

Cálculo integral

Juan Diego Barrado Daganzo, Mario Calvarro Marines, Iker Muñoz Martínez

27 de enero de 2022

Medidas

Definición de medida exterior

Sea $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo. Definimos como volumen de Q a $v(Q) = (b_n - a_n) \cdots (b_1 - a_1)$

Definición (Medida exterior)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Definimos como medida exterior de A a:

$$\mu^* = \inf \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k); \text{ donde } \{Q_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ y } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

Podemos restringir el ínfimo a $\delta > 0$: $\text{diam } Q_k < \delta$. Cambiaríamos los $Q_k \geq \delta$ por divisiones que sí lo cumplan. .

Observación:

Decimos que A tiene medida 0: $\mu^*(A) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \{Q_k\} \text{ rec. de } A : \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$

Ejemplo:

1. $x_0 \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0, v(Q(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$
2. N numerable: $N = \{x_k\}, x_k \in Q_k(x_k) : v(Q_k(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}^n \implies \mu^*(c + A) = \mu^*(A)$.

Proposición

Sea $A \subset B \subset \mathbb{R}^n \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Demostración:

Si $\mu^*(B) = +\infty$ ya está.

Por tanto, sea $\{Q_k\}$ rec. de B . Como $A \subset B \implies \{Q_k\}$ rec. de $A \implies \mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Proposición

Sean $A, B \in \mathbb{R}^n \implies \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Demostración:

Si $\mu^*(A) = +\infty$ o $\mu^*(B) = +\infty$ ya está.

Sean ambos finitos \implies

$$\text{Tomando } \varepsilon > 0 \implies \begin{cases} \exists \{Q_k\} \text{ rec. de } A: \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \{R_k\} \text{ rec. de } B: \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(B) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Consideremos $\{Q_k, R_k\} = \{S_j\}$ donde $S_j = \begin{cases} Q_{\frac{j}{2}}, & j \text{ par} \\ Q_{\frac{j+1}{2}}, & j \text{ impar} \end{cases} \implies$
 $\{S_j\}$ rec. de $A \cup B \implies \mu^*(A \cup B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(B_j) = \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) + \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon \implies \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Proposición

Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo $\implies v(Q) = \mu^*(Q)$

Demostración:

- $\mu^*(Q) \leq v(Q)$: Tomamos $\varepsilon > 0$ y consideramos $\{Q_k\}$ recubrimiento de Q : $Q_1 = Q$ y para $k \geq 2$, Q_k será un rectángulo $< \varepsilon/2^k$. Con esto $\{Q_k\}$ es rec. de Q y:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) = v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} v(Q_k) < v(Q) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < v(Q) + \varepsilon.$$

Por tanto, tomando ínfimos:

$$\mu^*(Q) \leq v(Q) + \varepsilon \implies \mu^*(Q) \leq v(Q).$$

- $v(Q) \leq \mu^*(Q)$: Observamos que \overline{Q} es la unión de las caras de Q (C_i). Por tanto,

$$\begin{aligned} v(Q) &= v(\overline{Q}) \\ \mu^*(Q) &\leq \mu^*(\overline{Q}) \\ \mu^*(\overline{Q}) &= \mu^*(Q \cup (C_1, \dots, C_m)) \leq \mu^*(Q) + \mu^*(C_1) + \dots + \mu^*(C_m) = \mu^*(Q)^1 \end{aligned}$$

Podemos suponer que Q es cerrado ($\implies Q$ es compacto).

Basta probar que $v(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k)$, $\forall \{Q_k\}$.² $Q \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$.

Como Q es compacto \implies

$$Q \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_N \implies v(Q) \leq v(Q_1) + \dots + v(Q_N) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k).$$

Por último, tomamos ínfimos.

Distancias

Recordemos que $\text{diam } A = \sup\{\|x - t\| : x \in A, t \in B\}$

Proposición

Si $d(A, B) > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Demostración:

Si $\mu^*(A \cup B) = +\infty \implies \mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B)$. Podemos suponer, pues, que es finito. Tenemos

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Tomamos $\delta > 0$: $\delta < \frac{1}{2}d(A, B)$ y $\varepsilon > 0$: $\exists \{Q_k\}$ rectángulos : $\text{diam } Q_k < \delta$ y $A \cup B \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \mu^*(A \cup B) + \varepsilon$. Además cumplen:

$$\begin{cases} Q_k \cap A = \emptyset \text{ ó} \\ Q_k \cap B = \emptyset \end{cases}.$$

²Abiertos

Si no fuese así $\exists a, b \in Q_k : a \in A, a \in B : \delta < d(A, B) \leq \|a - b\| < \delta$!
Consideremos pues

$$\begin{cases} \{Q_k : Q_k \cap A \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } A \\ \{Q_k : Q_k \cap B \neq \emptyset\} \text{ recubrimiento de } B \end{cases}.$$

Con esto:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) &\geq \sum_{Q_k \cap A \neq \emptyset} v(Q_k) + \sum_{Q_k \cap B \neq \emptyset} v(Q_k) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B) \implies \\ \mu^*(A) + \mu^*(B) &< \mu^*(A \cup B) + \varepsilon \implies \\ \mu^*(A) + \mu^*(B) &\leq \mu^*(A \cup B). \end{aligned}$$

Teorema

La medida exterior de Lebesgue cumple:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. $\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$

Demostración:

3. Si $\exists k : \mu^*(A_k) = +\infty$, ya está.

Suponemos que $\mu^*(A_k) < +\infty, \forall k$. Tomamos $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \forall k, \exists \{Q_j^k\} : A_k &\subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k : \\ \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j^k) &< \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \\ \text{Como: } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k &\subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k \text{ y } \{Q_j^k\} \text{ es numerable. } \implies \\ \bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_j^k &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^k \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \implies \\ \mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) &\leq \sum_{j,k} v(Q_j^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j^k) < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \right) + \varepsilon \implies \mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k). \end{aligned}$$

Proposición

$$\exists A, B : A \cap B = \emptyset \wedge \mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Es medible \iff

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c), \forall S \subset \mathbb{R}^n.$$

Teorema (De Caratheodory)

Los conjuntos medibles forman una σ -álgebra y la medida exterior de Lebesgue, μ^* , es σ -aditiva cuando la restringimos a los conjuntos medibles.

Demostración:

En las notas.

Definición

Decimos que la medida exterior es σ -aditiva \iff

$$\text{Si } \{A_k\} \subset \mathcal{A} \text{ disjuntos dos a dos } \implies \mu^* \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Una vez restringimos a la σ -álgebra podemos escribir μ^* como μ y la medida exterior de Lebesgue será la medida de Lebesgue simplemente

Proposición

Todo conjunto A de medida 0 es medible

Demostración:

$\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$ siempre es cierta.

$\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \leq \mu^*(S)$ porque el primer sumando vale cero ($S \cap A \subset A$) y $S \cap A^c \subset S$.

Proposición

Todo rectángulo Q es medible.

Demostración:

Siempre se cumple que $\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c)$.

Veamos la otra, ¿ $\mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c) \leq \mu^*(S)$?

Tomemos un recubrimiento de S :

$$\{Q_j\} : S \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j.$$

Observamos que $\{Q_j \cap Q\}$ siempre son rectángulos que recubren a $S \cap Q \implies$

$$\mu^*(S \cap Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j \cap Q).$$

A su vez, $\{Q_j \cap Q^c\}$ (no son rectángulos pero sí una unión finita de estos: $Q_j \cap Q^c = R_1 \cup \dots \cup R_m$: $R_1 \cup \dots \cup R_m \cup (Q_j \cap Q) = Q_j \implies v(Q_j) = v(R_1) + \dots + v(R_m) + v(Q_j \cap Q)$) recubren $S \cap Q^c \subset \{R_i^j\} \implies$

$$\mu^*(S \cap Q^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(R_i^j).$$

Así?,

$$\begin{aligned} \mu^*(S \cap Q) + \mu^*(S \cap Q^c) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j \cap Q) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left(v(Q_j \cap Q) + v(R_1^j) + \dots + v(R_m^j) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j). \end{aligned}$$