PROPIEDADES DE LA MEDIDA EXTERIOR (I)

JUAN FERRERA

Lo primero que vamos a ver es que la medida exterior es invariante por traslaciones. Recordad que si A es un conjunto y a un punto, el conjunto $a + A$ (traladado de A según el vector a) es

$$\{a + x : x \in A\}$$

Proposición:
Sean $a \in \mathbf{R}^n$ y $A \subset \mathbf{R}^n$. Entonces

$$\mu^*(A) = \mu^*(a + A)$$

Demostración: Basta observar que si Q es un rectángulo, entonces $a + Q$ también es un rectángulo, y además $v(Q) = v(a + Q)$.

Una vez observado esto, la demostración es inmediata, porque a cada recubrimiento $\{Q_k\}$ de A le corresponde el recubrimiento $\{a + Q_k\}$ de $a + A$, y para ambos recubrimientos el valor suma de los volúmenes de los rectángulos es el mismo. Como también a cada recubrimiento $\{R_k\}$ de $a + A$ le corresponde el recubrimiento $\{-a + R_k\}$ de A, tenemos que los dos ínfimos son iguales. ♣

La siguiente propiedad de la medida exterior también era de esperar. (Si un conjunto está contenido en otro, entonces su medida exterior es menor o igual)

Proposición
Si $A \subset B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
Demostración: Basta observar que todo recubrimiento de B también lo es de A, y por tanto al calcular $\mu^*(A)$ tomamos el ínfimo en un conjunto de valores "más grande", luego el ínfimo que corresponde a A es menor o igual que el ínfimo que corresponde a B. ♣

Obsérvese que A puede estar estrictamente contenido en B y sin embargo tener la misma medida exterior. Por ejemplo Si $A = \{a\}$ y $B = \{a, b\}$, $A \subset B$ y $\mu^*(A) = \mu^*(B) = 0$.

También es fácil ver la siguiente propiedad.

Date: January 19, 2022 (937).

Proposiciòn:
$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$
Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos sendos recubrimientos $\{Q_k\}$ y $\{R_k\}$ de A y B respectivamente, tal que
$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A) + \varepsilon/2 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(B) + \varepsilon/2$$
(esto lo podemos hacer por la definición de ínfimo). Como obviamente $\{Q_k\} \cup \{R_k\}$ es un recubrimiento numerable por rectángulos de $A \cup B$, tenemos que
$$\mu^*(A \cup B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) + \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon$$
Haciendo tender ε a 0 se obtiene el resultado. ♣

Una pregunta natural es cuánto vale la medida exterior de un rectángulo. Como es de esperar:

Proposición:
Si Q es un rectángulo, entonces
$$\mu^*(Q) = v(Q).$$
Demostración: Para probar que $\mu^*(Q) \leq v(Q)$, tomamos $\varepsilon > 0$, entonces consideramos un recubrimiento de Q, $\{Q_k\}$, de la siguiente forma: $Q_1 = Q$, y para $k \geq 2$, Q_k será un rectángulo arbitrario de volumen menor que $\varepsilon/2^k$. Obviamente $\{Q_k\}$ es un recubrimiento de Q y
$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) = v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} v(Q_k) < v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon/2^k < v(Q) + \varepsilon$$
Tomando ínfimos obtenemos que
$$\mu^*(Q) \leq v(Q) + \varepsilon$$
como ε es arbitrario, haciéndolo tender a 0 obtenemos que
$$\mu^*(Q) \leq v(Q).$$
Ahora vamos a probar que $v(Q) \leq \mu^*(Q)$. Primero observamos que la adherencia de Q, $\overline{Q}$, es Q unión las caras de Q, las denotamos como $C_1, \ldots C_m$ (no nos importa cuantas sean). Entonces, usando los resultados anteriores tenemos que
$$\mu^*(Q) \leq \mu^*(\overline{Q}) \leq \mu^*(Q) + \mu^*(C_1) + \ldots \mu^*(C_m) = \mu^*(Q)$$
ya que es inmediato ver que las caras de un cubo tienen medida cero. Es decir deducimos $\mu^*(Q) = \mu^*(\overline{Q})$, como también $v(Q) = v(\overline{Q})$, podemos

suponer que Q es cerrado. Ahora vamos a probar que para cualquier recubrimiento de Q por rectángulos **abiertos** $\{Q_k\}$ se tiene que

$$v(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) \quad (*)$$

De esta forma, tomando ínfimos, tendremos que $v(Q) \leq \mu^*(Q)$.

Vamos a probar $(*)$. Como Q es cerrado (y acotado) es compacto, por tanto una cantidad finita de rectángulos del recubrimiento $\{Q_k\}$, es decir

$$Q \subset Q_{i_1} \cup \cdots \cup Q_{i_j}$$

Luego

$$v(Q) \leq v(Q_{i_1}) + \cdots + v(Q_{i_j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)$$

(La segunda desigualdad es trivial, y para ver la primera, un simple dibujo nos convence de ello). ♣