

# **SISTEMAS BINARIOS DE ESTRELLAS DE NEUTRONES COMO SUPER-EMISORES DE ONDAS GRAVITACIONALES**

Propuesta de trabajo de grado

Estudiante: Juan Diego Figueroa Hernández<sup>1,2</sup>

Director: José Fernando Rodríguez Ruiz<sup>1</sup>

Codirectora: Laura Marcela Becerra Bayona<sup>1,2</sup>

Codirector: Luis Alberto Nuñez de Villavicencio<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación - UIS

<sup>2</sup>Complejo Astronómico Grupo Halley - UIS

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2023

# Resumen

**TÍTULO:** SISTEMAS BINARIOS DE ESTRELLAS DE NEUTRONES COMO SUPER-EMISORES DE ONDAS GRAVITACIONALES.

**AUTOR:** FIGUEROA HERNÁNDEZ, Juan Diego<sup>1</sup>.

**PALABRAS CLAVES:** Ondas gravitacionales, sistemas binarios compactos, estrellas de neutrones.

**DESCRIPCIÓN:** En el presente trabajo se propone calcular la eficiencia de la emisión de ondas gravitacionales en el proceso de fusión de objetos compactos con un enfoque particular en estrellas de neutrones binarias. Asimismo, se pretende determinar el intervalo de frecuencias de las ondas durante la parte final del proceso. Lo anterior permitirá inferir la detectabilidad de estos sistemas por los actuales interferómetros terrestres, LIGO-Virgo, así como por futuros proyectos, e.g., el Telescopio Einstein. Para lograr este objetivo, se estudiarán y se extenderán modelos aproximados ya propuestos en la literatura. Estos modelos dividen la fusión en cuatro fases principales: i) régimen espiral adiabático, ii) caída y fusión, iii) amortiguamiento o “ringdown”, iv) objeto final: agujero negro de Kerr o estrella de neutrones con rotación rápida. Para el análisis y la correspondencia entre las diferentes fases se plantea utilizar, además de la fórmula Newtoniana de radiación cuadrupolar, leyes generales de la física, tales como la conservación de la energía, la conservación del momento angular, la conservación de la materia bariónica; y relaciones cuasi-universales que describen a la estrella de neutrones final que no emite radiación gravitatoria. Con lo anterior, se podrá discernir cuáles son los sistemas que emiten mayor energía por unidad de masa en forma de ondas gravitacionales, i.e, cuáles sistemas son super-emisores. Por último, se propone estudiar el impacto de la presencia o ausencia de un disco alrededor del objeto final y, el efecto de la rotación de las estrellas de neutrones que forman el sistema binario inicial. Modelos aproximados que siguen leyes generales de la física, como los modelos en cuestión, sirven de guía para investigaciones numéricas más detalladas.

---

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José Fernando Rodríguez Ruiz (Director), Laura Marcela Becerra Bayona (Codirectora), Luis Alberto Nuñez de Villavicencio (Codirector).

**CONTENIDO**

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>4</b>
<b>2. MARCO TEÓRICO</b>	<b>6</b>
2.1. Notación . . . . .	6
2.2. Ecuaciones de Einstein . . . . .	6
2.3. Ondas gravitacionales . . . . .	6
2.3.1. Polarización de las ondas gravitacionales . . . . .	7
2.3.2. Tensor energía impulso y luminosidad asociada a las ondas gra- vitacionales . . . . .	8
2.3.3. Radiación de ondas gravitacionales . . . . .	9
2.3.4. Detección de ondas gravitacionales . . . . .	11
2.4. Sistemas binarios . . . . .	12
2.4.1. Fases de la fusión de los sistemas binarios . . . . .	13
<b>3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>17</b>
<b>4. OBJETIVOS</b>	<b>18</b>
4.1. Objetivo General . . . . .	18
4.2. Objetivos específicos . . . . .	18
<b>5. METODOLOGÍA</b>	<b>19</b>
<b>6. CRONOGRAMA</b>	<b>20</b>

# 1. INTRODUCCIÓN

La primera detección de ondas gravitacionales se produjo en 2015 con el observatorio LIGO y fue consistente con la fusión de dos agujeros negros, siendo denominado como el evento GW150914 [1]. Posteriormente, en 2017, se detectó el evento GW170817, consistente con la fusión de dos estrellas de neutrones [2]. Además de la detección de las ondas gravitacionales, en este último evento mencionado se logró observar la contraparte electromagnética. Este tipo de detecciones, donde un mismo evento es observado en diferentes canales, es de suma relevancia, ya que permite inferir el corrimiento al rojo, asociar estos eventos de estallidos de rayos gamma (GRB) cortos, con la fusión de objetos compactos, y, por lo tanto, permite la confirmación de la producción de elementos pesados, como el oro y el platino en dichas fusiones.

La expectativa general es que los agujeros negros binarios generan escenarios que pueden emitir ondas gravitacionales de manera más eficiente que otros sistemas, e.g., sistemas binarios de estrellas de neutrones, respaldada por el hecho de que registran campos gravitacionales intensos y altas velocidades durante su fusión [3]. Esto se debe, en parte, a la compacidad de estos objetos, que viene dada por la expresión  $\mathcal{C} = \frac{GM}{Rc^2}$ , donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  es la masa del objeto,  $R$  es su radio y  $c$  es la velocidad de la luz. De hecho a la fecha de este escrito se han detectado alrededor de 90 eventos que involucran emisión de ondas gravitacionales [4]. En contraste, solo se ha confirmado una detección de ondas gravitacionales consistente con la fusión de estrellas de neutrones [2].

Sin embargo, aunque la fusión de agujeros negros genera deformaciones más significativas en el espacio-tiempo (respecto a otros objetos compactos como las estrellas de neutrones), es importante cuestionar si esto garantiza que sean la fuente más detectable de ondas gravitacionales o más eficiente en comparación con encuentros de otros sistemas binarios compactos.

De hecho, un detector de ondas gravitacionales es sensible a la energía que le llega dentro de su rango de frecuencia, lo que podría implicar que una fusión que emite energía por períodos de tiempo más largos pueda ser potencialmente más detectable que una fusión de agujeros negros de masa equivalente [5]. En una fusión de agujeros negros binarios, una parte significativa del momento angular orbital se alberga en el momento angular de rotación resultante del agujero negro de Kerr [6, 7]. Mientras que, en el caso de la fusión de estrellas de neutrones, en un evento de fusión equivalente, hay un límite respecto al momento angular que puede retener la estrella remanente. Esto es debido al balance de fuerzas “centrífuga” y gravitacional que hay en la superficie, sin embargo en los agujeros negros no hay tal problema ya que no tienen superficie. Es así que, la estrella de neutrones está sujeta a liberar más energía  $\Delta E = \Delta L \Omega$  de su órbita inicial, y por lo tanto, podría emitir una cantidad total de energía en forma de ondas gravitacionales aún mayor y, en principio, ser más detectable. De lo contrario, la

estrella podría empezar a perder masa y colapsar. En particular, el artículo [8] prevé que el momento angular de una estrella de neutrones ha de ser  $j < 0,7 \frac{GM^2}{c}$ , para que sea estable. Además, el hecho de que el remanente termine mayormente deformado debido a su menor compacidad, y la presencia de un disco de materia a su alrededor, podría contribuir a una mayor emisión de energía en forma de ondas gravitacionales. Por ello, en este trabajo se estudiará el impacto de la formación de tal disco.

Es así que, un candidato para un evento super-emisor, es decir, sistema que emite mayor energía por unidad de masa en forma de ondas gravitacionales, sería una binaria de estrellas de neutrones que forme otra estrella de neutrones al fusionarse. Por supuesto, para sistemas binarios lo suficientemente masivos de estrellas de neutrones, se produce un colapso inmediato y se forma un agujero negro. Esto ocurre si la masa de la estrella recién formada es mayor o igual a 1.2 veces la masa máxima permitida para una estrella estable con la ecuación de estado correspondiente [9]. En efecto, según [10], para una estrella compacta no rotante, la masa máxima que puede ser soportada contra la gravedad se encuentra en el rango entre  $2,01 M_{\odot}$  y  $2,16 M_{\odot}$ , de superar este umbral la estrella podría colapsar.

De hecho, el estudio presentado en [5], argumenta que las fusiones de objetos menos compactos, como las estrellas de neutrones, podrían ser igualmente detectables o incluso más que las fusiones de agujeros negros, debido a las razones mencionadas anteriormente. Sin embargo, este estudio proporciona valores para la emisión de energía, en forma de ondas gravitacionales, que difieren en dos órdenes de magnitud en comparación con los valores presentados en [11]. Por lo tanto, esta propuesta de investigación propone analizar ambos estudios y con ello ahondar en el entendimiento de la fusión de objetos compactos para comprender las razones detrás de las diferencias en los valores informados. De esta manera, se podrá determinar cuáles son los sistemas más eficientes en la emisión de ondas gravitacionales, comprender el rango de frecuencias que abarcan, y así poder inferir la detectabilidad de ondas gravitacionales emitidas en estos sistemas, por los detectores actuales y futuros como en el caso del Telescopio Einstein.

A continuación, se presenta el *marco teórico* en el cual se da una breve descripción de los conceptos fundamentales en la solución del problema y se expone el estado del arte del tema. Posteriormente, se presenta el *planteamiento del problema*, donde se ofrece el contexto en el que se enmarca y se declara el problema a resolver. Luego, se introducen los *objetivos del trabajo*, los cuales irán ligados con la *metodología* para cumplir a cabalidad tales objetivos. Finalmente, se presenta el *cronograma* que se seguirá en el desarrollo de la investigación.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. Notación

Los índices griegos representan cualquiera de los números  $\{0, 1, 2, 3\}$ , mientras que los índices latinos representan cualesquiera de los números  $\{1, 2, 3\}$ . La derivada parcial  $\partial_\mu A^\nu$  se denotará como  $A^\nu_{,\mu}$  y la derivada covariante  $\nabla_\mu A^\nu$  como  $A^\nu_{;\mu}$ . La signatura de la métrica  $g_{\mu\nu}$  es  $(-, +, +, +)$ . Los símbolos de Christoffel están dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}], \quad (2.1)$$

y las componentes del tensor de Riemann y Ricci por:

$$R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma, \quad (2.2)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho. \quad (2.3)$$

### 2.2. Ecuaciones de Einstein

La teoría de la relatividad general de Einstein es una teoría relativista de la gravedad, que hasta el momento ha sido verificada experimentalmente. Las ecuaciones de campo de esta teoría son:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-momento,  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo, y  $G_{\mu\nu}$  es un tensor relacionado con la curvatura del mismo. Este último debe ser construido a partir del tensor de Riemann y la métrica, y para ser consistente con el límite Newtoniano, debe además contener términos que sean lineales en las segundas derivadas de los coeficientes de la métrica [12].

### 2.3. Ondas gravitacionales

En el límite de campo débil, la métrica  $g_{\mu\nu}$  es aproximadamente plana:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

donde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , y  $\eta_{\mu\nu}$  corresponde a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski. Este sistema de coordenadas se llama *marco de referencia cercanamente lorentziano*. Es físicamente posible construir dicho marco de referencia al proporcionar la condición

de campos gravitacionales débiles, lo cual se cumple en general en el universo, excepto en regiones cercanas a agujeros negros y estrellas de neutrones, o en el inicio del universo [12]. Al reemplazar esta expresión de la métrica en las ecuaciones de Einstein y expandirla a primer orden lineal en  $h_{\mu\nu}$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - 2\bar{h}_{\lambda(\mu,\nu)}{}^{,\lambda} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

donde  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h/2$ , y  $h \equiv h_{\mu}{}^{\mu}$ , además al imponer el gauge de Lorentz,  $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

la cual en el vacío toma la forma de la siguiente ecuación de onda:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

En síntesis, en el límite de campo débil y en el gauge de Lorentz, las ecuaciones corresponden a una ecuación de onda. Por lo tanto, la teoría de la Relatividad General de Einstein concilia la idea de interacción no instantánea con la comprensión de la fuerza gravitacional, por medio de “ondas de gravedad” que viajan a una velocidad finita.

### 2.3.1. Polarización de las ondas gravitacionales

A priori,  $\bar{h}_{\mu\nu}$  tiene 16 componentes; sin embargo, al ser un tensor simétrico, tiene tan solo 10 componentes independientes. Además, el gauge de Lorentz,  $\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$ , impone 4 restricciones adicionales, lo que nos deja con tan solo 6 componentes independientes. Realizamos una transformación de gauge que cumple las siguientes ecuaciones, y que nos mantiene en el gauge de Lorentz:

$$\bar{h}_{\mu\nu}u^{\nu} = 0, \quad (2.9)$$

$$\bar{h}_{\mu}{}^{\mu} = 0. \quad (2.10)$$

Donde la primera ecuación corresponde a elegir un observador lorentziano particular, en donde  $u^{\nu}$  es su cuadri-velocidad, y la segunda ecuación significa que en este marco la traza es cero. Esto es conocido como el gauge transversal y sin traza (TT), que impone 4 restricciones adicionales a las componentes, reduciendo el número de componentes independientes a tan solo 2. En otras palabras, solo existen 2 polarizaciones posibles para las ondas gravitacionales si se requiere que satisfagan las ecuaciones de campo de Einstein. Una vez en el gauge de Lorentz las componentes (TT) de la solución de onda

plana, propagándose en dirección  $\hat{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ , pueden ser obtenidas usando el operador proyector  $P_{ij}$ :

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j, \quad (2.11)$$

$$h_{ij}^{TT} = (P_{il}P_{jm} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{lm})h_{lm} = \Lambda_{ij,lm}h_{lm} = \Lambda_{ij,lm}\bar{h}_{lm}. \quad (2.12)$$

La ecuación 2.8 tiene soluciones de onda plana,  $h_{ij}^{TT} = e_{ij}(\mathbf{k})e^{ikx}$ , con  $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$  y  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ . El tensor  $e_{ij}(\mathbf{k})$  es llamado el tensor polarización. Si suponemos ondas planas propagándose en la dirección  $\hat{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ , entonces las componentes distintas de cero de  $h_{ij}^{TT}$  están en el plano transversal a  $\hat{n}$ , si este se define como el eje  $z$ , entonces se tiene que [13]:

$$h_{ij}^{TT}(t, z) = \begin{bmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \cos(w(t - z/c)). \quad (2.13)$$

### 2.3.2. Tensor energía impulso y luminosidad asociada a las ondas gravitacionales

En relatividad general no se puede definir la densidad de energía gravitacional en un punto del espacio-tiempo, debido a que el principio de equivalencia permite eliminar esta densidad localmente. Por lo tanto, lo que se hace es un suavizado o promediado en el espacio y el tiempo para poder definir esta cantidad física, y para ello se emplea teoría de perturbaciones, esta vez yendo a segundo orden en la métrica [12].

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^{(3)}), \quad (2.14)$$

la métrica del espacio-tiempo, como se aprecia en la anterior ecuación para  $g_{\mu\nu}$ , depende del fondo original del espacio-tiempo (background) y de las correcciones a primer y segundo orden en la amplitud de las ondas, las cuales vienen dadas por las perturbaciones  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  y  $h_{\mu\nu}^{(2)}$ , respectivamente. Al reemplazar en las ecuaciones de Einstein se deduce que el siguiente tensor, al estar relacionado con perturbaciones del tensor de Ricci a segundo orden, habría de corresponder con el tensor energía-impulso de las ondas gravitacionales:

$$T_{\mu\nu}^{(GW)} = \frac{-c^4}{8\pi G} \langle R_{\mu\nu}^{(2)}(h) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(B)} R^{(2)} \rangle, \quad (2.15)$$

donde  $R^{(2)}$  no corresponde a la perturbación a segundo orden del escalar de Ricci, sino que se define como  $R^{(2)} = \langle R_{\mu\nu}^{(2)}(h) \rangle g_{(B)}^{(\mu\nu)}$ . Si adicionalmente se impone el gauge de



lorentz, entonces se simplifican muchos términos de la perturbación a segundo orden del tensor de Ricci, y se llega a la siguiente expresión para el tensor energía impulso de las ondas gravitacionales:

$$T_{\mu\nu}^{(GW)} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle. \quad (2.16)$$

Ahora, al tratarse de un invariante de gauge, es conveniente usar el marco de referencia (TT) y a partir de ahí, hallar la densidad de energía:

$$\rho^{(GW)} = T^{(GW)00} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_x^2 \rangle, \quad (2.17)$$

y el flujo de energía  $S^i$ , el cual viene dado por:

$$S^i = cT^{(GW)0i} = \frac{c^5}{32\pi G} \langle \partial^0 h_{mn}^{TT} \partial^i h_{mn}^{TT} \rangle. \quad (2.18)$$

Para una onda gravitacional, propagándose en dirección  $n^i = x^i/r$ , el flujo de energía radial viene dado por  $S^r = n^i S^i$ . Por lo tanto, la luminosidad de las ondas gravitacionales, correspondiente a la energía total por unidad de tiempo, cruzando la superficie de una esfera de radio  $r$ , corresponde a integrar la anterior ecuación:

$$L_{(GW)} = \int dA n_i T^{(GW)0i} = \frac{c^3 r^2}{16\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_x^2 \rangle, \quad (2.19)$$

donde  $d\Omega$  corresponde al elemento diferencial de ángulo sólido. Esta ecuación es importante en este trabajo, ya que nos permitirá realizar un balance energético en la fase espiral de la fusión de binarias.

### 2.3.3. Radiación de ondas gravitacionales

Se resolverá la ecuación 2.7. La función de Green de la versión escalar de esta ecuación permite expresar la solución de la siguiente manera [15]:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t_{ret}, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (2.20)$$

donde  $t_{ret}$  es el “tiempo retardado”  $t_{ret} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$ . Con lo cual se resuelve la integral con una precisión dada. El sistema de referencia se elige de manera que el origen espacial esté dentro de la fuente. En la zona de radiación (observar figura 1),  $r \gg |\mathbf{x}'_{max}| = r'$  donde  $r'$  es la mayor dimensión característica de la fuente, el término principal de  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$  es  $1/r$ , y el argumento  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$  de  $T_{\mu\nu}$  puede expandirse en potencias de  $r'/r$  de la siguiente manera:

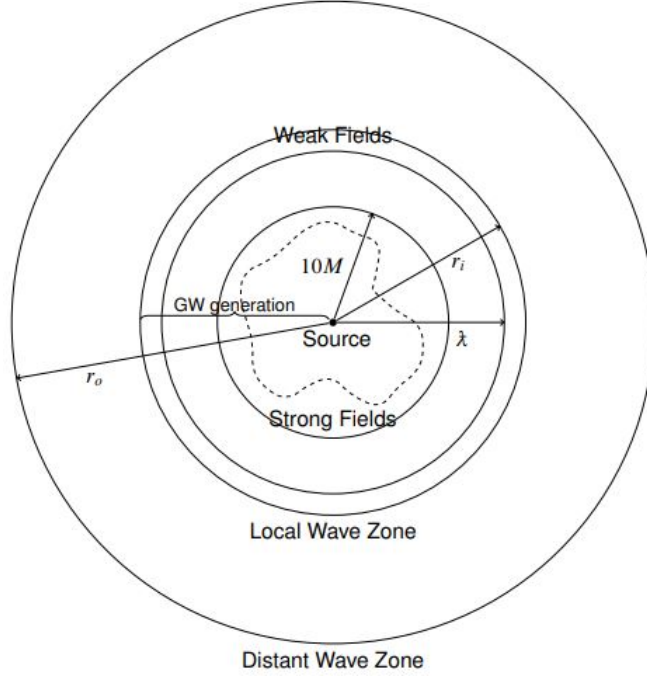


Figura 1: Esquema, no a escala, de las zonas relevantes en la generación de ondas gravitacionales. La zona de radiación corresponde a las zonas de onda local y distante. Tomado de [14].

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r \left( 1 - \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) \right) \quad (2.21)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ . En general, en esta zona se satisfacen las siguientes condiciones: (I)  $r \gg r'$ , (II)  $r \gg \lambda$  y (III)  $r \gg \omega r'^2$  [16]. Estas condiciones no son aproximaciones, ya que siempre es posible encontrar la región donde se cumplen. Dado que las condiciones de la zona de radiación se expresan en función de la longitud de onda, es conveniente descomponer el campo en sus componentes de Fourier. Además, si se toma en cuenta la aproximación de campo débil  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , y la aproximación de bajas velocidades  $v \approx \omega r' = (c/\lambda)r'$ , es decir  $r'/\lambda \ll 1$ , entonces se llega a la expresión de la aproximación de cuadrupolo-Newtoniana [17, 13] dada por:

$$h_{ij}^{TT}(t - r/c, x^i)|_{\text{cuad}} = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,lm} \ddot{I}_{lm}(t - r/c), \quad (2.22)$$

donde  $\ddot{I}_{ij}$  corresponde al momento cuadrupolar reducido dado por:

$$\ddot{I}_{ij} = \int \rho (x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2) d^3 x, \quad (2.23)$$

y  $\rho$  corresponde a la densidad de materia presente en la fuente. Es así que, mientras

que en la teoría electromagnética, la primera contribución en la radiación no proviene del monopolo eléctrico, sino del momento dipolar electromagnético. En la radiación de ondas gravitacionales, la primera contribución no viene del momento dipolar de la masa de la fuente, ya que hay conservación del momento lineal, sino que viene del momento cuadrupolar.

#### 2.3.4. Detección de ondas gravitacionales

Dado que las señales de las ondas gravitacionales son muy tenues, se requieren instrumentos muy sensibles para su detección. En varios países, se han construido dispositivos especializados para este propósito, principalmente utilizando técnicas de interferometría para obtener mediciones precisas. Estos detectores miden las distancias relativas entre cuerpos de referencia. La idea principal es medir las distancias entre espejos a través de haces de láser que rebotan entre ellos. La configuración típica corresponde a un interferómetro de Michelson y Morley, el cual es una estructura en forma de “L” con espejos en los extremos y en el ángulo, como se muestra en la figura 2. Al combinar los haces de luz de los dos brazos, se genera un patrón de interferencia que se utiliza para medir las variaciones en la distancia relativa entre los espejos causadas por el paso de una onda gravitacional.

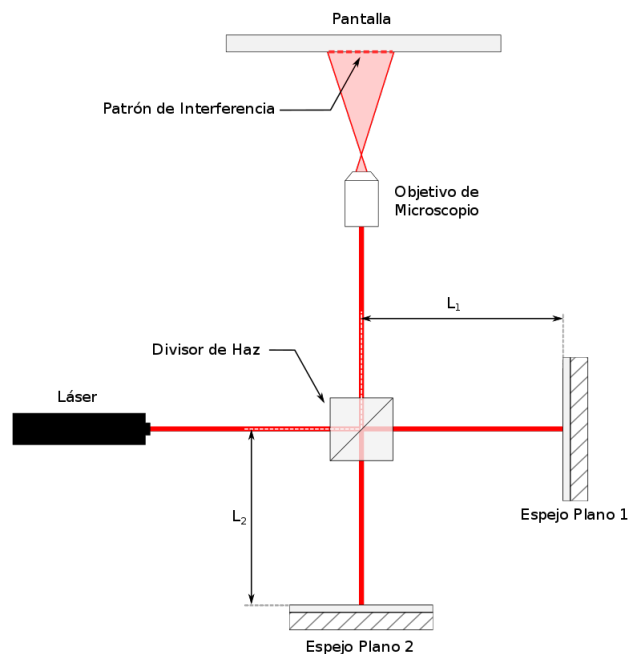


Figura 2: Esquema del interferómetro de Michelson y Morley [18].

En febrero de 2016, se anunció la primera detección de ondas gravitacionales [1], consistente con la fusión de dos agujeros negros. Esta detección se llevó a cabo utilizando los

observatorios LIGO, ubicados en Hanford, Washington, y Livingston, Luisiana, Estados Unidos. Estos observatorios están separados por una distancia de aproximadamente 3000 km. La detección se refiere a un evento que ocurrió el 14 de septiembre de 2015 y se conoce como GW150914.

Con respecto a los detectores, Virgo, por ejemplo, corresponde a un interferómetro de Michelson aislado de perturbaciones externas, capaz de medir ondas gravitacionales cuya frecuencia se encuentre entre los 10 Hz hasta los 10 kHz, siendo entonces potencialmente sensible a la detección de fusión de un sistema binario compacto, estrellas de neutrones o agujeros negros y explosión de supernovas [19]. LIGO, por su parte, es un observatorio de ondas gravitacionales también por interferometría láser, cuyo rango de frecuencias es de 30 a 7000 Hz. Por otra parte, en el caso de LISA, constará de tres naves espaciales, con forma de discos de hockey, orbitando a cinco millones de kilómetros entre sí, formando un triángulo equilátero. El espectro de ondas gravitacionales de LISA cubre una amplia gama de frecuencias, ya que opera en el rango de baja frecuencia, entre 0,1 mHz y 1 Hz. Por lo cual, LISA puede detectar ondas gravitacionales provenientes de fuentes tales como: binarias ultracompactas en nuestra galaxia, fusiones de agujeros negros supermasivos y espirales con proporciones de masa extrema [20].

## 2.4. Sistemas binarios

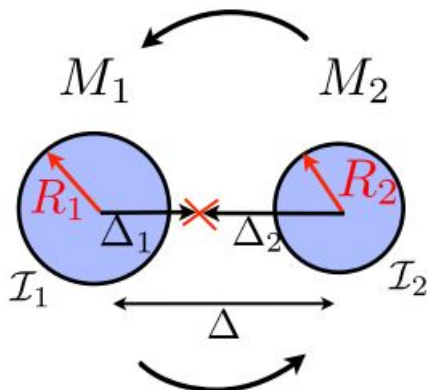


Figura 3: Esquema simplificado de un sistema binario, tomado de [5].

En astrofísica, el término sistema binario se utiliza para referirse a dos objetos que están ligados por su fuerza gravitacional, orbitando uno alrededor del otro. Estos pueden ser dos estrellas, dos agujeros negros, un agujero negro y una estrella, entre otros.

De acuerdo con el estudio [3], la radiación de ondas gravitacionales impulsa necesariamente a los sistemas binarios cada vez más cerca uno del otro, hasta que los dos cuerpos se fusionan en un evento violento que emitiría una intensa ráfaga de ondas gravitacionales. Se determinó en el artículo que la señal gravitatoria emitida justo antes y durante

tal evento de fusión sería de gran importancia para los sistemas binarios compuestos por objetos compactos. Se muestra que a una distancia relativa mayor, se tendrá una velocidad relativa menor y, por lo tanto, una señal de onda gravitacional más débil. Dicho esto, uno de los factores más relevantes en la emisión de ondas gravitacionales, es precisamente la compacidad de los objetos que se están fusionando.

Sin embargo, hay otros factores que influyen en la eficiencia de la emisión de ondas gravitacionales, como por ejemplo: la energía emitida debido al cambio en el momento angular del sistema, la forma del remanente de la fusión, y si el remanente posee un disco. De hecho, una característica clave para las contrapartes de ondas gravitacionales es la formación de discos remanentes, ya que los discos remanentes de masas de aproximadamente  $0,1M_{\odot}$  pueden formarse si la materia adquiere un soporte rotacional suficiente durante la fusión, tal y como se explica en [21]. Cabe aclarar que dicha eficiencia en la emisión de ondas gravitacionales se estima como el cociente entre la energía liberada en forma de radiación gravitatoria y la energía disponible para liberar.

#### 2.4.1. Fases de la fusión de los sistemas binarios

El proceso de fusión de binarias se puede dividir en tres fases: inmersión, fusión y amortiguamiento [22].

Durante la fase de inmersión, a medida que la binaria pierde energía debido a la radiación gravitatoria, las masas se acercan gradualmente entre sí. Estos sistemas binarios compactos en proceso de inmersión pueden describirse como dos partículas puntuales con masas  $M_1$  y  $M_2$ , que siguen orbitas cuasi-circulares, es decir, cuyo decaimiento es lento alrededor del centro de masa. Es así que, durante esta fase, el tiempo de reacción a la radiación gravitatoria es mucho más largo que el período orbital, se tendrá una evolución adiabática en el sistema, es decir, un proceso en el cual los cambios ocurren de manera gradual y lenta en comparación con otros tiempos característicos del sistema. Se puede demostrar que un estimado para qué se cumpla la condición de evolución adiabática es [13]:

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} \ll 1, \quad (2.24)$$

donde  $\Omega$  corresponde a la frecuencia orbital de la binaria. En el sistema de masa reducida, y en un régimen Newtoniano, la energía de la binaria viene dada por:

$$E = -\frac{GM_1M_2}{2\Delta}, \quad (2.25)$$

donde  $\Delta$  corresponde a la distancia entre las binarias (observe figura 3). Al dejar la anterior expresión en términos de la frecuencia angular de la binaria y derivar respecto al tiempo, se puede igualar a la potencia emitida, con base en la ecuación 2.19:

$$L_{gw} = \frac{32c^5}{5G} \left( \frac{M_c G \omega_{gw}}{2c^3} \right)^{10/3} = \frac{2}{3} \left( \frac{G^2 M_c^5}{32} \right)^{1/3} \omega_{gw}^{-1/3} \dot{\omega}_{gw}, \quad (2.26)$$

donde  $M_c = (m_1 m_2)^{3/5} (m_1 + m_2)^{-1/5}$  es la masa de chirp, y  $\omega_{gw}$  es la frecuencia angular de las ondas gravitacionales. Despejando se obtiene que:

$$\dot{\omega}_{gw} = \frac{3}{5} 2^{7/3} \left( \frac{G M_c}{c^3} \right)^{5/3} \omega_{gw}^{11/3}, \quad (2.27)$$

lo cual es bastante útil, ya que midiendo el comportamiento de esta frecuencia a lo largo del tiempo, se puede dar un estimado de la masa de chirp de la fuente.

Aunque la amplitud de la propia onda gravitatoria  $h(t)$  aumenta a medida que el sistema evoluciona, la frecuencia  $f_{gw}$  también aumenta rápidamente, como lo muestra la anterior ecuación. Como resultado, el espectro de energía es una función decreciente de  $f$  [12]:

$$\frac{dE}{df} = \frac{(\pi G)^{2/3}}{3} M_c^{5/3} f^{-1/3}. \quad (2.28)$$

A partir de la anterior expresión, se puede estimar la energía total radiada en forma de ondas gravitacionales durante esta fase, siendo esta del siguiente orden:

$$\Delta E_{rad} \approx \frac{(\pi G)^{2/3} M_c^{5/3}}{2} f_{max}^{2/3}, \quad (2.29)$$

Ahora, esta frecuencia máxima se alcanzará justo antes de que las órbitas dejen de ser cuasi-circulares, es decir, en la órbita cuasi-circular estable más interna, también conocida por sus siglas en inglés como (ISCO). De acuerdo a [13] la (ISCO) es efectiva, para estimar a partir de qué momento ya no hay órbitas circulares, para ello, se determina el radio y la frecuencia orbital de la fuente en la (ISCO), considerando la geometría de Schwarzschild, y que corresponden a:

$$r_{ISCO} = 6 \frac{G M_{tot}}{c^2}, \quad (2.30)$$

$$(f_s)_{ISCO} \approx 2,2 kHz \left( \frac{M_\odot}{M_{tot}} \right), \quad (2.31)$$

y ya que la frecuencia máxima de las ondas gravitacionales es el doble a la frecuencia del movimiento de la fuente, entonces  $f_{max} = 2(f_s)_{ISCO}$ . Al reemplazar en la expresión de la energía total radiada en esta fase se obtiene lo siguiente:

$$\Delta E_{rad} \approx 8 \times 10^{-2} \mu c^2. \quad (2.32)$$

Donde  $\mu$  corresponde a la masa reducida del sistema. Obsérvese que, puede darse el caso en que  $r_{ISCO}$  sea tan pequeño que primero los objetos compactos se tocan, por lo tanto, no hay caída cuasi-radial. De hecho, se puede mostrar que, debido a la compacidad de los objetos, los agujeros negros siempre tienen caída cuasi-radial. En el caso de la fusión de enanas blancas no la hay, ya que primero se tocan antes de llegar a  $r_{ISCO}$ . Y en el caso de las binarias de neutrones puede que la haya, dependiendo de la compacidad [14].

Dicho todo lo anterior, podemos hacer algunas estimaciones para comparar los sistemas binarios de estrellas de neutrones con los sistemas binarios de agujeros negros. Suponiendo 2 estrellas de neutrones de masas iguales  $m_1 = m_2 \approx 1.4 M_\odot$ , se tendría que  $(f_s)_{ISCO} \approx 800 \text{ Hz}$ , mientras que para un sistema binario con masa total  $M \approx 10^6 M_\odot$ , la frecuencia  $(f_s)_{ISCO}$  estaría en el orden de los mHz, es decir, una diferencia de 6 órdenes de magnitud en la frecuencia máxima de las ondas gravitacionales durante esta fase. Lo anterior implica que al llegar a la frecuencia máxima en esta fase, la longitud de onda gravitacional emitida sería menor para el caso de las binarias de neutrones, respecto a las de agujeros negros.

Las 2 polarizaciones de una onda gravitacional, producida por un sistema binario durante la fase espiral, vienen dadas por [13]:

$$h_+(t) = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \left( \frac{1 + \cos^2(\iota)}{2} \right) \cos(2\omega_s t), \quad (2.33)$$

$$h_\times(t) = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \cos(\iota) \sin(2\omega_s t). \quad (2.34)$$

Donde  $r$  corresponde a la distancia a la fuente,  $R$  el radio característico de la órbita circular y  $\omega_s$  la frecuencia angular de la fuente. Las demás variables se aprecian en la figura 4.

Es así que, con respecto a la amplitud, de acuerdo a [13] y a las ecuaciones 2.33 y 2.34, la amplitud tanto de  $h_+$  como  $h_\times$  dependen proporcionalmente de  $M_c^{5/3}$  y  $f_{gw}^{2/3}$ , que en el caso de binarias de neutrones, la masa de chirp es de  $M_c \approx 1.22 M_\odot$  y en el caso de agujeros negros sería de  $M_c \approx 10^6 M_\odot$ . Por lo tanto, la amplitud de onda gravitacional producida en la (ISCO) está, en el caso del sistema binario de agujeros negros, 6 órdenes de magnitud por encima que en el caso del sistema binario de estrellas de neutrones.

Por otra parte, la fase de la fusión comienza, como mencionamos anteriormente, cuando la evolución orbital es tan rápida que la evolución adiabática ya no es una buena aproximación o cuando las masas entran en contacto entre sí. Luego, las dos masas atraviesan una fase de fusión de manera cuasi-radial, es decir, decaen las masas hacia

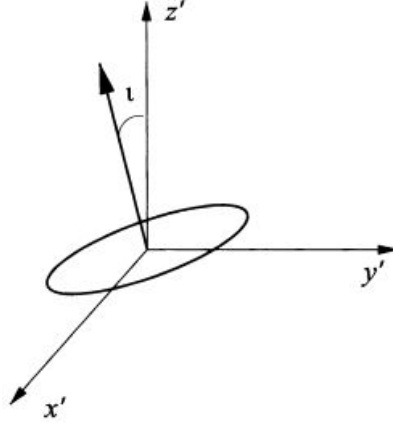


Figura 4: En esta figura se aprecia la geometría del problema, el observador se encuentra fijo a una distancia  $r$  sobre el eje  $z'$ . La normal a la órbita genera un ángulo  $\iota$  con el eje  $z'$  [13].

el centro de masa casi como si fueran en línea recta, lo cual puede llegar a conducir a la formación de un agujero negro, liberando una fracción de su energía de masa en forma de ondas gravitacionales[23].

Finalmente, en la etapa de amortiguamiento, el remanente, justo después de formarse, está inicialmente deformado e irradia la energía asociada con estas deformaciones en forma de ondas gravitacionales, hasta que se estabiliza en un objeto axialmente simétrico. En una fusión de agujeros negros binarios, una parte significativa del momento angular orbital se alberga en el momento angular de rotación resultante del agujero negro de Kerr [6, 7]. Mientras que, en el caso de la fusión de estrellas de neutrones, en un evento de fusión equivalente, hay un límite respecto al momento angular que puede retener la estrella remanente. Esto es debido al balance de fuerzas centrífuga” y gravitacional que hay en la superficie; sin embargo, en los agujeros negros no hay tal problema, ya que no tienen superficie.

En consecuencia, la estrella de neutrones está sujeta a liberar más energía  $\Delta E = \Delta L \Omega$  de su órbita inicial, y, por lo tanto, podría emitir una cantidad total de energía en forma de ondas gravitacionales aún mayor y, en principio, ser más detectable. De lo contrario, La estrella podría empezar a perder masa y colapsar. En particular, el artículo [8] prevé que el momento angular de una estrella de neutrones ha de ser  $j < 0,7 \frac{GM^2}{c}$ , para que sea estable. Además, el hecho de que el remanente termine mayormente deformado debido a su menor compacidad, y la presencia de un disco de materia a su alrededor, podría contribuir a una mayor emisión de energía en forma de ondas gravitacionales. En síntesis, esta etapa es crucial para determinar si la energía emitida en forma de ondas gravitacionales podría ser mayor en el caso de estrellas de neutrones que en el caso de agujeros negros, ya que depende en gran medida esa radiación de las características que tenga el remanente final [22].



### 3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Según la literatura, como se mostró en el marco teórico, entre mayor sea la compacidad de dos objetos astrofísicos fusionándose, mayor será su eficiencia en la emisión de energía en forma de ondas gravitacionales y, por lo tanto, serían potencialmente más detectables que cualquier otro tipo de fusión de cuerpos celestes. Es decir, la fusión de dos agujeros negros sería el fenómeno físico ideal para la detección de ondas gravitacionales. Sin embargo, estudios recientes [5] apuntan a que fusiones de objetos no tan compactos, como, por ejemplo, las estrellas de neutrones, podrían ser potencialmente igual de detectables o incluso más que la fusión de dos agujeros negros.

Estos estudios proponen que la emisión de energía en forma de ondas gravitacionales debido a este proceso astrofísico puede extenderse durante un mayor período de tiempo en las fases espiral y de amortiguamiento y, a la larga, emitir una cantidad mayor de energía que la fusión de agujeros negros, y, por lo tanto, ser igual de detectables que estos últimos. De hecho, se estima que si el remanente de una fusión de binarias de neutrones es una estrella de neutrones supermasiva, la misma podría emitir radiación entre  $10$  y  $5 \times 10^4 \text{ seg}$  [24] después de haberse fusionado. Este estudio [5] también plantea que la energía emitida en ondas gravitacionales de la fusión de dos estrellas de neutrones no rotantes se encuentra en el orden de magnitud de  $10^{54} [\text{ergs}]$  y emisión en otros tipos de energía en órdenes de magnitud despreciables. Sin embargo, de acuerdo al estudio presentado en [11], donde se profundiza en la fusión de estrellas de neutrones y los estallidos de rayos gamma asociados al evento, se prevé que la energía emitida en forma de ondas gravitacionales es del orden de  $10^{52} [\text{ergs}]$  y en otros tipos de energía es del orden de  $10^{53} [\text{ergs}]$ .

Dicho lo anterior, es evidente que estos estudios difieren en 2 órdenes de magnitud, por lo tanto, el problema a resolver en este trabajo consiste en calcular la eficiencia en la emisión de ondas gravitacionales en la fusión de objetos compactos, específicamente en fusiones de estrellas de neutrones, agujeros negros y enanas blancas. Así como, determinar en qué rango de frecuencias de ondas gravitacionales emiten estos objetos al fusionarse. Lo cual es importante, ya que permite determinar la detectabilidad de estos sistemas en los actuales detectores, tales como LIGO y Virgo, así como en los futuros, como por ejemplo el telescopio Einstein. Para ello, se profundizará en el estudio de la fusión de objetos compactos, extendiendo el modelo aproximado presentado en [5], en específico considerando leyes de conservación de la materia bariónica, ley de conservación de la energía, y relaciones de la masa bariónica con la gravitacional. Además, se explorará la influencia de la presencia de un disco de materia alrededor del remanente, así como el comportamiento del momento angular final del mismo.

Esta investigación no solo contribuirá al entendimiento de los fenómenos astrofísicos involucrados en las fusiones de estrellas de neutrones, sino que también tendrá implicaciones importantes en el campo de la detección de ondas gravitacionales y en la

comprensión general de la física de objetos compactos en el Universo. En particular, este trabajo puede servir como guía para investigaciones numéricas de estos sistemas.

## 4. OBJETIVOS

### 4.1. Objetivo General

Determinar la eficiencia en emisión de ondas gravitacionales en la fusión de objetos compactos, extendiendo el modelo aproximado presentado en [5].

### 4.2. Objetivos específicos

1. Analizar los resultados obtenidos en los estudios [5] y [11].
2. Extender el modelo aproximado presentado en [5] considerando leyes de conservación de la materia bariónica, ley de conservación de la energía, relaciones de la masa bariónica con la gravitacional, y demás relaciones presentadas en [8, 25].
3. Determinar la eficiencia en emisión de ondas gravitacionales en distintos casos finales, por ejemplo, si el remanente estelar tiene disco o si colapsa la estrella, en el caso de fusión de enanas blancas o estrellas de neutrones. Además, considerar la influencia del remanente a través de un modelo aproximado con elipsoides de Riemann.
4. Determinar el valor estimado de otras formas de energía emitidas, considerando las mejoras mencionadas en el modelo de [5].
5. Inferir la detectabilidad de estas ondas gravitacionales por medio de detectores tales como LIGO, VIRGO o detectores a futuro tales como el telescopio Einstein, con base en el rango de frecuencias de ondas gravitacionales emitido por el sistema binario.

## 5. METODOLOGÍA

Para alcanzar los objetivos propuestos se realizarán las siguientes actividades:

### 1. Introducción a los principios básicos de la Relatividad General.

Asistencia a los cursos *Introducción a la teoría de la Relatividad* e *Introducción a la Cosmología*.

### 2. Estudiar la emisión de ondas gravitacionales bajo las aproximaciones de campo débil y bajas velocidades.

Estudio de la perturbación de la métrica de fondo para entender la naturaleza de las ondas gravitacionales en las aproximaciones de **campo débil** y **bajas velocidades**, y cómo se ve afectada la emisión de ondas gravitacionales al variar parámetros físicos del sistema y las respectivas condiciones en las que se encuentra. Lo anterior se hará por medio de libros tales como el de Maggiore sobre ondas gravitacionales [13], en específico el capítulo uno que habla sobre un acercamiento geométrico al entendimiento de las ondas gravitacionales, el capítulo tres que habla sobre la generación de ondas gravitacionales, y el capítulo cuatro, que habla sobre las aplicaciones de estas, en el entendimiento de, por ejemplo, la fase de inmersión de sistemas binarios o la radiación de objetos rígidos rotantes. También se estudiarán textos tales como el de Peters [26], que trata sobre la radiación de ondas gravitacionales de masas puntuales en órbitas keplerianas, o como la sección sobre ondas del libro sobre campos clásicos [17] de Landau.

### 3. Estudiar el modelo aproximado de la Ref. [5].

Se estudiará el modelo introducido en [5] y se comparará con los resultados del artículo [11]. Se extenderá tal modelo con leyes de conservación de la materia bariónica, ley de conservación de la energía, relaciones de la masa bariónica con la gravitacional [8, 25], considerando además las cotas que impone la (ISCO) y el máximo momento angular permitido en el remanente para que no colapse.

### 4. Estudiar el objeto post-fusión como un objeto triaxial.

Se considerará el remanente como un elipsoide de Riemann compresible. Para esto se estudiará el artículo [27] para estimar la energía radiada en ondas gravitacionales durante la fase de ringdown. Además, se estudiará la influencia de un disco de materia en el objeto post-fusión por medio de las relaciones presentadas en [8, 25].

### 5. Estudiar la detectabilidad de la fusión de objetos compactos.

Se analizará el rango de frecuencias en que emiten ondas gravitacionales la fusión de objetos compactos más eficientes, para poder determinar la detectabilidad de los mismos con los detectores actuales y en construcción.

## 6. Estudiar el lenguaje simbólico del software Mathematica.

Debido a las extensas relaciones tensoriales que pueden resultar de este estudio teórico, se aprenderá a manejar el lenguaje simbólico que provee la herramienta computacional Wolfram Mathematica, para resolver más fácilmente dichas ecuaciones.

## 7. Elaboración de la propuesta de trabajo de grado.

Presentar el problema a trabajar exponiendo los elementos teóricos necesarios para su comprensión y las motivaciones de una posible solución.

## 8. Sustentación.

Elaborar el informe final para presentar los resultados alcanzados y sustentarlos públicamente.

## 6. CRONOGRAMA

Mes / Actividad	1	2	3	4	5	6	7	8
Febrero 2023	X							
Marzo 2023	X							
Abril 2023	X							
Mayo 2023	X							
Junio 2023	X							
Julio 2023	X	X						
Agosto 2023	X	X						
Septiembre 2023	X	X				X	X	
Octubre 2023	X	X	X			X	X	
Noviembre 2023	X	X	X			X	X	
Diciembre 2023	X	X	X	X		X		
Enero 2024			X	X	X			
Febrero 2024			X	X	X			X
Marzo 2024					X			X
Abril 2024					X			X
Mayo 2024								X

## REFERENCIAS

- [1] LIGO and Virgo Collab, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, Physical Review Letters **116**, 061102 (2016).
- [2] B. P. Abbott and et al., GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral, Physical Review Letters **119**, 161101 (2017).

- [3] F. J. Dyson, Gravitational Machines, in *Interstellar Communication*, edited by A. Cameron, chapter 12, Benjamin Press, New York, 1963.
- [4] LIGO Scientific Collaboration, LIGO O3b Catalog, 2022, Consultado el [16/11/23].
- [5] C. Hanna, M. C. Johnson, and L. Lehner, Estimating gravitational radiation from super-emitting compact binary systems, *Physical Review D* **95**, 124042 (2017).
- [6] A. Buonanno, L. E. Kidder, and L. Lehner, *Phys. Rev. D* **77**, 026004, *Physical Review D* **77**, 026004 (2008).
- [7] M. Kesden, G. Lockhart, and E. S. Phinney, *Phys. Rev. D* **82**, 124045, *Physical Review D* **82**, 124045 (2010).
- [8] F. Cipolletta, C. Cherubini, S. Filippi, J. A. Rueda, and R. Ruffini, Fast rotating neutron stars with realistic nuclear matter equation of state, **92**(2), 023007 (July 2015).
- [9] K. Hotokezaka, K. Kyutoku, H. Okawa, M. Shibata, and K. Kiuchi, *Phys. Rev. D* **83**, 124008, *Physical Review D* **83**, 124008 (2011).
- [10] L. Rezzolla, E. R. Most, and L. R. Weih, Using Gravitational-wave Observations and Quasi-universal Relations to Constrain the Maximum Mass of Neutron Stars, **852**(2), L25 (Jan. 2018).
- [11] L. M. Becerra, C. Fryer, J. F. Rodriguez, J. A. Rueda, and R. Ruffini, Neutron Star Binaries Produced by Binary-Driven Hypernovae, Their Mergers, and the Link between Long and Short GRBs, *Universe* **9**(7), 332 (2023).
- [12] C. M. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, San Francisco, USA: W. H. Freeman and Company (1973).
- [13] M. Maggiore, *Gravitational Waves*, Oxford University Press, Oxford, 2018.
- [14] J. F. R. Ruiz, Thesis Semi-analytical Approaches to Gravitational Radiation from Astrophysical Sources, 2019.
- [15] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, 1998.
- [16] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, New York, USA: John Wiley & Sons, Inc. (1972).
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Classical Fields: Volume 2*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975.
- [18] A. A. Michelson and E. W. Morley, On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether, *American Journal of Science* **34**(203), 333–345 (1887).

- [19] T. Accadia, F. Acernese, F. Antonucci, et al., Status of the Virgo project, *Classical and Quantum Gravity* **28**(11), 114002 (2011).
- [20] European Space Agency, Laser Interferometer Space Antenna (LISA), 2022.
- [21] S. Bernuzzi, Neutron star merger remnants, *General Relativity and Gravitation* **52**(108) (2020), INVITED REVIEW: STATE OF THE FIELD.
- [22] É. É. Flanagan and S. A. Hughes, The basics of gravitational wave theory, *New Journal of Physics* **7**(1), 204 (Sept. 2005).
- [23] Y. Pan, A. Buonanno, M. Boyle, L. T. Buchman, L. E. Kidder, H. P. Pfeiffer, and M. A. Scheel, Inspiral-merger-ringdown multipolar waveforms of nonspinning black-hole binaries using the effective-one-body formalism, **84**(12), 124052 (Dec. 2011).
- [24] B. P. Abbott et al., Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger, **851**(2), L16 (Dec 2017).
- [25] F. Cipolletta, C. Cherubini, S. Filippi, J. A. Rueda, and R. Ruffini, Last stable orbit around rapidly rotating neutron stars, **96**(2), 024046 (July 2017).
- [26] P. C. Peters and J. Mathews, Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit, *Physical Review* **131**(1), 435–440 (July 1963).
- [27] D. Lai and S. L. Shapiro, Gravitational Radiation from Rapidly Rotating Nascent Neutron Stars, **442**, 259 (Mar. 1995).