MEDIBILIDAD DE LAS FUNCIONES INTEGRABLE RIEMANN

JUAN FERRERA

Primero introducimos el concepto de oscilación de una función en un punto.

Definición Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, sea $x_0\in(a,b)$. Definimos la oscilación de f en x_0 como

$$o(f,x_0)=\lim_{\delta\downarrow 0}\Big(\sup\{|f(y)-f(x)| : x,y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\}\Big)$$

Es claro que este límite siempre existe, porque el paréntesis, que está acotado inferiormente por 0, decrece con δ. La demostración de la siguiente proposición es inmediata y se deja como ejercicio.

Proposición f es continua en x si y solo si $o(f,x)=0$

Teorema (Lebesgue): Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. f es integrable Riemann si y solo si su conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida 0.

Demostración: Suponemos que $|f(x)|\leq M$ para todo $x\in[a,b]$. Sea D el conjunto de puntos de discontinuidad de f. Suponemos primero que D tiene medida 0. Fijo $\varepsilon>0$. Denoto

$$D_\varepsilon=\{x\in(a,b) : o(f,x)\geq\varepsilon\}$$

Es inmediato ver su complementario es un abierto. En efecto, si $x_0\in(a,b)$ verifica $o(f,x_0)<\varepsilon$, entonces existe $\delta_0>0$ tal que

$$\sup\{|f(y)-f(x)| : x,y\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\}<\varepsilon.$$

Para todo $x_1\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, tomando $\delta_1=\delta_0-|x_1-x_0|$ tenemos que

$$\sup\{|f(y)-f(x)| : x,y\in(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)\}<\varepsilon$$

y por tanto $o(f,x_1)<\varepsilon$.

Tenemos entonces que D_ε es un compacto de medida 0 ($D_\varepsilon\subset D$). Por tener medida cero, existe un recubrimiento por una cantidad numerable de intervalos abiertos $D_\varepsilon\subset\cup_n I_n$, tal que $\sum_n\mu(I_n)<\varepsilon$. Ahora bien, como D_ε es compacto, puedo extraer un subrecubrimiento finito. Es decir $D_\varepsilon\subset I_1\cup\cdots\cup I_N$ con $\mu(I_1)+\cdots+\mu(I_N)<\varepsilon$.

Date: January 26, 2022 (1095).

Tomando, además de a y b, todos los extremos de los intervalos I_N obtengo una partición del intervalo $[a, b]$ que llamo $\mathcal{P}$. Denoto por $\mathcal{P}_1$ aquellos intervalos de la partición contenidos en algún I_j, y por $\mathcal{P}_2$ los otros, que en particular no cortan a D_ε.

Para cada intervalo $I \in \mathcal{P}_2$, hacemos el siguiente procedimiento. Para todo $x \in I$ tomamos un intervalo I_x que lo contiene, tal que $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $y, z \in I$. Esto es posible porque como $x \in I$, tenemos que $x \notin D_\varepsilon$. Como I es compacto, un número finito de estos intervalos I_x recubren I. Ahora, quitando trozos a los intervalos si hace falta, construyo con ellos una partición del intervalo I.

Repito este procedimiento para todos los intervalos de $\mathcal{P}_2$, y costruyo así una partición $\mathcal{P}_2^*$ que tiene la propiedad de que la unión de sus intervalos es igual a la unión de los intervalos de $\mathcal{P}_2$, pero ahora, para cada $I \in \mathcal{P}_2^*$ se tiene que

$$\sup_{y \in I} f(y) - \inf_{y_I} f(y) \leq \varepsilon$$

Llamo $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2^*$. Recordando la notación que se usa para definir la integral de Riemann, tenemos que

$$U(f, \mathcal{P}^*) - L(f, \mathcal{P}^*) = \sum_{I \in \mathcal{P}^*} (\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x))\mu(I) =$$

$$\sum_{I \in \mathcal{P}_1} (\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x))\mu(I) + \sum_{I \in \mathcal{P}_2^*} (\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x))\mu(I) \leq$$

$$2M\varepsilon + \varepsilon(b - a).$$

Por tanto el criterio de Cauchy para la integrabilidad Riemann nos garantiza que f es integrable Riemann.

Ahora vemos el recíproco. Supongamos que f es integrable Riemann. Escribimos

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}.$$

Basta ver que cada $D_{1/n}$ tiene medida 0. Fijado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{n}$$

puedo suponer sin pérdida de generalidad que ningún punto de $D_{1/n}$ es extremo de un intervalo de la partición. Denoto por $\mathcal{P}_1$ los intervalos de $\mathcal{P}$ que cortan a $D_{1/n}$. Tenemos que

$$\frac{\varepsilon}{n} > \sum_{I \in \mathcal{P}} (\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x))\mu(I) \geq \sum_{I \in \mathcal{P}_1} (\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x))\mu(I) \geq$$

$$\frac{1}{n} \sum_{I \in \mathcal{P}_1} \mu(I)$$

Luego

$$\sum_{I \in \mathcal{P}_1} \mu(I) < \varepsilon$$

Como la familia $\mathcal{P}_1$ es un recubrimiento de $D_{1/n}$ y ε es arbitrario, deducimos que $\mu(D_{1/n}) = 0$. ♠

En el caso de que hubiésemos definido la Integral de Riemann para funciones definidas en $\mathbb{R}^n$, la demostración anterior puede adaptarse fácilmente a ese contexto.

Corolario: Toda función integrable Riemann es medible.