DEFINICIÓN DE LA MEDIDA DE LEBESGUE

JUAN FERRERA

Una propiedad que esperamos que cumpla una medida es que si dos conjuntos son disjuntos, entonces la medida de su uniôn es la suma de sus medidas (esta propiedad se denomina aditividad). La medida exterior de Lebesgue cumple esta condición cuando la distancia entre los dos conjuntos es positiva. También cumple una de las desigualdades ($\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$) pero en general no cumple la igualdad. Por eso vamos a restringir la familia de conjuntos que podemos medir, que llamaremos conjuntos medibles Lebesgue, y dentro de esta familia si se va a cumplir la aditividad.

Definición: Decimos que un conjunto A es medible si para todo $S \subset \mathbf{R}^n$ se cumple

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$$

Aqui recordamos que A^c denota el complementario de A. La definición parece misteriosa y si uno piensa un poco en ella, parecería que todos los conjuntos A tienen que cumplirla, ya que $S = (S \cap A) \cup (S \cap A^c)$ como unión disjunta. La intuición no va descaminada. Veremos que la "mayoría" de los conjuntos que podemos imaginarnos van a cumplir esta propiedad. De hecho, describir un conjunto no medible es artificioso, tecnicamente sofisticado y difícil. Indicar que la existencia de un conjunto no medible exige usar el Axioma de Elección. De hecho si se trabaja con la axiomática natural de la Teoría de Conjuntos (Zermelo-Frenkel) pero sin el Axioma de Elección, la existencia de conjuntos **no medibles para la medida exterior de Lebesgue** es una proposición indecible.

Más adelante veremos que son "muchos" los conjuntos medibles, en particular lo serán los conjuntos borelianos que habreis visto en probabilidad o en estadística.

Volviendo a la definición, indicar que lo que nos dice es que vamos a llamar conjuntos medibles a aquellos que nos permiten descomponer cualquier conjunto S en union de dos disjuntos cuya suma de medidas exteriores sea la medida exterior de S.

Date: January 19, 2022 (1011).

Teorema de Caratheodory Los conjuntos medibles forman una σ-álgebra y la medida exterior sobre ellos es σ-aditiva.

Aunque son conceptos que posiblemente hayais visto en probabilidad, recordamos que una σ-álgebra es una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ que verifica las siguientes propiedades:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
(2) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$
(3) Si $\{A_k\}_k \subset \mathcal{A}$ entonces

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

De estas propiedades se sigue inmediatamente que $\mathbf{R}^n \in \mathcal{A}$, y que las intersecciones numerables de conjuntos que pertenecen a la σ-álgebra, también pertenecen a la σ-álgebra.

Por otra parte que la medida exterior sea σ-aditiva quiere decir que si $\{A_k\}_k \subset \mathcal{A}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

Cuando A sea medible, denotaremos $\mu^*(A)$ por $\mu(A)$, y diremos que es la medida de A, es decir omitiremos la palabra exterior.

Demostración del Teorema de Caratheodory:
(1). Si A es medible entonces A^c es medible.

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) = \mu^*(S \cap (A^c)^c) + \mu^*(S \cap A^c)$$

(2) Si A tiene medida 0 entonces es medible. En particular $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son medibles.

Como $\mu^*(S \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$, tenemos que $\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) = \mu^*(S \cap A^c) \leq \mu^*(S)$ de donde se deduce la igualdad porque la otra desigualdad se tiene siempre.

(3) Si A y B son medibles, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son medibles

$$\mu^*(S \cap (A \cup B)) + \mu^*(S \cap (A \cup B)^c) =$$
$$\mu^*((S \cap A) \cup (S \cap (B \setminus A)) + \mu^*(S \cap (A \cup B)^c) \geq$$
$$\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap (B \cap A^c)) + \mu^*(S \cap (A \cup B)^c) =$$
$$\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) = \mu^*(S).$$

Luego $A \cup B$ es medible. Para ver que $A \cap B$ es medible, basta observar

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(4) Si $A_1, \dots A_m$ son medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_m) = \mu(A_1) + \dots \mu(A_m)$$

Basta probarlo para dos:

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_2) + \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_2^c) =$$
$$\mu^*(A_2) + \mu^*(A_1)$$

(5) Si $\{A_k\}_k$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces para todo m se tiene

$$\mu^*(S) = \sum_{k=1}^{m} \mu^*(S \cap A_k) + \mu^*\Big(S \cap (\bigcup_{k=1}^{m} A_k)^c\Big)$$

Para $m = 1$ es inmediato por ser A_1 medible, suponemos cierto para p.

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A_{p+1}) + \mu^*(S \cap A_{p+1}^c) =$$
$$\mu^*(S \cap A_{p+1}) + \sum_{k=1}^{p} \mu^*(S \cap A_{p+1}^c \cap A_k) + \mu^*\Big((S \cap A_{p+1}^c) \cap (\bigcup_{k=1}^{p} A_k)^c\Big) =$$
$$\mu^*(S \cap A_{p+1}) + \sum_{k=1}^{p} \mu^*(S \cap A_k) + \mu^*\Big(S \cap (\bigcup_{k=1}^{p+1} A_k)^c\Big) =$$
$$\sum_{k=1}^{p+1} \mu^*(S \cap A_k) + \mu^*\Big(S \cap (\bigcup_{k=1}^{p+1} A_k)^c\Big)$$

(6) Si $\{A_k\}_k$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu^*(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(S \cap A_k) + \mu^*\Big(S \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c\Big)$$

Para todo m tenemos

$$\mu^*(S) = \sum_{k=1}^{m} \mu^*(S \cap A_k) + \mu^*\Big(S \cap (\bigcup_{k=1}^{m} A_k)^c\Big) \geq$$
$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(S \cap A_k) + \mu^*\Big(S \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c\Big)$$

luego haciendo tender $m \to \infty$ obtenemos la desigualdad no trivial.

(7) Si $\{A_k\}_k$ es una sucesión de conjuntos medibles, entonces $\cup_k A_k$ y $\cap_k A_k$ son medibles.

Es fácil ver que basta probar que $\cup_k A_k$ es medible, ya que la intersección sale tomando complementarios. Como podemos poner $\cup_k A_k$ como una unión disjunta, basta probar el resultado suponiendo que los conjuntos A_k son disjuntos dos a dos. Veamoslo:

$$\mu^*\Big(S \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)\Big) + \mu^*\Big(S \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c\Big) \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(S \cap A_k) + \mu^*\Big(S \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c\Big) = \mu^*(S).$$

La otra desigualdad es trivial.

(8) Si $\{A_k\}_k$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Basta tomar $S = \cup_k A_k$ en (7). ♠