Cálculo integral

Mario Calvarro Marines

26 de enero de 2022

Medidas

Definición de medida exterior

Sea $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo. Definimos como volumen de Q a $v(Q) = (b_n - a_n) \cdots (b_1 - a_1)$

Definición (Medida exterior)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Definimos como medida exterior de A a:

$$\mu^* = \inf \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)\,; \ \textit{donde } \{Q_k\}_{k=1}^{\infty} \textit{ y } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

Podemos restringir el ínfimo a $\delta > 0 :\ \operatorname{diam} Q_k < \delta$. Cambiaríamos los $Q_k \geq \delta$ por divisiones que si lo cumplan. .

Observación:
Decimos que A tiene medida 0: $\mu^*(A) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \{Q_k\}$ rec. de A : $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$
Ejemplo:

1. $x_0 \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0,\ v(Q(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$
2. N numerable: $N = \{x_k\},\ x_k \in Q_k(x_k) : v(Q_k(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}^n \implies \mu^*(c + A) = \mu^*(A)$.

Proposición

Sea $A \subset B \subset \mathbb{R}^n \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Demostración:

Si $\mu^*(B) = +\infty$ ya está.
Por tanto, sea $\{Q_k\}$ rec. de B. Como $A \subset B \implies \{Q_k\}$ rec. de A $\implies \mu^*(A) \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Proposición

Sean $A, B \in \mathbb{R}^n \implies \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Demostración:

Si $\mu^*(A) = +\infty$ o $\mu^*(B) = +\infty$ ya está.
Sean ambos finitos $\implies$

$$\text{Tomando } \varepsilon > 0 \implies \begin{cases} \exists \{Q_k\} \text{ rec. de A: } \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \{R_k\} \text{ rec. de B: } \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Consideremos $\{Q_k, R_k\} = \{S_j\}$ donde $S_j = \begin{cases} Q_{\frac{j}{2}}, & j \text{ par} \\ Q_{\frac{j+1}{2}}, & j \text{ impar} \end{cases} \implies$
$\{S_j\}$ rec. de $A \cup B \implies \mu^*(A \cup B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(B_j) = \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) + \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon \implies \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Proposición

Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo $\implies v(Q) = \mu^*(Q)$

Demostración:

- $\mu^*(Q) \leq v(Q)$: Tomamos $\varepsilon > 0$ y consideramos $\{Q_k\}$ recubrimiento de $Q : Q_1 = Q$ y para $k \geq 2$, Q_k será un rectángulo $< \varepsilon/2^k$. Con esto $\{Q_k\}$ es rec. de Q y:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) = v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} v(Q_k) < v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < v(Q) + \varepsilon.$$

  Por tanto, tomando ínfimos:

$$\mu^*(Q) \leq v(Q) + \varepsilon \implies \mu^*(Q) \leq v(Q).$$

- $v(Q) \leq \mu^*(Q)$: Observamos que $\overline{Q}$ es la unión de las caras de Q (C_i). Por tanto,

$$v(Q) = v\left(\overline{Q}\right)$$
$$\mu^*(Q) \leq \mu^*\left(\overline{Q}\right)$$
$$\mu^*\left(\overline{Q}\right) = \mu^*(Q \cup (C_1, \ldots, C_m)) \leq \mu^*(Q) + \mu^*(C_1) + \ldots + \mu^*(C_m) = \mu^*(Q)^{1}$$

  Podemos suponer que Q es cerrado ($\implies Q$ es compacto).
  Basta probar que $v(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)\,,\ \forall \{Q_k\}$.[2] $Q \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$.
  Como Q es compacto $\implies$

$$Q \subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_N \implies v(Q) \leq v(Q_1) + \ldots + v(Q_N) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k).$$

  Por último, tomamos ínfimos.

Distancias

Recordemos que diam $A = \text{Sup}\{||x - t|| : \ x \in A,\ t \in B\}$

Proposición

Si $\mathrm{d}(A, B) > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Demostración:

Si $\mu^*(A \cup B) = +\infty \implies \mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B)$. Podemos suponer, pues, que es finito.
Tenemos

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Tomamos $\delta > 0 : \ \delta < \frac{1}{2}\mathrm{d}(A, B)$ y $\varepsilon > 0 : \ \exists \{Q_k\}$ rectángulos $:$ diam $Q_k < \delta$ y $A \cup B \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A \cup B) + \varepsilon$. Además cumplen:

$$\begin{cases} Q_k \cap A = \emptyset \text{ ó} \\ Q_k \cap B = \emptyset \end{cases}.$$

[2] Abiertos

Si no fuese así $\exists a, b \in Q_k : a \in A,\ a \in B : \delta < d(A,B) \leq ||a-b|| < \delta$ ¡!
Consideremos pues

$$\begin{cases} \{Q_k : Q_k \cap A \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } A \\ \{Q_k : Q_k \cap B \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } B \end{cases}.$$

Con esto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) \geq \sum_{Q_k \cap A \neq \emptyset}^{\infty} v(Q_k) + \sum_{Q_k \cap B \neq \emptyset}^{\infty} v(Q_k) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B) \implies$$
$$\mu^*(A) + \mu^*(B) < \mu^*(A \cup B) + \varepsilon \implies$$
$$\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B).$$

Teorema

La medida exterior de Lebesgue cumple:

1. $\mu^*(\phi) = 0$
2. $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. $\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$

Demostración:

3. Si $\exists k : \mu^*(A_k) = +\infty$, ya está.
Suponemos que $\mu^*(A_k) < +\infty,\ \forall k$. Tomamos $\varepsilon > 0$

$$\forall k,\ \exists\{Q_k\} : A_k \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^k :$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} v\left(Q_j^k\right) < \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\text{Como: } \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^k \text{ y } \{Q_j^k\} \text{ es numerable.} \implies$$

$$\bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_j^k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \implies$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{j,k} v\left(Q_j^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v\left(Q_j^k\right) < \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)\right) + \varepsilon \implies \mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Proposición

$\exists A, B : A \cap B = \emptyset \ \wedge\ \mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Es medible $\iff$

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c),\ \forall S \subset \mathbb{R}^n.$$

Teorema (De Caratheodory)

Los conjuntos medibles forman una σ-algebra y la medida exterior de Lebesgue, μ^*, es σ-aditiva cuando la restringimos a los conjuntos medibles.

Demostración:

En las notas.

Definición

Decimos que la medida exterior es σ-aditiva $\iff$

$$\text{Si } \{A_k\} \subset \mathcal{A} \text{ disjuntos dos a dos } \implies \mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)\,.$$

Una vez restringimos a la σ-algebra podemos escribir μ^* como μ y la medida exterior de Lebesgue será la medida de Lebesgue simplemente

Proposición

Todo conjunto A de medida 0 es medible

Demostración:

$\mu^*(S) \leq \mu^*(S\cap A) + \mu^*(S\cap A^c)$ siempre es cierta.
$\mu^*(S\cap A) + \mu^*(S\cap A^c) \leq \mu^*(S)$ porque el primer sumando vale cero ($S\cap A \subset A$) y $S\cap A^c \subset S$.

Proposición

Todo rectángulo Q es medible.

Demostración:

Siempre se cumple que $\mu^*(S) \leq \mu^*(S\cap Q) + \mu^*(S\cap Q^c)$.
Veamos la otra, ¿$\mu^*(S\cap Q) + \mu^*(S\cap Q^c) \leq \mu^*(S)$?
Tomemos un recubrimiento de S:

$$\{Q_j\} : S \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j.$$

Observamos que $\{Q_j \cap Q\}$ siempre son rectángulos que recubren a $S\cap Q \implies$

$$\mu^*(S\cap Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j\cap Q)\,.$$

A su vez, $\{Q_j \cap Q^c\}$ (no son rectángulos pero sí una unión finita de estos: $Q_j\cap Q^c = R_1\cup\ldots\cup R_m$: $R_1\cup\ldots\cup R_m \cup (Q_j\cap Q) = Q_j \implies v(Q_j) = V(R_1) + \ldots + v(R_m) + v(Q_j\cap Q)$) recubren $S\cap Q^c \subset \{R_i^j\} \implies$

$$\mu^*(S\cap Q^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v\left(R_i^j\right).$$

Así?,

$$\mu^*(S\cap Q) + \mu^*(S\cap Q^c) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j\cap Q) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left(v(Q_j\cap Q) + v\left(R_1^j\right) + \ldots + v\left(R_m^j\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j)\,.$$