DEFINICIÓN DE MEDIDA EXTERIOR

JUAN FERRERA

Sea

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \in \mathbf{R}^n$$

un rectángulo cerrado. Definimos su volumen

$$v(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n).$$

Analogamente si los intervalos que definen Q son abiertos, tenemos un rectángulo abierto. Cuando hablemos de rectángulos, nos referiremos indistintamente a rectángulos abiertos, cerrados, o incluso cualquier conjunto Q entre el interior de Q y la adherencia de Q (rectángulos semiabiertos por ejemplo). Es importante tener en mente que todos los rectángulos entre el interior de Q y la adhencia de Q tienen el mismo volumen.

Definición:

Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, definimos su medida exterior, $\mu^*(A)$ como

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)$$

donde el ínfimo se toma entre todos los recubrimientos por rectángulos $\{Q_k\}_k$ numerables de A.

Es decir, para cualquier sucesión de rectángulos $\{Q_k\}_k$, tal que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

calculamos

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)$$

que, al ser una serie de términos positivos, será un número positivo o posiblemente $+\infty$. De esa familia de valores, nos quedamos con el ínfimo (como siempre, este ínfimo no tiene por que alcanzarse)

Antes de seguir avanzando, debemos darnos cuenta de un detalle.

Observación:

Date: January 19, 2022 (922).

En la definición, hemos dicho rectángulos, sin especificar de que tipo. Es esto inconsistente? en otras palabras pueden tenerse distintos valores de $\mu^*(A)$ si exigimos que los rectángulos sean abiertos? o cerrados? La respuesta es **NO**. Veámoslo: Primero observamos que si tengo un recubrimiento de A, $\{Q_k\}_k$, por rectángulos arbitrarios, entonces $\{\overline{Q}_k\}_k$ también es recubrimiento de A, y como $V(Q_k) = V(\overline{Q}_k)$, los valores que nos aportan los dos recubrimientos son los mismos.

El recíproco es un poco más difícil, pero basta darse cuenta de que todo rectángulo cerrado se puede poner como subconjunto de un rectángulo abierto, con volumen un "poco" mas grande, y ese poco más grande puede ser todo lo pequeño que queramos (pensad esto bien hasta que lo tengais claro).

De esta forma, dado $\varepsilon > 0$, tomamos un recubrimiento por rectángulos cerrados $\{Q_k\}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A) + \varepsilon/2$$

Para cada Q_k construimos R_k rectángulo abierto, tal que $Q_k \subset R_k$ y tal que $v(R_k) < v(Q_k) + \varepsilon/2^{k+1}$. Tenemos que $\{R_k\}$ también recubre A, y

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) + \varepsilon/2 < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que tomando rectángulos abiertos obtenemos el mismo valor para el infimo que tomando rectángulos cerrados. Con lo que terminamos.

Cuando $\mu^*(A) = 0$, decimos que el conjunto A **tiene medida** 0**.** Observad que por la definición de medida exterior de un conjunto, $\mu^*(A) = 0$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento de A por rectángulos $\{Q_k\}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon.$$

Observación: La observación anterior implica en particular que todo conjunto numerable $\mathcal{N}$ verifica que $\mu^*(\mathcal{N}) = 0$. Una pregunta natural es si el recíproco es cierto. La respuesta es **NO**, para $n \geq 2$ es muy fácil ver ejemplos, en el caso de $\mathbb{R}$ el Conjunto de Cantor es un ejemplo sencillo.