PROBLEMAS I

JUAN FERRERA

(1) Prueba que la unión numerable de conjuntos de medida 0 tiene medida 0. En particular todo conjunto numerable tiene medida 0.
(2) Probar que las caras de un rectángulo tienen medida 0.
(3) Sea $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{x_n\}_n$. Para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$G_n(\varepsilon) = \big(x_n - \varepsilon 2^{-n}, x_n + \varepsilon 2^{-n}\big),$$

$$G(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(\varepsilon), \quad \text{y} \quad H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

   (a) Para todo $\varepsilon > 0$, $G(\varepsilon)$ es abierto y $\mu\big(G(\varepsilon)\big) \leq \varepsilon$.
   (b) $G(\varepsilon)^c$ es diseminado para todo $\varepsilon > 0$.
   (c) H es denso en $[0,1]$, H^c es unión numerable de conjuntos diseminados, pero $\mu(H^c) = 1$.

(4) Prueba que todo conjunto abierto es unión numerable de cubos abiertos.
(5) Consideramos el intervalo $[0,1]$. Definimos $I_1 = I_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Definimos $I_2^1 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $I_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, y $I_2 = I_2^1 \cup I_2^2$. Seguimos el procedimiento de la siguiente forma: dado n, denotamos por

$$C_n = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k.$$

   C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos. Cada uno de estos intervalos lo dividimos en 3 y llamamos a los intervalos abiertos centrales $I_{n+1}^1, \dots I_{n+1}^{2^n}$. Denotamos su unión por I_{n+1}, y continuamos el proceso. El conjunto $C = \cap_n C_n$ se denomina Conjunto ternario de Cantor.
   (a) $\mu(C) = 0$.
   (b) Los únicos subconjuntos conexos de C son los puntos (C es extremadamente disconexo).
   (c) C es diseminado
   (d) C es cerrado y todos sus puntos son de acumulación.
   (e) $x \in C$ si y solo si admite un desarrollo decimal en base 3 en el que no aparece el 1.

Date: January 19, 2022 (925).

(f) C es no numerable.

(6) Definimos la función $f : [0,1] \setminus C \to [0,1]$ como
$$f(x) = \frac{2i-1}{2^k} \quad \text{si} \;\; x \in I_k^i, \;\; i = 1, \dots, 2^{k-1}. \;\; k \in \mathbf{N}.$$
Probar que f es uniformemente continua, y por tanto se puede extender a una función continua $g : [0,1] \to [0,1]$, conocida como función de Cantor, que es no decreciente y tiene derivada cero en casi todo punto.

(7) Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz. Demuestra primero que existe una constante $K > 0$ tal que si Q es un n-cubo de lado ℓ, entonces $F(Q)$ está contenido en un n-cubo de lado $K\ell$. Deduce que si $N \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero, entonces $F(N)$ también tiene medida cero.

(8) Sea $m < n$, sea $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz. Demuestra que $F(\mathbb{R}^m)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$. Deduce que toda recta en el plano tiene medida cero y que todo plano en el espacio tiene medida cero.

(9) Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $F : G \to \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, de clase C^1. Prueba que si N satisface $\overline{N} \subset G$ y tiene medida cero, entonces $F(N)$ tiene medida cero.

(10) Con la notación del ejercicio anterior, prueba que se puede prescindir de la hipótesis $\overline{N} \subset G$.