PROBLEMAS IV

JUAN FERRERA

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. En cada uno de los casos siguientes encuentra un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que la integral doble $\int_A f$ se exprese como la integral iterada que se indica. A continuación expresa la integral doble como una integral iterada en el otro orden de integración.

(a)
$$\int_0^R \Big(\int_0^x f(x,y)dy \Big) dx, \quad R > 0$$

(b)
$$\int_1^3 \Big(\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx \Big) dy$$

(c)
$$\int_1^2 \Big(\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy \Big) dx$$

(d)
$$\int_0^1 \Big(\int_{-(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}^{1-y} f(x,y)dx \Big) dy$$

(e)
$$\int_0^3 \Big(\int_{x^2}^{18-x^2} f(x,y)dy \Big) dx$$

(f)
$$\int_0^4 \Big(\int_y^{10-y} f(x,y)dx \Big) dy$$

(g)
$$\int_{\frac{a}{2}}^a \Big(\int_0^{(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}} f(x,y)dy \Big) dx \qquad a > 0$$

(h)
$$\int_0^1 \Big(\int_0^{\min(1,-\log y)} f(x,y)dx \Big) dy$$

Date: February 17, 2022 (642).

(2) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua. En cada uno de los casos siguientes encuentra un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ tal que la integral triple $\int_A f$ se exprese como la integral iterada que se indica. A continuación expresa la integral triple como una integral iterada en otro orden de integración.

(a)
$$\int_{-1}^{1}\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz\Big)dy\Big)dx$$

(b)
$$\int_{0}^{1}\Big(\int_{0}^{1}\Big(\int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz\Big)dx\Big)dy$$

(3) Deduce, para funciones de clase C^2, a partir del Teorema de Fubini, el Teorema de Schwarz de las parciales cruzadas.

(4) Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}^2$ como se indican a continuación. Calcula $\int_A f$.
(a) $f(x,y) = ye^{-xy}, \quad A = [0,a]^2$
(b) $f(x,y) = \max(x,y), \quad A = [-2,2] \times [-1,1]$

(5) Encuentra un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ de medida 0, de forma que algunas secciones suyas no tengan medida 0.

(6) Prueba que si una función es medible, entonces su gráfica es medible y además tiene medida 0.

(7) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones medibles tal que $f \leq g$. Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ verificando
$$\{(x,t) : f(x) < t < g(x)\} \subset M \subset \{(x,t) : f(x) \leq t \leq g(x)\}$$
Prueba que $\mu_{n+1}(M) = \int_{\mathbb{R}^n}(g-f)d\mu_n$

(8) Sea $E = \{(x,y) : x \leq y\}$. Calcula
$$\int_E e^{-y^2}dxdy$$

(9) Aplica el Teorema de Fubini a la función $f(x,y) = e^{-y}\sin 2xy$ en el recinto $[0,1] \times [0,+\infty)$ para probar que
$$\int_0^{\infty} e^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}dy = \frac{1}{4}\log 5$$

(10) Estudia la integrabilidad de
$$f(x,y) = xe^{-y}\frac{\sin y}{y^2}$$
en $\mathbb{R}^2$.

(11) Sea
$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$
definida en $[-1,1] \times [-1,1] \setminus \{(0,0)\}$. Comprueba que las integrales reiteradas coinciden aunque la función no es integrable.

(12) Sea $A = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Consideramos la función

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 + y)(1 + x^2 y)}$$

Calcula $\int_A f(x, y)dxdy$ y deduce que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

(13) En los siguientes casos comprueba si F está bien definida y en caso afirmativo calcula su derivada.
 (a) $F(t) = \int_0^1 \log(x^2 + t^2)dx$
 (b) $F(t) = \int_0^\pi \frac{e^{xt}}{x} dx$
 (c) $F(t) = \int_0^{+\infty} te^{-tx}dx, \quad t > 0$
 (d) $F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log x} dx$.

(14) Calcular las siguientes integrales derivando respecto a los parámetros:
 (a) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-tx}}{xe^x} dx, \quad t > -1$.
 (b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(1 + t\cos^2 x)}{\cos^2 x} dx, \quad t \geq 0$.
 (c) $\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\log x} dx, \quad \alpha, \beta > -1$.
 (d) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad \alpha, \beta > 0$.

(15) Se considera la función

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2} dt$$

Calcula su derivada y deduce el valor de $\int_0^\infty e^{-x^2}$.

(16) Consideramos la función

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx, \qquad y > 0$$

Probar que
 (a) F es continua en $(0, +\infty)$.
 (b) $\lim_{y \to +\infty} F(y) = 0$.
 (c) F es derivable y $F'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx$.
 (d) $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \frac{1}{1+y^2}$ para todo $y > 0$.
 (e) $F(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$ para todo $y > 0$.
 (f) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ como integral impropia de Riemann.
 (g) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$ como integral impropia de Riemann.
 (h) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \infty$.
 (i) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ como integral de Lebesgue.

(17) Consideramos la función $F : (-1, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida por

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\log(tx + 1)}{x^2 + 1} dxdy.$$

Prueba que F está bien definida, y que es derivable. Calcula su derivada. Deduce que

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8}\log 2$$

(Examen 2019).

(18) Prueba que

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\log(1+tx^2)}{x^2}dx$$

define una función C^1 para $t > 0$ y calcula su derivada. (Examen 2021)