FUNCIONES INTEGRABLES

JUAN FERRERA

Ya hemos visto que toda función medible no negativa se puede integrar, y su integral será un valor mayor o igual que cero. Es decir, puede ser un número real mayor o igual que 0, pero también puede ser $+\infty$.

Definición: Si f es una función medible no negativa, decimos que f es integrable si

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu < +\infty.$$

Hasta ahora hemos integrado funciones no negativas, en el caso general procedemos del siguiente modo:

Definición: Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, es integrable si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu < +\infty$$

Observación: Si f es medible, ya vimos que también lo es $|f|$, por tanto la integral que aparece en la definición tiene perfecto sentido, ya que el integrando es una función medible no negativa. Por otra parte, si la función de partida ya es no negativa, entonces $|f| = f$ y por tanto la definición coincide con la que dimos al principio de la clase.

Lo siguiente que nos planteamos es ¿como definimos la integral de una función integrable (no necesariamente no negativa). Veámoslo.

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, definimos su parte positiva f^+ y su parte negativa f^- de la siguiente forma:

$$f^+ = \max(f, 0) \qquad f^- = -\min(f, 0)$$

(aquí conviene hacer un dibujo, por ejemplo para $f(x) = x^2 - 1$)

Date: February 6, 2022 (1147).

Observad que f^+ y f^- también son medibles, ya que son supremo, y menos el ínfimo de dos funciones medibles respectivamente (vimos hace unos días que ser medible se conservaba para esas operaciones) Además son funciones no negativas.

Es muy fácil ver (debéis hacerlo) que $f = f^+ - f^-$ y que $|f| = f^+ + f^-$. Esta segunda igualdad implica además que $f^+ \leq |f|$ y que $f^- \leq |f|$. Por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu$$

y lo mismo para f^-. Luego deducimos que si f es integrable, también lo son f^+ y f^-. Es decir, sus integrales que existen por ser funciones medibles no negativas, son números reales que en particular puedo restar! Esto me permite definir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f^- d\mu.$$

Por supuesto de esta definición se sigue que toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann es integrable en sentido Lebesgue y las dos integrales coinciden.