PROBLEMAS II

JUAN FERRERA

(1) La función característica de A es medible si y solo si A es medible.
(2) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sea $x \in (a, b)$. f es continua en x si y solo si $o(f, x) = 0$.
(3) Si $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \aleph_{E_i} = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \aleph_{D_i}$, entonces
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \mu(D_i)$$
(4) Probar que si φ y ψ son funciones simples no negativas, entonces
  (a) Si $c > 0$, entonces $I(c\varphi) = cI(\varphi)$.
  (b) $I(\varphi + \psi) = I(\varphi) + I(\psi)$.
  (c) Si $\varphi \leq \psi$ c.t.p. entonces $I(\varphi) \leq I(\psi)$.
  (d) Si $\varphi = \psi$ c.t.p. entonces $I(\varphi) = I(\psi)$.
(5) Si f y g son funciones medibles no negativas y $f \leq g$ c.t.p. entonces
$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu$$
(6) Sea $f : [0.1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 0$ if $(x, y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, y $f(x, y) = \frac{1}{q}$ if $y = \frac{p}{q}$ irreducible en caso contrario. Demuestra que f medible y calcula su integral.
(7) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo, sea $f : A \to \mathbb{R}^+$ medible. Prueba que si $\int_A f d\mu = 0$ y f es continua en x_0, entonces $f(x_0) = 0$.
(8) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de medida cero y $f : A \to \mathbb{R}^+$ una función medible. Demuestra que $\int_A f = 0$.
(9) Prueba que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ x & \text{si } y < x \end{cases}$$
es medible.

Date: January 26, 2022 (1101).