:

$$\mu^*(Q) \leq v(Q) + \varepsilon \Rightarrow \mu^*(Q) \leq v(Q)$$

■  $v(Q) \leq \mu^*(Q)$ :

Observamos que  $\overline{Q}$  es la unión de las caras de  $Q$  que denotaremos por  $C_i$ , por tanto:

$$v(Q) = v(\overline{Q}) \qquad \mu^*(Q) \leq \mu^*(\overline{Q})$$

$$\mu^*(\overline{Q}) = \mu^*(Q \cup (C_1, \dots, C_m)) \leq \mu^*(Q) + \mu^*(C_1) + \dots + \mu^*(C_m) = \mu^*(Q)$$

Luego, concluimos que un cubo cualquiera tiene la misma medida que el mismo cubo, pero cerrado. Por tanto, podemos suponer que  $Q$  es cerrado y por ser acotado en  $\mathbb{R}^n$  es compacto.

Si el volumen es menor que todos los posibles sumatorios, entonces tendrá que ser menor que el ínfimo, luego basta probar que  $v(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)$ ,  $\forall \{Q_k\} \ Q \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ .

Como  $Q$  lo podíamos considerar compacto, se tiene que dado un recubrimiento  $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ :

$$Q \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_N \Rightarrow v(Q) \leq v(Q_1) + \dots + v(Q_N) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)$$

## Definición

Definimos el **diámetro de un conjunto** como:

$$\text{diam } A = \sup\{\|x - t\| : x \in A, t \in B\}$$

Y definimos la **distancia entre dos conjuntos** como:

$$d(A, B) = \inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\}$$

## Proposición

Para conjuntos a distancia positiva, la medida exterior tiene la propiedad aditiva:

$$d(A, B) > 0 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Demostración:

Si  $\mu^*(A \cup B) = +\infty$  entonces es trivial, por tanto, podemos suponer que es finito.

Como conocemos una desigualdad, basta solo probar la otra. Tomamos  $\delta > 0 : \delta < \frac{d(A, B)}{2}$  y  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \{Q_k\}$  rectángulos :  $\text{diam } Q_k < \delta$  de forma que  $A \cup B \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ , es decir, recubren y además  $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A \cup B) + \varepsilon$ .

Estos  $Q_k$  tienen la propiedad de que, o bien  $Q_k \cap A = \emptyset$ , o bien  $Q_k \cap B = \emptyset$ , ya que si no fuese así existirían  $a, b \in \mathbb{R}^n : d(a, b) < \text{diam } Q_k < \delta < d(A, B)$  lo cual es absurdo.

Podemos dividir el recubrimiento entonces en dos conjuntos:

$$\begin{cases} C := \{Q_k : Q_k \cap A \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } A \\ D := \{Q_k : Q_k \cap B \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } B \end{cases}$$

Y no incluimos los que no cortan a ninguno puesto que esos sobran, en consecuencia:

$$\mu^*(A \cup B) + \varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) \geq \sum_C^{\infty} v(Q_k) + \sum_D^{\infty} v(Q_k) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Y como es para todo epsilon, se tiene la desigualdad que nos faltaba.

### Teorema

La medida exterior de Lebesgue cumple las siguientes propiedades:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$
2.  $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3.  $\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$

Demostración:

La propiedad 2 ya la tenemos demostrada, y la propiedad uno viene de aplicar la 2 a un conjunto numerable, puesto que el vacío pertenece a él y este es de medida nula.

Para demostrar la 3, si  $\exists k : \mu^*(A_k) = +\infty$  es trivial, luego suponemos que  $\mu^*(A_k) < +\infty$  y tomamos  $\varepsilon > 0$ , entonces para cada  $A_k$  hay un recubrimiento que verifica:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists \{Q_j^k\}_{j=1}^{\infty} : A_k \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k : \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j^k) < \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

De este modo, como cada  $A_k$  está contenido en la unión sobre  $j$  de un conjunto  $\{Q_j^k\}$  para  $k$  concreto, la unión de todos los  $A_k$  está contenida en la unión sobre  $k$  de dichos recubrimientos, es decir:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k \right) = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_j^k$$

Como  $\{Q_j^k\}$  es numerable, lo anterior es una unión numerable de conjuntos numerables, entonces:

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{j,k} v(Q_j^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j^k) < \sum_{k=1}^{\infty} \left( \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \right) + \varepsilon$$

Y como es para todo  $\varepsilon$  se tiene la desigualdad.

### Observación

La condición de  $d(A, B) > 0$  para que la medida exterior de la unión sea la suma de las medidas exteriores no se puede relajar, es decir, existen conjuntos disjuntos en  $\mathbb{R}^n$  con  $d(A, B) > 0$  para los cuales la medida de la suma no es la suma de las medidas.

$$\exists A, B : A \cap B = \emptyset \wedge \mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

### Definición (Conjunto Medible)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , se dice que es **medible** si y sólo si

$$\forall S \subset \mathbb{R}^n : \mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$$

### Teorema (De Caratheodory)

Los conjuntos medibles forman una  $\sigma$ -álgebra y la medida exterior de Lebesgue, es decir:

- $\emptyset \in F_\sigma$
- $A \in F_\sigma \Rightarrow A^c \in F_\sigma$
- $\forall k \in \mathbb{N} : A_k \in F_\sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F_\sigma$

Además, la medida exterior de Lebesgue es  $\sigma$ -aditiva cuando la restringimos a los conjuntos medibles, es decir:

$$\mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Una vez restringida a la  $\sigma$ -álgebra, la medida exterior de Lebesgue cumple la definición de medida y se denota simplemente por  $\mu$ .

### Proposición

Todo conjunto  $A$  de medida nula es medible.

Demostración:

La desigualdad  $\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$  siempre es cierta, luego hay que demostrar la otra, es decir:

$$\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \leq \mu^*(S)$$

Pero esta es trivial, puesto que el primer sumando vale cero ya que es subconjunto de  $A$  y el segundo es subconjunto de  $S$ .

### Proposición

Los rectángulos  $Q$  son conjuntos medibles.

Demostración:

Siempre se cumple que  $\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c)$ , luego solo es necesario ver la otra,  $\mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c) \leq \mu^*(S)$ ?

Tomemos un recubrimiento cualquiera de  $S$ , es decir:

$$\{Q_j\} : S \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$$

Observamos que  $\{Q_j \cap Q\}$  siempre son rectángulos que recubren a  $S \cap Q$ , luego:

$$\mu^*(S \cap Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j \cap Q)$$

A su vez,  $\{Q_j \cap Q^c\}$  recubren a  $S \cap Q^c$ , pero no tienen porqué ser rectángulos. Sin embargo, sí son una unión finita de estos, es decir, para cada  $Q_j \cap Q^c$  podemos escribir esta como  $Q_j \cap Q^c = R_1 \cup \dots \cup R_m$ , por tanto, podemos recubrir mediante rectángulos como:

$$S \cap Q^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \cap Q^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i^j \right) \Rightarrow \mu^*(S \cap Q^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(R_i^j)$$

$$R_1 \cup \dots \cup R_m \cup (Q_j \cap Q) = Q_j \Rightarrow v(Q_j) = v(R_1) + \dots + v(R_m) + v(Q_j \cap Q)$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j \cap Q) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( v(Q_j \cap Q) + v(R_1^j) + \dots + v(R_m^j) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j)$$

### Proposición

- Todo conjunto abierto es medible
- Todo cerrado es medible
- Las uniones numerables de cerrados son medibles
- Las intersecciones numerables de abiertos son medibles

### Proposición

Si  $A \subset B$ , ambos son conjuntos medibles y  $\mu(A) < \infty$ , entonces:

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Demostración:

Escribimos  $B$  como unión disjunta de conjuntos de la forma  $B = A \cup (B \setminus A)$ , esto implica que  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

---

### Definición (Sucesión creciente de conjuntos)

Decimos que una sucesión de conjuntos  $\{A_k\}$  es creciente y lo denotamos por  $\{A_k\} \uparrow$  si y sólo si  $A_k \subset A_{k+1} : \forall k \in \mathbb{N}$ .

---

### Proposición

Si tenemos una familia de conjuntos crecientes  $\{A_k\} \uparrow$  medibles, entonces se tiene que:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

Demostración:

Si alguno tiene medida infinita se tiene trivialmente, luego podemos suponer que  $\forall k \in \mathbb{N} : \mu(A_k) < \infty$ .

En primer lugar, vamos a construir la siguiente sucesión de conjuntos:

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ \vdots \\ B_k = A_k \setminus A_{k-1} \end{cases} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Sin embargo, como  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  son disjuntos dos a dos, tenemos que:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) - \mu(\emptyset) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

---

### Definición (Sucesión decreciente de conjuntos)

Decimos que una sucesión de conjuntos  $\{A_k\}$  es decreciente y lo denotamos por  $\{A_k\} \downarrow$  si y sólo si  $A_{k+1} \subset A_k : \forall k \in \mathbb{N}$ .

---

### Proposición

Si tenemos una familia de conjuntos decrecientes  $\{A_k\} \downarrow$  medibles y  $\exists k \in \mathbb{N} : \mu(A_k) < \infty$ , entonces se tiene que:

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$



Demostración:

Completamente análoga a su homóloga anterior.

### Teorema

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Son equivalentes:

1.  $A$  es medible.
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists G \supset A$  abierto :  $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$
3.  $A = D \setminus N : D$  es  $G_\delta$ ,  $\mu(N) = 0$
4.  $A = C \cup N : C$  es  $F_\sigma$ ,  $\mu(N) = 0$
5.  $\forall \varepsilon > 0, \exists F \subset A$  cerrado :  $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$

Demostración:

■  $1 \Rightarrow 2$ :

Supongamos primero que  $A$  es acotado. Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\mu(A) < +\infty$  por ser acotado, entonces  $\exists \{Q_k\}_{k=1}^\infty : A \subset \bigcup_{k=1}^\infty Q_k$  de forma que  $\sum_{k=1}^\infty \mu(Q_k) < \mu(A) + \varepsilon$ .

Como el volumen no depende de que los rectángulos sean abiertos o cerrados, consideramos los  $Q_k$  rectángulos abiertos de modo que:

$$G = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k \text{ abierto : } A \subset G$$

Como  $\mu(A) < +\infty$ , entonces podemos ver que:

$$\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(Q_k) - \mu(A) < \varepsilon$$

En general, si  $A$  no es acotado, definimos:

$$A_k := \{x \in A : k-1 \leq \|x\| < k\}$$

[DIBUJO]

Los conjuntos  $A_k$  son la intersección de  $A$  con coronas disjuntas 2 a 2 concéntricas que descomponen  $A$  como:

$$A = \bigsqcup_{k=1}^\infty A_k$$

Si fijamos  $\varepsilon > 0$  y como  $\mu(A) < +\infty$ , podemos aplicar el razonamiento anterior para acotados en cada  $A_k$ , luego:

$$\exists G_k \supset A_k \text{ abierto : } \mu(G_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Por tanto, si consideramos  $G$  como la unión de los  $G_k$ , tenemos:

$$G = \bigcup_{k=1}^\infty G_k \text{ es un abierto : } G \supset A$$

Y se cumple que:

$$\mu(G \setminus A) = \mu\left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k\right) \setminus A\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (G_k \setminus A_k)\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(G_k \setminus A_k) < \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

■  $2 \Rightarrow 3$ :

$\forall k \in \mathbb{N}$ , consideramos  $G_k \subset A$  abierto tal que  $\mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k}$ , después definimos el conjunto:

$$D := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \text{ que es } G_\delta : D \supset A$$

Como  $A = D \setminus (D \setminus A)$ , definimos entonces  $N = D \setminus A$  y ocurre que:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mu(D \setminus A) \leq \mu(G_k \setminus A) < \frac{1}{k} \Rightarrow \mu(N) = 0$$

■  $3 \Rightarrow 1$ :

Tenemos  $A = D \setminus N$ , o lo que es lo mismo, que  $A = D \cap N^c$ .  $D$  es medible por hipótesis, y  $N^c$  es el complementario de un medible, que es medible<sup>2</sup>. Como las intersecciones de medibles son medibles,  $A$  es medible.

■  $1 \Rightarrow 5$ :

Sea  $\varepsilon > 0$ , como  $A$  es medible, entonces  $A^c$  también lo es y, por el apartado 2, tenemos que:

$$\exists G \supset A^c \text{ abierto} : \mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$$

Sea  $F := G^c$  cerrado, como  $A^c \subset G \Rightarrow F = G^c \subset (A^c)^c = A$ , por tanto:

$$A \setminus F = (A^c)^c \setminus F = (A^c)^c \cap F^c = G \cap (A^c)^c = G \setminus A^c$$

Luego, se tiene que:

$$\mu(A \setminus F) = \mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$$

■  $5 \Rightarrow 4$ : (Similar a  $2 \Rightarrow 3$ )

$\forall k \in \mathbb{N}$ , consideramos  $F_k \subset A : \mu(A \setminus F_k) < \frac{1}{k}$ , después definimos el conjunto:

$$C := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \text{ es } F_\sigma : C \subset A$$

Y la demostración es análoga a la implicación  $2 \Rightarrow 3$ .

■  $4 \Rightarrow 1$

De nuevo y por similitud con  $3 \Rightarrow 1$ ,  $A = C \cup N$  es medible por ser unión de medibles.

---

<sup>2</sup>Por el teorema de Caratheodory

# FUNCIONES MEDIBLES

---

Comprobadas las propiedades que tiene la medida sobre conjuntos medibles, nos interesa saber qué funciones nos permiten conservar propiedades de medida interesantes. Es aquí donde juegan un papel fundamental las funciones medibles que permiten asegurar que las preimágenes de abiertos son medibles y, por ello, al trabajar sobre abiertos no debemos preocuparnos sobre las propiedades de medibilidad ya que se conservan también en el conjunto de partida.

## FUNCIONES MEDIBLES

---

### Definición

Sea  $A \subset \mathbb{R}^m$  medible y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definimos una función **medible** como aquella que verifica:

$$\forall G \subset \mathbb{R}^m \text{ abierto, } f^{-1}(G) \text{ es medible.}$$

---

### Proposición

1. Sea una función  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , si es continua, entonces es medible.
2. Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función medible y  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función continua<sup>3</sup>, entonces  $\varphi \circ f$  es medible.

### Observación:

Como podemos expresar un abierto como recubrimiento de bolas (que con la norma infinito serían cubos) tenemos que  $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ , de este modo, se tiene que  $f^{-1}(G) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(Q_k)$  y, en consecuencia, podemos redefinir el concepto de función medible de la siguiente forma:

$$f \text{ medible} \Leftrightarrow f^{-1}(Q) \text{ medible, } \forall Q \subset \mathbb{R}^m \text{ cubo abierto.}$$

### Proposición

Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función, es medible si y sólo si cada una de sus componentes es medible.

### Demostración:

■  $\Rightarrow$

Cada componente se puede expresar como:

$$f_i = \pi_i \circ f$$

Donde  $f$  es medible por hipótesis y  $\pi_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$  es continua.

---

<sup>3</sup>En general, la composición de medibles no tiene porqué ser medible

■  $\Leftarrow$

Dado  $Q = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_m, b_m)$  cubo abierto, tenemos que  $f^{-1}(Q) = \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(a_i, b_i)$ . Esto es así porque:

$$x \in f^{-1}(Q) \Leftrightarrow f(x) \in Q \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : f_i(x) \in (a_i, b_i)$$

### Proposición

Sean  $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  medibles, se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $f + g$  medible.
2.  $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot f$  medible.
3.  $\langle f, g \rangle$  medible.
4.  $\|f\|$  medible.

Demostración:

1. Definimos la función  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  de la forma:

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x), g_1(x), \dots, g_m(x))$$

Y por hipótesis, como las funciones son medibles y cada componente es medible, entonces  $F$  es medible. Del mismo modo, definimos:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

que trivialmente es continua, por tanto:

$$(f + g)(x) = (+ \circ F)(x)$$

Es medible por composición de medibles con continuas.

2. Trivial
3. Utilizando la misma función  $F$  definida en el primer apartado, tenemos que la función:

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

es continua, luego por composición de nuevo se tiene:

$$\langle f, g \rangle(x) = (\langle, \rangle \circ F)(x)$$

que es medible.

4. Completamente análogo a antes, se trata de ver la siguiente igualdad  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$  y demostrar que es la composición con:

$$\begin{aligned} \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ u &\mapsto \sqrt{u} \end{aligned}$$

que es continua.

Esta función es continua. Por tanto, observamos que podemos definir la norma de funciones medibles como composición:

$$\|f\|(x) = (\|\cdot\| \circ F)(x)$$

Como la función producto escalar es continua, y la función  $F$  es medible, la composición es medible.

### Teorema

Sea  $A \subset \mathbb{R}^m$  medible y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , son equivalentes:

1.  $f$  medible.
2.  $\{x \in A : f(x) < \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha)$ , es medible  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
3.  $\{x \in A : f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha]$ , es medible  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
4.  $\{x \in A : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, +\infty)$ , es medible  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
5.  $\{x \in A : f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}[\alpha, +\infty)$ , es medible  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Demostración:

Veamos primero que  $2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ :

■  $2 \Rightarrow 3$

Basta con observar que:

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(-\infty, \alpha + \frac{1}{k}\right)$$

Por hipótesis,  $\forall k \in \mathbb{N} : f^{-1}(-\infty, \alpha + \frac{1}{k})$  son medibles y, como la intersección numerable de medibles es medible por formar una  $\sigma$ -álgebra,  $f^{-1}(-\infty, \alpha]$  es medible.

■  $3 \Rightarrow 4$

Basta con observar que:

$$f^{-1}(\alpha, \infty) = A \cap (f^{-1}(-\infty, \alpha])^c$$

Por hipótesis,  $f^{-1}(-\infty, \alpha]$  es medible, y como los conjuntos medibles forman una  $\sigma$ -álgebra por el Lema de Caratheodory, su complementario también es medible. Como  $A$  es medible, la intersección también es medible.

■  $4 \Rightarrow 5$

Basta con observar que:

$$f^{-1}[\alpha, +\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(\alpha - \frac{1}{k}, +\infty\right)$$

Por hipótesis,  $\forall k \in \mathbb{N} : f^{-1}(\alpha - \frac{1}{k}, \infty)$  son medibles y, como la intersección numerable de medibles es medible por formar una  $\sigma$ -álgebra,  $f^{-1}[\alpha, +\infty)$  es medible.

■  $5 \Rightarrow 2$

Basta con observar que:

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = A \cap (f^{-1}[\alpha, +\infty))^c$$

Por hipótesis,  $f^{-1}[\alpha, +\infty)$  es medible y, como los conjuntos medibles forman una  $\sigma$ -álgebra, por el Lema de Caratheodory, su complementario también es medible. Como  $A$  es medible, la intersección también es medible.

Veamos que  $1 \Rightarrow 2$ :

Como  $(-\infty, \alpha)$  es un abierto y  $f$  es medible,  $f^{-1}(-\infty, \alpha)$  es medible.

Veamos que  $2$  y  $4 \Rightarrow 1$ :

Sea  $(\alpha, \beta)$  intervalo abierto tal que  $\alpha < \beta$ , entonces:

$$f^{-1}(\alpha, \beta) = f^{-1}(\alpha, \infty) \cap f^{-1}(-\infty, \beta)$$

Como  $f^{-1}(\alpha, \infty)$  y  $f^{-1}(-\infty, \beta)$  son medibles por hipótesis y la intersección de medibles es medible,  $f^{-1}(\alpha, \beta)$  es medible.

Vamos a ver que la propiedad de ser medible se conserva por sucesiones. Ello nos va a permitir ver que hay muchas funciones medibles más allá de las funciones continuas que ya sabemos que son medibles. Como vamos a tomar límites, nos van a aparecer valores infinitos. Por ello va a ser útil admitir funciones que tomen valores infinitos. Consideraremos funciones del estilo:

$$f : A \rightarrow [-\infty, \infty] = \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Donde  $\text{dom} f = \{x \in A : f(x) \in \mathbb{R}\}$

### Definición (Función Medible en $\bar{\mathbb{R}}$ )

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  una función que toma valores en  $\bar{\mathbb{R}}$ , decimos que ésta es medible si y sólo si:

- $f^{-1}(+\infty)$  es medible
- $f^{-1}(-\infty)$  es medible
- $f : \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible.

Donde  $\text{dom} f = \{x \in A : f(x) \in \mathbb{R}\}$

### Observación

Podemos descomponer  $A$  en forma disjunta como:

$$A = (\text{dom} f) \sqcup (f^{-1}(+\infty)) \sqcup (f^{-1}(-\infty))$$

De lo que se sigue que:

$$\text{dom} f = A \setminus (f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(-\infty))$$

Por tanto, que si  $A$ ,  $f^{-1}(+\infty)$  y  $f^{-1}(-\infty)$  son conjuntos medibles,  $\text{dom} f$  también lo es.

### Proposición

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  medible y sea  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones donde  $\forall k \in \mathbb{N} : f_k : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  es medible, entonces:

$$f = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{f_k\} \text{ es medible} \qquad f = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{f_k\} \text{ es medible}$$

### Demostración:

- Podemos expresar  $f^{-1}(-\infty)$  como:

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(-\infty)$$

Por hipótesis, las  $f_k$  son medibles, y por tanto  $f_k^{-1}(-\infty)$  es medible, como la intersección numerable de medibles es medible,  $f^{-1}(-\infty)$  es medible.

- Del mismo modo,  $f^{-1}(+\infty)$  se puede expresar como:

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) > m\}$$

puesto que tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) > m\} &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : y \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) > m\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : \exists k_m \in \mathbb{N} : f_{k_m}(y) > m \Leftrightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(y) = +\infty \Leftrightarrow y \in f^{-1}(+\infty) \end{aligned}$$

Como se trata de la intersección numerable de una unión numerable de conjuntos medibles,  $f^{-1}(+\infty)$  es medible.

- Por último, para ver que la función  $f$  es medible, hay que ver que para cualquier  $\alpha$  el conjunto  $f^{-1}(-\infty, \alpha]$  es medible. Para ello, expresamos dicho conjunto como:

$$\{x \in \text{dom } f : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \text{dom } f_k : f_k(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(-\infty, \alpha]$$

Como las  $f_k$  son medibles, se trata de una intersección numerable de conjuntos medibles, que es medible. Veamos que dicha igualdad es cierta:

$$\{x \in \text{dom } f : f(x) \leq \alpha\} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R} \wedge f(x) \leq \alpha \Leftrightarrow \mathbb{R} \ni \sup f_k(x) \leq \alpha \Leftrightarrow f_k(x) \leq \alpha : \forall k \in \mathbb{N}$$

Para la demostración del ínfimo, basta ver que  $f = \inf f_k = -\sup_k(-f_k)$

### Proposición

Sea  $A \subset \mathbb{R}^m$  medible y  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones donde  $\forall k \in \mathbb{N} : f_k : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  son medibles, entonces:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k \wedge \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \text{ son medibles}$$

Demostración:

Observamos que:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k &= \inf_{m \in \mathbb{N}} \left( \sup_{k \geq m} f_k \right) \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \left( \inf_{k \geq m} f_k \right) \end{aligned}$$

Como hemos visto que los supremos de funciones medibles son funciones medibles y los ínfimos también, queda demostrado.

### Proposición

Sea  $A \subset \mathbb{R}^m$  medible y  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones donde  $\forall k \in \mathbb{N} : f_k : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  son medibles, entonces si definimos el conjunto:

$$A_0 = \left\{ x : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right\} \text{ es medible.}$$

la restricción de  $f$  a ese conjunto es medible:

$$f : A_0 \rightarrow [-\infty, \infty] \text{ es medible}$$

Demostración:

Podemos expresar  $A$  como la siguiente descomposición:

$$A_0 = A_{\infty} \cup D_0 \cup A^{\infty} : \begin{cases} A_{\infty} = \{x \in A : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = -\infty\} \\ A^{\infty} = \{x \in A : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \infty\} \\ D_0 = \{x \in A : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

Por tanto, si expresamos de la forma adecuada:

$$A_{\infty} = \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right)^{-1}(-\infty) \text{ es medible.} \quad A^{\infty} = \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right)^{-1}(\infty) \text{ es medible.}$$

$$D_0 \subset \text{dom} \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k \right) \cap \text{dom} \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) = D \text{ medible.}$$

$$D_0 = \{x \in D : \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)\} = \{x \in D : g(x) = 0\} = g^{-1}(\{0\}) \text{ medible}$$

En consecuencia, concluimos que  $A_0$  es medible.

---

**Definición (Propiedad en casi todo punto)**

Decimos que una propiedad  $P$  se cumple en **casi todo punto** si y sólo si:

$$\exists N \subset \mathbb{R}^n : \mu(N) = 0 \wedge P \text{ se cumple } \forall x \notin N$$

Es decir, solo NO se verifica en un conjunto de medida nula.

---

**Proposición**

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones tales que son iguales c.t.p. y una de las dos es medible, entonces la otra lo es.

Demostración:

Sea  $G$  abierto hay que ver que  $g^{-1}(G)$  es abierto:

$$g^{-1}(G) = (f^{-1}(G) \setminus N_1) \cup N_2 \text{ medible}$$

Donde  $N_1, N_2$  de medida 0 ( $N_1, N_2 \subset N$ )

**Proposición**

Si  $f$  es el límite de una sucesión de funciones medibles  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  en casi todo punto, entonces  $f$  es medible.

$$\forall k \in \mathbb{N} : f_k \text{ medible y } \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f \text{ (c.t.p.)} \Rightarrow f \text{ medible}$$

Demostración:

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\tilde{f}(x) = \limsup f_k(x)$$

Por ser las  $f_k$  medibles y ser  $\tilde{f}$  el límite superior de funciones medibles, entonces  $\tilde{f}$  es medible y como  $f = \tilde{f}$  (c.t.p.) entonces tenemos que  $f$  es medible.

---

**Definición (Función Característica)**

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cualquiera, definimos la **función característica** de dicho conjunto como:

$$\chi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida como } \chi_E(x) : \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Trivialmente, tenemos que  $\chi_E$  es medible  $\Leftrightarrow E$  es medible.

---

**Definición (Función Simple)**

Sea  $\chi_{E_k}$  la función característica del conjunto  $E_k$  y  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  un número cualquiera, definimos una **función simple** como:

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k} \text{ es medible}$$

Donde cabe destacar que el sumatorio es **finito**.

---

**Proposición**

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en c.t.p., entonces es medible.



Demostración:

Podemos expresar la función  $f$  de la siguiente forma:

$$f \cdot \chi_{[-N, N]^n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$$

Nos restringimos a ese cubo  $Q$  y, para cada  $k$ , dividimos  $Q$  en cubos semiabiertos de lado  $\frac{1}{2^k}$ , de forma que para un  $k$  fijo, tenemos el conjunto de cubos  $\{Q_j^k\}_{j=1}^\infty$  donde cada  $Q_j$  tiene lado  $\frac{1}{2^k}$ , es decir:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \{Q_j^k\}_{j=1}^\infty \text{ de lado } \frac{1}{2^k} : Q = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k$$

A su vez, definimos  $C_j^k := \inf\{f(x) : x \in Q_j^k\}$  y para cada  $k$ , tomamos la función:

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^\infty c_j^k \cdot \chi_{Q_j^k} \text{ medible}$$

Para ver que  $f$  es medible, basta ver que aquellos puntos donde la función  $f$  sea continua ocurre que  $\varphi_k(x_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$ . Veámoslo:

Si  $f$  es continua en  $x \in [-N, N]^n$ , entonces podemos decir que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{ si } \|y - x\| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Podemos tomar un  $k_0 : Q_j^{k_0}$  contiene a  $x$  y verifica  $Q_j^{k_0} \subset B(x, \delta)$ , luego en este caso tenemos:

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_0, Q_j^k \subset B(x, \delta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall y \in Q_j^k, \|y - x\| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |c_j^k - f(x)| \leq \varepsilon \text{ donde } c_j^k = \varphi_k(x) \Rightarrow \\ \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 : \text{ si } k \geq k_0 \Rightarrow |\varphi_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim \varphi_k(x) = f(x) \end{aligned}$$

### Definición (Oscilación)

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x_0 \in [a, b]$  un punto del dominio, se define la **oscilación de la función en ese punto** como:

$$o(f, x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (\sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\})$$

### Proposición

Una función  $f$  es continua en un punto  $x_0$  si y sólo si  $o(f, x_0) = 0$ .

### Teorema (de Lebesgue)

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, entonces dicha función es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad de  $f$  tiene medida nula.

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \text{ continua c.t.p.}$$

Demostración:

Como  $f$  es acotada, tenemos que  $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$  y denotamos por el conjunto de puntos de discontinuidad a  $D = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ discontinua en } x\}$ .

■  $\Leftarrow$ : supongamos que  $\mu(D) = 0$ .

Tomamos  $\varepsilon > 0$  y denotamos por  $D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : o(f, x) < \varepsilon\}$ , que es cerrado porque si tomamos  $x_0 \notin D_\varepsilon \Rightarrow o(f, x_0) \geq \varepsilon$ , entonces:

$$\exists \delta_0 > 0 : \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} < \varepsilon$$

De este modo, para cualquier  $x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ , podemos escoger un  $\delta_1 = \delta_0 - |x_1 - x_0|$  y tenemos que:

$$\sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)\} < \varepsilon \Rightarrow o(f, x_1) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \notin D_\varepsilon$$

Con lo que su complementario es abierto, luego  $D_\varepsilon$  es cerrado y por ser acotado, también tenemos que es compacto con medida 0 (porque  $D_\varepsilon \subset D$ ).

Como tiene medida nula:

$$\exists \{I_n\}_{n=1}^\infty : D_\varepsilon \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ y } \sum_{n=1}^\infty \mu(I_n) < \varepsilon$$

Pero, al ser compacto, se tiene que:

$$D_\varepsilon \subset I_1 \cup \dots \cup I_N : \mu(I_1) + \dots + \mu(I_N) < \varepsilon$$

*Dibujoparticion*

Con este recubrimiento finito, generamos una partición formada por  $a$ ,  $b$  y todos los extremos de los intervalos  $I_j$  que denotaremos por  $P$ . Dicha partición, la expresaremos en términos de otras dos:  $P_1$  que será la formada por los intervalos de la partición  $P$  contenidos en algún  $I_j$  y  $P_2$  formada por los otros (que en particular no cortan a  $D_\varepsilon$ , luego la oscilación en estos es  $< \varepsilon$ ). De este modo, tenemos  $P = P_1 \cup P_2$ .

Para cada intervalo  $I \in P_2$ , realizamos el siguiente procedimiento:

$$\forall I \in P_2 : (x \in I \Rightarrow o(f, x) < \varepsilon) \Rightarrow \exists I_x \subset I : \forall y, z \in I_x : |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

Y esto puede hacerse porque para cada  $x$ , podemos encontrar un  $\delta$  de forma que en  $(x - \delta, x + \delta)$  la oscilación es menor que  $\varepsilon$  y precisamente ese sería un posible  $I_x$ .

Recubrimos  $I$  (que es compacto por ser cerrado) por una cantidad finita de estos  $I_x$  y, de esta manera, obtenemos en forma de partición (quitando trozos de intervalos si fuese necesario para que sean disjuntos) el intervalo  $I$  inicial. Esto, genera otra partición de la parte que correspondía a  $P_2$  que denotamos por  $P_2^*$  y definimos  $P^* := P_1 \cup P_2^*$  como nueva partición del intervalo.

De este modo, tenemos que:

$$\begin{aligned} U(f, P^*) - L(f, P^*) &= \sum_{I \in P^*} \left( \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right) \mu(I) = \\ &= \sum_{I \in P_1} \left( \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right) \mu(I) + \sum_{I \in P_2^*} \left( \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right) \mu(I) \leq \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon(b - a) = (b - a + 2M)\varepsilon \end{aligned}$$

Por el Criterio de Cauchy,  $f$  es integrable Riemann.

- $\Rightarrow$ : supongamos que  $f$  es integrable Riemann.

Como  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{\frac{1}{n}}$ , basta con ver que  $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(D_{\frac{1}{n}}) = 0$ . Para ello, tomamos  $\varepsilon > 0$  y una partición  $P$  de  $[a, b]$  de forma que  $U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{n}$ .

Denotamos por  $P_1$  a los intervalos de  $P$  que cortan a  $D_{\frac{1}{n}}$  (con esto estamos asumiendo que los puntos de  $D_{\frac{1}{n}}$  no son puntos de los extremos de la partición, pero no pasaría nada porque ese conjunto es de medida nula y la integral es la misma). De este modo, tenemos que:

$$\frac{\varepsilon}{n} > \sum_{I \in P_1} \left( \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \right) \mu(I) \geq \frac{1}{n} \sum_{I \in P_1} \mu(I)$$

(*Dibujo*) Sin embargo, esto quiere decir que:

$$\sum_{I \in P_1} \mu(I) < \varepsilon \text{ pero } D_{\frac{1}{n}} \subset \bigcup_{I \in P_1} I \Rightarrow \mu(D_{\frac{1}{n}}) = 0$$

### Observación

Recordemos que llamamos función simple a una función con la estructura:

$$\varphi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{E_k}$$

Dicha función cumple que:

- Es una función medible.
- Solo toma un número finito de valores.
- Cualquier función  $\varphi$  que sea medible y solo tome un número finito de valores  $(\beta_1, \dots, \beta_r)$  es una función simple, puesto que podemos expresar dicha función como:

$$E_j = \varphi^{-1}(\{\beta_j\}), \text{ medible} \quad \varphi = \sum_{k=1}^r \beta_j \chi_{E_j} \Rightarrow \varphi \text{ es simple.}$$

### **Proposición**

Si una función  $f$  es integrable Riemann, entonces dicha función también es medible.

### Demostración:

Por el teorema de antes,  $\mu(D) = 0$  lo que implica que  $f$  es continua en c.t.p. y, por tanto, es medible.

---

### **Definición (Integral)**

Sea  $\varphi$  función simple no negativa:

$$\varphi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \chi_{E_k} \text{ donde } (\alpha_k > 0)$$

Definimos la **integral** de dicha función como:

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(E_k)$$

---

*Dibujoxnonegativacomodosχquepuedensernegativa*

### Observación:

Como la medida de dichos conjuntos puede ser infinito y los valores  $\alpha_k = 0$ , es necesario que definamos  $0 \cdot (+\infty) = 0$  para poder dar una definición consistente de  $I(\varphi) \in [0, +\infty]$ .

### **Proposición**

Sea  $\varphi$  función simple, es posible escribir dicha función de distintas formas:

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^p \beta_i \chi_{D_i}$$

entonces la integral coincide para cualquiera que sea la forma escogida:

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^p \beta_i \mu(D_i)$$

luego la integral tiene una definición consistente.

Demostración:

La demostración se deja como ejercicio de las hojas, se trata de utilizar que entre dos cualesquiera puedo pasar por la forma canónica y esta integral es la de la definición.

### Proposición

1. Sea  $c > 0$  y  $\varphi$  simple no negativa, entonces  $I(c \cdot \varphi) = c \cdot I(\varphi)$ .
2. Sean  $\varphi, \psi$  simples no negativas, entonces  $I(\varphi + \psi) = I(\varphi) + I(\psi)$
3. Si  $\varphi \leq \psi$  c.t.p, entonces  $I(\varphi) \leq I(\psi)$
4. Si  $\varphi = \psi$  c.t.p, entonces  $I(\varphi) = I(\psi)$

Demostración:

(Dibujo punto 3).

### Observación

Los conjuntos no tienen porque ser intervalos, si fuese este el caso sería, en el fondo, integrabilidad Riemann.

---

### Definición (Integral de Lebesgue)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible, definimos la **integral de Lebesgue de  $f$**  de la siguiente<sup>4</sup> forma:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f} I(\varphi) \in [0, +\infty]$$

Donde las funciones  $\varphi$  son simples no negativas.

---

### Proposición

Sea  $\varphi$  simple no negativa, la integral de Lebesgue coincide con la integral definida para este tipo de funciones:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu = I(\varphi)$$

Demostración:

En primer lugar, la primera desigualdad la tenemos por ser el supremo de las Integrales de las funciones simples menores o iguales que  $\varphi$ , es decir:

$$\varphi \leq \varphi \Rightarrow I(\varphi) \leq \sup_{\psi \leq \varphi} I(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu$$

Si  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu = +\infty$ , entonces tenemos que:

$$\forall M > 0, \exists \psi \leq \varphi : I(\psi) \geq M \Rightarrow M \leq I(\psi) \leq I(\varphi) \Rightarrow \forall M > 0 : I(\varphi) \geq M \Rightarrow I(\varphi) = +\infty$$

Si  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu < +\infty$ , entonces tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \psi \leq \varphi : I(\psi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu - \varepsilon \Rightarrow I(\varphi) \geq I(\psi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu - \varepsilon \Rightarrow I(\varphi) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu$$

### Proposición

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  dos funciones medibles tal que  $f \leq g$  c.t.p., entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu.$$

---

<sup>4</sup>La definición no cambia si las funciones  $\varphi \leq f$  en c.t.p.

Demostración:

Se deja como ejercicio.

### Corolario

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  dos funciones medibles tal que  $f = g$  c.t.p., entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu$$

---

### Definición (Integral en un conjunto)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible y  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$  una función medible, entonces definimos **la integral de  $f$  sobre  $A$**  como:

$$\int_A f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_A \, d\mu$$

---

Observación:

En general se trabajará con funciones no infinitas para evitar que la integral sea infinita trivialmente.

### Proposición

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible, entonces el conjunto  $\{(x, f(x))\}$  que definimos como la gráfica  $f$  tiene medida 0.

### Lema

Sea  $\varphi$  función simple no negativa y  $\{A_k\}_{k=1}^\infty \uparrow A$  una sucesión creciente ( $A_k \subset A_{k+1} : \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$ ) de conjuntos medibles convergentes a  $A$ , entonces:

$$\int_A \varphi \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} \varphi \, d\mu.$$

Demostración:

Tenemos que  $\varphi = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{E_j}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} \varphi \, d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \chi_{A_k} \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{E_j} \cdot \chi_{A_k} \right) \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \chi_{E_j \cap A_k} \right) \, d\mu = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left( \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j \cap A_k} \, d\mu \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \mu(E_j \cap A_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_j \cap A_k) = \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \mu(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^m \left( \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j \cap A} \, d\mu \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{E_j} \chi_A \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \chi_A \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu \end{aligned}$$

### Teorema (Convergencia Monótona)

Supongamos una sucesión creciente de funciones  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \uparrow f$  convergente<sup>5</sup> a  $f$  donde cada función  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu$$

El teorema también es válido si la convergencia es en c.t.p.

---

<sup>5</sup>Esto quiere decir que  $f_k \leq f_{k+1}$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  de forma puntual

Demostración:

Por la monotonía de la sucesión, tenemos que:

$$\forall k \in \mathbb{N} : f_k \leq f \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

Por tanto, tenemos asegurada la convergencia de la sucesión de integrales por ser acotada superiormente y creciente:

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right\}_{k=1}^{\infty} \uparrow \wedge \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

Fijamos  $\varphi \leq f$  simple no negativa y un  $c < 1$ . De este modo, definimos la siguiente sucesión de conjuntos:

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : c \cdot \varphi(x) \leq f_k(x)\}$$

Dicho conjunto es medible para cada  $k$  por ser el conjunto de puntos donde una función vale más que 0.

Por ser creciente la sucesión de funciones, es decir,  $f_k \leq f_{k+1}$ , entonces tenemos que:

$$A_k \subset A_{k+1} \Rightarrow \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow \mathbb{R}^n \text{ ya que } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_k = \mathbb{R}^n$$

Si  $f(x) = \infty$ , entonces tenemos que:

$$\lim_k f_k(x) = +\infty \Rightarrow c \cdot \varphi(x) \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N} : c \cdot \varphi(x) < f_k(x) \Rightarrow x \in A_k$$

Por otro lado, si tenemos que  $0 < f(x) < \infty$ , entonces:

$$\varphi(x) \leq f(x) \Rightarrow c \cdot \varphi(x) < f(x) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : c \cdot \varphi(x) < f_k(x) \Rightarrow x \in A_k$$

Por tanto, por el lema anterior, al tener la sucesión creciente de los  $A_k$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} c \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu &= c \cdot \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{x: f(x)=0\}} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{x: f(x)=0\}} c \cdot \varphi d\mu = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} c \cdot \varphi d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f_k d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \end{aligned}$$

De este modo, como el  $c$  es arbitrario, si se hace tender a 1, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \xrightarrow{\forall \varphi} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Y ya tendríamos demostradas las dos desigualdades.

Observación

Este resultado sigue siendo cierto si se toman las hipótesis solo en c.t.p. Si ocurriese que  $f_k \leq f$  no se cumpliera en un conjunto de medida nula, tomamos  $f'_k$  que vale  $f_k$  en todos los puntos donde se cumple y 0 en los que no. Como, por definición,  $f_k = f'_k$  en c.t.p. la integral es la misma y la demostración no se ve alterada.

**Teorema**

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función acotada e integrable Riemann, entonces  $f$  es integrable Lebesgue y verifica:

$$\int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f(x) dx$$

Demostración:

Por ser acotada,  $\exists M > 0 : f \leq M \chi_{[a,b]}$ , lo que implica que  $\int f d\mu \leq \int M \cdot \chi_{[a,b]}$ , es decir, que es integrable Lebesgue.

Además, por ser integrable Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sup_{P \in \mathcal{P}} L(f, P) \Rightarrow \exists \{P_k\}_{k=1}^\infty : P_k \leq P_{k+1} : \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} L(f, P_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{S \in P_k} \inf\{f(x) : x \in S\} \mu(S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \underbrace{\left( \sum m_S(f) \cdot \chi_S \right)}_{\text{funcion simple}} d\mu = \int_{[a,b]} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu \end{aligned}$$

Donde  $f_k = \sum m_S(f) \chi_S$  y vemos que por ser crecientes las particiones que hemos tomado, dicha sucesión también lo es y por ello podemos aplicar el teorema.

### Proposición

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  medible no negativa, entonces  $\exists \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  sucesión de funciones simples tal que  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \uparrow f$  es creciente y converge **puntualmente**<sup>6</sup> a  $f$ .

Demostración:

(Dibujo) Fijado un entero  $k > 0$ , definimos los siguientes conjuntos:

$$E_j^k := f^{-1}([(j-1) \cdot 2^{-k}, j \cdot 2^{-k}])$$

Con dicha definición, es sencillo ver que los conjuntos son medibles, disjuntos y su unión queda como

$$\bigcup_{j=1}^{k \cdot 2^k} E_j^k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < k\}$$

Definimos la siguiente función simple:

$$\varphi := \sum_{j=1}^{k \cdot 2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_j^k}$$

Esto genera una sucesión de funciones creciente que denotamos por  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \uparrow$ .

Luego, por la definición que se ha dado de los  $E_j^k$ , dado  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists k \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : k > f(x) \Rightarrow x \in E_j^k$  para algún  $j$  y, por tanto:

$$0 < f(x) - \varphi_k(x) < \frac{1}{2^k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$$

### Proposición

Si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones medibles no negativas, entonces la integral es aditiva, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu$$

Demostración:

Por la proposición anterior, existen dos sucesiones  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  y  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  convergentes a  $f$  y a  $g$  respectivamente. De este modo, es trivial comprobar que  $\{\varphi_k + \psi_k\}_{k=1}^\infty$  converge a  $f + g$  y por el Teorema de Convergencia Monótona, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + g) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k + \psi_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k d\mu \right) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu$$

<sup>6</sup>Si la función  $f$  es acotada, entonces la convergencia es **uniforme**

### Proposición

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible no negativa y  $c \in \mathbb{R}^+$ , entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (cf) \, d\mu = c \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$$

Demostración:

Completamente análoga a la anterior y se deja como ejercicio.

### Teorema (Convergencia monótona para series)

Sea  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^\infty f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu \right)$$

Demostración:

La demostración es prácticamente consecuencia de los enunciados anteriores:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^\infty f_k \right) d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^m f_k \right) d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^m f_k \right) d\mu = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu \right) = \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu \right) \end{aligned}$$

### Lema (de Fatou)

Sea  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu \right)$$

Demostración:

Definimos las funciones  $g_k = \inf_{m \geq k} f_m \geq 0$  medibles de modo que estas forman una sucesión creciente  $\{g_k\}_{k=1}^\infty \uparrow$ . En consecuencia, basta ver que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{m \geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_m \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu$$

### Proposición

Las integrales impropias se soportan por la integral de Lebesgue:

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \int_{[a, \infty)} f(x) \, d\mu \qquad \int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a, b]} f(x) \, d\mu$$

Demostración:

■ Primera

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) \, dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) \, dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^\infty f(x) \chi_{[a, M]} \, dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[a, +\infty]} f \chi_{[a, M]} \, d\mu = \\ &= \int_{[a, +\infty]} f \chi_{[a, +\infty]} \, d\mu = \int_{[a, +\infty]} f \, d\mu. \end{aligned}$$

■ Segunda

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{b - \frac{1}{k}} f(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, b - \frac{1}{k}]} f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f \chi_{[a, b - \frac{1}{k}]} \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \chi_{[a, b]} \, d\mu = \int_{[a, b]} f \, d\mu.$$



# FUNCIONES INTEGRABLES

---

Hasta ahora no hemos hecho más que definir la integral y las propiedades que tiene y todo ello mayoritariamente para funciones no negativas. En esta sección, el objetivo es ampliar las miras y dar una definición consistente con las propiedades ya vistas para funciones no negativas y así poder sacarle completamente partido al concepto de integral.

---

## Definición

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible<sup>7</sup>, entonces diremos que es integrable si y sólo si:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\mu < +\infty$$

---

## Definición

Dada una función medible  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos:

$$f^+ := \max\{f, 0\} \qquad f^- := -\min\{f, 0\}$$

(Dibujo)

que verifican las siguientes propiedades:

1.  $f^+ \wedge f^-$  son medibles y no negativas.
2.  $f^+ - f^- = f$ .
3.  $f^+ + f^- = |f|$
4.  $f^+ \leq |f| \wedge f^- \leq |f|$

---

## Proposición

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable, entonces  $f^+$  y  $f^-$  son integrables, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, d\mu < +\infty \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, d\mu < +\infty$$

Demostración:

Basta con ver que ambas funciones están acotadas por el módulo de  $f$  y, por tanto, si  $f$  es integrable, estas también lo son.

En consecuencia, podemos dar una definición alternativa de la que se ha dado de función integrable que es completamente compatible e intercambiable con la que se ha dado anteriormente.

---

<sup>7</sup>No necesariamente negativa

---

### Definición

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, entonces podemos expresar su integral como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, d\mu$$

---

### Observación

Podríamos dar la misma definición de integrabilidad que se dió para funciones arbitrarias, pero ahora para funciones que toman valores en la recta ampliada. Sin embargo, cabe observar que  $A = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < \infty\}$  tiene que tener medida en caso de que dicha función sea integrable, puesto que:

$$\mu(A) > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : k \cdot \chi_A \leq |f| \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\mu \geq I(k\chi_A) = k \cdot \mu(A)$$

### Proposición

Supongamos que tenemos dos funciones  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  y tales que  $f = g$  (c.t.p.), entonces tenemos que:

$$f \text{ integrable} \Leftrightarrow g \text{ integrable}$$

Y además las integrales coinciden:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu$$

### Demostración:

Como ya lo tenemos demostrado para funciones no negativas, basta con trabajar con las funciones  $f^+$  y  $f^-$ , es decir:

$$f = g \text{ c.t.p.} \Rightarrow \begin{cases} f^+ = g^+ \\ f^- = g^- \end{cases} \text{ c.t.p.} \Rightarrow \int f = \int f^+ - \int f^- = \int g^+ - \int g^- = \int g$$

### Proposición

Son equivalentes:

- $f$  integrable
- $|f|$  integrable
- $f^+$  y  $f^-$  integrables

### Demostración:

- FALTAN LOS OTRO DOS APARTADOS.
- 3)  $\rightarrow$  1)

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty \Rightarrow f \text{ integrable}$$

### Lema

Sea  $f$  una función integrable, si  $f = g - h$  con ambas funciones medibles, no negativas e integrables, entonces se verifica:

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu - \int h \, d\mu$$

#### Demostración:

Suponemos sin pérdida de generalidad que las funciones toman valores en  $\bar{\mathbb{R}}$ , puesto que más adelante se explica como generalizar dicho lema. De este modo, podemos expresar  $f$  como:

$$f = f^+ - f^- = g - h \Rightarrow f^+ + h = f^- + g$$

Como todo son funciones no negativas e integrables, la integral de la suma es la suma de las integrales, por tanto:

$$\int f^+ + \int h = \int (f^+ + h) = \int (f^- + g) = \int f^- + \int g \Rightarrow \int f^+ - \int f^- = \int g - \int h$$

#### Observación

Este lema es válido para funciones que toman valores en  $\bar{\mathbb{R}}$  porque el conjunto donde los valores no son reales es de medida nula. Por tanto, las funciones son iguales en c.t.p. a las funciones de la hipótesis y para esas la demostración es válida, luego para estas también.

#### **Teorema (Operaciones de Integrabilidad)**

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones integrables, entonces la integral de la suma es:

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Del mismo modo, para  $\alpha \in \mathbb{R}$  la integral del producto por  $\alpha$  es:

$$\int (\alpha \cdot f) d\mu = \alpha \int f d\mu$$

#### Demostración:

Por la desigualdad triangular,  $|f + g| \leq |f| + |g|$  y como ambas son funciones no negativas, se les puede aplicar el lema:

$$\int |f + g| \leq \int |f| + \int |g| < \infty$$

De este modo, ya sabemos que al menos la suma es integrable, ahora veamos que la integral es justo la suma de las integrales. Para ello, expresamos la suma de la siguiente forma:

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

Como dichas funciones son no negativas y son integrables, tenemos que

$$\int (f + g) = \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) = \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- = \int f + \int g$$

Cabe observar que es necesario el lema para probar dicha demostración puesto que no se tiene en general la igualdad:

$$f^+ + g^+ = (f + g)^+$$

#### **Teorema (De convergencia dominada)**

Sea  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow f$  una sucesión convergente c.t.p. a una función  $f$ , donde las funciones  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son medibles y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una función integrable que acota a  $f$  c.t.p., es decir,  $|f_k| \leq g$  c.t.p., entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu$$

Demostración:

Sabemos que  $|f| \leq g$  c.t.p, luego tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu < +\infty$$

Por lo que ya sabemos que al menos  $f$  es integrable (y por la misma razón las  $f_k$  son integrables).

Como  $|f_k| \leq g \Rightarrow g + f_k \geq 0$ , de este modo formamos la sucesión de funciones  $\{g + f_k\}_{k=1}^{\infty}$  a la que podemos aplicar el lema de Fatou:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} (f + g) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k + g) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} (f_k + g) d\mu \leq \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f_k + g) d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu \right) = \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right) + \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu \end{aligned}$$

Luego ya tenemos la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right)$$

De forma análoga, tomamos la sucesión  $\{-f_k + g\}_{k=1}^{\infty}$  y entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (-f) d\mu &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (-f_k) d\mu \Rightarrow - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( - \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right) = - \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu \right) \Rightarrow \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \end{aligned}$$

Como por la convergencia, se tiene que el límite superior e inferior coinciden con el límite global, se tiene la igualdad.

### Definición (Secciones de funciones)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función que expresaremos como  $f(x, y)$  donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $y \in \mathbb{R}^n$ , llamamos **secciones** de  $f$  a:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ donde } f_x(y) = f(x, y)$$

### Lema

Si  $f$  y  $g$  verifican el  $T^a$  de Tonelli y  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , entonces la composición lineal de las funciones también, es decir,  $af + bg$  cumple el  $T^a$  de Tonelli.

Demostración:

Se ha de demostrar que en primer lugar, se tiene que:

$$(af + bg)_x = af_x + bg_x$$

Esta combinación lineal será medible, por serlo de funciones medibles y, por tanto:

$$F_{af+bg} = aF_f + bF_g$$

### Lema

Si una sucesión de funciones  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  convergente puntualmente a  $f$  cumple el  $T^a$  de Tonelli, entonces  $f$  cumple el  $T^a$  de Tonelli.

Demostración:

1. Primero, vemos que

$$f_x = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k)_x, \quad (f_k)_x \uparrow f_x$$

que es medible por ser límite de medibles

2. En segundo lugar, como:

$$F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k, \quad \{F_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow F \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} (f_k)_x \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} f_x \, d\mu$$

3. Por último, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} F_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f_k \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$$

Como consecuencia de estos lemas el principio de Cavalieri es equivalente al teorema de Tonelli, es decir, basta con probar este principio para probar el teorema de Tonelli.

### **Teorema (de Tonelli)**

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty)$  una función medible, entonces:

1. Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_x$  es medible en  $\mathbb{R}^m$  (y no negativa).
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible, donde se define como:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f_x \, d\mu_m$$

3. Se puede dividir la integral en secciones, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f \, d\mu_{nm} = \int_{\mathbb{R}^n} F \, d\mu_n$$

expresado de forma más intuitiva:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Este teorema se podría enunciar de forma análoga para  $y$ , siendo entonces las hipótesis:

1. Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $f_y$  es medible en  $\mathbb{R}^n$  (y no negativa).
2. La función  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$  es medible, donde se define como:

$$G(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\mu$$

3. Se puede dividir la integral en secciones, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} G \, d\mu,$$

expresado de forma más intuitiva:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Demostración:

Para demostrar este teorema para funciones no negativas se irá demostrando para funciones más sencillas e incrementaremos la complejidad de forma gradual hasta llegar a las de las hipótesis.

1. Primeramente consideramos  $f = \chi_Q$  donde  $Q \subset \mathbb{R}^{n+m}$  es un cubo semiabierto, es decir,  $Q = \prod_{i=1}^{n+m} [a_i, b_i)$ . Este cubo se puede expresar en términos de otros dos, esto es,  $Q = A \times B$  con  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \in \mathbb{R}^m$  cubos semiabiertos. Veamos entonces que:

a)

$$(\chi_Q)_x = \chi_{Q_x} = \begin{cases} \chi_B & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \Rightarrow (\chi_Q)_x \text{ ya que } Q_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \Rightarrow \chi_{Q_x} \text{ medible } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

b)

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{Q_x} d\mu_m = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_B d\mu_m = \mu_m(B) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \text{ medible } \Rightarrow F(x) = \mu_m(B) \cdot \chi_A(x)$$

c)

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x) d\mu_n = \mu_m(B) \cdot \mu_n(A) = \mu_{n+m}(Q) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \chi_Q d\mu_{m+n}$$

Siendo la 2 igualdad cierta por tratarse de un cubo.

2. Consideramos ahora  $f = \chi_G$  donde  $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$  es un abierto. Por serlo, podemos escribirlo como  $G = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Q_j$  donde cada  $Q_j$  es un cubo semiabierto y la unión es disjunta.

Denotando  $G_k = \bigsqcup_{j=1}^k Q_j$  tenemos que  $\chi_{G_k} = \sum_{j=1}^k \chi_{Q_j}$ . Por ser dicha función característica suma finita de funciones características de cubos (que ya sabemos que cumplen el Teorema), también cumple el Teorema por el primer lema y además vemos que  $\{\chi_{Q_k}\}_{k=1}^{\infty} \uparrow \chi_G$  puntualmente, luego:

$$\chi_G = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{G_j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{G_k}$$

De este modo, basta con aplicar el segundo lema y cumple el Teorema.

3. Supongamos que  $f = \chi_D$  donde  $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$  es un conjunto  $G_{\delta}$ . En este caso, es suficiente considerar que  $D$  es acotado puesto que  $D$  se puede expresar como una unión creciente

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$$

donde cada  $D_k$  es un  $G_{\delta}$  y acotado (por ejemplo,  $D_k = D \cap (-k, k)^{n+m}$ ). De este modo,  $\{\chi_{D_k}\}_{k=1}^{\infty} \uparrow \chi_D$  y usando el segundo lema, ya lo tendríamos.

En consecuencia, supongamos que  $D$  es  $G_{\delta}$  y acotado, entonces escribimos

$$D = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

donde cada  $G_k$  es abierto acotado y  $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots \supset D$ . De este modo, construimos la sucesión  $\{\chi_{G_k}\}_{k=1}^{\infty} \downarrow \chi_D$  con la que, usando la versión decreciente de TCM, se puede hacer una demostración análoga a la del segundo lema para obtener que  $\chi_D$  verifica el teorema.

Alternativamente, como  $0 \leq \chi_D \leq \chi_{G_1}$  es integrable y satisface el teorema, entonces se puede aplicar el TCD.

4. Consideramos ahora  $f = \chi_N$  donde  $\mu_{n+m}(N) = 0$ . Por la regularidad de la medida, tenemos que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists G_k \subset \mathbb{R}^{n+m} \text{ abierto con } N \subset G_k \text{ y } \mu_{n+m}(G_k \setminus N) < \frac{1}{k}$$

Si definimos  $G := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k$ , entonces vemos que  $G$  es un  $G_\delta$  por ser intersección numerable de abiertos, tal que  $N \subset G$  y además:

$$\mu_{n+m}(G \setminus N) \leq \forall k \in \mathbb{N} : \mu_{n+m}(G_k \setminus N) < \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \mu_{n+m}(G) = 0$$

De este modo, hemos encontrado un  $G_\delta$  que contiene a  $N$ . En primer lugar, vemos que  $\chi_G$  satisface el teorema para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  por el apartado anterior y, por tanto,  $\chi_G$  es medible, luego:

$$0 = \mu_{n+m}(G) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \chi_G d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{G_x} d\mu_m \right) d\mu_n.$$

Por tanto, como la integral de dentro es la  $F(x)$  del enunciado y es positiva:

$$\mu_m(G_k) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{G_k} d\mu_m = 0 \text{ en casi todo punto } x \in \mathbb{R}^n$$

Como  $N_x \subset G_x \Rightarrow \mu_m(N_x) \leq \mu_m(G_x) = 0 \Rightarrow \mu_m(N_x) = 0$  y además es medible, luego tenemos que  $\chi_{N_x} = (\chi_N)_x = f_x$  es medible en para c.t.p. de  $\mathbb{R}^n$ .

Para la segunda consecuencia basta ver que:

$$0 \leq F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{N_x} d\mu_m \leq \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{G_x} d\mu_m = 0 \text{ c.t.p. } \in \mathbb{R}^n$$

Por lo que, en particular,  $F$  es medible.

Y, por último, hay que ver que la integral se puede iterar:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \chi_N d\mu_{n+m} = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{F(x)}_{=0} d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{N_x} d\mu_m \right) d\mu_n$$

5. Sea ahora  $f = \chi_A$  donde  $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$  es medible. Por ser medible, sabemos que podemos descomponer  $A$  como  $A = D \setminus N$ , donde  $D$  es un  $G_\delta$  y  $\mu_{n+m}(N) = 0$ . Por tanto,  $D = A \sqcup N \Rightarrow \chi_D = \chi_A + \chi_N$  y, en consecuencia:

$$\chi_A = \chi_D - \chi_N \text{ para c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n$$

Y es sencillo ver que también se cumple la igualdad:

$$\chi_{A_x} = \chi_{D_x} - \chi_{N_x} \text{ es medible por (3) y (4)}$$

Para ver la segunda conclusión, tenemos que:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{A_x} d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{D_x} d\mu_m$$

puesto que  $\mu_m(N_x) = 0$  y entonces es medible para c.t.p.  $x \in \mathbb{R}^n$  porque  $D$  es  $G_\delta$  y aplicamos el apartado (3).

Para terminar:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} F(x) d\mu_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{A_x} d\mu_m \right) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{D_x} d\mu_m \right) d\mu_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \chi_D d\mu_{n+m} = \mu_{n+m}(D) = \mu_{n+m}(A) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \chi_A d\mu_{n+m} \end{aligned}$$

Porque  $D_x$  si verificaba ya el Teorema de Tonelli.

6. Sea  $f$  función simple, medible, no negativa, entonces  $f$  es combinación lineal no negativa de funciones características de conjuntos medibles en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  y por el lema trivialmente se tiene.

7. Finalmente, consideramos  $f$  medible no negativa. Como para estas funciones hemos demostrado que  $\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow f$  donde cada  $f_k$  es simple, medible y no negativa, queda probado por el lema 2 y el apartado 6.

### Definición (Secciones de conjuntos)

Si tenemos un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , podemos definir su **sección** como:

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in A\}$$

### Proposición (Principio de Cavalieri)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  medible, entonces:

1. Las  $A_x$  son medibles c.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$ .
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  es medible y se define como:

$$F(x) = \mu_m(A_x)$$

3.  $\mu_{n+m}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_m(A_x) d\mu_n$

### DIBUJODELOQUE SIGNIFICAN LAS SECCIONES

#### Observación:

Si  $N \subset \mathbb{R}^{n+m}$  satisface que  $\mu_{n+m}(N) = 0$  hemos visto que para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  la sección  $N_x$  es medible porque tiene medida nula. Sin embargo, puede ocurrir que para algún  $x \in \mathbb{R}^n$  la sección  $N_x$  no sea medible en  $\mathbb{R}^m$

Por ejemplo, sea  $E \subset \mathbb{R}$  no medible y sea  $N = \{0\} \times E \subset \mathbb{R}^2$ . Como  $N$  está contenido en la recta  $\{0\} \times \mathbb{R}$  está claro que  $\mu_2(N) = 0$ , pero la sección  $N_0 = E$  no es medible.

### Corolario

Si la medida del conjunto es nula, entonces la medida de casi todas las secciones también lo es.

$$\mu_{n+m}(A) = 0 \Rightarrow \mu_m(A_x) = 0 \text{ c.t.p } x$$

#### Ejemplo:

Si  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ :

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) \chi_A(x, y) dx dy = \\ \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \chi_A(y) dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

### Teorema (de Fubini)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Entonces:

1. Para c.t.p.  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_x$  es medible en  $\mathbb{R}^m$  (y no negativa).
2. La función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ , donde  $F$  está definida en c.t.p. como:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f_x d\mu_m$$



3. Se puede dividir la integral en secciones, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f \, d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} F \, d\mu_n,$$

Demostración:

Podemos escribir  $f = f^+ - f^-$ . De nuevo, es sencillo ver que  $\forall x \in \mathbb{R}^n : (f^+)_x = (f_x)^+ \wedge (f^-)_x = (f_x)^-$ , por tanto como  $f^+$  y  $f^-$  verifican el teorema de Tonelli, entonces  $f_x^+$  y  $f_x^-$  son medibles c.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$  y como  $f_x = (f_x^+) - (f_x^-)$  también es medible c.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Tanto la  $f^+$  como la  $f^-$  son integrales porque:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f_x^+ \, d\mu_m \right) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f^+ \, d\mu_{n+m} < \infty$$

Por tanto,  $F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_x^+ \, d\mu_n + \int_{\mathbb{R}^n} f_x^- \, d\mu_n$  es finita en c.t.p., luego integrable.

Observación:

El problema, en general, es demostrar que una función es integrable para poder aplicar este teorema. Un método útil suele ser demostrar que  $\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| \, dy \right) dx < \infty$  y como con el valor absoluto es no negativa podemos aplicar Tonelli a  $|f|$  y separar la integral para demostrar que  $f$  es integrable.

Ejemplo:

Consideramos  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$  y  $f(x, y) = e^{-y^2}$  y vamos a ver que es integrable en  $E$  y a calcular su integral:

- En primer lugar,  $f(x, y) = e^{-y^2} \geq 0$  es medible por ser continua en  $\mathbb{R}^2$ .
- En segundo lugar, como es positiva por el Teorema de Tonelli es integrable y la integral se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \int_E f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \cdot \chi_E(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \chi_E(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^y e^{-y^2} \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2ye^{-y^2} \, dy = \left[ \frac{1}{2} (e^{-y^2}) \right]_{y=0}^{y=\infty} = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Proposición

Sea  $f : [a, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$  continua, entonces la integral impropia coincide con la impropia de Riemann

$$\int_{[a, +\infty)} f = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f$$

Nótese que esto se refiere a funciones **positivas**.

Demostración:

Sea  $a \leq \{b_k\} k = 1 \rightarrow \infty$  y definimos  $f_k = f \cdot \chi[a, b_k]$ . Así,  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow f$  luego por el Teorema de la Convergencia Monótona

$$\int_{[a, \infty)} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, \infty)} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{b_k} f$$

Ejemplo:

Consideramos  $A = [0, 1] \times [0, +\infty]$  y la función  $f(x, y) = e^{-y} \sin(2xy)$  y vamos a demostrar que es integrable y a calcular la integral.

- En primer lugar, para poder aplicar el Teorema de Fubini, necesitamos ver que  $f$  es integrable, es decir,  $\int_A |f| < \infty$ , luego calculamos:

$$|f(x, y)| = |e^{-y} \sin(2xy)| \leq e^{-y}$$

$$\int_A |f(x, y)| \leq \int_A e^{-y} dx dy = \int_0^1 \int_0^\infty e^{-y} dy dx = \left( \int_0^1 1 dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y} dy \right) = 1 < \infty$$

- Una vez que sabemos que es integrable, aplicamos Fubini:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \underbrace{\int_0^\infty e^{-y} \sin(2xy) dy}_{F(x)} \right) dx = **$$

- Veamos primero la  $F(x)$ :

$$\begin{cases} u = \sin(2xy) & du = 2x \cos(2xy) dy \\ dv = e^{-y} dx & v = -e^{-y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$F(x) = \underbrace{[-e^{-y} \sin(2xy)]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty 2xe^{-y} \cos(2xy) dy$$

$$\begin{cases} u = 2x \cos(2xy) & du = (2x)^2 \cdot (-\sin(2xy)) dy \\ dv = e^{-y} dy & v = -e^{-y} \end{cases}$$

$$F(x) = [-e^{-y} 2x \cos(2xy)]_0^\infty - \int_0^\infty 4x^2 e^{-y} \sin(2xy) dy = 2x - 4x^2 F(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) \cdot (1 + 4x^2) = 2x \Rightarrow F(x) = \frac{2x}{1 + 4x^2}$$

- Volviendo a la integral original:

$$\int_0^1 \frac{1}{4} \cdot \frac{8x}{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{4} [\log(1 + 4x^2)]_0^1 = \frac{\log(5)}{4}.$$

### Proposición

Sea  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, si es integrable, entonces la integral impropia coincide con la impropia de Riemann:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^k f = \int_{[a, \infty)} f$$

Nótese que esto es cierto para funciones **con valores en**  $\mathbb{R}$ .

Demostración:

Sea  $a \leq \{b_k\} k = 1^\infty \uparrow \infty$  y sean  $f_k = f \cdot \chi[a, \infty)$ . Entonces,  $\{f_k\} k \rightarrow f$  puntualmente y además  $|f_k| \leq |f|$ , que es integrable en  $[a, \infty)$ . Así, por el Teorema de la Convergencia Dominada,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{b_k} f = \int_a^\infty f$$

### Definición (Funciones definidas por integrales)

Una función viene definida por una integral si tiene la siguiente forma:

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u) dx$$

Donde para un  $u$  fijo, se integra la función sobre las componente  $x$  libre y en su medida concreta.

---

### Teorema

Sea  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  y sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , supongamos que:

1.  $\forall u \in \mathcal{U}$ ,  $f_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable.
2.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.
3.  $\exists g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrable tal que  $|f(x, u)| \leq g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall u \in \mathcal{U}$

Entonces se verifica la continuidad de la definida por la integral:

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u) \, dx \text{ es continua en } \mathcal{U}.$$

Demostración:

Sea  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$  con  $u_k \rightarrow u_0$  en  $\mathcal{U}$ , definimos  $\forall k \in \mathbb{N} : f_k = f_{u_k} = f(x, u_k) \rightarrow f(x, u)$ . Además, como se tiene que  $|f_k(x)| = |f(x, u_k)| \leq g(x)$  y esto para  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  y  $\forall k \in \mathbb{N}$ , por el TCM:

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \, dx}_{F(u_k)} \rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(x, u_0) \, dx}_{=F(u_0)}$$

### Teorema (Regla de Leibniz)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible y  $F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) \, dx$  la definida por la integral de dicha función, supongamos que:

1.  $\forall r \in [a, b]$ ,  $f_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{R}^n : f_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^1$ , donde  $f_x(t) = f(x, t)$
3.  $\exists g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrable tal que  $|\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}| \leq g(x) : \forall x \in \mathbb{R}^n$  y  $\forall t \in [a, b]$

Entonces  $F$  es  $C^1$  en  $(a, b)$  y  $\forall t \in (a, b)$  podemos definir su derivada:

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \, dx$$

Demostración:

Vamos a aplicar el Teorema de Fubini y de Tonelli a  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$

- En primer lugar, como podemos expresar dicha función como  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x, t+s) - f(x, t)}{s} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x, t + \frac{1}{k}) - f(x, t)}{\frac{1}{k}}$  es medible por ser límite puntual de funciones medibles.
- En segundo lugar, como podemos acotarla por una función integrable, es integrable en  $\mathbb{R}^n \times [a, b]$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \, dx \, dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n \times [a, b]} g(x) \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_a^b g(x) \, dt \right) \, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (b - a) g(x) \, dx = (b - a) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, dx < +\infty \end{aligned}$$

- Aplicamos el teorema de Fubini, es decir,  $\forall s \in [a, b]$ :

$$\int_a^s \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_a^s \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x, s) - f(x, a)) dx = F(s) - F(a).$$

Denotamos:

$$H(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$$

Como  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = f'_x(t)$  es continua en  $t$  y  $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq g$ , por el Teorema anterior obtenemos que  $H$  es continua en  $t \in [a, b]$ . En consecuencia, vemos que:

$$\int_a^s H(t) dt = F(s) - F(a) \Rightarrow F(s) = F(a) + \int_a^s H(t) dt$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$F'(t) = H(t), \quad \forall t \in (a, b)$$

Ejemplo:

Supongamos la función

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{tx}}{xe^x} dx \quad \text{con } t > -1$$

En primer lugar, veamos que  $F$  está bien definida y que es derivable en  $t \in (-1, \infty)$ :

Dado  $t \in (-1, \infty)$  sean  $-1 < a < t_0 < b < \infty$ . Vamos a demostrar que  $F$  es derivable ( $C^1$ ) en  $(a, b)$ . De aquí se deduce que  $F$  es derivable ( $C^1$ ) en  $(-1, \infty)$ .

1. En primer lugar, veamos que  $\forall t > -1 : f_t(x) = \frac{1 - e^{-tx}}{x} e^{-x}$  es una función integrable en  $(0, \infty)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-tx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t \cdot e^{-tx}}{1} = t \in \mathbb{R}$$

Luego  $f_t$  se extiende con continuidad a  $x = 0$ , es decir, podemos tomar como  $f_t(0) = t$  para que sea continua y la integral no cambia porque solo se diferencia en un punto con la función que realmente tenemos.

Para ver que es integrable, tenemos que ver que su valor absoluto es integrable, es decir:

$$|f_t(x)| = \left| \frac{1 - e^{-tx}}{x} \right| e^{-x} = \frac{|1 - e^{-tx}|}{x} e^{-x}$$

Si  $x \geq 1$ , entonces vemos que  $|f_t(x)| \leq |1 - e^{-tx} e^{-x}| \leq e^{-x} + e^{-(t+1)x}$ , de este modo ya es sencillo ver que es integrable puesto que:

$$\int_1^\infty e^{-x} dx < \infty \quad \int_1^\infty e^{-(t+1)x} dx < \infty \text{ porque } t+1 > 0$$

2. En segundo lugar, vamos a ver que la derivada existe y es continua en  $t$ :

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{x e^{-tx}}{x} e^{-x} = e^{-(t+1)x} \text{ existe y es continua en } t$$

3. Por último, tenemos que ver dónde la parcial calculada es integrable:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = e^{-(t+1)x} \stackrel{t \rightarrow -1}{\Rightarrow} e^{-x} = e^0 = 1 \Rightarrow \text{no integrable en } (0, \infty)$$

Fijamos  $-1 < a < b < \infty$  y consideramos el intervalo formado por ambos extremos  $[a, b]$ . Para un  $t \in [a, b] \Rightarrow a \leq t \Rightarrow e^{-(t+1)x} \leq e^{-(a+1)x}$  que podemos tomar como  $g(x)$  y vemos que:

$$\int_0^\infty g(x) dx = \int_0^\infty e^{-(a+1)x} dx = \left[ \frac{e^{(a+1)x}}{a+1} \right]_0^\infty = \frac{1}{a+1} < \infty \text{ puesto que } a+1 > 0$$

De este modo,  $F$  derivable  $C^1$  en  $(a, b)$  para cualesquiera  $a, b \in (-1, \infty)$ , por lo que  $F$  es  $C^1$  en  $(-1, \infty)$ .

Además, podemos calcular la derivada  $\forall t \in (a, b)$  y  $\forall a, b : -1 < a < b < \infty$  como:

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx = \int_0^\infty e^{-(t+1)x} dx = \left[ -\frac{e^{-(t+1)x}}{t+1} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{t+1}$$

Por tanto, si escogemos  $\forall t > -1$ :

$$F(t) = \int \frac{1}{1+t} dt = \log(1+t) + C$$

Y para calcular el valor de la constante de integración basta con ver que:

$$F(0) = \int_0^\infty 0 dt = 0 = \log(1) + C \Rightarrow C = 0$$

Ejemplos:

8. Sea  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  y  $f(x, y) = e^{-y^2} \rightarrow \int_E e^{-y^2} dx dy$  (Dibujo)

■  $f(x, y) = e^{-y^2} \geq 0$  es medible (es continua en  $\mathbb{R}^2$ ).

■

$$\begin{aligned} \int_E f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \cdot \chi_E(x, y) dx dy = \\ \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} \chi_E(x, y) dx dy &= \int_0^\infty \int_0^y e^{-y^2} dx dy = \\ \frac{1}{2} \int_0^\infty 2ye^{-y^2} dy &= \left[ \frac{1}{2} (e^{-y^2}) \right]_{y=0}^{y=\infty} = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{[0, \infty]} f(y) dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(y) dy \text{ (Riemann impropia).}$$

OBS: Sea  $f : [a, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$  continua  $\Rightarrow$

$$\int_{a, +\infty} f = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f \text{ (Riemann impropia).}$$

Demostración:

Sea  $a \leq (b_k) \uparrow \infty$  y definimos  $f_k = f \cdot \chi_{[a, b_k]}$ . Entonces  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \uparrow f$  luego por TCM  $\Rightarrow$

$$\int_{[a, \infty)} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, \infty)} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{b_k} f$$

9. Sea  $A = [0, 1] \times [0, +\infty]$  y  $f(x, y) = e^{-y} \sin(2xy) \rightarrow \int_A f(x, y) dx dy$ .

■ ¿ $f$  integrable?  $\int_A |f| < \infty$ ?

$$|f(x, y)| = |e^{-y} \sin(2xy)| \leq e^{-y}$$

$$\int_A |f(x, y)| \leq \int_A e^{-y} dx dy = \int_0^1 \int_0^\infty e^{-y} dy dx = \left( \int_0^1 dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y} dy \right) = 1 < \infty$$

- Podemos aplicar Fubini:

$$\int_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \underbrace{\int_0^\infty e^{-y} \sin(2xy) \, dy}_{F(x)} \right) dx = **$$

Veamos  $F(x)$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-y} \sin(2xy) \, dy \\ & \begin{cases} u = \sin(2xy) \\ dv = e^{-y} dy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = 2x \cos(2xy) \, dy \\ v = -e^{-y} \end{cases} \\ & F(x) = \underbrace{[-e^{-y} \sin(2xy)]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty 2xe^{-y} \cos(2xy) \, dy = \\ & \begin{cases} u = 2x \cos(2xy) \\ dv = e^{-y} dy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = (2x)^2 \cdot (-\sin(2xy)) \, dy \\ v = -e^{-y} \end{cases} \\ & = [-e^{-y} 2x \cos(2xy)]_0^\infty - \int_0^\infty 4x^2 e^{-y} \sin(2xy) \, dy = \\ & = 2x - 4x^2 F(x) \\ & F(x) \cdot (1 + 4x^2) = 2x; \quad F(x) = \frac{2x}{1 + 4x^2} \end{aligned}$$

Volvamos a lo original:

$$** = \int_0^1 \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{1 + 4x^2} \, dx = \frac{1}{4} [\log(1 + 4x^2)]_0^1 = \frac{\log(5)}{4}.$$

OBS: Sea  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $\int_{[a, \infty)} |f| < \infty \Rightarrow$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f = \int_{[a, \infty)} f$$

Demostración:

Sea  $a \leq \{b_k\}_{k=1}^\infty \uparrow \infty$  y sean  $f_k = f \cdot \chi_{[a, b_k]}$ . Entonces,  $(f_k) \rightarrow f$  puntualmente y además:

$$|f_k| \leq |f| \text{ que es integrable en } [a, \infty) \Rightarrow (\text{TCD}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{b_k} f = \int_a^\infty f$$

### Definición (Funciones definidas por integrales)

Una función viene definida por una integral si tiene la siguiente forma:

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u) \, dx$$

### Teorema

Sea  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  y sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que:

1.  $\forall u \in \mathcal{U}, f_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable.
2.  $\forall x \in \mathbb{R}^n, f_x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

3.  $\exists g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrable, tal que  $|f(x, u)| \leq g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall u \in \mathcal{U}$

Entonces:

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u) \, dx \text{ es continua en } \mathcal{U}.$$

Demostración:

Sea  $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{U}$  con  $u_k \rightarrow u$  en  $\mathcal{U}$ .  $\forall k \in \mathbb{N}$  definimos  $f_k = f_{u_k}$ ,  $f_k(x) = f(x, u_k) \rightarrow f(x, u)$ . Además,  $|f_k(u)| = |f(x, u_k)| \leq g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Por TCD:

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \, dx}_{F(u_k)} \rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(x, u_0?) \, dx}_{=F(u_0?)}$$

### Teorema (Regla de Leibniz)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  medible.  $F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) \, dx$ . Supongamos que:

1.  $\forall k \in [a, b]$ ,  $f_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $C^1$ , donde  $f_x(t) = f(x, t)$
3.  $\exists g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrable tal que  $|\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}| \leq g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall k \in [a, b]$

Entonces  $F$  es  $C_1$  en  $(a, b)$  y  $\forall g \in (a, b)$ :

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \, dx$$

Obs:

La derivada de la función  $f_x$  es:

$$(f_x)'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

Demostración:

Vamos a aplicar el th. de Fubini/Tonelli a  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$

- $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x, t+s) - f(x, t)}{s} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x, t + \frac{1}{k}) - f(x, t)}{\frac{1}{k}}$  es medible al ser límite puntual de funciones medibles.

■

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \, dx \, dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n \times [a, b]} g(x) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_a^b g(x) \, dt \right) \, dx = \\ &\int_{\mathbb{R}^n} (b-a) g(x) \, dx = (b-a) \int_{\mathbb{R}^n} g < +\infty \end{aligned}$$

Luego  $\frac{\partial f}{\partial t}$  es integrable en  $\mathbb{R}^n \times [a, b]$

- Aplicamos el th. de Fubini.  $\forall s \in [a, b]$ :

$$\int_a^b \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx \right) \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dt \right) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x, s) - f(x, a)) \, dx = F(s) - F(a).$$

Denotamos:

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = (f_x)'(x)$  es continua en  $t$  y  $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq g \Rightarrow$

Obtenemos que  $H$  es continua en  $t \in [a, b]$

Entonces:

$$\int_a^s H(t) dt = F(s) - F(a)$$

$$F(s) = F(a) + \int_a^s H(t) dt \Rightarrow F'(t) = G(t), \forall t \in (a, b)$$

Ejemplo:

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{tx}}{xe^x} dx, \text{ para } t > -1$$

Veamos que  $F$  está bien definido y es derivable en  $t \in (-1, \infty)$ .

Dado  $t \in (-1, \infty)$  sean  $-1 < a < t_0 < b < \infty$ . Vamos a demostrar que  $F$  es derivable ( $C'$ ) en  $(a, b)$ . De aquí se deduce que  $F$  es derivable ( $C'$ ) en  $(-1, \infty)$ .

1.  $\forall t > -1$ .  $f_t(x) = \frac{1 - e^{-tx}}{x} e^{-x}$  ¿es integrable en  $(0, \infty)$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-tx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t e^{-tx} - (-1)}{1} = t \in \mathbb{R} \Rightarrow f_x \text{ se extiende con continuidad a } x = 0$$

$$\Rightarrow f_t \text{ es integrable "cerca de 0" (en cualquier intervalo finito } [0, R])$$

$$f_t(x) = \left| \frac{1 - e^{-tx}}{x} \right| e^{-x} = \frac{|1 - e^{-tx}|}{x} e^{-x}$$

$$\text{Si } x > 1 \Rightarrow |f_t(x)| \leq |1 - e^{-tx} e^{-x}| \leq e^{-x} + e^{-(t+1)x}$$

$$\int_1^\infty e^{-x} dx < \infty$$

$$\int_1^\infty e^{-(t+1)x} dx < \infty \text{ porque } t + 1 > 0$$

$$f_t \cdot \chi_{(0, \infty)}$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{x e^{-tx}}{x} e^{-x} = e^{-(t+1)x} \text{ existe } g \text{ en continua en } t.$$

3.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = e^{-(t+1)x}, \text{ si } t = 1 \Rightarrow e^{-(t+1)x} = e^0 = 1 \text{ no es integrable en } (0, \infty)$$

Fijamos  $-1 < a < b < \infty$  y consideramos  $[a, b]$ . Si  $t \in [a, b] \Rightarrow a \leq t \Rightarrow e^{-(t+1)x} \leq e^{-(a+1)x} = g(x)$

$$\int_0^\infty g(x) dx = \int_0^\infty e^{-(a+1)x} dx =$$

$$\left[ \frac{e^{-(a+1)x}}{-(a+1)} \right]_0^\infty = \frac{1}{a+1} < \infty \text{ puede que } a + 1 > 0$$

$\Rightarrow F$  derivable  $C$  en  $(a, b)$ ,  $\forall a, b \Rightarrow F$  en  $C$  en  $(-1, \infty)$  y.

**Esto no se si está bien.**

Además  $F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx = \int_0^\infty e^{-(t+1)x} dx = \left[ -\frac{e^{-(t+1)x}}{t+1} \right] = \frac{1}{t+1}, \forall t \in (a, b), \forall a, b$   
con  $-1 < a < b < \infty$ . Luego  $\forall t > -1$ :

$$F(t) = \int \frac{1}{1+t} dt = \log(1+t) + C$$

$$F(0) = \int_0^\infty 0 dt = 0 = \log(1) + C \Rightarrow C = 0$$



## Teorema de cambio de variable

### Teorema

Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineal. Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es medible, entonces  $T(A)$  es medible y

$$\mu_n(T(A)) = |\det(T)| \cdot \mu_n(A)$$

Obs:

$\det(T) = 0 \Rightarrow T$  no es sobreyectiva  $\Rightarrow T(\mathbb{R}^n)$  es una ev? propia de  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mu_n(T(\mathbb{R}^n)) = 0$ .

---

### Definición

Sea  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos. Se dice que  $\varphi : U \rightarrow V$  es un **difeomorfismo** si:

1.  $\varphi : U \rightarrow V$  es  $C'$ .
  2.  $\varphi : U \rightarrow V$  es biyectiva.
  3.  $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$  es  $C^1$
- 

Obs: Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C'$  tal que  $\varphi$  es inyectiva en  $U$  y  $\det(J\varphi(u)) \neq 0$ ,  $\forall u \in U \Rightarrow$  por el Teorema de la Función Inversa, sabemos que  $V = \varphi(U)$  es abierto y su inversa  $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$  es  $C^1$ . Es decir,  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  es un difeomorfismo- $C^1$ .

### Teorema

Sea  $\varphi : U \rightarrow V$  un difeomorfismo- $C^1$  entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $A \subset U$  es medible  $\Rightarrow \varphi(A)$  es medible y

$$\mu(\varphi(A)) = \int_A |\det J\varphi(u)| \, du$$

Este teorema es más general que el anterior:

Obs: En el caso de que  $\varphi = T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo lineal  $\Rightarrow$  obtenemos el th. anterior.

### Teorema (Cambio de variable)

Sea  $\varphi : U \rightarrow V$  un difeomorfismo- $C^1$  entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $\varphi(A) \Rightarrow f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $A$  y

$$\boxed{\int_{\varphi(A)} f = \int_A f \circ \varphi \cdot |\det J\varphi|} \Rightarrow \int_V f = \int_U f \circ \varphi |\det J\varphi|$$

o lo que es lo mismo:

$$\int_{\varphi(A)} f(x) \, dx = \int_A f(\varphi(u)) |\det J\varphi(u)| \, du$$

Obs: Si  $f = \chi_{\varphi(A)}$  obtenemos el teorema anterior.

Ejemplo:

Sea

$$\int_E e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dx \, dy$$

Donde  $E$  = triángulo de vértices:  $(0,0), (0,2), (2,0)$  (Dibujo)

Por ejemplo si  $\varphi^{-1} = \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$

Por tanto,  $\varphi^{-1}(x+y=2) = \begin{cases} u \\ v=2 \end{cases}$ ,  $\varphi^{-1}(y=0) = \begin{cases} u=x \\ v=x \end{cases}$   $u=v$  y  $\varphi^{-1}(x=0) = \begin{cases} u=-y \\ v=y \end{cases}$   $u=-v$

Por tanto,  $\varphi^{-1}(E) = D$  es un triángulo de vértices:  $(0,0)$ ,  $(2,2)$  y  $(-2,2)$

$$\begin{aligned} \int_E f(x,y) \, dx \, dy &= \int_{\varphi(D)} f(x,y) \, dx \, dy = \int_D e^{u/v} |\det J\varphi(u,v)| \, du \, dv = \\ &= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=-v}^{u=v} e^{u/v} \frac{1}{2} \, du \, dv = \int_{v=0}^{v=2} \frac{1}{2} \left[ v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 v (e^1 - e^{-1}) \, dv = \frac{e - e^{-1}}{2} \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=2} = e - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo: Utilicemos **coordenadas polares**.

Tenemos que  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$  con  $\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

En este caso  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $S = \{(x, 0) : x \geq 0\}$ ,  $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ ,  $\varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus S$   $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  es un difeomorfismo  $C^1$  y  $\det J\varphi \neq 0$  en  $U$ .

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \mapsto \det = r \geq 0$$

Sea  $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\int_E x^2 + y^2 \, dx \, dy = \int_{E \setminus S} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo: Utilicemos **coordenadas cilíndricas** en  $\mathbb{R}^3$ .

Tenemos que  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$  y su jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Un ejemplo de su uso:

Sea  $\int_V x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz$  donde  $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4\}$  (*Dibujo*)

■  $x^2 + y^2 \leq z^2$  cono (círculo de radio  $|z|$ ).

■  $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$

Por cada  $z$  tenemos:  $V_z = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq z^2\}$ . Por tanto:

$$\int_V x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz = \int_{z=-2}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=|z|} r^2 \cdot \underbrace{r}_{=J} \, dr \, d\theta \, dz$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{z=-2}^{z=2} \left( \int_{r=0}^{r=|z|} r^3 dr \right) dz = 2\pi \int_{z=-2}^{z=2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=|z|} dz = \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{z=-2}^{z=2} z^4 dz = \frac{\pi}{10} [z^5]_{z=-2}^{z=2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo: Utilicemos **coordenadas esféricas en  $\mathbb{R}^3$** . (*Dibujo*)

Tenemos  $\begin{cases} z = \cos \varphi \\ h = r \sin \varphi \end{cases}$  y a su vez  $\begin{cases} x = h \cos \theta \\ y = h \sin \theta \end{cases}$ . Por tanto, uniéndolos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

A su vez tenemos:

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\text{cálculos...}} -r^2 \sin \varphi$$

y (*Dibujo*)

$$\boxed{|J| = r^2 \sin \varphi} \geq 0$$

Veamos un ejemplo de su uso:

*Volumen de la esfera sólida de radio  $R$ .*

La esfera será  $B_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

$$\begin{aligned}
\text{vol}(B_R) &= \mu_3(B_R) = \int_{B_R} 1 dx dy dz \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{r=0}^{r=R} 1 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
&= \left( \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta}_{=2\pi} \right) \cdot \left( \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sin \varphi d\varphi}_{=2} \right) \cdot \left( \underbrace{\int_{r=0}^{r=R} r^2 dr}_{=\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{R^3}{3}} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3
\end{aligned}$$

Ejemplo: La bóveda de Viviani.

Buscamos el volumen limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = ay$ , ( $a > 0$ ). (*Dibujo*)

En coordenadas polares:  $r = a \sin \theta$ .

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - ay &= 0 \\
x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 &= \underbrace{x^2 + y^2 - ay}_{=0} + \frac{a^2}{4} \\
x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 &= \frac{a^2}{4}
\end{aligned}$$

Considerando  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ay\} = \{(x, y) : x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 \leq \frac{a^2}{4}\}$  superficie de la base del cilindro? Por tanto,

$$\begin{aligned}
 vol &= 2 \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \\
 &= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=a \sin \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=a \sin \theta} d\theta = \\
 &= \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} a^3 - a^3 |\cos \theta|^3 \, d\theta = \frac{4}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} a^3 - a^3 \cos^3 \theta \, d\theta = \dots = \boxed{\frac{4}{3} a^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)}
 \end{aligned}$$