

# **SISTEMAS BINARIOS DE ESTRELLAS DE NEUTRONES COMO SUPER-EMISORES DE ONDAS GRAVITACIONALES**

Trabajo de grado

Autor: Juan Diego Figueroa Hernández<sup>1,2</sup>

Director: José Fernando Rodríguez Ruiz<sup>1</sup>

Codirectora: Laura Marcela Becerra Bayona<sup>1,2</sup>

Codirector: Luis Alberto Nuñez de Villavicencio<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación - UIS

<sup>2</sup>Complejo Astronómico Grupo Halley - UIS

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2025

# Resumen

**TÍTULO:** SISTEMAS BINARIOS DE ESTRELLAS DE NEUTRONES COMO SUPER-EMISORES DE ONDAS GRAVITACIONALES.

**AUTOR:** FIGUEROA HERNÁNDEZ, Juan Diego<sup>a</sup>.

**PALABRAS CLAVES:** Ondas gravitacionales, sistemas binarios compactos, estrellas de neutrones.

**DESCRIPCIÓN:** En el presente trabajo se calcula la eficiencia de emisión de ondas gravitacionales durante el proceso de fusión de objetos compactos, con especial enfoque en sistemas binarios de estrellas de neutrones. El objetivo es determinar la detectabilidad del objeto postfusión y comprender por qué en el evento GW170817 se detectó una energía tan baja en los canales de emisión electromagnética (del orden de  $10^{46}$  erg), a pesar de que el defecto de masa del sistema binario es considerablemente mayor (aproximadamente  $2.5 \times 10^{53}$  erg). Se estudian y extienden modelos aproximados ya propuestos en la literatura, como el modelo simplificado para la fusión cuasi-circular de objetos compactos, propuesto en Ref. [1], y el modelo de leyes de conservación descrito en Ref. [2]. Estos modelos dividen la fusión en cuatro fases principales: i) régimen espiral adiabático, ii) caída y fusión, iii) amortiguamiento o “ringdown”, y objeto final: agujero negro de Kerr o estrella de neutrones con rotación rápida. Para el análisis y la correspondencia entre el sistema inicial y final se utiliza, además de la fórmula Newtoniana de radiación cuadrupolar, leyes de conservación, tales como: la conservación de la energía, la conservación del momento angular, la conservación de la materia bariónica; y relaciones cuasi-universales que describen a la estrella de neutrones axialmente simétrica final que no emite radiación gravitacional. Se estudia el impacto de la presencia o ausencia de un disco de acreción alrededor del objeto final y, el efecto de la rotación de las estrellas de neutrones que forman el sistema binario inicial. Por último, se modela el objeto postfusión como un elipsoide de Riemann-S y se determinan las características de la señal emitida en esta fase. Se determina que el intervalo de frecuencias de las ondas durante la parte final del proceso se encuentra en el rango de los kHz. Esto permite inferir la no detectabilidad de dichos objetos, al final de la evolución, por parte de los interferómetros terrestres actuales, como LIGO y Virgo, cuyo rango óptimo de operación se encuentra entre 10 Hz y 1 kHz. No obstante, proyectos futuros como el Telescopio Einstein esperan alcanzar una sensibilidad significativamente superior, tanto en frecuencias bajas (por debajo de los 10 Hz) como en el rango de frecuencias altas (hasta varios kHz), lo que permitiría detectar este tipo de señales. Para GW170817, la emisión gravitacional durante la fase de inmersión y amortiguamiento (según el modelo de elipsoides de Riemann-S) genera una energía total en ondas gravitacionales del orden de  $10^{53}$  erg, con una eficiencia neta de hasta un 2 %. Sin embargo, esto no es suficiente para explicar la baja energía detectada en los canales de emisión electromagnética. Además, se determina que esta eficiencia no puede ser tan alta como la prevista en Ref. [1], mayor al 5 %. Modelos aproximados que siguen leyes generales de la física, como los modelos en cuestión, sirven de guía para investigaciones numéricas más detalladas.

---

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José Fernando Rodríguez Ruiz (Director), Laura Marcela Becerra Bayona (Codirectora), Luis Alberto Nuñez de Villavicencio (Codirector).

# Abstract

**TITLE:** BINARY NEUTRON STAR SYSTEMS AS SUPER-EMITTERS OF GRAVITATIONAL WAVES.

**AUTHOR:** FIGUEROA HERNÁNDEZ, Juan Diego<sup>a</sup>.

**KEYWORDS:** Gravitational waves, compact binary systems, neutron stars.

**DESCRIPTION:** The efficiency of gravitational wave emission during the merger process of compact objects is calculated, with particular focus on neutron star binary systems. The study aims to determine the detectability of the post-merger object and explain why the GW170817 event exhibited such low energy in electromagnetic emission channels (of the order of  $10^{46}$  erg), despite the binary system's mass defect being considerably larger (approximately  $2.5 \times 10^{53}$  erg). Approximate models previously proposed in the literature are studied and extended, including the simplified model for quasi-circular merger of compact objects proposed in Ref. [1], and the conservation law model described in Ref. [2]. The merger process is divided into four main phases: i) adiabatic inspiral regime, ii) plunge and merger, iii) ringdown, and iv) final object formation (Kerr black hole or rapidly rotating neutron star). The analysis employs, in addition to the Newtonian quadrupolar radiation formula, conservation laws including energy conservation, angular momentum conservation, and baryonic matter conservation, along with quasi-universal relations describing the final axially symmetric neutron star that does not emit gravitational radiation. The impact of both the presence and absence of an accretion disk around the final object is investigated, as well as the effect of the neutron stars' rotation in the initial binary system. The post-merger object is modeled as a Riemann-S ellipsoid, with the characteristics of the emitted signal in this phase being determined. The frequency range of the waves during the final stage of the process is found to lie in the kHz range. This result suggests that such objects at the end of their evolution cannot be detected by current ground-based interferometers like LIGO and Virgo, whose optimal operational range is between 10 Hz and 1 kHz. Future projects like the Einstein Telescope are expected to achieve significantly superior sensitivity in both low frequency (below 10 Hz) and high frequency ranges (up to several kHz), enabling detection of these signals. For GW170817, the gravitational emission during the plunge and ringdown phases (according to the Riemann-S ellipsoid model) is calculated to produce a total energy in gravitational waves of the order of  $10^{53}$  erg, with a net efficiency of up to 2%. This efficiency is found to be insufficient to explain the low energy detected in electromagnetic emission channels. Furthermore, the efficiency cannot be as high as predicted in Ref. [1] (greater than 5%). The approximate models following general physics laws, as discussed herein, provide valuable guidance for more detailed numerical investigations.

---

<sup>a</sup>Faculty of Sciences, School of Physics, José Fernando Rodríguez Ruiz (Director), Laura Marcela Becerra Bayona (Co-director), Luis Alberto Nuñez de Villavicencio (Co-director).

# CONTENIDO

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>I. Fundamentos de las ondas gravitacionales</b>	<b>10</b>
1.1. Teoría de la relatividad general . . . . .	10
1.2. Fundamentos de las ondas gravitacionales . . . . .	11
1.3. Polarización de las ondas gravitacionales . . . . .	12
1.4. Tensor energía impulso y luminosidad asociada a las ondas gravitacionales	13
1.5. Radiación de ondas gravitacionales . . . . .	15
1.5.1. Emisión gravitacional de una binaria . . . . .	16
1.5.2. Emisión gravitacional de un objeto triaxial rotante . . . . .	18
1.6. Potencial radiación-reacción . . . . .	20
1.7. Detección de ondas gravitacionales . . . . .	21
<b>II. Sistemas binarios y leyes de conservación</b>	<b>24</b>
2.1. Fases de la fusión de los sistemas binarios . . . . .	25
2.2. Radio de fusión . . . . .	27
2.3. Leyes de conservación . . . . .	33
2.4. Analizando una fusión de estrellas de neutrones . . . . .	36
2.5. Conclusiones . . . . .	40
<b>III. Modelos de objeto postfusión</b>	<b>42</b>
3.1. Caso esférico: estrella polítropa . . . . .	42
3.2. Caso esferoidal: estrella polítropa . . . . .	43
3.3. Modelo de elipsoides de Jacobi compresibles . . . . .	48
3.4. Modelo de elipsoides de Riemann tipo S . . . . .	52
3.5. Ondas gravitacionales producidas por el objeto postfusión del sistema binario. . . . .	55
<b>IV. Objeto postfusión de GW170817</b>	<b>59</b>
4.1. Aplicando leyes de conservación y relaciones cuasi-universales . . . . .	59

4.2. Aplicando el modelo de elipsoide de Riemann-S . . . . .	62
4.3. Detectabilidad del objeto postfusión. . . . .	66
 <b>V. Discusión y conclusiones</b>	 <b>72</b>
 <b>Apéndices</b>	 <b>74</b>
 <b>A. Radiación de ondas gravitacionales</b>	 <b>75</b>
A.1. Radiación de cuadrupolo . . . . .	77
A.2. Emisión gravitacional de una binaria . . . . .	78
A.3. Emisión gravitacional de un objeto triaxial rotante . . . . .	80
 <b>B. Potencial radiación-reacción</b>	 <b>82</b>
 <b>C. Construcción del remanente</b>	 <b>85</b>
C.1. Caso esférico: estrella polítropa . . . . .	85
C.2. Caso esferoidal: estrella polítropa . . . . .	87
C.3. Elipsoides de Jacobi compresibles . . . . .	89
C.4. Elipsoides de Riemann-S Compresibles . . . . .	93

# Notación

Los índices griegos representan cualquiera de los números  $\{0, 1, 2, 3\}$ , mientras que los índices latinos representan cualesquiera de los números  $\{1, 2, 3\}$ . La derivada parcial  $\partial_\mu A^\nu$  se denotará como  $A^\nu_{,\mu}$  y la derivada covariante  $\nabla_\mu A^\nu$  como  $A^\nu_{;\mu}$ . La signatura de la métrica  $g_{\mu\nu}$  es  $(-, +, +, +)$ . Los símbolos de Christoffel están dados por:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}], \quad (0.0.1)$$

y las componentes del tensor de Riemann y Ricci por:

$$R^\rho_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}, \quad (0.0.2)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}. \quad (0.0.3)$$

La distancia a la fuente se denotará por  $D$ , la distancia de separación entre los objetos binarios que se encuentran fusionando se denotará por  $r_{sep}$ , el radio y la masa gravitacional de cada estrella se denotarán por  $R_i$  y  $m_i$ ,  $i=1,2$ , y en caso de que no haga falta especificar la estrella simplemente serán  $R$  y  $M$ . La variable  $r$  denotará el rango de valores que va desde cero hasta el radio de la estrella  $R$  (se emplea en el estudio de polítropas), y  $M_{tot}$  representará la masa total gravitacional del sistema. La frecuencia angular rotacional de una estrella se denotará  $\Omega_{rot}$ , y la frecuencia angular de las ondas gravitacionales se denotaran por  $\omega_{gw}$ .

El lambertiano viene dado por:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (0.0.4)$$

La derivada parcial de la componente temporal del 4-vector  $\partial_0 f$  se relaciona con la derivada temporal de la siguiente manera:  $\partial_0 f = \frac{\partial f}{c \partial t} = \frac{1}{c} \dot{f}$ .

Sea  $T_{\mu\nu}$  un tensor de rango dos, la simetrización de los índices se expresa de la siguiente manera:

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$$

La circulación normalizada se denotará  $\bar{C}$  y la compacidad de las estrellas  $\mathcal{C}$ .

# Introducción

La primera detección de ondas gravitacionales, GW150914, se realizó en 2015 por el observatorio LIGO y fue consistente con la fusión de dos agujeros negros [3]. Posteriormente, en 2017, se detectó el evento GW170817, consistente con la fusión de dos estrellas de neutrones [4]. A diferencia de la detección anterior, este evento permitió no solo la observación de las ondas gravitacionales, sino también la identificación de su contraparte electromagnética GRB170817A. La detección simultánea en múltiples canales resulta de gran importancia, ya que posibilita la determinación del corrimiento al rojo, la asociación de estos eventos con estallidos de rayos gamma (GRB) cortos y la confirmación de la producción de elementos pesados, como el oro y el platino, en dichas fusiones [5]. Hasta la fecha se han detectado más de 200 eventos de fusión de objetos compactos que involucran emisión de ondas gravitacionales [6]. En contraste, solo se ha confirmado una detección de ondas gravitacionales consistente con la fusión de estrellas de neutrones.

La expectativa general es que los sistemas de agujeros negros binarios generan escenarios que pueden emitir ondas gravitacionales de manera más eficiente que otros sistemas, como los sistemas binarios de estrellas de neutrones. Esto se respalda por el hecho de que, al ser más compactos los agujeros negros, registran campos gravitacionales intensos y altas velocidades durante su fusión [7]. La compacidad de estos objetos viene dada por la expresión  $\mathcal{C} = \frac{GM}{Rc^2}$ , donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  es la masa del objeto,  $R$  es su radio y  $c$  es la velocidad de la luz.

Aunque las fusiones de agujeros negros generan deformaciones espacio-temporales más intensas que otros sistemas compactos, como las estrellas de neutrones, esto no garantiza que sean las fuentes más detectables de ondas gravitacionales. La detectabilidad depende tanto de la amplitud de la señal como de su duración y características espectrales. Dado que los detectores actuales responden a la energía recibida dentro de sus rangos de frecuencia característicos, es fundamental analizar si los procesos de fusión de otros objetos compactos, con una emisión prolongada, podrían ser más detectables que eventos breves pero intensos de fusión de agujeros negros de masa equivalente [1]. Lo anterior resulta clave para optimizar la identificación de eventos gravitacionales y ampliar la comprensión sobre el origen y la evolución de las fuentes de ondas gravitacionales. En particular explicar por qué en el evento GW170817 se detectó tan poca energía en canales de emisión electromagnética, del orden de  $10^{46}$  [erg] [8], cuando el defecto de masa del sistema binario se estima en el orden de  $10^{53}$  [erg] [4]. Esto plantea la posibilidad de que dicho fenómeno pueda explicarse mediante un sistema binario de estrellas de neutrones super-emisor de ondas gravitacionales.

En una fusión de agujeros negros, una fracción significativa del momento angular orbital se transfiere al momento angular de rotación del agujero negro de Kerr resultante [9, 10].

La fracción retenida está restringida por la condición de no superar el estado extremal de un agujero negro de Kerr, expresada mediante el parámetro adimensional de espín  $a_* \equiv \frac{Jc}{GM^2} \lesssim 1$  [11, 12] donde  $J$  y  $M$  son el momento angular y la masa gravitacional del agujero negro. En contraste, en la fusión de estrellas de neutrones, el momento angular de la estrella remanente tiene un límite inferior al del agujero negro de Kerr. Esto se debe al equilibrio entre la fuerza centrífuga y la atracción gravitacional en su superficie. Según [13], una estrella de neutrones solo será estable si  $J < 0.7 \frac{GM^2}{c}$ . Como consecuencia, la estrella de neutrones podría llegar a liberar más energía,  $\Delta E = \Delta J\Omega$ , de su órbita justo antes de la fase de fusión. Esto podría resultar en una mayor emisión de ondas gravitacionales y, en principio, una mayor detectabilidad. De lo contrario, si la estrella de neutrones pierde masa suficiente, colapsaría formando un agujero negro [14].

Además, el objeto estelar postfusión podría experimentar deformaciones significativas debido a su menor compacidad en comparación con un agujero negro, lo que influiría en la eficiencia de emisión gravitacional. La presencia de un disco de acreción a su alrededor también podría alterar la dinámica del sistema y por lo tanto la radiación emitida, ya que el disco contiene tanto parte de la masa del sistema, como momento angular [2]. Por ello, en este trabajo se analiza el impacto de la formación de dicho disco, así como la morfología del remanente, en la eficiencia de la emisión gravitacional. Tal eficiencia se estima como la razón entre la energía liberada en forma de radiación gravitacional y la energía total del sistema.

La morfología de un remanente estelar se puede asociar con la de un elipsoide, es decir con un objeto cuya superficie es tridimensional cerrada y caracterizada por tres ejes independientes y secciones planas con forma de elipses. A partir de esta figura de equilibrio autogravitante y su evolución a lo largo de una secuencia de equilibrio de Riemann-S se tendría la energía emitida por el remanente en forma de ondas gravitacionales, así como las características de la señal emitida. Esta energía total emitida en forma de ondas gravitacionales determina si el sistema corresponde a un super-emisor, es decir, un sistema que emite mayor cantidad de energía por unidad de masa en forma de ondas gravitacionales que su análoga binaria de agujeros negros de masa equivalente. Un posible candidato sería entonces una binaria de estrellas de neutrones cuya fusión forme otra estrella de neutrones de rotación rápida en lugar de un agujero negro. Sin embargo, para sistemas binarios de estrellas de neutrones suficientemente masivos, el colapso a un agujero negro ocurre de manera inmediata tras la fusión. Esto sucede si la masa de la estrella recién formada, bajo rotación uniforme, es igual o superior a 1.2 veces la masa máxima permitida para una estrella estable y no rotante, determinada por la ecuación de estado correspondiente [15, 16]. En particular, según [15], la masa máxima que una estrella compacta no rotante puede soportar contra la gravedad se encuentra en el rango de  $2.01 M_\odot$  a  $2.16 M_\odot$ .

La estructura del trabajo es la siguiente: en el Capítulo I se presentan los conceptos



básicos de la relatividad general, los fundamentos de las ondas gravitacionales y casos particulares de sistemas que radian ondas gravitacionales. En el Capítulo II se detallan las fases de la fusión de un sistema binario, la relación masa-radio determinada por las ecuaciones de estado de las estrellas, así como las leyes de conservación y las relaciones cuasiuniversales que permiten relacionar las propiedades del sistema antes y después de la fusión. En el Capítulo III se describen los modelos del objeto postfusión: esferoides de Maclaurin, elipsoides de Jacobi y elipsoides de Riemann tipo S. Estos objetos se utilizan para modelar la estrella rotante y altamente deformada, resultado de la fusión. En el Capítulo IV se aplican estos modelos al evento GW170817 para analizar la energía emitida durante todo el proceso de fusión y evaluar si estos modelos explican la baja cantidad de energía detectada en otros canales de emisión. Finalmente, en el Capítulo V, se presentan las conclusiones y la discusión de los resultados.

---

# CAPÍTULO I

---

## Fundamentos de las ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales son perturbaciones en la geometría del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz, predichas por Einstein en el marco de la relatividad general [17, 18]. Su origen se encuentra en sistemas astrofísicos altamente dinámicos, como la fusión de objetos compactos. A pesar de su débil interacción con la materia, su detección ha sido posible gracias a interferómetros de alta precisión, como LIGO y Virgo.

En este capítulo, se presenta el formalismo teórico para describir estas ondas en la aproximación de campo débil. Mediante la aproximación de espacio-tiempo de Minkowski perturbado, se deriva la ecuación de onda gravitacional, determinando sus modos de polarización y características de propagación. Finalmente, se introduce el tensor de energía-momento asociado y su papel en la transferencia de energía.

### 1.1. Teoría de la relatividad general

La teoría de la relatividad general de Einstein es una teoría relativista de la gravedad, que hasta el momento ha sido verificada experimentalmente [19]. Las ecuaciones de campo de esta teoría son:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.1.1)$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-momento,  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo, y  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein. Este último se construye a partir del tensor de Ricci y la métrica para garantizar consistencia con el límite newtoniano. Específicamente, debe incluir términos lineales en las segundas derivadas de los coeficientes métricos, condición que satisface el tensor de Ricci [12].

## 1.2. Fundamentos de las ondas gravitacionales

En el límite de campo débil, la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$  es aproximadamente plana:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.2.1)$$

donde  $h_{\mu\nu}$  es una perturbación de tal manera que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , y  $\eta_{\mu\nu}$  corresponde a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski. Este sistema de coordenadas se llama *marco de referencia cercanamente lorentziano*. Este marco de referencia se contruye al proporcionar la condición de campo gravitacional débil y bajas velocidades en la fuente:  $v \ll c$ . Estas condiciones se cumplen en general en el universo, excepto en regiones cercanas a agujeros negros y estrellas de neutrones, o en el inicio del universo [12]. Al reemplazar esta expresión de la métrica en las ecuaciones de Einstein (1.1.1) y conservando los términos a primer orden en  $h_{\mu\nu}$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - 2\bar{h}_{\lambda(\mu,\nu)}{}^{,\lambda} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.2.2)$$

donde  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h/2$ , y  $h \equiv h_{\mu}{}^{\mu}$ . La métrica del espacio-tiempo no está completamente determinada, ya que existe una libertad en la elección de coordenadas. En la aproximación de campo débil, esta libertad da lugar a *transformaciones de gauge* sobre la perturbación  $h_{\mu\nu}$ , que tienen la forma:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad (1.2.3)$$

donde  $\xi^{\mu}$  es un pequeño cambio en las coordenadas. Las ecuaciones de Einstein proveen libertad para elegir condiciones sobre las transformaciones de gauge que las simplifique sin cambiar la física. El gauge de Lorentz es precisamente una de estas elecciones permitidas, ya que se puede encontrar una función  $\xi^{\mu}$  que haga que  $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ . En otras palabras, la teoría da suficiente libertad para elegir un sistema coordenado que satisfaga esta última condición. Al imponer el gauge de Lorentz, la ecuación (1.2.2) es:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.2.4)$$

la cual en el vacío toma la forma de la siguiente ecuación de onda:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.2.5)$$

En síntesis, en el límite de campo débil y en el gauge de Lorentz, las ecuaciones de Einstein se reducen a una ecuación de onda, donde se aprecia que la velocidad de

propagación correspondería a la de la luz [20]. De este modo, la *Teoría de la Relatividad General de Einstein* concilia la idea de interacción no instantánea con la comprensión de la fuerza gravitacional, por medio de ondas gravitacionales que viajan a una velocidad finita.

### 1.3. Polarización de las ondas gravitacionales

Con el fin de entender estas ondas gravitacionales se busca un marco de referencia en el cual se simplifiquen las componentes del tensor  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . A priori este tensor tiene 16 componentes, ya que como se mostró en la notación los índices griegos denotan cada uno 4 componentes; sin embargo, al heredar la simetría del tensor energía-momento (1.2.4), tendría tan solo 10 componentes independientes. Además, el gauge de Lorentz,  $\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$ , impone 4 ecuaciones adicionales las cuales implican 4 restricciones. Estas 4 restricciones surgen porque es posible elegir condiciones iniciales que fijen 4 componentes de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  (por ejemplo,  $\bar{h}_{0\mu} = 0$ ) en todo el espacio-tiempo. El tensor  $\bar{h}_{\mu\nu}$  queda con 6 componentes independientes, pero aún se puede realizar otra transformación de gauge que cumpla las siguientes ecuaciones, y que mantiene al sistema en el gauge de Lorentz:

$$\bar{h}_{\mu\nu}u^\nu = 0, \quad (1.3.1)$$

$$\bar{h}_\mu{}^\mu = 0. \quad (1.3.2)$$

La primera condición corresponde a elegir un observador lorentziano particular, en donde su cuadrivelocidad  $u^\nu$  es transversal a  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . A priori esta condición impone 4 ecuaciones, sin embargo, debido a la normalización del vector cuadrivelocidad  $-(u^0u^0) + (u^i u^i) = -1$  entonces se puede expresar una de las ecuaciones como función de las otras 4, lo cual implica entonces solo 3 restricciones. La segunda condición implica que en este marco la traza del tensor  $\bar{h}_\mu{}^\mu$  es cero, así que se impone una restricción adicional. Todo esto es conocido como el gauge transversal y sin traza (TT), que impone otras 4 restricciones en total a las componentes, reduciendo el número de componentes del tensor  $\bar{h}_{\mu\nu}$  a tan solo 2. En otras palabras, solo existen 2 polarizaciones posibles para las ondas gravitacionales si se requiere que se satisfagan las ecuaciones de campo de Einstein.

Una vez en el gauge de Lorentz, las componentes (TT) de la solución de onda plana, propagándose en dirección  $\hat{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ , pueden ser obtenidas usando el operador proyector  $P_{ij}$ :

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j. \quad (1.3.3)$$

Este proyector es espacial porque las componentes temporales ya han sido eliminadas por el gauge de Lorentz. La perturbación de la métrica queda expresada de la siguiente

manera:

$$h_{ij}^{TT} = (P_{il}P_{jm} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{lm})h_{lm} = \Lambda_{ij,lm}h_{lm} = \Lambda_{ij,lm}\bar{h}_{lm}, \quad (1.3.4)$$

donde se define el operador  $\Lambda_{ij,lm} = (P_{il}P_{jm} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{lm})$ . Si se parte de una solución de onda plana para  $h_{ij}$  y se usa el gauge transversal y sin traza, la ecuación (1.2.5) tendrá la siguiente solución:  $h_{ij}^{TT} = e_{ij}(\mathbf{k})e^{ikx}$ , con  $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$  y  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ , donde el tensor  $e_{ij}(\mathbf{k})$  es denominado el tensor de polarización. Debido a que las ondas se propagan en la dirección  $\hat{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ , las componentes distintas de cero de  $h_{ij}^{TT}$  están en el plano transversal a  $\hat{n}$ . Si  $\hat{n}$  se define como el eje  $z$ , entonces se tiene que [20]:

$$h_{ij}^{TT}(t, z) = \begin{bmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \cos(\omega_{gw}(t - z/c)), \quad (1.3.5)$$

donde  $\omega_{gw}$  correspondería a la frecuencia angular de las ondas gravitacionales.

#### 1.4. Tensor energía impulso y luminosidad asociada a las ondas gravitacionales

En relatividad general no se puede definir la densidad de energía gravitacional en un punto del espacio-tiempo, debido a que el principio de equivalencia permite eliminar la fuerza gravitacional en dicho punto [12]. Por lo tanto, para determinar esta cantidad física se debe recurrir a una definición no-local. Como se muestra a continuación, para definir un tensor energía impulso no-local, se debe recurrir a segundo orden la teoría de perturbaciones en la métrica [12].

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^{(3)}). \quad (1.4.1)$$

La métrica del espacio-tiempo depende del fondo original  $g_{\mu\nu}^{(B)}$ , en este caso de la métrica de Minkowski, y de las correcciones a primer y segundo orden en la amplitud de las ondas, las cuales vienen dadas por las perturbaciones  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  y  $h_{\mu\nu}^{(2)}$ , respectivamente. Como señala Maggiore [20], a primer orden,  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  describe ondas gravitacionales en el límite lineal, pero a segundo orden,  $h_{\mu\nu}^{(2)}$  introduce efectos no lineales que modifican la geometría de fondo: términos cuadráticos contribuyen al tensor de Einstein promedio  $\langle G_{\mu\nu} \rangle$ , haciendo que el fondo efectivo ya no sea plano. Esta curvatura inducida es inevitable y obliga a reinterpretar el espacio-tiempo subyacente como un fondo curvo cuando se consideran perturbaciones de segundo orden, lo cual es esencial para definir cantidades físicas como la densidad de energía gravitacional, que requiere promedios espacio-temporales [20, 12]. Al reemplazar en las ecuaciones de Einstein se deduce que

#### 1.4. TENSOR ENERGÍA IMPULSO Y LUMINOSIDAD ASOCIADA A LAS ONDAS GRAVITACIONALES

el siguiente tensor, relacionado con perturbaciones del tensor de Ricci a segundo orden, contribuye a la curvatura del fondo original de la métrica, por lo tanto se denota como el tensor de energía-impulso de las ondas gravitacionales:

$$T_{\mu\nu}^{(GW)} = \frac{-c^4}{8\pi G} \langle R_{\mu\nu}^{(2)}(h) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(B)} R^{(2)} \rangle, \quad (1.4.2)$$

donde  $R^{(2)} = \langle R_{\mu\nu}^{(2)}(h) \rangle g_{(B)}^{(\mu\nu)}$ , y el promedio de la contribución a segundo orden del tensor de Ricci es  $\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle$  [20]. Por notación  $\langle \cdot \rangle$  representa el promedio espacio-temporal sobre escalas mucho mayores que la longitud de onda  $\lambda$ . Si adicionalmente se impone el gauge de Lorentz se llega a la siguiente expresión para el tensor energía impulso de las ondas gravitacionales:

$$T_{\mu\nu}^{(GW)} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle. \quad (1.4.3)$$

Dado que esta expresión está construida únicamente a partir de derivadas de la perturbación métrica  $h_{\alpha\beta}$ , su valor no cambia bajo transformaciones de gauge de la forma  $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$ , ya que los términos adicionales introducidos por la transformación se cancelan al tomar las derivadas [12]. Esto garantiza que  $T_{\mu\nu}^{(GW)}$  solo depende de los grados de libertad físicos de la onda gravitacional. Por lo tanto, al tratarse de un invariante de gauge, es conveniente usar el marco de referencia (TT) para hallar la densidad de energía:

$$\rho^{(GW)} = T^{(GW)00} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle, \quad (1.4.4)$$

y el flujo de energía  $S^i$ , el cual viene dado por:

$$S^i = cT^{(GW)0i} = \frac{c^5}{32\pi G} \langle \partial^0 h_{mn}^{TT} \partial^i h_{mn}^{TT} \rangle. \quad (1.4.5)$$

Cabe recordar que por notación  $\partial_0 f = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{c} \dot{f}$ . Para una onda gravitacional, propagándose en dirección  $n^i = x^i/D$ , el flujo de energía radial viene dado por  $S^r = n^i S^i$ . Por lo tanto, la luminosidad de las ondas gravitacionales, correspondiente a la energía total por unidad de tiempo cruzando la superficie de una esfera de radio  $D$ , es:

$$\begin{aligned} L_{(GW)} &= c \int dA n_i T^{(GW)0i} = c \int dA T^{(GW)0r} = c \int dA T^{(GW)00}, \\ L_{(GW)} &= \frac{c^3 D^2}{32\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{c^3 D^2}{16\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Observe que se empleo la conservación del tensor energía impulso para, por medio de la ecuación (1.4.3), tomar  $T^{(GW)00} = T^{(GW)0r}$ , además  $d\Omega$  corresponde a el elemento

diferencial de ángulo sólido:  $dA = D^2 d\Omega$ . Determinar la luminosidad de las ondas gravitacionales permite realizar un balance energético en la fase espiral de la fusión de binarias, el cual se presentará más adelante en el capítulo II.

### 1.5. Radiación de ondas gravitacionales

Para determinar la luminosidad de las ondas gravitacionales a partir de la dinámica de la fuente, se supone que la distancia  $D$  entre la fuente y el observador es mucho mayor que la longitud característica de la fuente,  $d$  (ver figura 1) y que la fuente se mueve a velocidades no relativistas ( $v \ll c$ ).

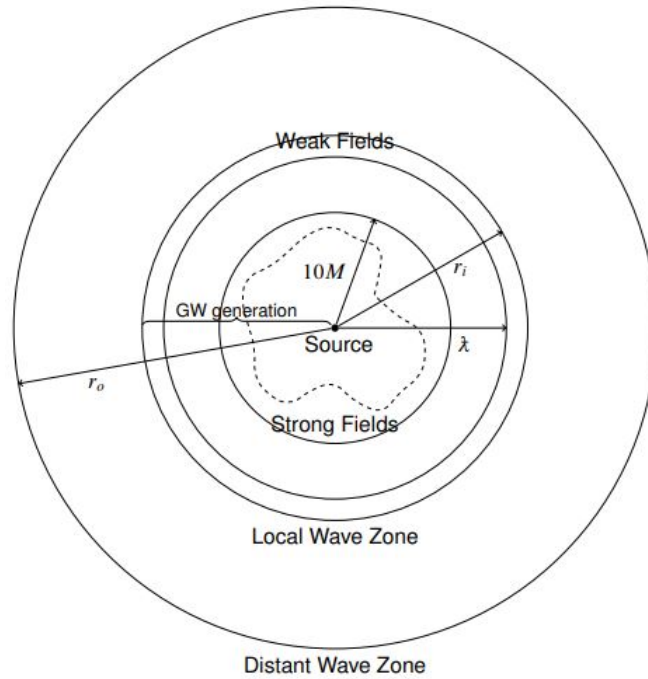


Figura 1: Esquema, no a escala, de las zonas relevantes en la generación de ondas gravitacionales. La zona de radiación corresponde a las zonas de onda local y distante (tomado de [21]). El radio  $r_i$  está dado por el mayor valor de distancia para el cual el campo se comporta como un campo de zona cercana (campos fuertes) o hay corrimiento al rojo (por la fuente). Por otro lado, el radio exterior, mayor a  $r_o$ , está determinado por el punto en el que hay corrimiento al rojo y/o refracción producida por el fondo (no por la fuente).

En este contexto, la zona de radiación se divide en dos regiones clave: la zona de onda local ( $r_i < D < r_o$ ), donde las ondas gravitacionales se propagan como ondas planas en un fondo aproximadamente plano sin efectos cosmológicos significativos; y la zona lejana ( $D \geq r_o$ ), donde la curvatura del universo (corrimiento al rojo) afecta la propagación.

## 1.5. RADIACIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES

Esta división garantiza que, para  $D \gg d$ , la energía radiada se calcule en un régimen donde las ondas gravitacionales son detectables.

Bajo estas consideraciones, se obtiene la expresión en la aproximación cuadrupolar para la perturbación gravitacional, donde el momento cuadrupolar de masa se calcula en la aproximación Newtoniana (ver desarrollo en A). La solución de la ecuación (1.2.4) en el régimen de campo débil y fuente no relativista es:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) \Big|_{\text{cuad}} = \frac{2G}{Dc^4} \Lambda_{ij,kl} \ddot{Q}^{kl}(t - D/c), \quad (1.5.1)$$

donde  $Q^{kl}$  corresponde al momento cuadrupolar de la masa, el cual se halla a partir del segundo momento en la masa de la fuente  $M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3x' T^{00}(t, \mathbf{x}') x'^i x'^j$ , que en últimas depende del tensor energía-momento en la fuente:  $Q^{ij} = M^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} M_{kk}$ . Cabe aclarar que en algunos casos es más conveniente calcular la perturbación gravitacional utilizando la expresión del segundo momento en la masa del sistema, en vez del momento cuadrupolar del mismo:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) \Big|_{\text{cuad}} = \frac{2G}{Dc^4} \Lambda_{ij,kl} \ddot{M}^{kl}(t - D/c). \quad (1.5.2)$$

La energía radiada se obtiene reemplazando la expresión (1.5.1) en la ecuación de luminosidad de las ondas gravitacionales (1.4.6). De acuerdo con el desarrollo presentado en A, tal luminosidad corresponde a:

$$L_{(GW)} = \frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle. \quad (1.5.3)$$

### 1.5.1. Emisión gravitacional de una binaria

Determinar la emisión de ondas gravitacionales de sistemas binarios es fundamental para comprender la fase espiral del proceso de fusión del sistema, la cual se detallará en el capítulo II. Un sistema binario de masas puntuales consiste en dos objetos que orbitan mutuamente alrededor de su centro de masa común, ligados por su interacción gravitacional. Los objetos tienen masas gravitacionales  $m_1$  y  $m_2$ , y coordenada relativa  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ , la cual describe un movimiento circular (ver figura 2) en el plano  $(x, y)$  con una órbita parametrizada como:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= r_{sep} \cos(\Omega_s t + \frac{\pi}{2}), \\ y_0(t) &= r_{sep} \sin(\Omega_s t + \frac{\pi}{2}), \\ z_0(t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.5.4)$$



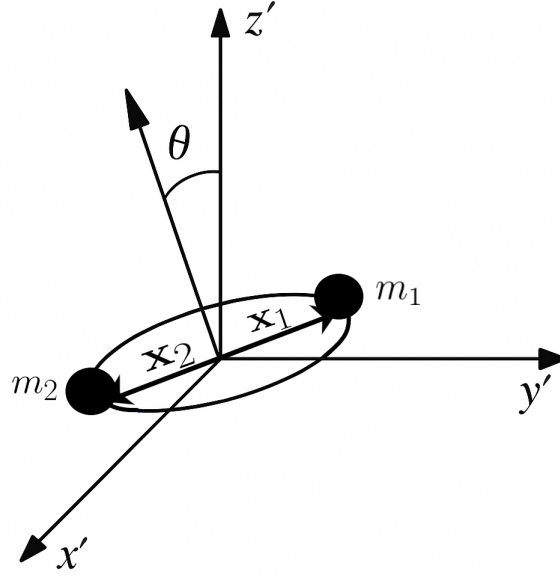


Figura 2: Sistema binario con la geometría del problema, el observador se encuentra fijo a una distancia  $D$  sobre el eje  $z'$ . La normal al plano de la órbita hace un ángulo  $\theta$  con el eje  $z'$  [20].

donde la masa reducida del sistema es  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , la frecuencia angular orbital de la fuente es  $\Omega_s$  y la distancia relativa entre las masas es  $r_{sep}$ . En el marco de referencia del centro de masa (CM), el segundo momento de masa está dado por:

$$M^{ij} = \mu x_0^i(t) x_0^j(t). \quad (1.5.5)$$

Las polarizaciones de la onda son (ver desarrollo en A.2):

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{1}{D} \frac{4G\mu\Omega_s^2 r_{sep}^2}{c^4} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\Omega_s t) \\ h_x(t) &= \frac{1}{D} \frac{4G\mu\Omega_s^2 r_{sep}^2}{c^4} \cos(\theta) \sin(2\Omega_s t), \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

donde la frecuencia angular de las ondas gravitacionales corresponde a  $\omega_{gw} = 2\Omega_s$ , lo cual es de esperar por la simetría del sistema: cada vez que el sistema da una rotación de  $\pi$ , la configuración de masa regresa a su estado inicial. Si adicionalmente se considera la tercera ley de Kepler que relaciona la frecuencia orbital del sistema con la distancia entre las dos masas puntuales,  $\Omega_s^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r_{sep}^3}$ , y se define la masa de chirrido:

$$M_c \equiv \mu^{3/5} (m_1 + m_2)^{2/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}, \quad (1.5.7)$$

entonces las ecuaciones (1.5.6) quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{4}{D} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\pi f_{gw}}{c} \right)^{2/3} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\pi f_{gw} t), \\ h_x(t) &= \frac{4}{D} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\pi f_{gw}}{c} \right)^{2/3} \cos(\theta) \sin(2\pi f_{gw} t), \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

donde  $f_{gw} = \omega_{gw}/2\pi$  es la frecuencia de las ondas gravitacionales. Al emplear estas polarizaciones y la ecuación (1.4.6) se llega a:

$$\frac{dL}{d\Omega} = \frac{c^3 D^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_x^2 \rangle = \frac{2G\mu^2 r_{sep}^4 \Omega_s^6}{\pi c^5} g(\theta), \quad (1.5.9)$$

donde

$$g(\theta) = \left( \frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} \right)^2 + \cos^2(\theta). \quad (1.5.10)$$

Al integrar sobre el ángulo sólido se obtiene que la luminosidad de estas ondas gravitacionales, en la aproximación cuadrupolar para la perturbación gravitacional, corresponde a:

$$L_{GW} = \frac{32}{5} \frac{G\mu^2}{c^5} r_{sep}^4 \Omega_s^6. \quad (1.5.11)$$

Adicionalmente, según [20], a partir de la transformadas de Fourier de  $h_{ij}^{TT}$  se puede determinar la tasa de cambio de la energía transportada en forma de ondas gravitacionales respecto a la frecuencia de las mismas ondas:

$$\frac{dE}{df} = \frac{\pi^{2/3}}{3G} (GM_c)^{5/3} f^{-1/3}. \quad (1.5.12)$$

La energía radiada por un sistema binario de masas puntuales corresponde a integrar la anterior ecuación respecto a la frecuencia:

$$E_{rad} = \frac{\pi^{2/3}}{2G} (GM_c)^{5/3} f_{max}^{2/3}. \quad (1.5.13)$$

### 1.5.2. Emisión gravitacional de un objeto triaxial rotante

Determinar la emisión gravitacional de un objeto triaxial rotante, un cuerpo cuya forma tridimensional se caracteriza por tener tres ejes principales de diferente longitud, es clave para entender sistemas más complejos con autogravitación, especialmente en el contexto de la emisión gravitacional del remanente del proceso de fusión descrito en el capítulo III. Se estudia un cuerpo elipsoidal, es decir un objeto volumétrico cuya frontera es una superficie bidimensional cerrada caracterizada por tres ejes independientes (triaxial)

y secciones planas con forma de elipses. Se supone que este cuerpo rota rígidamente alrededor de uno de sus ejes principales,  $x'_3$ , a una frecuencia angular llamada  $\Omega_{rot}$ . Se denotan  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  como las coordenadas en el sistema de referencia del cuerpo, que rotan con el mismo, y  $(x_1, x_2, x_3)$  como las coordenadas en un sistema fijo tal que  $x'_3 = x_3$  (ver figura 3). Ambos sistemas están relacionados por una matriz de rotación dependiente del tiempo  $R_{ij}$ :

$$x'_i = R_{ij}x_j, \quad (1.5.14)$$

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_{rot}t) & \sin(\Omega_{rot}t) & 0 \\ -\sin(\Omega_{rot}t) & \cos(\Omega_{rot}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

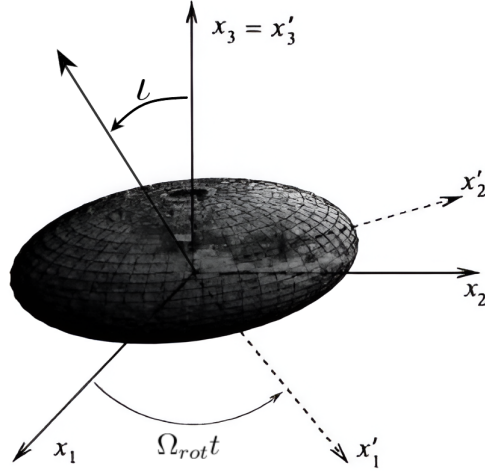


Figura 3: Objeto triaxial rotante en el marco de referencia  $x_i$  fijo, y el marco de referencia  $x'_i$  que rota con el cuerpo. Los ejes del sistema que rotan a una frecuencia angular  $\Omega_{rot}$  se encuentran alineados con los ejes principales del elipsoide. También se aprecia el ángulo  $\iota$  formado entre el eje de rotación del sistema y la línea de visión sobre la que se encuentra el observador lejano.

El tensor de inercia del objeto  $\mathcal{I}_{ij}$ , se define como:

$$\mathcal{I}_{ij} = \int d^3\mathbf{x} \rho(t, \mathbf{x}) (x^2 \delta^{ij} - x^i x^j). \quad (1.5.15)$$

El tensor de inercia en el sistema  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , denotado  $\mathcal{I}'_{ij} = \text{diag}(\mathcal{I}'_1, \mathcal{I}'_2, \mathcal{I}'_3)$ , es constante y se relaciona con el tensor en el marco  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathcal{I}_{ij}$ , mediante:

$$\mathcal{I}'_{ij} = (R \mathcal{I} R^T)_{ij}, \quad \mathcal{I}_{ij} = (R^T \mathcal{I}' R)_{ij}. \quad (1.5.16)$$

## 1.6. POTENCIAL RADIACIÓN-REACCIÓN

Las polarizaciones de las ondas gravitacionales obtenidas a partir del tensor de inercia y las segundas derivadas del momento cuadrupolar (ver detalles en A.3) corresponden a:

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{G}{Dc^4} 4\Omega_{rot}^2 (\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2) \cos(2\Omega_{rot}t) \left( \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right), \\ h_\times &= \frac{G}{Dc^4} 4\Omega_{rot}^2 (\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2) \sin(2\Omega_{rot}t) \cos \iota. \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

donde  $\iota$  corresponde al ángulo entre la línea de visión y el eje  $x_3$  respecto al cual se encuentra rotando la estrella (ver figura 3). La frecuencia angular de las ondas gravitacionales corresponde a  $\omega_{gw} = 2\Omega_{rot}$ , análogo al caso de emisión gravitacional en sistemas binarios.

La luminosidad de las ondas gravitacionales en la aproximación cuadrupolar se determina usando la ecuación (1.5.3):

$$L = \frac{32G}{5c^5} \Omega_{rot}^6 (\mathcal{I}'_2 - \mathcal{I}'_1)^2. \quad (1.5.18)$$

Así que, la pérdida de energía del sistema por radiación gravitacional está dada por:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32G}{5c^5} \Omega_{rot}^6 (\mathcal{I}'_2 - \mathcal{I}'_1)^2. \quad (1.5.19)$$

## 1.6. Potencial radiación-reacción

Cuando una fuente emite radiación gravitacional, como por ejemplo un objeto triaxial rotante, pierde energía y momento angular. Esta radiación afecta dinámicamente a la fuente, por lo que se requiere describir este fenómeno mediante un potencial  $\Phi^{(react)}$  que cuantifique la “reacción” de la radiación. Es decir, la influencia retroactiva que las ondas gravitacionales ejercen sobre el sistema que las genera y que, por lo tanto, puede influir en el campo de velocidades de la materia que compone al objeto. Este potencial  $\Phi^{(react)}$  está directamente relacionado con la componente temporal de la perturbación métrica  $h_{00}^{(react)}$  a través de [12]:

$$\Phi^{(react)} = -\frac{1}{2} h_{00}^{(react)}, \quad (1.6.1)$$

donde  $h_{00}^{(react)}$  únicamente contiene los términos principales asociados a la reacción producto de la radiación (ver detalles en B). Para hallarlo primero se retoma la solución espacial de la perturbación de la métrica en el gauge original:

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \Big|_{\text{cuad}} = \frac{2G}{Dc^4} \ddot{Q}^{ij}(t - D/c). \quad (1.6.2)$$

Esta solución si bien no es exacta en presencia de materia, si es una solución exacta de las ecuaciones de campo en el vacío, válida tanto para las zonas intermedias y las cercanas ( $D \leq \lambda$  con  $D > d$ ) como en la zona de radiación (ver figura 1). Se toman las siguientes consideraciones:

- Condición de frontera de onda saliente en el infinito, lo que resulta en la dependencia temporal  $t - D/c$ . Esta condición impone que las perturbaciones métricas  $\bar{h}_{ij}$  solo representen ondas gravitacionales que se alejan de la fuente (radiación saliente), y no ondas entrantes desde el infinito. La forma funcional  $t - D/c$  indica que las perturbaciones en un punto  $\mathbf{x}$  (a distancia  $D = |\mathbf{x}|$  de la fuente) están determinadas por el estado de la fuente en un tiempo retardado  $t_{\text{ret}} = t - D/c$ . Esto es consistente con la velocidad finita de propagación de las ondas gravitacionales.
- Expansión de  $\bar{h}_{ij}$  en series de potencias de  $D$  para estudiar las contribuciones cerca de la fuente. Es decir, separar las contribuciones del campo cercano y lejano, donde los términos de orden superior codifican efectos no lineales y de estructura finita de la fuente, cruciales para modelar la reacción radiativa.

Mediante una transformación en un gauge Newtoniano, se obtiene la expresión:

$$h_{00}^{(\text{react})} = -\frac{2}{5}Q_{jk}^{(5)}x^jx^k, \quad (1.6.3)$$

donde el súper índice entre paréntesis representa el orden de la derivada temporal. El potencial de reacción a la radiación se escribe como:

$$\Phi = -\frac{1}{2}h_{00}^{(\text{react})} = \frac{1}{5}Q_{jk}^{(5)}x^jx^k. \quad (1.6.4)$$

Para más detalles sobre las derivaciones matemáticas ver el apéndice B. En objetos compactos no axisimétricos, como estrellas elipsoidales o discos de acreción,  $\Phi^{(\text{react})}$  puede inducir *torques* en la fuente que redistribuyen el momento angular interno. Esto puede llevar a la reconfiguración de la estructura del objeto o incluso a la formación de nuevas inestabilidades dinámicas, como precesiones anómalas o modos oscilatorios no lineales [12]. Estos aspectos serán particularmente relevantes en el Capítulo III cuando se analice la emisión gravitacional de una estrella de configuración elipsoidal.

## 1.7. Detección de ondas gravitacionales

Dado que las señales de las ondas gravitacionales son muy tenues, se requieren instrumentos muy sensibles para su detección. En varios países, se han construido dispositivos especializados para este propósito, principalmente utilizando técnicas de interferometría

## 1.7. DETECCIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES

para obtener mediciones precisas. Estos detectores miden las distancias relativas entre cuerpos de referencia. La idea principal es medir las distancias entre espejos a través de haces de láser que se reflejan entre ellos. La configuración típica corresponde a un interferómetro de Michelson y Morley, el cual es una estructura en forma de “L” con espejos en los extremos y en el ángulo, como se muestra en la figura 4. Al combinar los haces de luz de los dos brazos, se genera un patrón de interferencia que se utiliza para medir las variaciones en la distancia relativa entre los espejos causadas por el paso de una onda gravitacional.

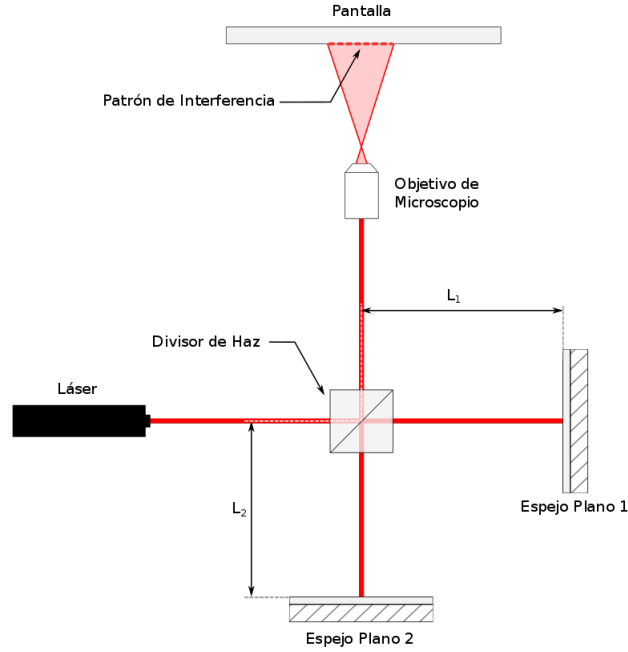


Figura 4: Esquema del interferómetro de Michelson y Morley [22].

Con respecto a los detectores, Virgo, por ejemplo, corresponde a un interferómetro de Michelson aislado de perturbaciones externas, capaz de medir ondas gravitacionales cuya frecuencia se encuentre entre los 10 Hz hasta los 10 kHz. Por lo tanto, es potencialmente sensible a la detección de fusión de un sistema binario compacto, estrellas de neutrones o agujeros negros y explosión de supernovas [23]. Sin embargo, su funcionamiento óptimo está en el rango de 10 Hz hasta 1 kHz. La primera detección de ondas gravitacionales se llevó a cabo utilizando los observatorios LIGO, ubicados en Hanford, Washington, y Livingston, Luisiana, Estados Unidos [3]. LIGO es un observatorio de ondas gravitacionales también por interferometría láser, cuyo rango de frecuencias es de 30 a 7000 Hz. No obstante, su rango de funcionamiento óptimo está en el rango de 10 a 1000 Hz aproximadamente.

Por otra parte, en el caso de LISA, constará de tres naves espaciales, con forma de discos de hockey, orbitando a cinco millones de kilómetros entre sí, formando un triángulo equilátero. El espectro de ondas gravitacionales de LISA cubre una amplia gama de

frecuencias, ya que opera en el rango de baja frecuencia, entre 0,1 mHz y 1 Hz. Por lo cual, LISA puede detectar ondas gravitacionales provenientes de fuentes tales como: binarias ultracompactas en nuestra galaxia, fusiones de agujeros negros supermasivos y espirales con proporciones de masa extrema [24]. Por último, el *Telescopio Einstein*, es un proyecto de detector de ondas gravitacionales de tercera generación, diseñado para operar en un rango de frecuencias entre 1 Hz y 10 kHz [25], con una sensibilidad diez veces mayor que los detectores actuales.

Según la teoría de la relatividad general, la acción de una onda gravitacional sobre masas de prueba corresponde a dos modos distintos de cómo el espacio-tiempo se estira y encoge perpendicular a la dirección de propagación; el modo dado por la polarización  $+$  y el dado por la polarización  $\times$  (ver figura 5).

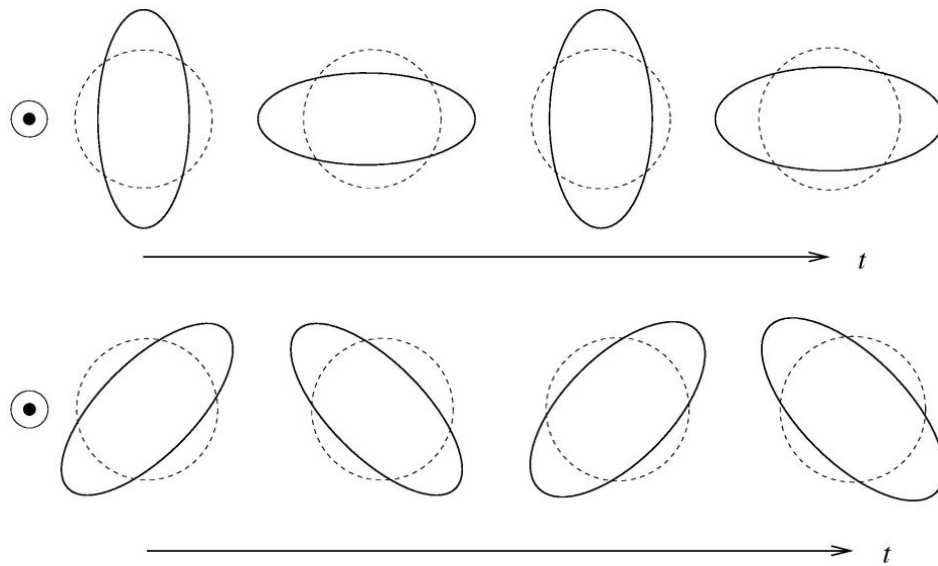


Figura 5: Representación esquemática de las dos polarizaciones de las ondas gravitacionales:  $h_+$  (arriba) y  $h_\times$  (abajo), que corresponden a los únicos grados de libertad físicos en el gauge TT. Los anillos con trazo discontinuo muestran la posición del anillo en ausencia de ondas gravitacionales (Imagen tomada de [26]).

Estas polarizaciones no ejercen fuerzas clásicas sobre las partículas, sino que cambian las distancias relativas entre masas de prueba en caída libre, al modificar la geometría misma del espacio-tiempo [20]. Que existan solo dos polarizaciones es consecuencia de la estructura de la teoría de la relatividad general.

---

# CAPÍTULO II

---

## Sistemas binarios y leyes de conservación

En astrofísica, el término sistema binario se utiliza para referirse a dos objetos que están ligados por su fuerza gravitacional, orbitando uno alrededor del otro. Estos pueden ser dos estrellas, dos agujeros negros, un agujero negro y una estrella, entre otros. La radiación de ondas gravitacionales impulsa a los sistemas binarios cada vez más cerca uno del otro, hasta que los dos cuerpos se fusionan en un evento violento que emitiría una intensa ráfaga de ondas gravitacionales. La señal gravitacional emitida justo antes de la fusión es de gran importancia para estudiar los sistemas binarios compuestos por objetos compactos [7]. A una distancia relativa  $r_{sep}$  mayor, entre las estrellas, menor es su velocidad relativa y, por lo tanto, la señal de onda gravitacional es más débil. Esto se puede concluir de las ecuaciones expuestas en la sección 1.5.1. La distancia relativa justo antes de la fusión depende de la compacidad de los objetos [2], la cual viene dada por  $\mathcal{C}_i = \frac{Gm_i}{R_i c^2}$ , ya que la compacidad determina la distancia mínima justo antes de que empiece la fusión. Por lo tanto, uno de los factores más relevantes en la eficiencia de emisión de ondas gravitacionales, es precisamente la compacidad de los cuerpos que se están fusionando. Tal eficiencia se estima como el cociente entre la energía liberada en forma de radiación gravitacional y la energía total del sistema.

Sin embargo, existen otros factores que influyen en la eficiencia de la emisión de ondas gravitacionales, como: (i) la relación entre la energía emitida y el momento angular emitido, (ii) el momento angular del objeto final estacionario, y (iii) la presencia de un disco de acreción asociado. Un aspecto particularmente relevante para las contrapartes electromagnéticas es la formación de discos remanentes. De hecho, como se discute en [27], tales discos pueden generarse con masas del orden de  $0.1M_{\odot}$  cuando el material del sistema adquiere suficiente soporte rotacional durante la fusión. La existencia de una correlación directa entre las configuraciones pre y postfusión resalta la necesidad de caracterizar la evolución dinámica del sistema a lo largo de todas las etapas del proceso de fusión.



## 2.1. Fases de la fusión de los sistemas binarios

El proceso de fusión de binarias se puede dividir en cuatro fases: inmersión, fusión, amortiguamiento y objeto final [28]. Durante la fase de inmersión, a medida que la binaria pierde energía debido a la radiación gravitacional, las masas se acercan gradualmente entre sí. Un sistema binario compacto en proceso de inmersión puede describirse como dos partículas puntuales con masas  $m_1$  y  $m_2$ , que sigue orbitas cuasi-circulares, es decir, cuyo decaimiento es lento, respecto al periodo orbital, alrededor del centro de masa.

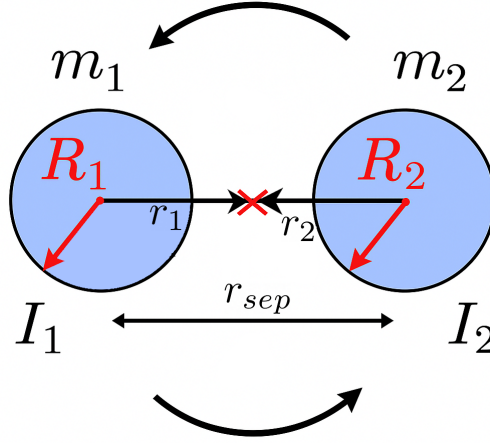


Figura 6: Sistema binario en el que se aprecian los radios  $R_i$ , masas gravitacionales  $m_i$ , y distancias desde el centro de masa de cada estrella al centro de masa del sistema  $r_i$ , con  $i=1; 2$ . La frecuencia angular a la que giran respecto al centro de masa se denota  $\Omega_s$ , el momento de inercia de cada estrella respecto a su propio eje de rotación se denomina  $I_i$ , y la distancia relativa entre las estrellas se denomina  $r_{sep} = r_1 + r_2$  (imagen tomada de [1]).

Durante la fase de inmersión el sistema presenta una evolución adiabática, es decir, un proceso en el cual los cambios ocurren de manera gradual y lenta en comparación con otros tiempos característicos del sistema. El sistema evoluciona adiabáticamente si:

$$\frac{\dot{\Omega}_s}{\Omega_s^2} \ll 1, \quad (2.1.1)$$

donde  $\Omega_s$  corresponde a la frecuencia angular orbital de la binaria [20]. En el sistema de masa reducida, y en el régimen Newtoniano, la energía orbital de la binaria, considerando el movimiento traslacional y no el espín de cada estrella, corresponde para órbitas circulares a:

$$E_{orb} = T + W = -\frac{Gm_1m_2}{2r_{sep}}, \quad (2.1.2)$$

## 2.1. FASES DE LA FUSIÓN DE LOS SISTEMAS BINARIOS

donde  $T$  y  $W$  corresponden a la energía cinética traslacional del sistema y energía potencial gravitacional respectivamente, mientras  $r_{sep}$  corresponde a la distancia entre las binarias (ver figura 6). La anterior ecuación se puede expresar en términos de la masa de chirrido y de la frecuencia angular de las ondas ( $f_{gw} = 2f_s$ );

$$E_{orb} = -\frac{\pi^{2/3}}{2G} (GM_c)^{5/3} f_{gw}^{2/3}. \quad (2.1.3)$$

Esta expresión es equivalente a la energía emitida en forma de ondas gravitacionales por un sistema binario de masas puntuales (1.5.13). Por lo tanto, la energía orbital perdida se emite toda en forma de ondas gravitacionales,  $\Delta E_{orb} = -\Delta E_{rad}$ , sin afectar el espín de las estrellas. La potencia emitida por el sistema binario corresponde a la luminosidad de las ondas gravitacionales, es decir:

$$L_{gw} = -\dot{E}_{orb} = \frac{32c^5}{5G} \left( \frac{M_c G \omega_{gw}}{2c^3} \right)^{10/3} = \frac{2}{3} \left( \frac{G^2 M_c^5}{32} \right)^{1/3} \omega_{gw}^{-1/3} \dot{\omega}_{gw}. \quad (2.1.4)$$

Despejando  $\dot{\omega}_{gw}$  se obtiene:

$$\dot{\omega}_{gw} = \frac{3}{5} 2^{7/3} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} \omega_{gw}^{11/3}. \quad (2.1.5)$$

Al medir el comportamiento de esta frecuencia a lo largo del tiempo se puede dar un estimado de la masa de chirrido de la fuente. La frecuencia  $f_{gw}$  aumenta en todo momento de la fase de inmersión, y por lo tanto con base en la ecuación (1.5.8) la amplitud de la propia onda gravitacional  $h(t)$  también aumenta a medida que el sistema evoluciona.

Después de la fase de inmersión, las dos masas atraviesan la fase de fusión. Esta puede conducir a la formación de un agujero negro, en caso de que al menos uno de los objetos sea un agujero negro, o de una estrella de neutrones de rápida rotación, si ambos objetos son estrellas de neutrones no tan masivas y se expulsa suficiente momento angular. En ambos casos, se libera una fracción de su energía en forma de ondas gravitacionales [29]. Esta fase empieza formalmente cuando no se satisface la condición adiabática, ya sea porque los objetos entran en contacto, porque exista transferencia de masa o porque se llegue a la órbita circular estable más interna (ISCO). Los detalles de la determinación del inicio de esta fase serán expuestos en la sección 2.2. Esta fase de fusión suele ser estudiada por medio de simulaciones de relatividad numérica porque se deben considerar efectos no lineales en fuertes campos gravitatorios y el acoplamiento materia-geometría en regímenes relativistas [30].

Al terminar la fusión e iniciar la etapa de amortiguamiento, el remanente está inicialmente deformado e irradia la energía asociada con estas deformaciones en forma de

ondas gravitacionales y otros canales de emisión, hasta que se estabiliza en un objeto axialmente simétrico. En una fusión de agujeros negros, una fracción significativa del momento angular orbital se transfiere al momento angular de rotación del agujero negro de Kerr resultante [9, 10]. La fracción retenida está restringida por la condición de no superar el estado extremal de un agujero negro de Kerr, expresada mediante el parámetro adimensional de espín  $a_* \equiv \frac{Jc}{GM^2} \lesssim 1$  [11, 12] donde  $J$  y  $M$  son el momento angular y la masa gravitacional del agujero negro. En contraste, en la fusión de estrellas de neutrones, el momento angular de la estrella remanente tiene un límite inferior al del agujero negro de Kerr. Esto se debe al equilibrio entre la fuerza centrífuga y la atracción gravitacional en su superficie. Según [13], una estrella de neutrones solo será estable si  $J < 0.7 \frac{GM^2}{c}$ . En el caso de un agujero negro de Kerr, al ser solución de vacío, no hay materia y por lo tanto no existe tal límite. Como consecuencia, la estrella de neutrones debe liberar más energía,  $\Delta E = \Delta J\Omega$ , desde su órbita justo antes de la fase de fusión. Esto podría resultar en una mayor emisión de ondas gravitacionales y, en principio, una mayor detectabilidad. De lo contrario, la estrella podría perder masa y colapsar en un agujero negro. Además, el remanente estelar postfusión podría experimentar deformaciones significativas debido a su menor compacidad en comparación con un agujero negro, lo que influiría en la eficiencia de emisión gravitacional. La presencia de un disco de acreción a su alrededor también podría alterar la dinámica del sistema y la radiación emitida. En síntesis, la etapa de amortiguamiento es crucial para determinar si la energía emitida en forma de ondas gravitacionales podría ser mayor en el caso de estrellas de neutrones que en el caso de agujeros negros, ya que la radiación depende de las características que tenga el remanente [28].

## 2.2. Radio de fusión

Para estimar el momento en que finaliza la fase de inmersión y comienza la fase de fusión, se definen los siguientes tres radios característicos del sistema;

- Radio de contacto: Cuando la distancia  $r_{sep}$  entre ambas masas corresponde a la suma de los radios de cada una de ellas, es decir el radio de contacto  $r_{CONT}$  corresponde a  $R_1 + R_2$ , y por lo tanto las superficies de las estrellas estarían en contacto. A partir de la definición de compacidad de las estrellas  $\mathcal{C}$ , y del cociente entre masas  $q \equiv \frac{m_2}{m_1}$  (con  $m_1 > m_2$ ) se obtiene la siguiente expresión:

$$r_{CONT} = \frac{GM_{tot}}{c^2} \frac{(\mathcal{C}_2 + q\mathcal{C}_1)}{(1 + q)\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}. \quad (2.2.1)$$

- Radio de la órbita circular estable más interna (ISCO por sus siglas en inglés): En la geometría de Schwarzschild, existe un valor mínimo de la distancia radial más allá de la cual ya no se permiten órbitas circulares estables. En las coordenadas

## 2.2. RADIO DE FUSIÓN

de Schwarzschild, esta se encuentra en  $r_{sep} = r_{ISCO} = \frac{6GM_{tot}}{c^2}$ . Por lo tanto, para binarias compuestas por agujeros negros o estrellas de neutrones, una fase que atraviesa una sucesión de órbitas casi circulares y es impulsada por la emisión de radiación gravitacional, solo puede ocurrir a distancias  $r_{sep} \gtrsim r_{ISCO}$  [20], donde todavía existen órbitas circulares estables. Al acercarse  $r_{sep}$  al valor de  $r_{ISCO}$ , los efectos de campo fuerte se vuelven dominantes y la evolución deja de ser adiabática, dando paso a una caída cuasi-radial. Si bien esta descripción es exacta en el límite de masa de prueba, para binarias con masas comparables existen correcciones asociadas a la razón de masa simétrica  $\nu = \mu/M_{tot}$ , que modifican ligeramente la posición efectiva de  $r_{ISCO}$ . Con base en la Ref. [31], en sistemas binarios de masas comparables ( $\nu = \frac{1}{4}$  para el caso de masas iguales), la ISCO se ubica a un radio de  $5.72 GM_{tot}/c^2$  comparado con  $6 GM_{tot}/c^2$  para el límite de masa de prueba ( $\nu \rightarrow 0$ ).

- Radio de pérdida de masa por fuerzas de marea: Con base en el estudio [32] si se modelan las estrellas como esferoides newtonianos incompresibles, existe una separación orbital mínima  $r_{MS}$ , por debajo de la cual no se alcanza ninguna configuración de equilibrio, es decir, una estrella comienza a transferir masa a su compañera debido a las fuerzas de marea. En esta aproximación  $r_{MS} \approx 2.2q^{-1/3}R_2$  como se muestra en [32]. Por otro lado, simulaciones numéricas en relatividad general de estados de cuasi-equilibrio del tipo agujero negro-estrella de neutrones [33] sugieren que la pérdida de masa ocurre a una distancia de  $r_{MS} \approx 0.270^{-2/3}q^{-1/3}R_2$ . Se emplea la primera expresión, ya que el presente trabajo se enfoca en las binarias de estrellas de neutrones.

El radio de fusión corresponde al mayor de los tres anteriores. Esta pauta depende de la compacidad de los objetos que se están fusionando, en el caso de los agujeros negros de masa estelar su compacidad es de aproximadamente 0.5 pero en el caso de las estrellas de neutrones depende de su relación masa-radio. Por lo tanto es necesario implementar posibles ecuaciones de estado (E.O.S) que determinan tal relación.

Para el caso de los sistemas binarios de estrellas de neutrones se presentan 3 E.O.S, cada E.O.S provee una relación de masa-radio y masa-compacidad para cada una de las estrellas (ver figuras 7 y 8). La compacidad de las estrellas de neutrones se encuentra aproximadamente entre 0.05 y 0.3, y hay una relación creciente entre la masa gravitacional de la estrella y su compacidad.

La figura 9 muestra la razón entre el radio de contacto y el radio de la ISCO, en función de la masa total del sistema. Se observa en esta figura que para una misma E.O.S el comportamiento de la curva es ligeramente el mismo e independiente de la razón de masas,  $q$ . Se determinan los puntos de corte de las curvas de la figura 9 con la recta horizontal dada por  $\frac{r_{CONT}}{r_{ISCO}} = 1$ , para encontrar a partir de que valores de masa total la ISCO supera la distancia de contacto, los resultados se aprecian en la gráfica 10.

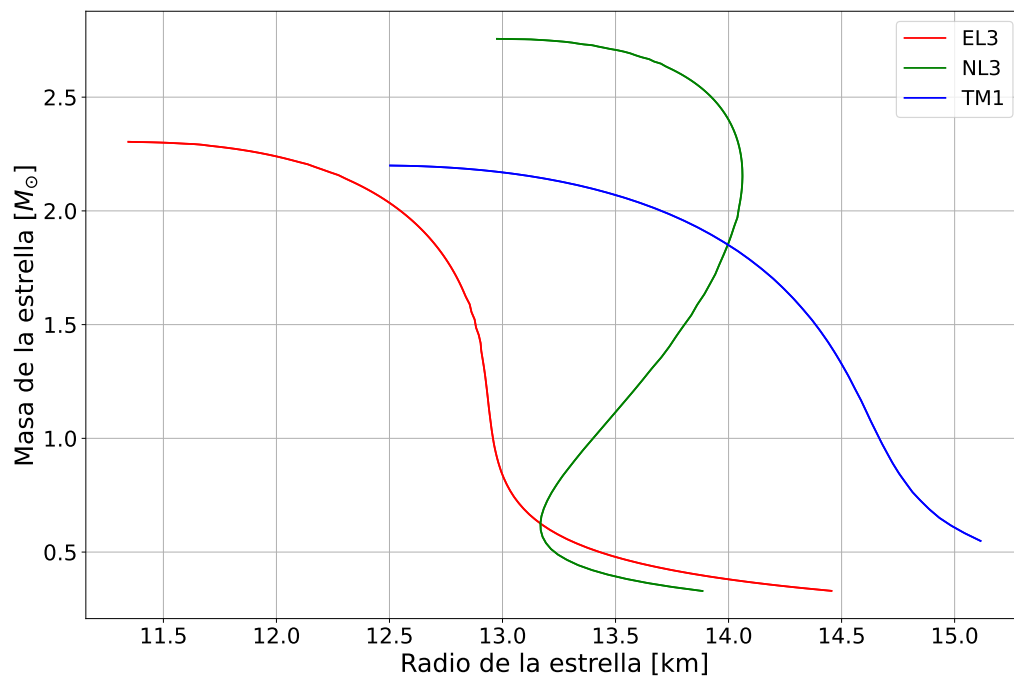


Figura 7: Relación entre la masa gravitacional y el radio de una estrella de neutrones modelada por tres ecuaciones de estado: EL3, NL3 y TM1.

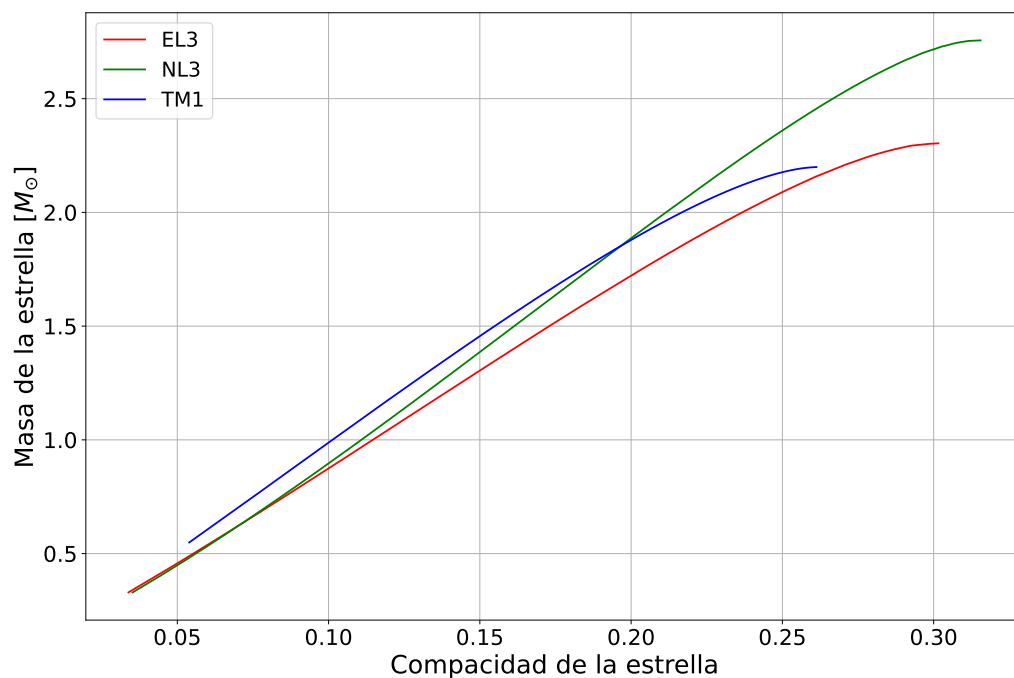


Figura 8: Relación entre la masa gravitacional y la compacidad de una estrella de neutrones modelada por tres ecuaciones de estado: EL3, NL3 y TM1.

## 2.2. RADIO DE FUSIÓN

En general si la masa gravitacional total del sistema es menor a  $2.85M_{\odot}$ , entonces  $r_{CONT} > r_{ISCO}$ , independiente del valor de  $q$  y de la ecuación de estado.

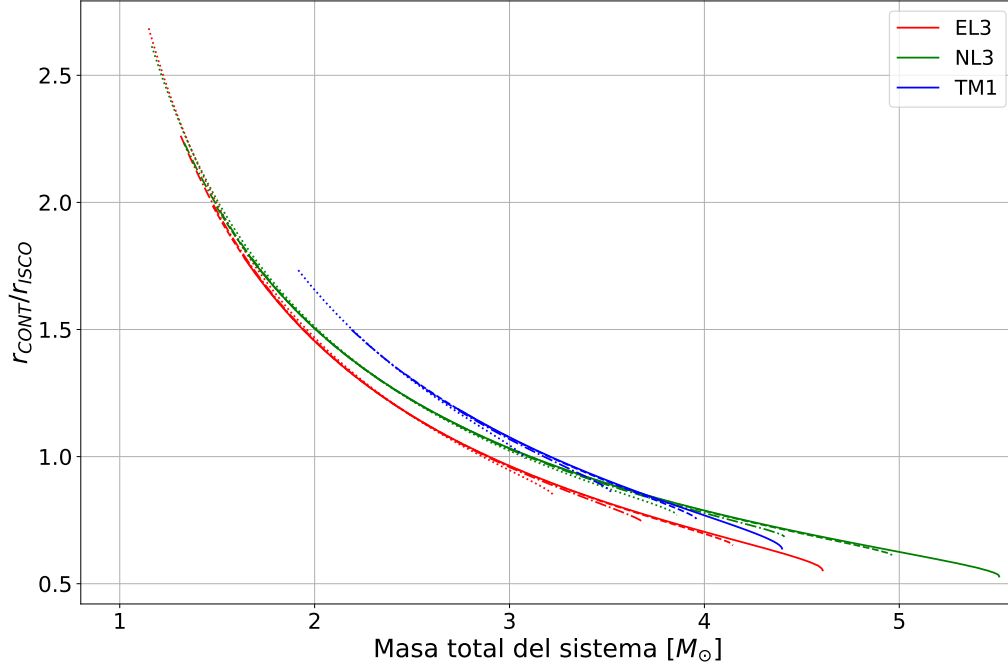


Figura 9: Comparación entre las distancias de contacto y de la ISCO en función de: (i) la masa gravitacional total, (ii) la ecuación de estado, y (iii) la razón de masas  $q = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4$ . Cada valor de  $q$  se representa con un estilo de línea distinto: sólido (-), discontinuo (- -), punto- raya (-.), y punteado (:), respectivamente.

La figura 11 muestra la razón entre el radio de contacto y el radio de desprendimiento de masa, en función de la masa total del sistema. Para este caso se considera que  $q$  debe ser menor que 1, ya que la expresión dada para  $r_{MS}$  solo tiene sentido cuando las compacidades de las estrellas son lo suficientemente distintas para que aparezcan las respectivas fuerzas de marea [2]. En esta figura se aprecia que, siendo  $q < 1$ , en general la distancia de desprendimiento de masa será mayor a la distancia de contacto, independiente de la E.O.S.

En conclusión, para un sistema binario de estrellas de neutrones con  $q < 1$ , la distancia a tomar para determinar el paso de fase de inmersión a fase de fusión será la distancia  $r_{MS}$ . Sin embargo, si  $q \approx 1$  entonces la fórmula de desprendimiento de masa no aplica porque la compacidad entre las estrellas sería comparable [33]. En el caso de binarias de agujeros negros, en una primera aproximación, se toma la ISCO de Schwarzschild, aunque estudios con simulaciones numéricas muestran que la verdadera ISCO del problema de dos cuerpos es un poco menor [31, 34]. No obstante, la distancia de la ISCO siempre será considerablemente mayor a la distancia de contacto, debido a la alta compacidad de los agujeros negros.

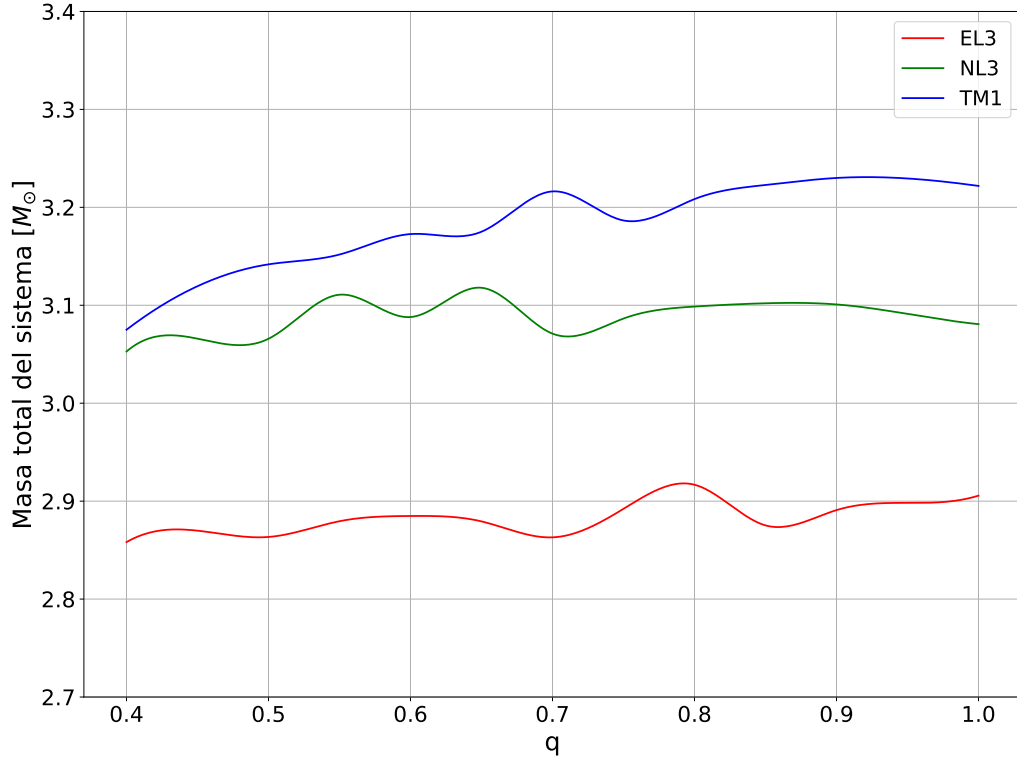


Figura 10: Cortes de las curvas de la gráfica 9 con la recta horizontal  $\frac{r_{CONT}}{r_{ISCO}} = 1$  (es decir a partir de que valor de masa total  $r_{ISCO} \geq r_{CONT}$ ) en función de la ecuación de estado y variando el parámetro de razón de masas  $q$ .

Por tal motivo, en este tipo de binarias siempre se presenta una caída cuasiradial al momento de la fusión. Por otro lado, si el sistema es de agujero negro-estrella de neutrones, en algunos casos ocurre primero la caída cuasiradial, y en otros el desprendimiento de masa; en general esto depende de la comparación entre  $r_{ISCO}$  y  $r_{MS}$ . Entre mayor sea la masa gravitacional del sistema, mayor será el valor de la ISCO, pero a su vez se podría modificar, por ejemplo, el valor de  $R_2$ , el cual al aumentar incrementa el valor de  $r_{MS}$ .

En el cuadro 2.1 se comparan las energías radiadas por sistemas binarios compactos, considerando tres casos: binarias de estrellas de neutrones, binarias de agujeros negros y un sistema mixto (agujero negro-estrella de neutrones). Los cálculos se basan en la razón de masas  $q$ , la distancia de fusión y la frecuencia orbital derivada de la tercera ley de Kepler, obteniendo la energía emitida mediante la ecuación (1.5.13).

La energía radiada por el sistema binario de agujeros negros es un orden de magnitud mayor que la del sistema binario de estrellas de neutrones (NS-NS) o del sistema compuesto por un agujero negro estelar y una estrella de neutrones (NS-BH). Las frecuencias máximas de las ondas gravitacionales emitidas por los tres sistemas se encuentran en el rango de los cientos de Hertz, así que sería detectable por LIGO y Virgo, cuyo rango

## 2.2. RADIO DE FUSIÓN

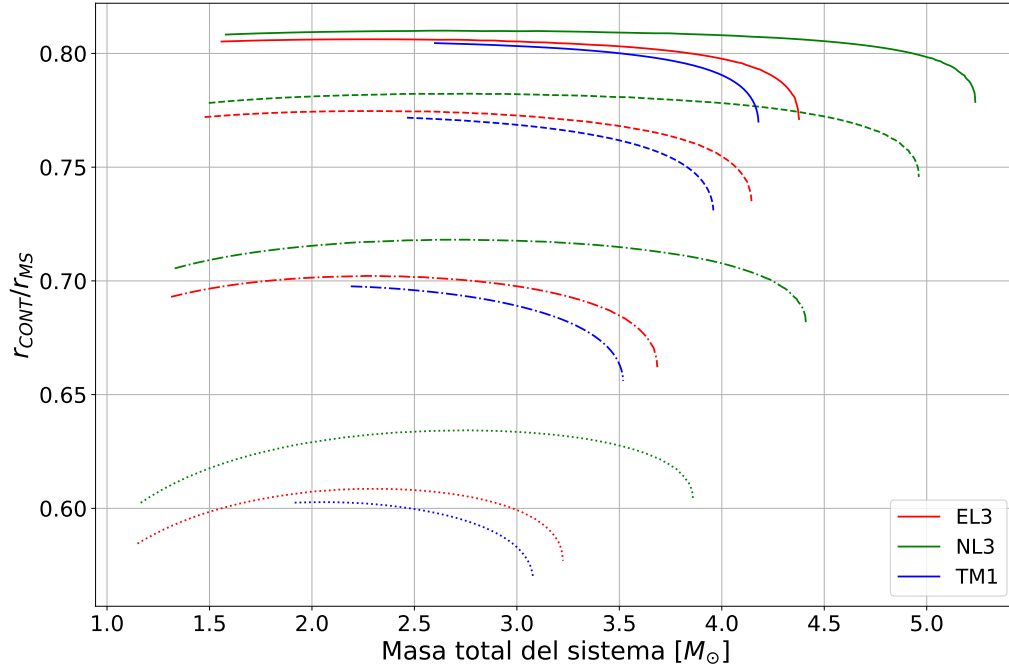


Figura 11: Comparación entre las distancias de contacto y de desprendimiento de masa en función de: (i) la masa gravitacional total, (ii) la ecuación de estado, y (iii) la razón de masas  $q = 0.9, 0.8, 0.6, 0.4$ . Cada valor de  $q$  se representa con un estilo de línea distinto: sólido (-), discontinuo (- -), punto-rama (-.), y punteado (:), respectivamente.

Características	NS-NS	BH-BH	NS-BH
Masa total ( $M_{tot}$ )	2.9	8	4.4
Radio de fusión ( $\frac{GM_{tot}}{c^2}$ )	$r_{CONT} = 7.54$	$r_{ISCO} = 6$	$r_{MS} = 7.67$
$q$	0.93	0.60	0.47
$f_{max}$ (Hz) de las ondas gravitacionales en la fase espiral	1336.7	546.5	683.4
$E_{rad}$ (erg) por las ondas gravitacionales en la fase espiral	$5.47 \times 10^{52}$	$2.80 \times 10^{53}$	$7.03 \times 10^{52}$

Cuadro 2.1: Comparación de las características físicas de distintos tipos de binarias compactas: sistema de estrellas de neutrones (NS-NS), agujeros negros (BH-BH) y combinación de estrella de neutrones con agujero negro (NS-BH). Para los dos últimos pares de binarias se tomaron valores típicos de estos sistemas, mientras que para la binaria de estrellas de neutrones se tomaron los valores utilizados en [2].



de sensibilidad comienza en las decenas de Hertz [6].

Con base en las ecuaciones de las polarizaciones y de la energía radiada por las ondas gravitacionales provenientes de la fase de inmersión de un sistema binario (1.5.8) y (1.5.13), la amplitud de la onda gravitacional y la energía total radiada dependen proporcionalmente de  $M_c^{5/3}$  y  $f_{gw}^{2/3}$ . En el caso de binarias de neutrones, la masa de chirrido es de  $M_c \approx 1,26M_\odot$  y en el caso de los agujeros negros es de  $M_c \approx 3.35M_\odot$ . Por lo tanto, tanto la amplitud de la onda gravitacional producida justo antes de la fase de fusión como la energía radiada están, en el caso de un sistema binario de agujeros negros, un orden de magnitud por encima de las de un sistema binario de estrellas de neutrones.

### 2.3. Leyes de conservación

Uno de los principales retos al estudiar las fusiones de binarias compactas es comprender la naturaleza del objeto remanente que se forma tras el evento. Las leyes de conservación juegan un papel fundamental en este análisis, ya que permiten establecer restricciones físicas robustas independientemente de la complejidad de los procesos dinámicos involucrados.

En esta sección, se analiza el objeto postfusión suponiendo que se forma una estrella de neutrones. Para ello, se aplican las leyes de conservación del número bariónico, la energía y el momento angular. Además, se emplean relaciones entre propiedades físicas del sistema que muestran una débil dependencia con respecto a la ecuación de estado, las llamadas relaciones cuasi-universales [13, 35].

#### Conservación del número bariónico:

El número bariónico es un número cuántico definido como  $B = \frac{1}{3}(n_q - n_{\bar{q}})$ , donde  $n_q$  y  $n_{\bar{q}}$  son el número de quarks y antiquarks respectivamente, por ejemplo un protón tiene número bariónico +1. Este valor se conserva en interacciones fuertes y electromagnéticas debido a la simetría  $U(1)_B$  del Modelo Estándar [36]. La masa bariónica es la suma de las masas en reposo de todos los bariones y su conservación deriva de la conservación del número bariónico [37]. En contraste, la masa gravitacional incluye contribuciones como la energía de enlace gravitacional ( $E_{\text{grav}}/c^2$ ), lo que explica por qué la masa bariónica es en general mayor a la masa gravitacional.

La conservación de la masa bariónica implica que la masa bariónica del sistema binario,  $M_b = m_{b,1} + m_{b,2}$ , se redistribuye entre: la masa del remanente central posterior a la fase de amortiguamiento ( $m_{b,c}$ ), la masa del material eyectado ( $m_{ej}$ ), que no está ligado al sistema, y la materia que permanece ligada al sistema, en forma de un disco ( $m_d$ ). Así, se establece la siguiente relación:

### 2.3. LEYES DE CONSERVACIÓN

---

$$M_b = m_{b,c} + m_{ej} + m_d. \quad (2.3.1)$$

Para una estrella de neutrones que presenta rotación rígida, existe una relación cuasi-universal entre su masa bariónica ( $m_{b,i}$ ), su masa gravitacional ( $m_i$ ) y su momento angular ( $J_i$ ) dada por la siguiente función [35]:

$$\frac{m_{b,i}}{M_\odot} \approx \frac{m_i}{M_\odot} + \frac{13}{200} \left( \frac{m_i}{M_\odot} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{130} j_i^{1.7} \right), \quad i = 1, 2, c, \quad (2.3.2)$$

donde  $j_i \equiv \frac{cJ_i}{GM_\odot^2}$ . Esta relación se ajusta a las soluciones numéricas de las ecuaciones de Einstein axialmente-simétricas para varias E.O.S, con un error máximo del 2 % [13]. Por lo tanto, la ecuación es prácticamente una relación cuasi-universal, i.e. independiente de la E.O.S. Esta fórmula se aplica tanto a los componentes en fusión ( $i = 1, 2$ ) como al remanente central ( $i = c$ ).

#### Conservación del momento angular:

El momento angular total del sistema durante la fase de inmersión está dado por:

$$J = J_1 + J_2 + J_{\text{orb}}, \quad (2.3.3)$$

donde  $J_1$  y  $J_2$  representan los momentos angulares intrínsecos (*espín*) de cada estrella, y  $J_{\text{orb}}$  corresponde al momento angular orbital. Sea  $\vec{v}_i$  la velocidad de cada estrella respecto al centro de masa, entonces, el momento angular orbital  $J_{\text{orb}}$  se define como:

$$J_{\text{orb}} = |\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2|. \quad (2.3.4)$$

Dado que las órbitas de las estrellas están contenidas en un mismo plano, y considerando  $r_{\text{sep}} = r_1 + r_2$ , se deduce a partir de la definición del centro de masa que:

$$r_{1,2} = \frac{m_{2,1} r_{2,1}}{m_{1,2}}, \quad (2.3.5)$$

donde  $r_{1,2}$  representa la distancia de cada estrella al centro de masa. Por lo tanto, se cumple que:

$$r_{\text{sep}} = r_{1,2} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_{2,1}} \right). \quad (2.3.6)$$

Con estas relaciones, el momento angular orbital  $J_{\text{orb}}$  puede expresarse como:

$$J_{\text{orb}} = m_1 \Omega_s r_1^2 + m_2 \Omega_s r_2^2 = \Omega_s r_{\text{sep}}^2 \mu. \quad (2.3.7)$$

## CAPÍTULO II. SISTEMAS BINARIOS Y LEYES DE CONSERVACIÓN

En consecuencia, el momento angular del sistema binario justo antes de la fase de fusión se expresa como:

$$J_m = J_1 + J_2 + \mu \Omega_s r_{sep}^2, \quad (2.3.8)$$

donde  $r_{sep}$  corresponde al radio de fusión. Considerando las distancias  $r_{MS}$  y  $r_{CONT}$  según los valores de  $q$  sean menores o cercanos a 1, se encuentra que el valor del momento angular en el final de la fase de inmersión está dado por:

$$J_m = \begin{cases} \nu q^{1/3} (2.2^{-1}(1+q)C_2)^{-1/2} \frac{GM_{tot}^2}{c} + J_1 + J_2, & q < 1 \\ \nu \frac{GM_{tot}^2}{c} \sqrt{\frac{C_2+qC_1}{(1+q)C_1C_2}} + J_1 + J_2, & q \approx 1 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

donde se definió el parámetro de relación de masa simétrica  $\nu \equiv \frac{q}{(1+q)^2} = \frac{\mu}{M_{tot}}$ . Los momentos angulares de las componentes estelares son:

$$J_i = \frac{2}{5} \kappa_i m_i R_i^2 \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.3.10)$$

con  $m_i$ ,  $R_i$  y  $\Omega_i$  como la masa gravitacional, el radio estelar y espín de la  $i$ -ésima estrella, respectivamente. Se denota  $\kappa_i$  como el factor de forma de orden uno. Tras la fusión, el momento angular se conserva y se distribuye entre el remanente central  $J_c$ , el disco  $J_d$ , y el momento angular eyectado  $\Delta J$  (por ejemplo, debido a la emisión de ondas gravitacionales):

$$J_m = J_c + J_d + \Delta J, \quad (2.3.11)$$

El momento angular que se lleva la masa eyectada no se incluye en el balance de momento angular, ya que se espera que tengan una masa pequeña  $10^{-4} - 10^{-2} M_\odot$  [2], y además simulaciones sugieren que esta masa eyectada proviene de la interfaz de la fusión, donde la materia es comprimida y expulsada perpendicular al plano orbital, cerca al eje de rotación del sistema, y por lo tanto el aporte al momento angular es prácticamente nulo [38, 39].

El momento angular del sistema binario al momento de la fusión es mayor que el máximo que puede alcanzar una estrella de neutrones uniformemente rotante, es decir, el límite de momento angular de la secuencia Kepleriana ( $J_K$ ) [2]. Por lo tanto, durante la fase de amortiguamiento el objeto debe perder momento angular de tal manera que a lo sumo el momento angular final del objeto estacionario sea igual al valor de la secuencia Kepleriana:

$$J_c = J_K \approx 0.7 \frac{Gm_c^2}{c}. \quad (2.3.12)$$

## 2.4. ANALIZANDO UNA FUSIÓN DE ESTRELLAS DE NEUTRONES

Según [13, 2] este valor se ajusta a la secuencia Kepleriana obtenida mediante integración numérica de las ecuaciones de Einstein y es casi independiente de la ecuación de estado nuclear, con un error aproximadamente del 1.7 %.

El disco se modela como un anillo en la órbita circular más interna estable del remanente. Por lo tanto, se emplea la fórmula derivada en Cipolletta et al. [35], que ajusta, con un error máximo del 0.3 %, los resultados numéricos del momento angular por unidad de masa de una partícula de prueba en órbita circular, en el campo axialmente-simétrico relativista de una estrella de neutrones en rotación rígida:

$$J_d = J_{\text{ISCO}} \approx \frac{G}{c} m_c m_d \left[ 2\sqrt{3} - 0.37 \left( \frac{j_c}{m_c/M_\odot} \right)^{0.85} \right]. \quad (2.3.13)$$

### Conservación de la masa y la energía:

La conservación de la masa-energía antes y después de la fusión implica que la energía liberada es igual al defecto de masa del sistema, es decir,

$$E_{\text{GW}} + E_{\text{other}} = \Delta M c^2 = [M_{\text{tot}} - (m_c + m_{\text{ej}} + m_d)] c^2, \quad (2.3.14)$$

donde  $\Delta M$  es el defecto de masa del sistema.  $E_{\text{GW}} = E_{\text{GW}}^{\text{insp}} + E_{\text{GW}}^{\text{pm}}$  es la energía total emitida en ondas gravitacionales: durante la fase de inmersión se emite  $E_{\text{GW}}^{\text{insp}}$ , y durante las fases de fusión y postfusión,  $E_{\text{GW}}^{\text{pm}}$ .  $E_{\text{other}}$  es la energía irradiada a través de canales distintos a la emisión de ondas gravitacionales (i.e en radiación electromagnética y emisión de neutrinos).

## 2.4. Analizando una fusión de estrellas de neutrones

Se procede a analizar la fusión del sistema binario de estrellas de neutrones de 1.505 y 1.404  $M_\odot$  presentado en la Ref. [2]. A partir de la expresión de conservación del número bariónico (2.3.1), junto con la relación cuasi-universal entre masa gravitacional y masa bariónica (2.3.2), suponiendo que  $j_1 = j_2 = 0$ , se obtiene:

$$\frac{m_c}{M_\odot} + \frac{13}{200} \frac{m_c^2}{M_\odot^2} \left( 1 - \frac{0.54 m_c^{3.4}}{130 M_\odot^{3.4}} \right) + \frac{m_d}{M_\odot} - \left( \frac{m_1 + q m_1}{M_\odot} \right) - \frac{13}{200} \left( \frac{m_1^2 + q^2 m_1^2}{M_\odot} \right) = 0. \quad (2.4.1)$$

Al considerar la conservación del momento angular (2.3.11) y la relación del momento angular asociado al disco de acreción (2.3.13), se obtiene:

$$m_d(J_m, m_c, \Delta J) = \frac{c (J_m - 0.7 \frac{G}{c} m_c^2 - \Delta J)}{G m_c \left( 2\sqrt{3} - 0.37 (0.7 \frac{m_c}{M_\odot})^{0.85} \right)}. \quad (2.4.2)$$

Las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.2) forman un sistema de ecuaciones para  $m_c$  y  $m_d$  una vez se define el sistema binario inicial ( $m_1 = 1.505M_\odot$  y  $m_2 = 1.404M_\odot$ ) ya que las ecuaciones (2.3.9) determinan  $J_m$  ( $5.42\frac{GM_\odot^2}{c}$  para EL3 y  $5.73\frac{GM_\odot^2}{c}$  para TM1). Se define algún valor arbitrario  $\Delta J \geq 0$ , de esta manera se obtiene  $m_c$ , y por lo tanto  $m_d$ , el cual se le exige también que sea  $m_d \geq 0$ . Las dos últimas condiciones acotan el rango de valores permitidos para  $\Delta J$  y, por lo tanto, para  $m_d$  y  $m_c$ , tal y como se presenta en la gráfica 12, ya que conforme aumenta  $\Delta J$  disminuye  $m_d$ .

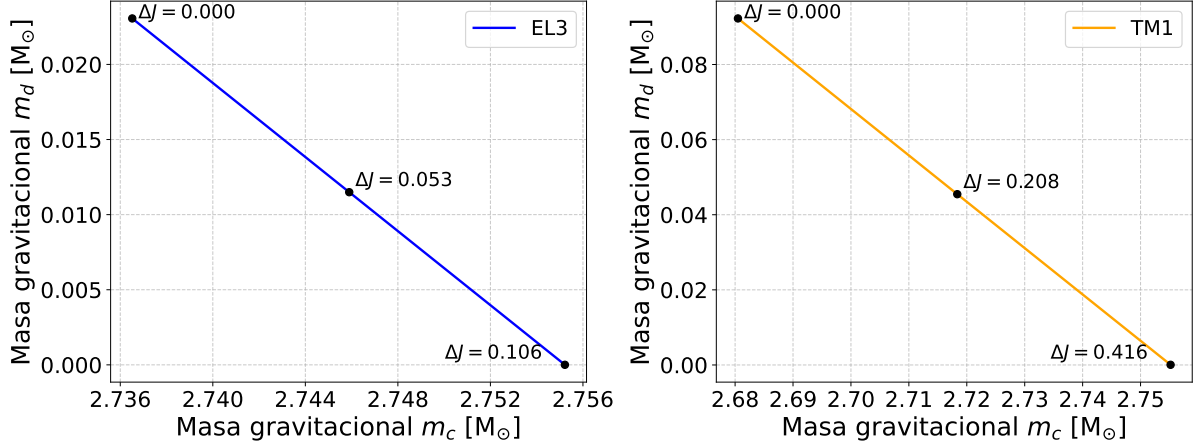


Figura 12: Masa gravitacional del remanente central vs masa del disco. Se emplearon las ecuaciones de estado EL3 y TM1. Los valores seleccionados de pérdida de momento angular están en unidades de  $GM_\odot^2/c$ . La masa gravitacional total del sistema es  $2.909 M_\odot$ , la masa bariónica total del sistema es  $3.184 M_\odot$ . La razón de masas del sistema binario es  $q = 0.933$ , por lo que se determina que la fase de fusión inicia en el radio de contacto.

En la Figura 12 se muestra que los parámetros finales del sistema se encuentran entre dos casos límite: la pérdida de momento angular  $\Delta J = 0$ , que conduce a una masa máxima del disco, y la pérdida de momento angular máxima, que conduce a una masa del disco  $m_d = 0$ . El valor mínimo de la masa gravitacional del remanente es aproximadamente  $2.736M_\odot$  y  $2.680M_\odot$  para las E.O.S EL3 y TM1 respectivamente (ver figura 12). Un análisis detallado de los valores numéricos revela que la curva correspondiente a la E.O.S EL3 constituye un segmento de la región final de la curva asociada a la E.O.S TM1. Esta superposición parcial indica que el comportamiento general de las gráficas es esencialmente idéntico, demostrando así su independencia de la E.O.S utilizada en el modelo, por este motivo la masa máxima del remanente para ambas E.O.S es la misma  $2.755M_\odot$ . *Esto es consecuencia de la ecuación (2.4.1), con  $m_d = 0$ , la cual es independiente de la E.O.S.* Por otra parte, la masa máxima permitida a lo largo de la secuencia Kepleriana para la E.O.S EL3 es  $2.84 M_\odot$ , y para la E.O.S TM1 es  $2.62 M_\odot$  [2]. Por lo tanto, para la primera E.O.S (EL3), el remanente central es una estrella de neutrones masiva y de rotación rápida, mientras que la segunda (TM1) sugiere un

colapso a un agujero negro de Kerr.

### Caso sin disco

A partir de ahora el enfoque está en el mismo sistema binario pero solo en la E.O.S TM1, E.O.S usada en la Ref. [2] con el fin de comparar resultados. La solución de las ecuaciones de conservación conducen a la máxima pérdida de momento angular,  $\Delta J \approx 0.416 GM_\odot^2/c$ , y a la masa máxima del remanente,  $m_c = 2.755 M_\odot$  (ver figura 12). A partir de la ecuación (2.4.1) se puede relacionar la masa gravitacional del sistema con la del remanente en función del parámetro  $q$  (ver figura 13).

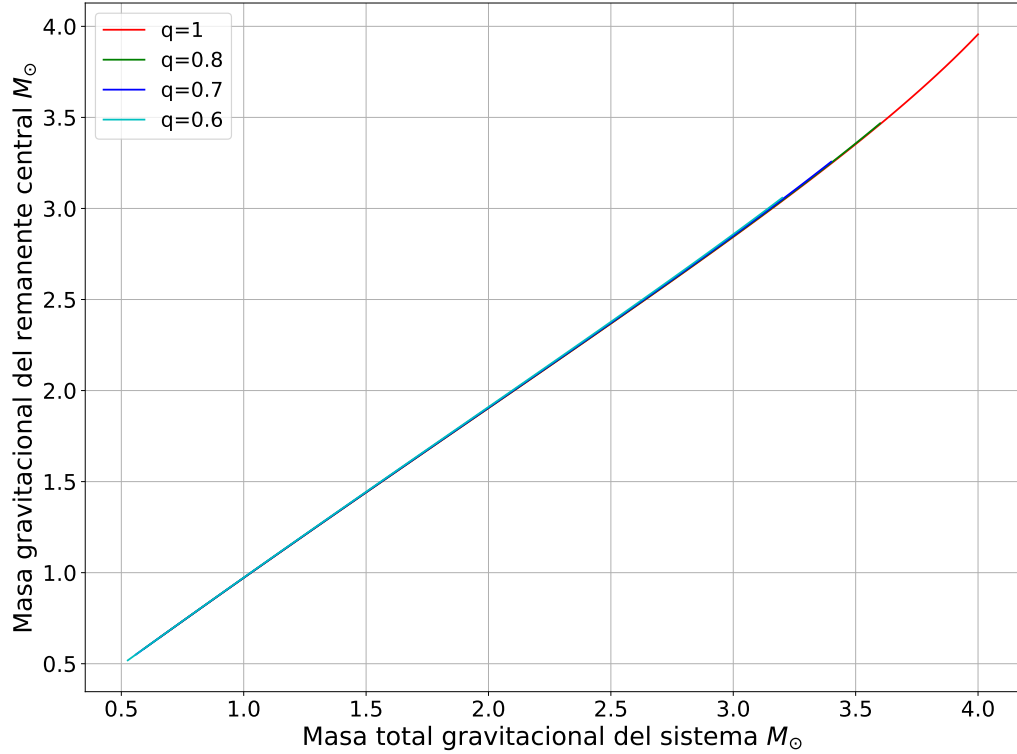


Figura 13: Comportamiento de la masa gravitacional del remanente vs masa total gravitacional del sistema binario en función de la razón de masas  $q$ , donde se impone  $m_d = 0$ . El sistema binario en cuestión se encuentra en el punto rojo sobre la curva, donde  $M_{tot} = 2.909$ ,  $m_c = 2.755$  y  $\Delta J \approx 0.416 GM_\odot^2/c$ .

La gráfica 13 muestra que la masa gravitacional del remanente central es independiente del valor de  $q$ , mientras que la gráfica 12 muestra que es independiente de la E.O.S, para este caso en el que la masa del disco es  $m_d = 0$ . Por lo tanto, cuando no hay disco la masa gravitacional del remanente solo depende de la masa total gravitacional del sistema antes del proceso de fusión.

Respecto al análisis energético, el límite superior del momento angular transportado por las ondas gravitacionales está dado por la máxima cantidad de pérdidas de momento angular, es decir,  $\Delta J_{GW} \lesssim 0.417 GM_\odot^2/c$ . En la fase de inmersión de la fusión, el sistema

libera una energía en ondas gravitacionales dada por:

$$E_{\text{GW}}^{\text{insp}} \approx \frac{Gm_1m_2}{2r_{\text{cont}}} = \frac{qC_1C_2Mc^2}{2(1+q)(C_2+qC_1)} \quad (2.4.3)$$

Para este sistema binario,  $E_{\text{GW}}^{\text{insp}} \approx 8.674 \times 10^{52}$  erg. Si no se forma un disco el defecto de masa-energía es  $\Delta Mc^2 \approx 2.75 \times 10^{53}$  erg. Esto implica que  $E_{\text{other}} + E_{\text{GW}} = 2.75 \times 10^{53}$  erg. Si se tiene una cota máxima sobre la energía  $E_{\text{other}}$  se podría dar un estimado de la energía mínima emitida en forma de radiación gravitacional para este caso.

### Caso con masa del disco máxima

Al establecer  $\Delta J = 0$ , la solución del sistema de ecuaciones formado por la conservación de la masa bariónica (2.3.1) y del momento angular (2.3.11) conduce a una masa del remanente central de  $m_c = 2.680M_{\odot}$  así como una masa máxima para la masa del disco de  $m_d = 0.092M_{\odot}$ . Este caso límite no tiene emisión de ondas gravitacionales, ya que las ondas llevan momento angular, por lo que también establece un límite superior a la energía liberada en mecanismos distintos a estas ondas. Así, la Ecuación (2.3.14) implica que:

$$\begin{aligned} E_{\text{other}} &= \Delta Mc^2 = [M_{\text{tot}} - (m_c + m_{\text{ej}} + m_d)]c^2 \approx (M - m_c - m_d)c^2 \\ &\approx 0.137 M_{\odot}c^2 \\ &\approx 2.448 \times 10^{53} \text{ erg} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

de energía son transportados al infinito por un mecanismo distinto a las GW y no acompañados por pérdidas de momento angular. Ya que este valor de otras formas de energía radiada es un límite superior, entonces, al volver al caso sin disco, y por lo tanto de máxima pérdida de momento angular, se tiene que la energía emitida en forma de ondas gravitacionales es en aquel caso de mínimo  $E_{\text{GW}} = \Delta Mc^2 - E_{\text{other}} \approx (2.75 - 2.448) \times 10^{53} [\text{erg}] \approx 3.02 \times 10^{52} [\text{erg}]$ . Este valor se puede alcanzar gracias a la emisión de ondas gravitacionales durante la fase de inmersión y la fase de amortiguamiento que se presenta en el capítulo III. De nuevo se relaciona la masa gravitacional del sistema con la del remanente, esta vez considerando hipotéticos valores para la masa del disco, obteniendo los resultados de la figura 14.

Como se mostró en la figura 12 el comportamiento de la curva es independiente de la E.O.S; sin embargo, es tal ecuación de estado la que determina la máxima masa del disco que se puede tomar. Por ello en la figura 14 no se varió la ecuación de estado, solo se empleo TM1. Tampoco se varió en la misma figura el valor de  $q$  ya que según la figura 13 se mantiene el comportamiento de la curva. La conclusión que añade la figura 14 es que entre mayor sea la masa del disco, ligeramente será menor el valor que toma la masa gravitacional del remanente central.

## 2.5. CONCLUSIONES

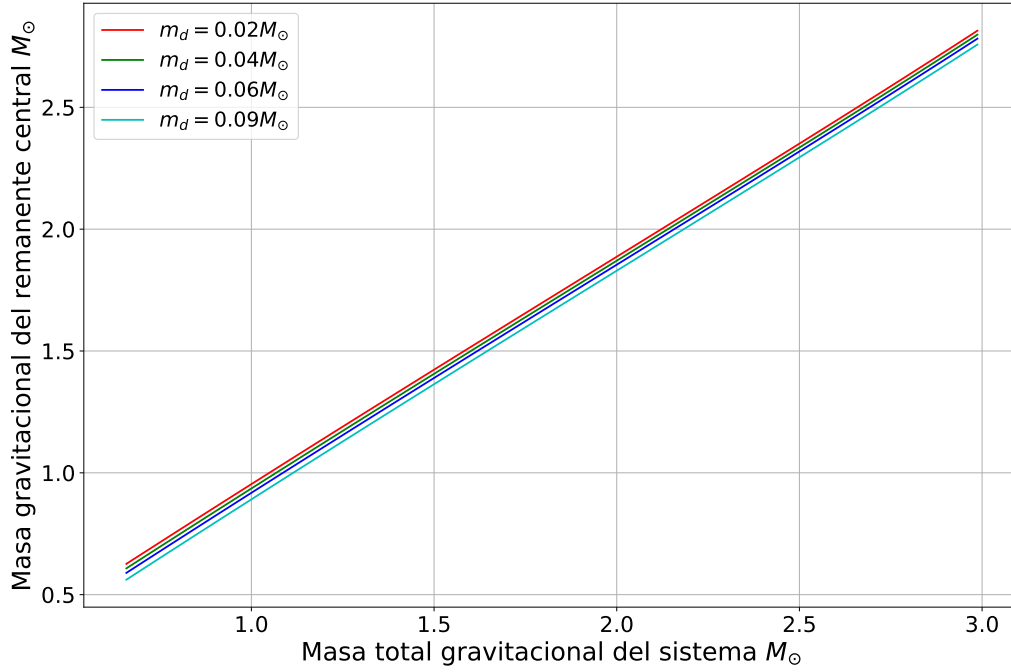


Figura 14: Comportamiento de la masa gravitacional del remanente en función de la masa gravitacional del disco, para  $j_c = 0.7$ ,  $j_i = 0$  y  $q = 1$ .

## 2.5. Conclusiones

- A partir de la conservación de la masa bariónica y del momento angular, junto con relaciones cuasi-universales, se obtienen los valores de masa gravitacional del remanente central y del disco de acreción para distintos valores de  $\Delta J$ , con E.O.S EL3 y TM1 (para el sistema binario de 1.5 y 1.4  $M_\odot$ ). El valor máximo de  $m_c$  es el mismo para ambas ecuaciones de estado,  $2.755 M_\odot$ , pero las correspondientes pérdidas de momento angular son  $\Delta J = 0.106 \frac{GM_\odot^2}{c}$  y  $\Delta J = 0.416 \frac{GM_\odot^2}{c}$ , para EL3 y TM1 respectivamente. Se determina un comportamiento monótonamente decreciente entre  $m_d$  y  $m_c$  independiente de la E.O.S, no obstante la E.O.S determina el valor máximo para  $m_d$  y  $\Delta J$ .
- Al considerar dos casos extremos: uno sin formación de disco ( $m_d = 0$ ) y otro con pérdida nula de momento angular ( $\Delta J = 0$ ), se acotan los valores posibles de las masas gravitacionales del remanente y del disco, dependiendo de la E.O.S a emplear. Además, el caso  $\Delta J = 0$  permite imponer cotas en formas de emisión de energía distintas a las ondas gravitacionales.
- Al establecer cotas superiores para la energía transportada en formas distintas a las ondas gravitacionales ( $E_{other} = 2.448 \times 10^{53}$  erg para TM1), se permite obtener una mejor comprensión del balance energético del evento. Por ejemplo, en el caso



sin disco para el sistema binario en cuestión y la E.O.S TM1, la mínima energía emitida en forma de ondas gravitacionales es de  $E_{GW} \approx 2.92 \times 10^{52} [erg]$ .

Este enfoque proporciona una herramienta analítica potente que permite inferir propiedades claves del sistema sin recurrir a simulaciones numéricas complejas. Ofrece estimaciones físicas relevantes, como la masa del remanente y la máxima pérdida de momento angular, y permite comparar escenarios físicos bajo distintas E.O.S. Además, sirve como base para aplicar este modelo al evento GW170817, como se presentará en el capítulo IV. A pesar de su utilidad, el modelo requiere asumir ciertas idealizaciones, como la no rotación inicial de las estrellas ( $j_1 = j_2 = 0$ ) y el uso de relaciones cuasi-universales, lo que puede limitar su precisión en casos más generales. Además, no considera efectos relativistas completos ni la dinámica detallada durante la fase de fusión y de amortiguamiento, que sí están presentes en simulaciones numéricas más sofisticadas [38].

---

# CAPÍTULO III

---

## Modelos de objeto postfusión

La emisión de ondas gravitacionales en sistemas binarios de estrellas de neutrones se concentra principalmente en las fases de inmersión y amortiguamiento. Esto se debe a que la fase de fusión, aunque intensa, es extremadamente breve en comparación y, según simulaciones de relatividad numérica, su contribución energética total es inferior a la de las otras dos fases [27]. En el capítulo II se presentó como es la emisión de ondas gravitacionales durante la fase de inmersión, en este capítulo se estudia la emisión gravitacional del remanente central, con el fin de determinar la eficiencia de emisión gravitacional de todo el proceso de fusión del sistema binario. A continuación, se modela el remanente de la fusión mediante figuras elipsoidales de equilibrio. El análisis comienza con la configuración más simple, correspondiente a una esfera, para posteriormente considerar esferoides y finalmente elipsoides. Se examina un campo de densidad de masa homogéneo, luego se extiende el tratamiento al caso de un fluido politrópico. Posteriormente, se incorporará rotación uniforme alrededor del eje  $\hat{z}$ . Por último, se incluyen efectos de vorticidad en el sistema. Este enfoque secuencial permite analizar de manera sistemática cómo cada una de estas propiedades físicas afecta las características del remanente resultante.

### 3.1. Caso esférico: estrella politrópica

En una estrella politrópica, su estructura se describe utilizando la ecuación de estado politrópica, que relaciona la presión  $P$  y la densidad  $\rho$  de la siguiente manera [40]:

$$P = K\rho^\gamma, \quad (3.1.1)$$

donde  $K$  es una constante relacionada con las propiedades físicas de la estrella y  $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ , con índice politrópico  $n$ .

Para una estrella politrópica, su energía interna,  $U$ , energía potencial gravitacional,  $W$ , y momento de inercia  $I$  vienen dados por:

$$U = k_1(n)K\rho_c^{\frac{1}{n}}M, \quad (3.1.2)$$

$$W = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} = -k_2(n)GM^{5/3}\rho_c^{1/3}, \quad (3.1.3)$$

$$I = \frac{2}{5}\kappa_n MR^2. \quad (3.1.4)$$

Los factores  $k_1(n)$ ,  $k_2(n)$  y  $\kappa_n$  son coeficientes dependientes del índice politrópico  $n$  y permiten generalizar los resultados de una estrella esférica homogénea al caso politrópico (ver detalles en C.1, C.2, C.3). La masa gravitacional, el radio de la estrella y la densidad central se denotan  $M$ ,  $R$  y  $\rho_c$  respectivamente.

En equilibrio hidrostático, una estrella se considera estable si su configuración corresponde a un mínimo de energía total  $E = U + W$ , para una masa y momento angular fijos [41, 40]. Este principio es la base del método variacional en astrofísica: se asume una forma funcional para la distribución de densidad y presión, con uno o más parámetros libres (en este caso, la densidad central  $\rho_c$ ). Luego se calcula la energía total del sistema como una función de esos parámetros, y se impone que esta sea mínima (o estacionaria) para obtener condiciones de equilibrio:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \rho_c} \right|_M = 0, \quad (3.1.5)$$

lo que conduce directamente a la relación virial para una estrella polítropa:

$$\frac{3}{n}U + W = 0. \quad (3.1.6)$$

Usando las ecuaciones de energía interna (3.1.2) y energía gravitacional (3.1.3), junto con la relación virial, se obtiene la relación entre la masa y la densidad central:

$$M(\rho_c) = \left( \frac{3k_1K}{nk_2} \right)^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n}, \quad (3.1.7)$$

así como la energía del sistema en equilibrio:

$$E_{\text{eq}} = \frac{3-n}{3}W = -\frac{3-n}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (3.1.8)$$

### 3.2. Caso esferoidal: estrella polítropa

Un cuerpo esferoidal es un objeto volumétrico cuya frontera es una superficie bidimensional cerrada generada por la rotación de una elipse alrededor de uno de sus ejes principales ( $a_3$ ). Esta geometría se caracteriza por tener dos ejes iguales y uno distinto

### 3.2. CASO ESFEROIDAL: ESTRELLA POLÍTROPA

$(a_1, a_2, a_3)$ , tal que  $a_1 = a_2$ ). Este objeto es un caso particular del elipsoide, la figura general empleada en el modelo final para el objeto postfusión. Un elipsoide es un objeto volumétrico cuya frontera es una superficie bidimensional cerrada caracterizada por tres ejes independientes (triaxial) y secciones planas con forma de elipses. Para construir estas figuras elipsoidales se sigue el procedimiento establecido en [41], el cual se basa en las siguientes suposiciones:

- La estrella se compone internamente de superficies de iso-densidad constante, de tal manera que la geometría de la configuración está completamente definida por los 3 ejes principales  $(a_1, a_2, a_3)$ , y en la superficie más externa se cumple que  $P = \rho = 0$ . Bajo esta suposición  $\frac{a_2}{a_1}$  y  $\frac{a_3}{a_1}$  mantienen sus valores en todas las superficies de igual densidad.
- El perfil de densidad  $\rho(m)$  y energía interna  $U(m)$ , con  $m$  correspondiente a la masa interior gravitacional contenida por la superficie de iso-densidad, es idéntica a la de una polítropa esférica de mismo  $K$  y  $n$ , pero con radio  $R = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$  lo cual corresponde a una polítropa del mismo volumen que la configuración dada. Este radio no es igual al radio  $R_0$ , correspondiente a la polítropa de configuración de equilibrio esférica, no rotante, de misma masa  $M$  e índice  $n$ .

Las anteriores suposiciones son exactas para el caso  $n = 0$ , i.e. densidad constante (caso incompresible), mientras que para  $n \neq 0$  (caso compresible), son una aproximación.

Para el caso de un esferoide ( $a_1 = a_2 > a_3$ ) de masa homogénea, que se encuentra rotando uniformemente respecto al eje menor  $a_3$ , y tiene momento angular  $J$ , la energía potencial gravitacional corresponde a [41]:

$$W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{a_1} \frac{\sin^{-1}(e)}{e}, \quad (3.2.1)$$

donde  $e$  viene dado por:  $(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a_3}{a_1}$ . Ahora, con base en la aproximación elipsoidal, un esferoide homogéneo que se modela con un fluido polítropo tendría energía potencial gravitacional igual a:

$$W = -k_2(n) GM^{5/3} \rho_c^{\frac{1}{3}} g(\lambda), \quad (3.2.2)$$

$$g(\lambda(e)) = \frac{\sin^{-1}(e)}{e} (1 - e^2)^{\frac{1}{6}}$$

con  $\lambda(e) = (1 - e^2)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^{2/3}$ . Es conveniente introducir, en lugar de la densidad central  $\rho_c$ , el radio medio  $R$  del esferoide,

$$R \equiv (a_1^2 a_3)^{1/3} = a_1 (1 - e^2)^{1/6} = a_1 \lambda^{1/2}. \quad (3.2.3)$$

Teniendo en cuenta que  $\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 3\rho_c \left| \frac{\theta_1}{\xi_1} \right|$ , y usando la definición de  $k_2$ , se encuentra que la energía potencial gravitacional se puede reescribir como:

$$W = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} g(\lambda). \quad (3.2.4)$$

Las variables radio,  $r$ , y densidad,  $\rho$ , se relacionan con las variables sin dimensiones  $\xi$  y  $\theta$  respectivamente, al normalizar las ecuaciones de estructura (ver detalles en [C.1](#)). Bajo la aproximación elipsoidal, las expresiones del momento de inercia,  $I$ , y energía rotacional del sistema  $T$ , son:

$$I = \frac{2}{5} \kappa_n M a_1^2, \quad (3.2.5)$$

$$T = \frac{I\Omega^2}{2} = \frac{J^2}{2I} = J^2 \lambda M^{-5/3} \rho_c^{2/3} k_3(n), \quad (3.2.6)$$

donde se define  $k_3(n)$  como un factor que permite estimar la energía cinética rotacional de una estrella esferoidal politrópica (ver detalles en [C.2](#)). La energía total de una configuración con una masa dada  $M$  y momento angular  $J$  es:

$$E(\rho_c, \lambda; M, J) = U + W + T, \quad (3.2.7)$$

y en equilibrio se cumple:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \rho_c} \right|_{M,J} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda} \right|_{M,J} = 0. \quad (3.2.8)$$

La primera condición da de nuevo la relación virial,

$$\frac{3}{n} U + W + 2T = 0, \quad (3.2.9)$$

mientras que la segunda condición permite derivar una relación de equilibrio entre  $\lambda$  (o  $e$ ) y el cociente  $\frac{T}{|W|}$  [[14](#)]:

$$\frac{T}{|W|} = \frac{3}{2e^2} \left( 1 - \frac{e(1-e^2)^{1/2}}{\sin^{-1} e} \right) - 1. \quad (3.2.10)$$

Usando la relación virial ([3.2.9](#)), junto con las expresiones ([3.1.2](#)) para  $U$  y ([3.2.2](#)) para  $W$ , se determina la relación de equilibrio entre  $M$  y  $\rho_c$  para un  $J$  dado,

$$M(\rho_c; J) = M(\rho_c; 0) \left[ g(\lambda) \left( 1 - 2 \frac{T}{|W|} \right) \right]^{-3/2}, \quad (3.2.11)$$

### 3.2. CASO ESFEROIDAL: ESTRELLA POLÍTROPA

donde  $M(\rho_c; 0)$  está dado por la ecuación (3.1.7). La energía total de equilibrio es:

$$E_{eq} = \frac{3-n}{3} W \left( 1 - \frac{3-2n}{3-n} \frac{T}{|W|} \right). \quad (3.2.12)$$

La frecuencia de rotación, el momento angular y la energía se normalizan de la siguiente manera:

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{(\pi G \bar{\rho}_0)^{1/2}}, \quad \bar{J} = \frac{J}{(GM^3 R_0)^{1/2}}, \quad \bar{E} = \frac{E}{GM^2/R_0}, \quad (3.2.13)$$

donde  $\bar{\rho}_0 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$  y el radio  $R_0$  de la configuración politrópica esférica, no rotante de misma masa  $M$  e índice  $n$ , empleada para la aproximación elipsoidal es [42]:

$$R_0 = \xi_1 (\xi_1^2 |\theta'_1|)^{-\frac{1-n}{3-n}} \left( \frac{M}{4\pi} \right)^{\frac{1-n}{3-n}} \left( \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{\frac{n}{3-n}}. \quad (3.2.14)$$

Combinando las ecuaciones (3.2.14) y (3.2.11), se encuentra que  $R$  y  $R_0$  están relacionados por:

$$R = R_0 \left[ g(\lambda) \left( 1 - 2 \frac{T}{|W|} \right) \right]^{-\frac{n}{3-n}}. \quad (3.2.15)$$

Se analiza una secuencia de modelos de equilibrio con un solo parámetro libre, donde las estrellas tienen una masa fija  $M$  y un índice politrópico  $n$ , estas secuencias se denominan *secuencias de esferoides de Maclaurin*. Cada modelo a lo largo de la secuencia se determina completamente especificando solo otra cantidad, como la excentricidad  $e$ , o el parámetro  $\lambda$ .

Usando los resultados de las condiciones de equilibrio (3.2.9), (3.2.10), (3.2.11), (3.2.12) y (3.2.15) se pueden demostrar las siguientes relaciones entre  $\bar{J}$  y  $\bar{\Omega}$  con la excentricidad  $e$  [41]:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^2 &= \frac{1}{\kappa_n (1 - \frac{n}{5})} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \hat{\Omega}^2, \\ \hat{\Omega}^2 &= 2 \left[ \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3} (3-2e^2) \sin^{-1} e - \frac{3(1-e^2)}{e^2} \right], \\ \bar{J}^2 &= \frac{\kappa_n}{(1 - \frac{n}{5})} \left( \frac{R}{R_0} \right) \frac{3}{25} (1-e^2)^{-2/3} \hat{\Omega}^2. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Como ilustración, la Figura 15 muestra el comportamiento de las cantidades normalizadas  $\bar{E}$ ,  $\bar{\Omega}^2$  y  $\bar{J}$  a lo largo de las secuencias de equilibrio correspondientes, al variar el parámetro  $e$  de 0 a 1, con diferentes índices politrópicos  $n$ .

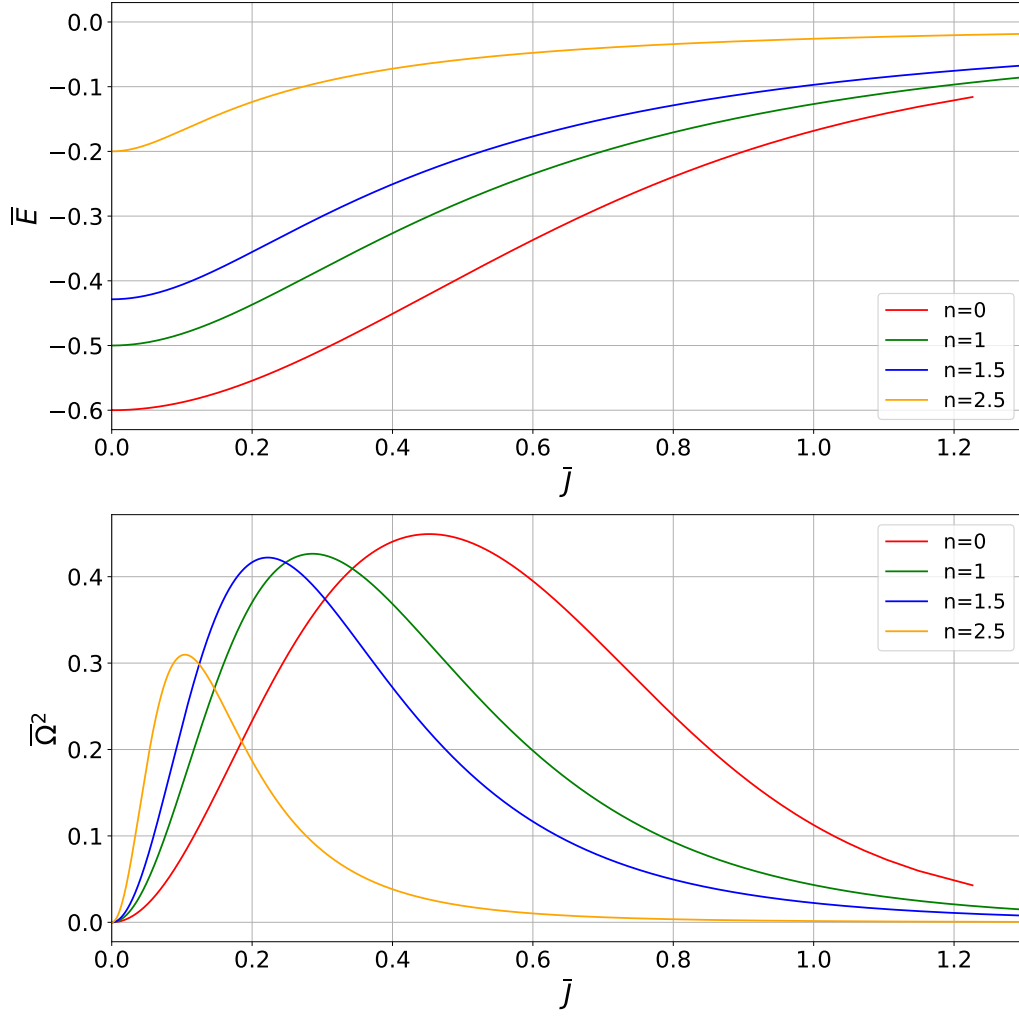


Figura 15: Energía de equilibrio y frecuencia angular de rotación vs momento angular a lo largo de secuencias de esferoides de Maclaurin, con distintos índices politrópicos  $n$ , construidas variando el parámetro de excentricidad  $e$  de 0 a 1.

Se aprecia en esta figura que de existir un mecanismo de pérdida de energía, el sistema tendería a reducir su momento angular  $\bar{J}^2$  hasta alcanzar rotación nula. Sin embargo, en el caso de los esferoides de Maclaurin, no hay emisión de ondas gravitacionales debido a la simetría axial estacionaria. Es decir, la distribución de masa es invariante en el tiempo, i.e. su segunda derivada temporal,  $\ddot{Q}_{jk}^{TT}$ , responsable de la emisión de radiación gravitacional es nula. Esto se aprecia fácilmente con las componentes del tensor de inercia  $I'_1$  e  $I'_2$  las cuales son iguales para un esferoide, por lo tanto, según la ecuación (1.5.19), la pérdida de energía por emisión de ondas gravitacionales es nula.

### 3.3. Modelo de elipsoides de Jacobi compresibles

En este caso se considera una estrella elipsoidal, uniformemente rotante,

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}, \quad a_1 > a_2 > a_3, \quad (3.3.1)$$

y cuya composición es un fluido politrópico, tal rotación también será uniforme respecto al eje menor  $a_3$ . La energía potencial gravitacional corresponde a

$$W = \frac{-3}{5-n} \frac{GM^2}{R} f(\lambda_1, \lambda_2) = -k_2(n) GM^{5/3} \rho_c^{1/3} f(\lambda_1, \lambda_2), \quad (3.3.2)$$

donde la función  $f$  está dada por:

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \left( \frac{A_1 \lambda_2}{\lambda_1^2} + \frac{A_2 \lambda_1}{\lambda_2^2} + A_3 \lambda_1 \lambda_2 \right). \quad (3.3.3)$$

La razón entre ejes corresponde a  $\lambda_i = \left( \frac{a_3}{a_i} \right)^{2/3}$ , con  $i = 1; 2; 3$ , y las funciones  $A_i$  dependen únicamente de la geometría del remanente, cuya forma explícita está en el apéndice C.3. En tal sección también se definen las funciones  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , y  $A$  características de la geometría de los elipsoides, i.e. de la razón entre ejes  $\lambda_i$ , las cuales son funciones auxiliares empleadas para determinar el potencial gravitacional.

El momento de inercia junto con la energía cinética rotacional vienen dadas por:

$$I_{elips} = \frac{I_{sphere}}{h} = \frac{1}{5} \kappa_n M (a_1^2 + a_2^2), \quad (3.3.4)$$

$$T = \frac{J^2}{2I_{elips}} = k_3(n) h J^2 M^{-5/3} \rho_c^{2/3}, \quad (3.3.5)$$

donde

$$h(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2\lambda_1^2 \lambda_2^2}{\lambda_1^3 + \lambda_2^3}. \quad (3.3.6)$$

Estos resultados son consistentes con el caso esferoidal, ya que si  $a_1 = a_2$ , entonces  $\lambda_1 = \lambda_2 = h(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda$ , y también  $f(\lambda_1, \lambda_2) = g(\lambda)$ . Las condiciones de equilibrio son:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \rho_c} \right|_{M,J} = \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda_1} \right|_{M,J} = \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda_2} \right|_{M,J} = 0. \quad (3.3.7)$$

De la primera condición,  $\left. \frac{\partial E}{\partial \rho_c} \right|_{M,J} = 0$ , se obtiene el mismo resultado que en el caso esferoidal, ya que la estructura de  $U$ ,  $W$  y  $T$  son las mismas:



$$\frac{3}{n}U + W + 2T = 0. \quad (3.3.8)$$

La diferencia radica en que, en lugar de tener funciones de  $\lambda$ , el sistema ahora está descrito por funciones de  $\lambda_i$ , ejemplo:

$$\begin{aligned} W_{esferoide} &= -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} g(\lambda) \\ W_{elipsoide} &= -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} f(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Así que la relación para la masa también se cumple, salvo el cambio en las funciones ya mencionadas, así como también se mantiene la ecuación para la energía de equilibrio  $E_q$  [41]:

$$M(\rho_c; J) = M(\rho_c; 0) \left( f(\lambda_1, \lambda_2) \left( 1 - 2 \frac{T}{|W|} \right) \right)^{-3/2}, \quad (3.3.10)$$

$$E_q = \frac{3-n}{3} W \left( 1 - \frac{3-2n}{3-n} \frac{T}{|W|} \right). \quad (3.3.11)$$

De las otras dos condiciones se puede demostrar la siguiente relación entre el cociente  $T$  con  $|W|$  y la geometría del elipsoide:

$$\frac{T}{|W|} = \frac{A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 - 2A_3 a_3^2}{2A}. \quad (3.3.12)$$

Estas condiciones de equilibrio también implican que:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^2 &= \frac{2B_{12}}{q_n}, \\ A_{12} a_1^2 a_2^2 &= A_3 a_3^2, \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

donde se normaliza la frecuencia angular de la siguiente manera:  $\tilde{\Omega}^2 = \frac{\Omega^2}{\pi G \bar{\rho}}$  y se define  $q_n \equiv \kappa_n (1 - \frac{n}{5})$ . Por otra parte, se relaciona el momento angular con la frecuencia angular del elipsoide de la siguiente manera:

$$\tilde{J} \equiv \frac{J}{(GM^3 R)^{1/2}} = \frac{\sqrt{3}}{10} \frac{(a_1^2 + a_2^2)}{R^2} \kappa_n \tilde{\Omega}. \quad (3.3.14)$$

Estas últimas ecuaciones, (3.3.13) y (3.3.14) se resuelven para determinar la secuencia de equilibrio, para más detalles sobre el desarrollo matemático véase el apéndice C.3 y sus respectivas subsecciones. Los resultados se aprecian en las figuras 16 y 17.

Estos modelos son aproximados y según la Ref.[41] al comparar con simulaciones de SPH (simulaciones hidrodinámicas tridimensionales de politropas en sistemas binarios), se encuentra que la desviación fraccional más grande es de aproximadamente un 3 % para  $\bar{\Omega}^2$ . Este máximo error ocurre cerca del punto de desprendimiento de masa de la secuencia  $n = 1$ . La desviación fraccional de  $\bar{E}$  nunca supera el 1 % para todas las secuencias.

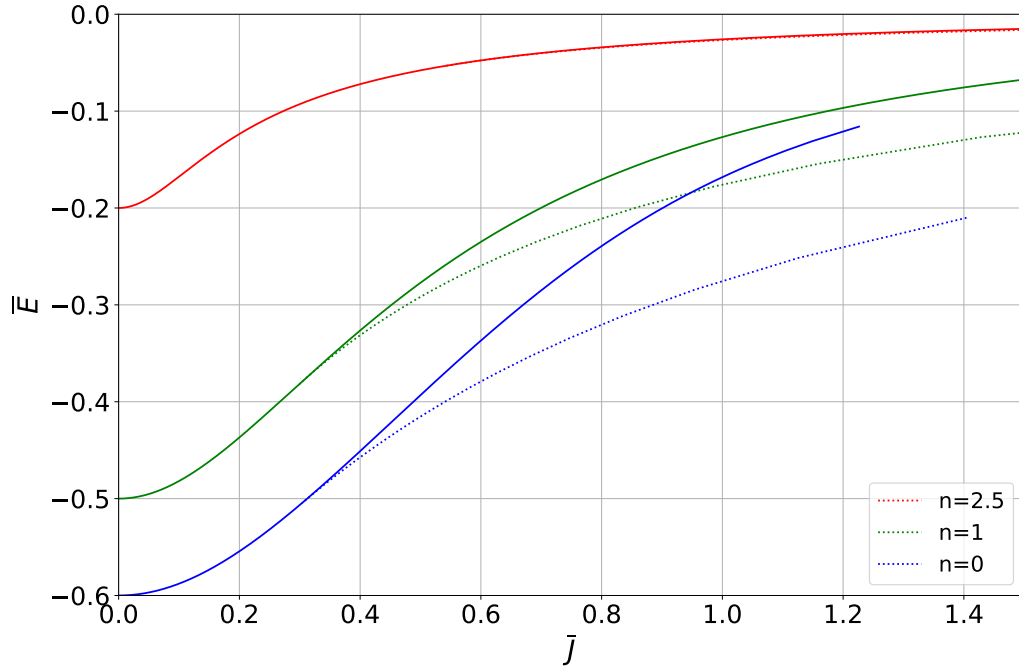


Figura 16: Variación de la energía de la estrella, junto con su momento angular, a lo largo de secuencias de elipsoides de Jacobi con distintos índices politrópicos. Las líneas sólidas corresponden al caso de los esferoides de Maclaurin.

De la figura 16 se aprecia que la evolución del sistema elipsoidal de Jacobi tiende a la pérdida de momento angular, a su vez que, con base en la figura 17, su frecuencia angular tiende a aumentar. Además, conforme disminuye la energía del sistema, la razón  $\frac{a_2}{a_1}$  tiende a 1, comportamiento que concuerda con la pérdida de energía por emisión de ondas gravitacionales hasta llegar a una configuración de equilibrio esferoidal. Este fenómeno se explica porque, según la ecuación (1.5.19), los elipsoides de Jacobi presentan emisión de radiación gravitacional cuando  $I'_1 \neq I'_2$ . No obstante, cuando  $\frac{a_2}{a_1} = 1$ , se cumple  $I_1 = I_2$  i.e. el sistema deja de emitir ondas gravitacionales al alcanzar una configuración esferoidal.

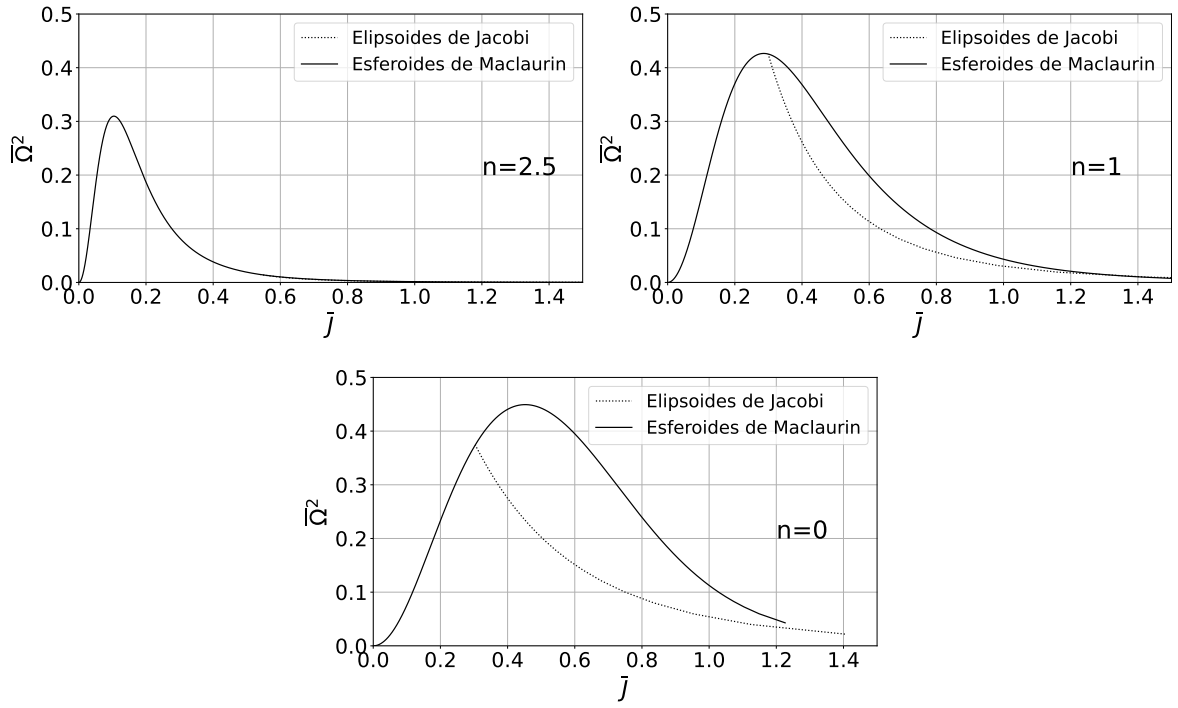


Figura 17: Comportamiento de la frecuencia angular respecto al momento angular, para los elipsoides de Jacobi y esferoides de Maclaurin, con tres distintos valores de índice politrópico. Para  $n=2.5$  ambas curvas son prácticamente iguales si  $\bar{J} \gtrsim 0.55$ , pero si  $\bar{J}$  es menor a ese número, no existe secuencia de los elipsoides de Jacobi.

### 3.4. Modelo de elipsoides de Riemann tipo S

Aunque los elipsoides de Jacobi emiten ondas gravitacionales, no es a lo largo de esa secuencia que evoluciona el objeto postfusión, ya que según la Ref.[43], se debe conservar la circulación  $C$  en el sistema. A partir de esta ley de conservación, un elipsoide de Jacobi que evoluciona por radiación gravitacional, no puede permanecer en la secuencia de Jacobi. Por lo tanto, se generaliza el tratamiento anterior mediante la inclusión de rotación no uniforme, siguiendo el desarrollo presentado en la Ref.[41, 42]. Para ello se introduce una vorticidad  $\vec{\zeta}$ , en el marco de referencia corotante con el elipsoide:

$$\vec{\zeta} \equiv (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (3.4.1)$$

donde  $\mathbf{v}$  corresponde al campo de velocidades del fluido en el marco de referencia corotante con la figura de equilibrio elipsoidal. La energía potencial gravitacional  $W$  y la energía interna  $U$  no se ven afectadas, ya que dependen solo de la distribución de masa y de variables locales como la densidad y la presión. Sin embargo, al cambiar el momento angular  $J$  debido a la vorticidad  $\vec{\zeta}$ , la energía cinética  $T$  sí se ve modificada. Con esto en cuenta, se procede con las siguientes suposiciones que permiten obtener condiciones de equilibrio: (i)  $\vec{\zeta}$  será paralela a  $\vec{\Omega}$  [41], i.e. paralela al eje de rotación  $\hat{e}_3$ , (ii) la vorticidad debe ser tal que no genere cambios en la figura elipsoidal i.e. el vector velocidad  $\mathbf{v}$  en cualquier punto del fluido debe ser tangente a la superficie de isodensidad que pasa por tal punto (ver detalles en C.4).

La circulación del fluido a lo largo del ecuador del elipsoide es:

$$C = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A}, \quad (3.4.2)$$

donde  $A$  es una superficie cuyo borde coincide con el bucle a lo largo del ecuador. Al derivar respecto al tiempo esta expresión se obtiene:

$$\frac{dC}{dt} = \int \left( \nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{A}. \quad (3.4.3)$$

Las ecuaciones Newtonianas de la hidrodinámica de un fluido perfecto, como una politropa, son [44]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (3.4.4)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial (\Phi - \omega)}{\partial x_\alpha}, \quad (3.4.5)$$

donde  $\omega$  corresponde a la entalpía específica del fluido y  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  es un gradiente. En fluidos barotrópicos (donde  $P = P(\rho)$  como en el caso de una polítropa), el gradiente de presión por unidad de densidad puede expresarse como el gradiente de la entalpía específica  $\omega$ :  $\frac{1}{\rho}\nabla P = \nabla\omega$  [44]. Si se incluyen efectos de reacción a la radiación en las ecuaciones de movimiento, entonces el potencial de reacción-radiación  $\Phi_{\text{react}}$  (determinado en el capítulo 1.6) debe añadirse a  $\Phi$ , este último contiene también el potencial gravitacional Newtoniano. La derivada del campo de velocidades se puede expresar como el gradiente de un potencial, y por lo tanto su rotacional es nulo. En consecuencia, la circulación se conserva [43]:

$$\frac{dC}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad C = \text{cte.} \quad (3.4.6)$$

Esto implica que no se genera vorticidad adicional en el plano ecuatorial del elipsoide, y que el objeto postfusión evoluciona a lo largo de una secuencia de equilibrio en la que se conserve  $C$ . El momento angular y la energía cinética corresponden a:

$$\vec{J} = \left( I\Omega - \Lambda a_1 a_2 \frac{2}{5} \kappa_n M \right) \hat{e}_3, \quad (3.4.7)$$

$$T = \frac{1}{2} I (\Lambda^2 + \Omega^2) - \frac{2}{5} \kappa_n M a_1 a_2 \Lambda \Omega, \quad (3.4.8)$$

donde  $\Lambda = -\frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta$  (ver detalles en C.4). Las condiciones de equilibrio son las mismas que en la anterior sección pero ahora las derivadas parciales deben ser realizadas para una masa  $M$ , momento angular  $J$  y circulación  $C$ , fijas:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \rho_c} \right|_{M,J,C} = \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda_1} \right|_{M,J,C} = \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda_2} \right|_{M,J,C} = 0. \quad (3.4.9)$$

De la primera condición,  $\left. \frac{\partial E}{\partial \rho_c} \right|_{M,J,C} = 0$ , se obtiene la misma relación virial que antes, ecuación (3.3.8). Dadas las otras dos condiciones y siguiendo el desarrollo presentado en [32, 21], las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^2 + \frac{a_1^2 a_2^2}{(a_1^2 + a_2^2)} \hat{\zeta}^2 - 2B_{12} &= 0, \\ \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \hat{\zeta} \hat{\Omega} - a_1^2 a_2^2 A_{12} + a_3^2 A_3 &= 0, \\ C &= \pi a_1 a_2 (\zeta + 2\Omega). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Donde las nuevas variables normalizadas corresponden a:

$$\hat{\Omega}^2 \equiv q_n \tilde{\Omega}^2 = q_n \frac{\Omega^2}{\pi G \bar{\rho}}, \quad \hat{\zeta}^2 \equiv q_n \tilde{\zeta}^2 = q_n \frac{\zeta^2}{\pi G \bar{\rho}}, \quad \bar{C} = \frac{C}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}_0 R_0^2}}. \quad (3.4.11)$$

La figura elipsoidal de equilibrio autogravitante, producto de la fusión de una binaria de neutrones, evoluciona en el tiempo a lo largo de una secuencia de elipsoides de Riemann-S. Esto se debe a la radiación gravitacional, la cual extrae energía y momento angular del sistema [21]. Esta pérdida de energía obliga al remanente a ajustarse continuamente a nuevas configuraciones de equilibrio. Así, la secuencia de equilibrio se construye seleccionando alguna circulación, y resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente. Los resultados se presentan en las figuras 18 y 19, donde se muestra el modelo final del remanente estelar de la fusión de un sistema binario. En cada gráfica se seleccionan los valores de circulación empleados en la Ref. [21], con el fin de comparar resultados.

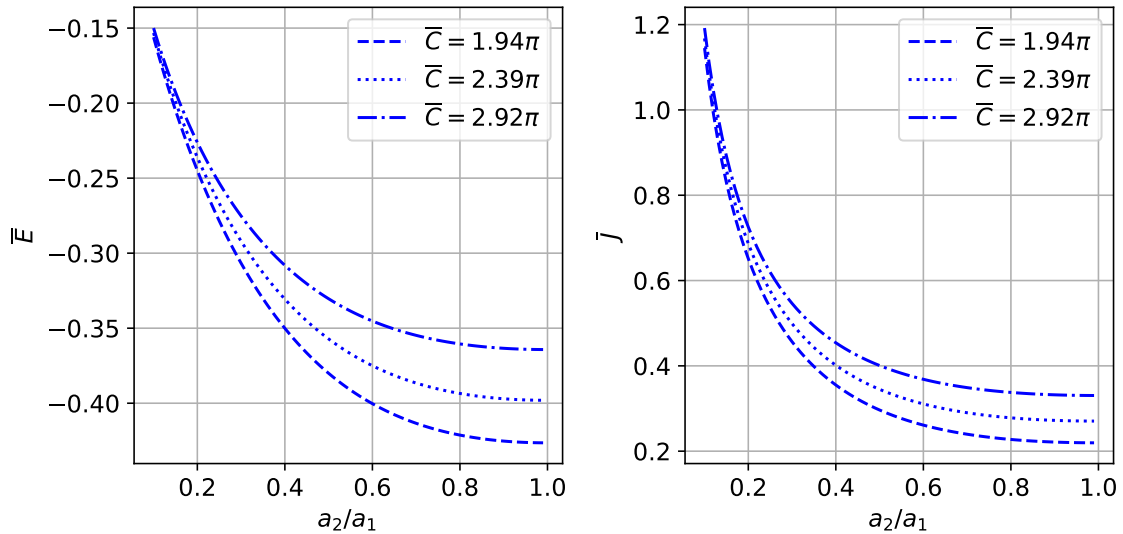


Figura 18: Secuencias de equilibrio, para distintos valores de la circulación y  $n = 1$ , en donde se relaciona la energía y momento angular del sistema con la razón entre los ejes  $a_2$  y  $a_1$ .

Como se aprecia en la figura 18, conforme el sistema pierde energía (debido a la emisión de ondas gravitacionales) la razón  $\frac{a_2}{a_1}$  tiende al valor de 1. Es decir tiende a ser simétrico, ya que busca la forma de un esferoide, figura la cual ya no emite ondas gravitacionales. También, la figura 18 muestra que el sistema pierde momento angular conforme evoluciona a lo largo de la secuencia de equilibrio, lo cual tiene sentido, ya que parte de ese momento angular sería transportado por las ondas gravitacionales emitidas. Además, según la figura 19 aunque se pierde energía conforme evoluciona el sistema, el mismo tiende a girar más rápido, es decir se presenta un fenómeno de espín-up. Lo anterior va acorde con el hecho de que conforme el sistema tiende a ser simétrico, su momento de

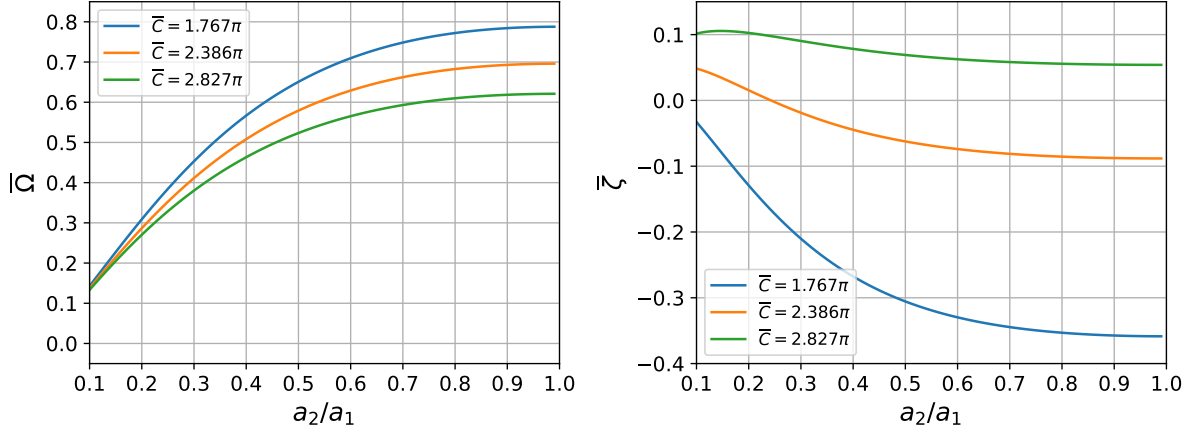


Figura 19: Secuencias de equilibrio de elipsoides tipo Riemann-S, para distintos valores de la circulación y  $n = 1$ . Se relaciona la frecuencia angular rotacional del sistema y la vorticidad con la razón entre los ejes  $a_2$  y  $a_1$ .

inercia disminuye de tal manera que la frecuencia angular aumenta.

### 3.5. Ondas gravitacionales producidas por el objeto postfusión del sistema binario.

A partir de las expresiones de las polarizaciones de las ondas gravitacionales de un objeto triaxial rotante (1.5.17), la amplitud de las ondas gravitacionales corresponde a:

$$h_0 = -\frac{4G\Omega^2}{Dc^4}(\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2), \quad (3.5.1)$$

donde  $D$  corresponde a la distancia desde el observador hasta la fuente y  $\mathcal{I}'_1, \mathcal{I}'_2$  son los momentos de inercia respecto a los ejes  $a_1$  y  $a_2$  respectivamente. Para un objeto con figura elipsoidal de equilibrio autogravitante y estructura politrópica, con base en la expresión (3.3.4), estos momentos de inercia corresponden a:

$$\mathcal{I}'_1 = \frac{1}{5}\kappa_n M(a_2^2 + a_3^2), \quad \mathcal{I}'_2 = \frac{1}{5}\kappa_n M(a_1^2 + a_3^2). \quad (3.5.2)$$

El tiempo de escala típico característico de las ondas gravitacionales es:

$$\tau_{\text{GW}} = \frac{f}{\dot{f}} = f \left| \frac{dE}{df} \left( \frac{dE}{dt} \right)^{-1} \right|, \quad (3.5.3)$$

donde  $\frac{dE}{dt}$  se obtiene de la luminosidad de las ondas gravitacionales hallada en (1.5.19), y  $\frac{dE}{df}$  de las secuencias de equilibrio presentes en las figuras 18 y 19. Este tiempo de escala

### 3.5. ONDAS GRAVITACIONALES PRODUCIDAS POR EL OBJETO POSTFUSIÓN DEL SISTEMA BINARIO.

típico se interpreta como el tiempo que le toma al elipsoide para que la frecuencia de las ondas gravitacionales cambie de manera apreciable. La figura 20 muestra la normalización de  $h_0$  y el tiempo de escala típico de las ondas gravitacionales, ambos en función de la frecuencia de las ondas. En estos casos fue necesario definir la masa  $M$  y radio  $R_0$  del objeto elipsoidal, así que se tomaron los valores de  $1.4[M_\odot]$  y  $10[Km]$  respectivamente. Estos valores de masa y radio corresponden a los empleados en la Ref. [42]. Se toman estos valores con el fin de corroborar el modelo, y así poder aplicarlo en el próximo capítulo al evento GW170817.

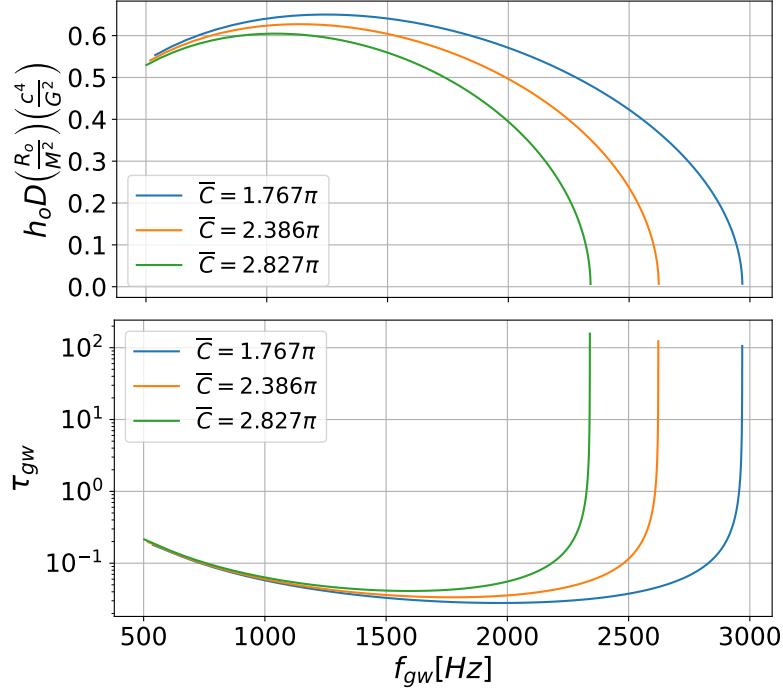


Figura 20: Secuencias de equilibrio, para distintos valores de circulación, en donde se relaciona la amplitud y el tiempo característico de las ondas gravitacionales con la frecuencia de las mismas, para  $n = 1$ .

El tiempo que tarda en evolucionar el sistema durante la emisión de ondas gravitacionales (fase de amortiguamiento) se calcula como:

$$\Delta t = \int_{f_{min}}^{f_{max}} \left( \frac{df}{dt} \right)^{-1} df, \quad \frac{df}{dt} = \frac{df}{dE} \frac{dE}{dt}. \quad (3.5.4)$$

Para un remanente estelar de valores típicos de una estrella de neutrones, el tiempo de duración de la emisión de ondas gravitacionales  $\Delta t$  (ver figura 21) es del orden de décimas de segundos, y emite en el orden de los kilo Hertz.

Las polarizaciones de las ondas gravitacionales de un objeto triaxial rotante corresponden a las presentadas en la ecuación (1.5.17), por lo cual se requiere determinar el ángulo  $\Phi$  asociado a estas ondas:



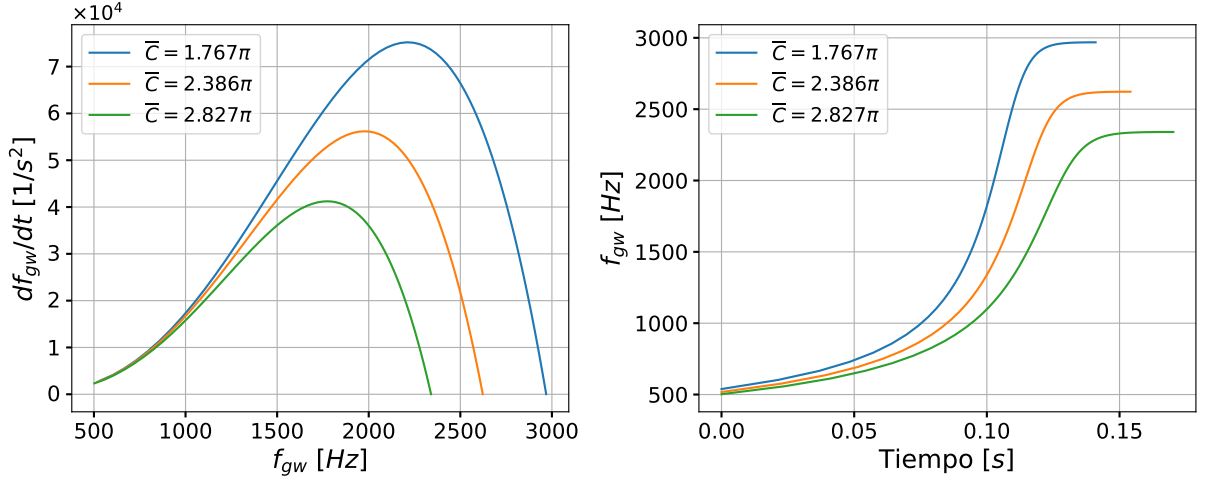


Figura 21: Secuencias de equilibrio, para distintos valores de la circulación y  $n = 1$ . **(Izquierda)** Se relaciona la derivada temporal de la frecuencia de las ondas gravitacionales con la frecuencia. **(Derecha)** Se relaciona la frecuencia de las ondas gravitacionales con el tiempo en el que se emiten.

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t \Omega_{gw}(t') dt' = 2\pi \int_{t_0}^t f_{gw}(t') dt', \quad (3.5.5)$$

donde se asumió  $\Phi(t_0) = 0$ . Los resultados de tales polarizaciones y de su respectiva amplitud  $h_0$  en función del tiempo se presentan en la figura 22, donde ambas se normalizan de la misma manera. Se aprecia que efectivamente la emisión de ondas gravitacionales ocurre en un lapso muy corto de tiempo (décimas de segundos), y que su amplitud al final de la emisión tiende a cero.

El espectro de las ondas gravitacionales puede obtenerse aplicando la transformada de Fourier a las polarizaciones de las mismas. Para tal motivo se define la densidad espectral de potencias (PSD, por sus siglas en inglés) de la amplitud efectiva como [45, 46]:

$$\tilde{h}(f) \equiv \sqrt{\frac{|\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2}{2}}, \quad (3.5.6)$$

donde  $\tilde{h}_{+,\times}(f)$  es la transformada de Fourier de las respectivas polarizaciones de las ondas:

$$\tilde{h}_{+,\times}(f) \equiv \begin{cases} \int h_{+,\times}(t) e^{-i2\pi ft} dt & (f \geq 0) \\ 0 & (f < 0) \end{cases}. \quad (3.5.7)$$

### 3.5. ONDAS GRAVITACIONALES PRODUCIDAS POR EL OBJETO POSTFUSIÓN DEL SISTEMA BINARIO.

La PSD es una medida de cómo se distribuye la potencia (o energía) de una señal en función de la frecuencia. En el capítulo IV se emplean estas expresiones.

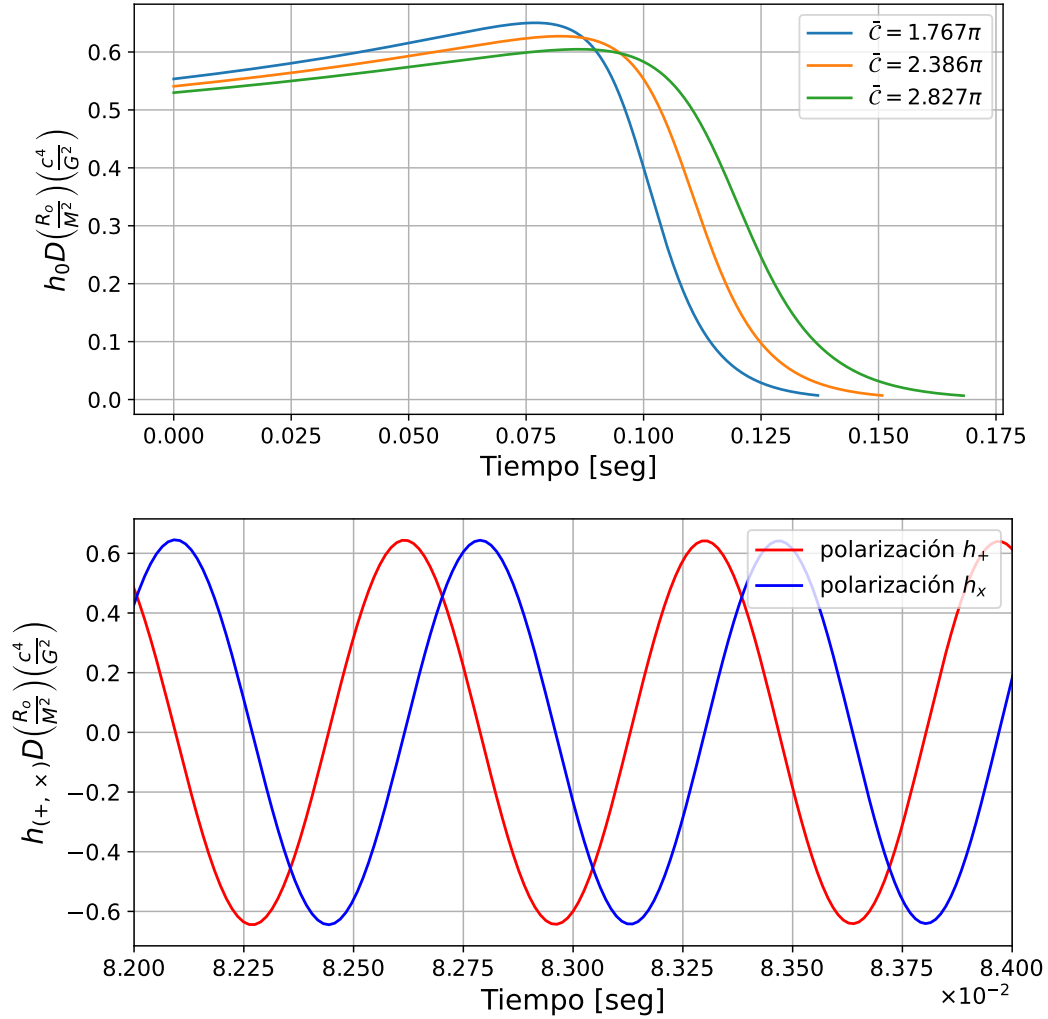


Figura 22: Polarizaciones de la onda gravitacional producida por elipsoides de Riemann-S. **(arriba)** Amplitud de las polarizaciones para  $n = 1$  y distintos valores de la circulación. **(abajo)** Polarizaciones durante una pequeña franja de tiempo, con el fin de visualizar el comportamiento de las ondas, para  $n = 1$  y  $\tilde{C} = 1.767\pi$ .

---

# CAPÍTULO IV

---

## Objeto postfusión de GW170817

El evento GW170817 fue la primera detección de ondas gravitacionales provenientes de la fusión de dos estrellas de neutrones, observada el 17 de agosto de 2017 por los detectores LIGO y Virgo [4]. Este suceso marcó el inicio de la astronomía multimensajero, ya que, además de las ondas gravitacionales, se detectaron señales electromagnéticas para un intervalo amplio de frecuencias (rayos gamma, luz visible, ondas de radio, etc.) provenientes del mismo evento GRB170817A [47]. Se estima que la fusión ocurrió aproximadamente a 40 megaparsecs de la Tierra, duró aproximadamente 100 segundos y emitió ondas gravitacionales en el rango de frecuencias detectables por LIGO/Virgo, es decir, entre las decenas y cientos de Hertz [4]. En los días siguientes, se observó una kilonova, una explosión transitoria que produce elementos pesados como oro y platino mediante el proceso de captura rápida de neutrones (proceso r) [47]. La importancia de este evento radica en que confirmó que las fusiones de estrellas de neutrones son una fuente de ondas gravitacionales y de estallidos de rayos gamma cortos. La energía isotrópica liberada ( $E_{\text{iso}}$ ) fue de aproximadamente  $3.1 \times 10^{46}$  erg [8], aproximadamente 6 ordenes de magnitud por debajo del valor esperado [48, 2]. Una posible explicación es que gran parte de la energía emitida correspondió a radiación gravitacional, por lo tanto es importante determinar la emisión gravitacional del objeto postfusión del sistema binario de estrellas de neutrones asociado a GW170817.

### 4.1. Aplicando leyes de conservación y relaciones cuasi-universales

Con base en los datos reportados por los observatorios LIGO y Virgo [4], el sistema binario asociado al evento GW170817 tiene las siguientes características:

- (i) Masa de chirrido de  $M_c \approx 1.188^{+0.004}_{-0.002} M_{\odot}$ ;
- (ii) Masa total gravitacional de  $2.74^{+0.04}_{-0.01} M_{\odot}$ ;
- (iii)  $m_1$  entre  $[1.36-1.60] M_{\odot}$  y  $m_2$  entre  $[1.17-1.36] M_{\odot}$ ;
- (iv) Razón de masas  $q$  en el rango de  $[0.7-1]$ .

#### 4.1. APLICANDO LEYES DE CONSERVACIÓN Y RELACIONES CUASI-UNIVERSALES

Según Ref. [4], estos datos abarcan los intervalos de confianza del 90 % bajo diferentes suposiciones del modelo de forma de onda, con el objetivo de acotar la incertidumbre sistemática. Los valores de masa se reportan en el sistema de referencia de la fuente, teniendo en cuenta la incertidumbre en el corrimiento al rojo de la misma.

Para realizar este estudio, se elijen los siguientes 3 posibles valores para la razón de masas  $q = 0.95$ ;  $0.85$  y  $0.75$ , ya que se encuentran en el rango permitido, y se estudia el sistema con las E.O.S EL3, NL3 y TM1. Es decir, se proponen en total 9 binarias candidatas a modelar el evento GW170817. El conjunto de masas gravitacionales encontradas numéricamente que cumplen las anteriores características corresponden a  $(1.40M_{\odot}$  y  $1.33M_{\odot})$ ,  $(1.480M_{\odot}$  y  $1.258M_{\odot})$ ,  $(1.577M_{\odot}$  y  $1.183M_{\odot})$ , donde por cada una de estas binarias hay tres posibles E.O.S.

Una vez determinadas las binarias, se procede a aplicar el modelo basado en leyes de conservación y relaciones cuasi-universales en dos casos extremos: cuando la masa del disco de acreción alrededor del remanente es la máxima permitida y cuando no se forma disco.

##### **Caso con masa del disco máxima y $\Delta J = 0$**

Primero se determina el momento angular del sistema binario justo antes de la fusión, considerando los casos  $q \approx 1$  y  $q < 1$  y, por lo tanto,  $r_{CONT}$  o  $r_{MS}$  como los radios de fusión que definen el paso de una fase a la otra, respectivamente. Los nueve posibles momentos angulares tomaron valores entre  $[4.698 - 5.4569]GM_{\odot}^2/c$ .

La configuración correspondiente a la masa máxima del disco se obtiene al establecer  $\Delta J = 0$ , y seguir el procedimiento presentado en el capítulo 2.3. Las leyes de conservación conducen a obtener la masa del objeto central, la masa del disco y el defecto de masa  $\Delta E$ , tal y como se aprecia en el cuadro 4.1. Este caso límite no tiene emisión de ondas gravitacionales,  $\Delta J = 0$ , por lo que también establece un límite superior a la energía liberada en mecanismos distintos a las ondas gravitacionales.

Con base en el cuadro 4.1, la ecuación de estado EL3 es la que provee los máximos valores que podría tomar  $E_{other}$ , estando esta energía en el rango de aproximadamente  $[2.2954 - 2.6064] \times 10^{53}$  erg, donde el menor valor corresponde a la binaria cuyo cociente de masas es  $q_3 = 0.75$  y el mayor valor corresponde a  $q_1 = 0.95$ . Esta energía es transportada al infinito por un mecanismo distinto a las ondas gravitacionales i.e. no acompañada por pérdidas de momento angular, lo cual impone una cota superior a la energía  $E_{other}$ , estos valores también son consistentes con los presentados en [2].

##### **Caso sin disco y $\Delta J$ máximo**

Para el caso ideal sin masa del disco, como se presentó en la sección 2.3, el comportamiento de la masa del objeto central, en caso de ser una estrella de neutrones, sería aproximadamente independiente de la E.O.S. Así que hay 3 posibles valores para  $m_c$ :  $2.583$ ;  $2.592$  y  $2.616$   $[M_{\odot}]$ , siguiendo el orden en el que se presentaron las binarias, tal y como se muestra en el cuadro 4.2. Estas masas del remanente central corresponden

Cuadro 4.1: Valores de masa del objeto central  $m_c$ , masa del disco  $m_d$ , pérdida de energía neta  $\Delta E$  por defecto de masa, y momento angular justo antes de la fusión  $J_m$ , para diferentes valores de  $q$  y ecuaciones de estado.

E.O.S	$q$	$m_c [M_\odot]$	$m_d [M_\odot]$	$\Delta E [M_\odot c^2]$	$J_m [GM_\odot^2/c]$
EL3	0.95	2.5793	0.0057	0.1450	4.6987
	0.85	2.5272	0.0812	0.1296	5.0585
	0.75	2.5489	0.0834	0.1277	5.1553
NL3	0.95	2.5531	0.0382	0.1387	4.8418
	0.85	2.5014	0.1133	0.1233	5.1928
	0.75	2.5254	0.1125	0.1220	5.2781
TM1	0.95	2.5280	0.0694	0.1326	4.9757
	0.85	2.4675	0.1555	0.1151	5.3649
	0.75	2.4872	0.1599	0.1128	5.4730

a las máximas posibles a alcanzar, ya que la masa del disco le resta valor a la masa del objeto central. A partir de estos valores se estima la energía emitida por defecto de masa y se presenta también en el cuadro 4.2.

Cuadro 4.2: Valores de masa del objeto central  $m_c$  y  $\Delta E$  para diferentes valores de  $q$ , estos resultados en particular son aproximadamente independientes de la ecuación de estado a emplear (ver sección 2.4, caso sin disco).

	$m_c [M_\odot]$	$\Delta E [M_\odot c^2]$
$q_1 = 0.95$	2.5838	0.1462
$q_2 = 0.85$	2.5926	0.1454
$q_3 = 0.75$	2.6163	0.1437

Si se considera la cota superior impuesta a  $E_{other}$ , entonces a partir de la pérdida de energía presentada en el cuadro 4.2 se puede determinar la mínima cantidad de energía que tuvo que haberse emitido en forma de ondas gravitacionales  $\Delta E = E_{other}^{max} + E_{gw}^{min}$ , para este caso sin disco.

Dicho lo anterior, si se elije por ejemplo la ecuación de estado EL3, para  $q_1 = 0.95$  se obtiene  $E_{gw}^{min} = \Delta E - E_{other}^{max} = 0.1462 - 0.1450[M_\odot c^2] = 2.1444 \times 10^{51}[ergs]$ . Análogamente, para  $q_2 = 0.85$  se tendrá que  $E_{gw}^{min} = 0.0158[M_\odot c^2] = 2.8234 \times 10^{52}[ergs]$  y para  $q_3 = 0.75$  entonces  $E_{gw}^{min} = 0.0160[M_\odot c^2] = 2.8601 \times 10^{52}[ergs]$ . Observe como efectivamente conforme aumenta el valor de  $\Delta J$  (ver cuadro 4.3) aumenta el valor mínimo de energía emitida en forma de ondas gravitacionales. Cabe aclarar que este valor mínimo de energía emitida en forma de ondas gravitacionales es para este caso en el que la masa del disco es cero, como a priori se desconoce la masa de un posible disco de acreción alrededor del remanente, entonces no se puede hablar de un valor mínimo en general distinto de cero. Sin embargo, surge la pregunta de si existe un mecanismo físico capaz

de emitir energía en forma de ondas gravitacionales del orden de  $10^{52}[\text{erg}]$  o más, lo cual se estudiará en la siguiente sección al aplicar los modelos de figuras elipsoidales de equilibrio autogravitantes presentados en el capítulo III.

Cuadro 4.3: Pérdida máxima de momento angular para diferentes valores de  $q$  y ecuaciones de estado, las unidades son de  $GM_\odot^2/c$ .

	EL3	NL3	TM1
$q_1 = 0.95$	0.0250	0.1680	0.3020
$q_2 = 0.85$	0.3530	0.4875	0.6596
$q_3 = 0.75$	0.3645	0.4870	0.6821

Finalmente, observe que de todos los casos posibles, la mayor masa gravitacional asociada al remanente tomó el valor de  $m_c = 2.616M_\odot$ , las masas máximas permitidas por las ecuaciones de estado EL3, NL3 y TM1 corresponden a 2.75; 3.4 y  $2.62[M_\odot]$  respectivamente, así que en teoría se esperaría que el remanente fuese una estrella de neutrones de rápida rotación.

## 4.2. Aplicando el modelo de elipsoide de Riemann-S

En esta sección se modela el hipotético objeto postfusión estelar, asociado a la fusión de binarias de neutrones del evento GW170817, como un elipsoide de Riemann-S. En particular se modela su evolución durante la fase de amortiguamiento, y se estima su emisión de ondas gravitacionales.

Primero, se definen las condiciones iniciales a partir de las cuales debe evolucionar la estrella remanente, con base en los datos presentados en la sección anterior. Estos datos incluyen la masa del objeto central, su momento angular, la razón de ejes  $a_2/a_1$  y el valor de la circulación. Como todas estas variables están relacionadas, el procedimiento será el siguiente: Se toman dos casos particulares de las nueve posibles binarias, el primero correspondiente a un valor intermedio de momento angular de la binaria justo antes de la fusión  $J_m$ , cuya E.O.S es EL3, y el segundo a un caso extremo de momento angular de la binaria correspondiente a la E.O.S TM1. Se escogen estas dos E.O.S ya que según la Ref. [49], los radios de estas estrellas están en el rango de:  $R_1 = 11.9_{-1.4}^{+1.4} \text{ km}$  y  $R_2 = 11.9_{-1.4}^{+1.4} \text{ km}$  con un nivel de credibilidad del 90 %. Por lo cual, con base en la figura 7, las E.O.S más apropiadas a emplear por sus bajos valores de radio son EL3 y TM1. Los valores de momento angular  $J_m$  para cada binaria, justo antes de la fusión, son  $J_{m1} = 5.0585[GM_\odot^2/c]$  y  $J_{m2} = 5.4730[GM_\odot^2/c]$  (ver cuadro 4.1) con masas gravitacionales del remanente central de  $m_{c1} = 2.5272[M_\odot]$  y  $m_{c2} = 2.4872[M_\odot]$ , respectivamente.

La conservación del momento angular implica que estos valores corresponderán al remanente justo después de la fusión. A partir de estos, se determinan los respectivos

momentos angulares normalizados  $\bar{J}_1 = 0.3542$  y  $\bar{J}_2 = 0.3956$ . Recordar que para normalizar el momento angular se requería no solo la masa de la estrella sino el radio  $R_0$ , para hallar este radio se supuso en ambos casos una compacidad típica cercana a 0.27. Con estos valores, se calcula el valor inicial de  $a_2/a_1$ . Al comparar el punto inicial en la secuencia de equilibrio con el sistema cuando se llega al objeto final en la secuencia, i.e. forma esferoidal,  $a_2/a_1 = 1$ , se determina  $\Delta\bar{J}$  y  $\Delta\bar{E}$ , por ejemplo  $\Delta\bar{J}_1 = \bar{J}|_{\frac{a_2}{a_1}=1} - \bar{J}_1$ . Los resultados se presentan en la figura 23, donde se seleccionan dos valores para la circulación  $\bar{C} = 3.4\pi; 3.6\pi$ .

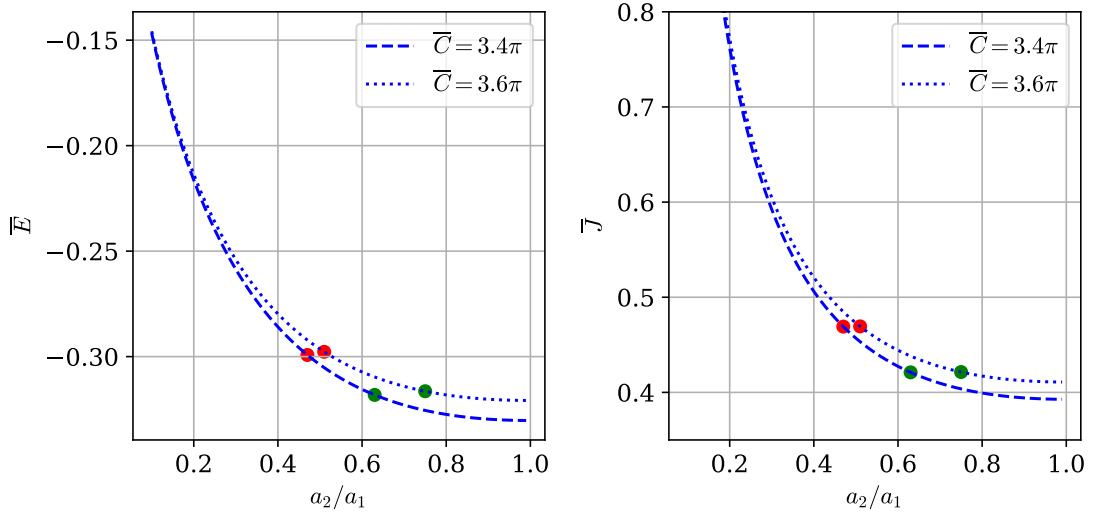


Figura 23: Secuencias de equilibrio de elipsoides de Riemann-S con dos valores de circulación y  $n = 1$ , en donde se relaciona la energía y momento angular del sistema con la razón entre los ejes  $a_2$  y  $a_1$ . Los puntos sobre las secuencias de equilibrio hacen referencia a los datos iniciales de la fase de amortiguamiento, con base en los valores de  $\bar{J}_1$  (**verde**) y  $\bar{J}_2$  (**rojo**).

Con base en estos resultados, se determina la pérdida de momento angular y pérdida de energía de las binarias, como se mencionó antes, evaluando estas cantidades cuando  $\frac{a_2}{a_1} = 1$  y restando su valor inicial con base en el valor que debe tomar  $J_m$ . También se determina la eficiencia en la emisión de ondas gravitacionales durante la fase de amortiguamiento, los resultados se aprecian en el cuadro 4.4.

Para la primera binaria seleccionada, su E.O.S corresponde a EL3 y  $q=0.85$ . Por lo tanto, posee una masa gravitacional inicial de  $2.738 M_\odot$  y una eficiencia porcentual, del objeto postfusión, aproximadamente del 0.32 % y 0.11 % para  $\bar{C} = 3.4\pi; 3.6\pi$  respectivamente. Para la segunda binaria, su E.O.S corresponde a TM1 y  $q=0.75$ . Por lo tanto, posee una masa gravitacional de  $2.76 M_\odot$  y una eficiencia porcentual aproximadamente del 0.79 % y 0.58 % para  $\bar{C} = 3.4\pi; 3.6\pi$  respectivamente. Sin embargo, según el modelo basado en leyes de conservación, las pérdidas máximas de momento angular

## 4.2. APLICANDO EL MODELO DE ELIPSOIDE DE RIEMANN-S

Cuadro 4.4: Pérdida de momento angular, de energía, y eficiencia en radiación gravitacional, producto de la fase de amortiguamiento. Se emplean diferentes valores de  $\bar{C}$ , y las dos binarias seleccionadas, con valores de  $q = 0.85$ ,  $q = 0.75$  y ecuaciones de estado EL3 y TM1 respectivamente.

	$\Delta J_1 [\frac{GM_\odot^2}{c}]$	$\Delta J_2 [\frac{GM_\odot^2}{c}]$	$\Delta E_1 [M_\odot c^2]$	$\Delta E_2 [M_\odot c^2]$	$\Delta E_1/E_1$	$\Delta E_2/E_2$
$\bar{C} = 3.4\pi$	0.3398	0.8883	0.0086	0.0219	0.0032	0.0079
$\bar{C} = 3.6\pi$	0.1263	0.6804	0.0031	0.0162	0.0011	0.0058

para este par de binarias son  $\Delta J_{max1} = 0.3530 [GM_\odot^2/c]$  y  $\Delta J_{max2} = 0.6821 [GM_\odot^2/c]$  (ver cuadro 4.3). Por lo tanto, el umbral de perdida de momento angular es sobrepasado por la segunda binaria para una circulación de  $3.4\pi$ , pero no para una circulación de  $3.6\pi$ . Precisamente este caso corresponde al de mayor eficiencia, ya que solo en forma de radiación gravitacional emitiría durante la fase de amortiguamiento un 0.79 % de su energía total inicial.

Por otra parte, si bien para una circulación de  $3.6\pi$  se obtienen los casos de menor eficiencia en emisión de ondas gravitacionales, sus valores de perdida de momento angular si se encuentran por debajo del umbral permitido por el modelo de leyes cuasiuniversales, siendo la mayor eficiencia de aproximadamente 0.58 %. Es decir a la segunda binaria, con circulación  $\bar{C} = 3.6\pi$  (dentro del umbral permitido), le corresponde una perdida de energía por emisión de ondas gravitacionales de aproximadamente  $\Delta E_2 = 0.0162 M_\odot c^2 = 2.911 \times 10^{52} [ergs]$ , mientras que a la primera binaria, también con  $\bar{C} = 3.6\pi$  le corresponde una pérdida de energía de  $\Delta E_1 = 5.572 \times 10^{51} [ergs]$ . Estos resultados demuestran que, aunque actualmente no hay métodos directos para medir la circulación del remanente, es posible estimar valores factibles gracias a la aplicación de las relaciones cuasi-universales. Sin embargo, cabe aclarar que un posible rango de valores a tomar de la circulación no es algo genérico, ya que depende de la masa y radio de cada posible estrella remanente, así como de la E.O.S para el sistema binario.

En la fase de inmersión, el sistema radia energía en forma de ondas gravitacionales dada por la ecuación (2.4.3). Para el primer sistema binario (con  $\bar{C} = 3.6\pi$ )  $E_{GW}^{insp(1)} \approx 8.295 \times 10^{52} [ergs]$ , y para el segundo sistema binario,  $E_{GW}^{insp(2)} \approx 7.044 \times 10^{52} [ergs]$ . Por lo tanto, el aporte energético total por emisión de ondas gravitacionales corresponde para la primera binaria a  $E_{GW}^{(1)} = E_{GW}^{insp(1)} + E_{GW}^{pm(1)} \approx (8.295 + 0.557) \times 10^{52} [ergs] \approx 8.852 \times 10^{52} [ergs]$  y para la segunda binaria a  $E_{GW}^{(2)} = E_{GW}^{insp(2)} + E_{GW}^{pm(2)} \approx (7.044 + 2.911) \times 10^{52} [ergs] = 9.955 \times 10^{52} [ergs]$ . Estos valores están aproximadamente en el orden de  $\sim 10^{53} [erg]$  lo cual si bien representan una alta emisión en ondas gravitacionales, no necesariamente llegaría a explicar el por qué se midió tan poca energía en otros canales de emisión en GW170817. Como se presentó anteriormente, la perdida de energía total del sistema (por el defecto de masa) se estima aproximadamente entre  $2.03 \times 10^{53}$  y  $2.62 \times 10^{53} [erg]$ .



Combinando estos resultados con los presentados en la subsección anterior se obtiene que, en el caso ideal en el que no se forma disco, el defecto en la masa de ambas binarias (el cual es máximo) corresponde a  $\Delta M_{(1)}c^2 = 0.1454M_{\odot}c^2 = 2.6135 \times 10^{53}[\text{ergs}]$  y  $\Delta M_{(2)}c^2 = 0.1437M_{\odot}c^2 = 2.5830 \times 10^{53}[\text{ergs}]$ , (ver cuadro 4.2). Esto implica que  $E_{\text{other}}^{(1)} = \Delta M_{(1)}c^2 - E_{\text{GW}}^{(1)} \approx 1.728 \times 10^{53}[\text{ergs}]$  y  $E_{\text{other}}^{(2)} = \Delta M_{(2)}c^2 - E_{\text{GW}}^{(2)} \approx 1.588 \times 10^{53}[\text{ergs}]$ . Pero los máximos valores en otras formas de energía corresponden al caso de máxima masa del disco, que para este par de binarias corresponden, según el cuadro 4.1, a:  $E_{\text{other}}^{(2)} = 0.1128M_{\odot}c^2 = 2.027 \times 10^{53}[\text{ergs}]$  y  $E_{\text{other}}^{(1)} = 0.1296M_{\odot}c^2 = 2.329 \times 10^{53}[\text{ergs}]$ .

Todo lo anterior implica que al modelar GW170817 con la primera binaria, cuya E.O.S es EL3, se obtiene:  $0 < E_{\text{GW}}^{(1)} \lesssim 8.852 \times 10^{52}[\text{ergs}]$  y  $1.728 \times 10^{53} \lesssim E_{\text{other}}^{(1)} < 2.329 \times 10^{53}[\text{ergs}]$ . Mientras que, al modelar el evento con la segunda binaria, cuya E.O.S es TM1, se obtiene:  $0 < E_{\text{GW}}^{(2)} \lesssim 9.955 \times 10^{52}[\text{ergs}]$  y  $1.588 \times 10^{53} \lesssim E_{\text{other}}^{(2)} < 2.027 \times 10^{53}[\text{ergs}]$ .

Se determina el cambio en la frecuencia de las ondas gravitacionales respecto al tiempo en función de la frecuencia misma, cuyo resultado se precia en la figura 24. Aunque el caso de la segunda binaria, cuya circulación es  $\bar{C} = 3.4\pi$  y E.O.S TM1, se descarta por las cotas impuestas por el modelo de relaciones cuasi-universales, se continua analizando sus demás resultados para determinar que tanto varían de no utilizar tales cotas. Se aprecia en estos resultados que el valor máximo en la tasa de cambio respecto al tiempo de la frecuencia de las ondas para el caso de menor circulación es mayor al caso de mayor circulación, resultado consistente con lo visto anteriormente en la figura 21. A cada circulación le corresponden dos y no una curva, ya que al devolver las normalizaciones influyen el valor de las masas y radios de cada estrella remanente. También se aprecia que  $\frac{df_{\text{gw}}}{dt} \geq 0$ , lo cual predice un comportamiento de espín-up.

Con base en el anterior resultado se determina el comportamiento de la frecuencia de las ondas gravitacionales respecto al tiempo, el cual se aprecia en la figura 25. La emisión durante la fase de amortiguamiento ocurre en el rango de los kilo Hertz, aproximadamente ente 1450 y 1700  $\text{Hz}$ , y en un tiempo en el orden de las centésimas de segundos, aproximadamente entre 0.025 y 0.035  $\text{seg}$ . Esto es consistente con la no detección por parte de los observatorios LIGO y Virgo de la señal gravitacional del objeto postfusión [4], ya que emite en un rango superior al de funcionamiento óptimo de estos detectores (más de 1000  $\text{Hz}$ ).

Por otra parte, el comportamiento de la amplitud y tiempo característico de estas ondas se aprecia en la figura 26, donde según estos datos a menor circulación mayor la amplitud de las ondas gravitacionales, como era de esperarse. También, conforme el sistema se acerca a la frecuencia máxima para las ondas gravitacionales, el tiempo característico crece abruptamente, ya que se acerca a la fase de objeto final, que no emite radiación gravitacional.

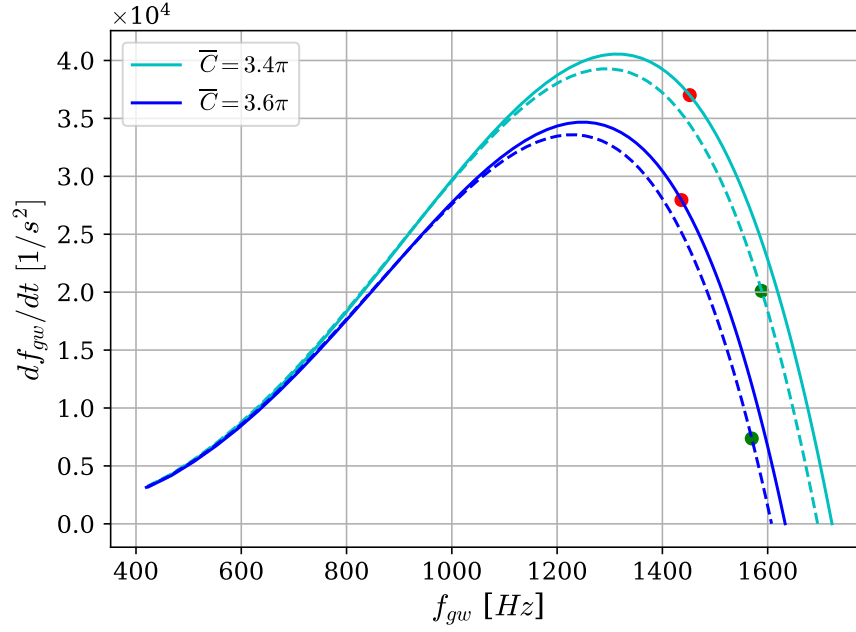


Figura 24: Secuencias de equilibrio, para distintos valores de la circulación y  $n = 1$ , en donde se relaciona la frecuencia de las ondas gravitacionales y el tiempo de emisión. Los puntos sobre las secuencias de equilibrio hacen referencia a los datos iniciales con base en los valores de  $\bar{J}_1$  (verde) y  $\bar{J}_2$  (rojo).

### 4.3. Detectabilidad del objeto postfusión.

La detección de ondas gravitacionales requiere separar la señal física del ruido instrumental. La señal medida  $h(t)$  por un detector de ondas gravitacionales proyecta las componentes del tensor métrico  $h_{ij}(t)$  según su geometría:

$$h(t) = \mathcal{D}^{ij} h_{ij}(t) = F_+ h_+ + F_\times h_\times, \quad (4.3.1)$$

donde  $\mathcal{D}^{ij}$  es el tensor de respuesta del detector [20], y  $F_+$ ,  $F_\times$  son los patrones de antena que determinan la sensibilidad del detector a cada polarización [50]. En un sistema lineal, en el dominio espectral, la salida del detector se relaciona con la entrada mediante:

$$\tilde{h}_{out}(f) = \mathcal{T}(f) \tilde{h}(f), \quad (4.3.2)$$

donde  $\mathcal{T}(f)$  es la función de transferencia del sistema. Esta función describe cómo se modifica la señal de entrada en función de la frecuencia. Sin embargo, en un detector real siempre hay ruido presente. El ruido instrumental  $n(t)$  se modela como un proceso gaussiano estacionario con estadística:

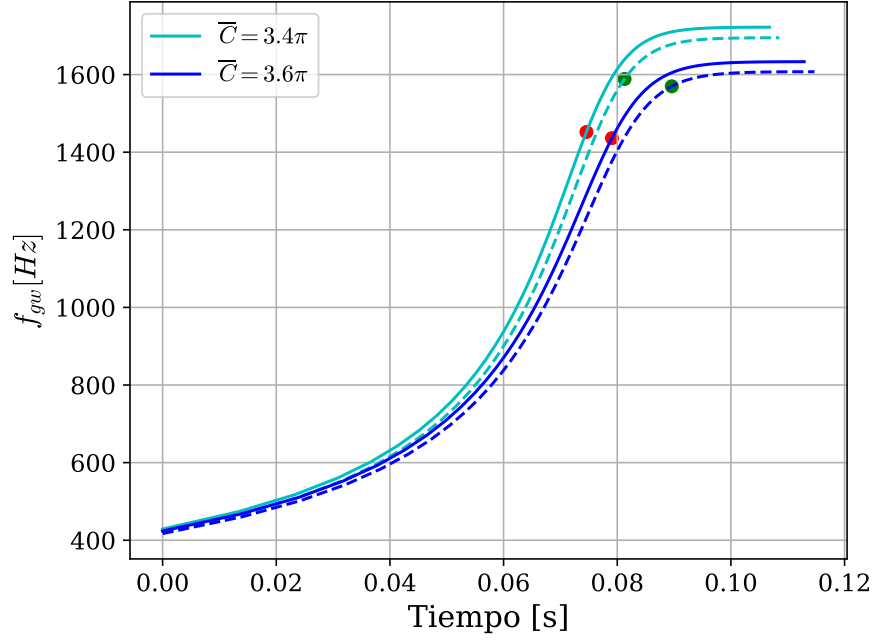


Figura 25: Secuencias de equilibrio, para distintos valores de la circulación y  $n = 1$ , en donde se relaciona la frecuencia de las ondas gravitacionales y el tiempo de emisión. Los puntos sobre las secuencias de equilibrio hacen referencia a los datos iniciales con base en los valores de  $\bar{J}_1$  (**verde**) y  $\bar{J}_2$  (**rojo**).

$$\langle \tilde{n}(f) \tilde{n}^*(f') \rangle = \frac{1}{2} \delta(f - f') S_n(f), \quad (4.3.3)$$

donde  $S_n(f)$  representa la densidad espectral de potencia del ruido. Esto implica que la estadística del ruido no cambia con el tiempo y que su comportamiento puede describirse a través de la función de correlación [20]. Para maximizar la razón señal-ruido (SNR), se emplea un filtro adaptado cuya forma en frecuencia es:

$$\tilde{M}(f) = cte \times \frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)}. \quad (4.3.4)$$

La constante es arbitraria, ya que no afecta el cociente señal-ruido. El SNR teórico máximo alcanzable está dado por:

$$\begin{aligned} \left( \frac{S}{N} \right)^2 &= 4 \int_0^\infty \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df. \\ \left( \frac{S}{N} \right)^2 &= 4 \int_0^\infty \frac{|F_+ \tilde{h}_+(f) + F_\times \tilde{h}_\times(f)|^2}{S_n(f)} df. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

### 4.3. DETECTABILIDAD DEL OBJETO POSTFUSIÓN.

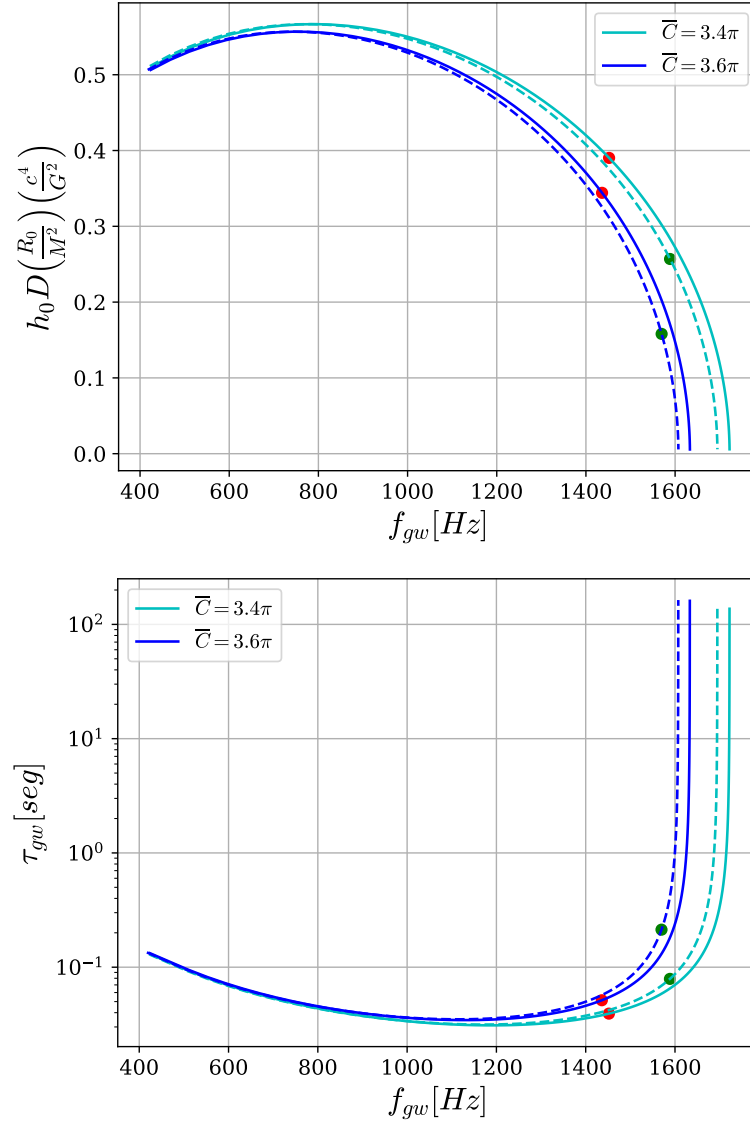


Figura 26: Secuencias de equilibrio, para distintos valores de circulación, en donde se relaciona la amplitud y el tiempo característico de las ondas gravitacionales con la frecuencia de las mismas, para GW170817 con  $n = 1$ .

La orientación y localización de la fuente no se conocen, por lo que la SNR se promedia para evaluar la detectabilidad. Los promedios de las funciones patrón del detector satisfacen:  $\langle F_+^2 \rangle = \langle F_\times^2 \rangle$  y  $\langle F_+ F_\times \rangle = 0$ , por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \left( \frac{S}{N} \right)^2 \right\rangle &= 4 \langle F_+^2 \rangle \int_0^\infty \frac{\langle |\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2 \rangle}{S_n(f)} df \\
 &= 4 \langle F_+^2 \rangle \int_0^\infty \frac{\langle |\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2 \rangle}{f S_n(f)} f^2 \frac{df}{f}.
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Esta última expresión permite definir la amplitud característica, sin dimensiones, de las ondas gravitacionales:

$$h_c \equiv \sqrt{\langle F_+^2 \rangle (\langle |\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2 \rangle) f}. \tag{4.3.7}$$

Siguiendo la Ref. [51], y a partir de la ecuación (1.4.6), esta última expresión está dada en términos del cambio en la energía de las ondas gravitacionales respecto a la frecuencia:

$$\frac{G}{4\pi D^2 c^3} \frac{dE_{gw}}{df} = \frac{\pi}{2} f^2 (\langle |\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2 \rangle). \tag{4.3.8}$$

Por lo tanto, la amplitud característica  $h_c$  corresponde a:

$$h_c(f) = \frac{1}{\pi D} \sqrt{\frac{\langle F_+^2 \rangle}{2} \frac{G}{c^3} \frac{dE_{gw}}{df}}, \tag{4.3.9}$$

donde  $\langle F_+^2 \rangle = 1/5$ , en el caso en el que el detector sea un interferómetro [21]. Este resultado permite cuantificar la detectabilidad de una señal gravitacional en presencia de ruido instrumental. También según la Ref. [41], esta amplitud característica puede ser obtenida por medio de un ajuste dado por la siguiente expresión:

$$h_c \simeq 9.1 \times 10^{-21} \left( \frac{30 \text{ Mpc}}{D} \right) M_{1.4}^{3/4} R_{10}^{1/4} f^{-1/5}, \tag{4.3.10}$$

donde la masa y radios de la estrella están normalizados por  $1.4M_\odot$  y  $10km$ , respectivamente y la distancia a la fuente debe estar en Mpc. Esta expresión es aproximadamente válida para cualquier valor de circulación e índice  $n$ .

Para el estudio de la señal de la onda gravitacional emitida por el objeto postfusión se selecciona solo una de las 3 posibles secuencias de evolución del elipsoide, correspondiente a la primera binaria, cuya E.O.S es EL3 y circulación  $\bar{C} = 3.4\pi$ . Se selecciona esta binaria ya que se encuentra en el umbral de pérdida de momento angular permitido, y su E.O.S, EL3, es la más adecuada al considerar el rango para los radios de las estrellas impuesto por la Ref. [49]. Esta binaria en particular prevee una frecuencia máxima durante la fase de inmersión de aproximadamente  $1187 \text{ Hz}$ , y si se considera

### 4.3. DETECTABILIDAD DEL OBJETO POSTFUSIÓN.

la emisión gravitacional tanto de la fase de inmersión como de amortiguamiento, posee una emisión gravitacional neta de  $9.84 \times 10^{52} \text{erg}$ . Por lo tanto, le corresponde una eficiencia neta del 2 %, donde un 0.32 % viene de la fase de amortiguamiento (ver cuadro 4.4) y el resto viene de la fase de inmersión. A partir de la ecuación (4.3.9) y de los datos liberados por el observatorio LIGO, respecto a la sensibilidad de sus detectores y la señal gravitacional de GW170817, se obtienen los resultados presentes en la figura 27. Estos resultados muestran que la señal del objeto postfusión, asociado al evento GW170817, no fue detectada debido a que emitió en un rango de frecuencias muy alto, aproximadamente entre 1450 y 1700  $\text{Hz}$ , y entonces la amplitud  $h_c$  se encuentra muy cercano al ruido de los detectores L1 y H1. Al sobre estimar el valor esperado de la razón señal ruido, SNR, esta es del orden de  $\sim 4$ . También se aprecia que un futuro proyecto como el telescopio Einstein podría llegar a detectar este tipo de señales, ya que tiene más sensibilidad a altas frecuencias que el observatorio LIGO.

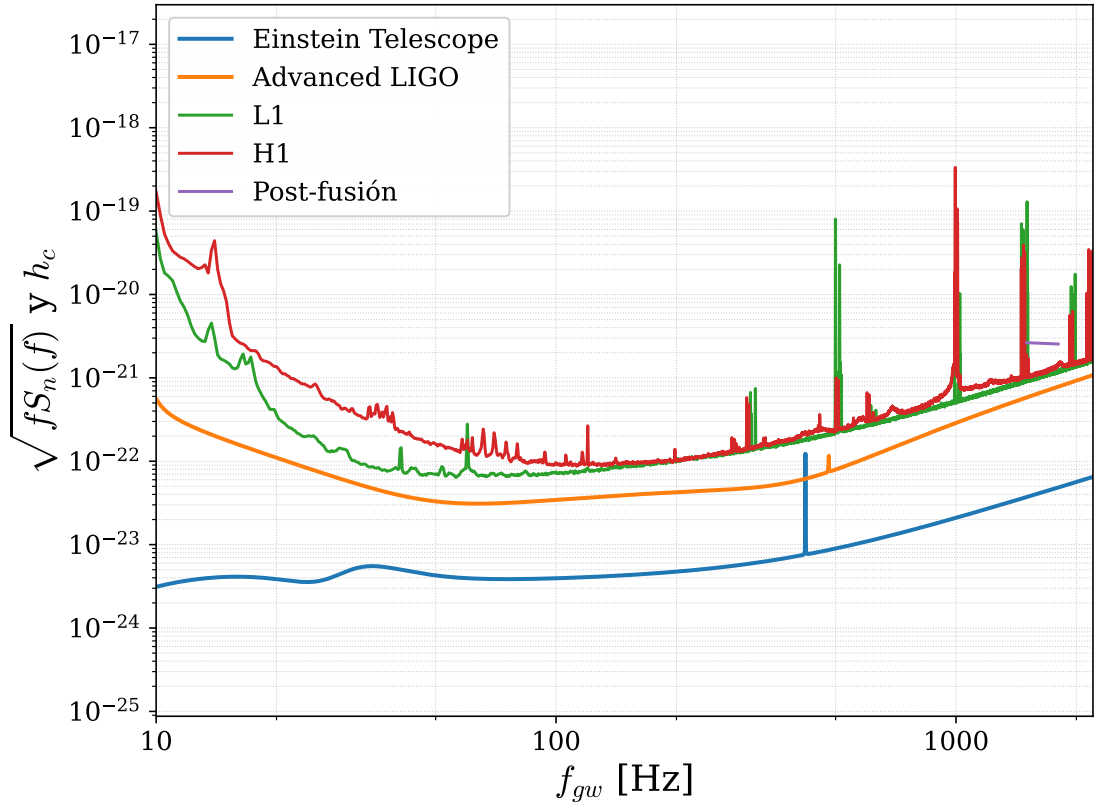


Figura 27: Ruido de los detectores L1 y H1 del observatorio Advanced LIGO. Las curvas naranja y azul muestran la sensibilidad teórica de este detector y la que se espera que tenga el telescopio Einstein, respectivamente. La amplitud característica predicha por el modelo de elipsoides de Riemann-S,  $h_c$ , corresponde a la curva morada.

En síntesis, a partir de los modelos presentes en este capítulo, aplicados al objeto postfusión en el evento GW170817, se obtienen los siguientes resultados y conclusiones:

- Al modelar la evolución del objeto postfusión a lo largo de secuencias de Riemann-S, calculando las pérdidas de energía y momento angular durante la fase de amortiguamiento por radiación gravitacional, se determina que: La eficiencia en la emisión de estas ondas depende fuertemente del valor de la circulación  $\bar{C}$ , así como de la compacidad del objeto final.
- Para valores altos de circulación ( $\bar{C} = 3.6\pi$ ), las pérdidas de momento angular están dentro del umbral permitido por las relaciones cuasi-universales, lo cual valida físicamente estas configuraciones. Las eficiencias energéticas *durante la fase de amortiguamiento* alcanzan hasta un 0.58 % de la energía inicial. En contraste, para el caso de la segunda binaria con E.O.S TM1, se observa que valores bajos de circulación ( $\bar{C} = 3.4\pi$ ) producen pérdidas de momento angular que exceden los límites permitidos por las leyes de conservación. Ciertamente este caso corresponde al de mayor eficiencia en emisión de ondas gravitacionales durante la fase de amortiguamiento, alrededor de un 0.79 %.
- La energía total emitida en ondas gravitacionales, para los sistemas dentro del umbral permitido, estuvo en el orden de  $\sim 10^{53}$  erg, comparable a la pérdida de energía total del sistema por defecto de masa,  $\sim 2.5 \times 10^{53}$  erg. Pero no lo suficiente para explicar por qué se midió tan poca energía en otros canales, como los rayos gamma ( $\sim 10^{46}$  ergios).
- Las frecuencias de las ondas gravitacionales emitidas por el objeto postfusión están en el rango de los kilohercios (entre 1450 y 1700  $Hz$ ), con duraciones temporales del orden de centésimas de segundo, entre 0.025 y 0.035 seg, mostrando un comportamiento de espín-up (aumento de frecuencia con el tiempo).
- La amplitud de las ondas gravitacionales es mayor para menores circulaciones, así como las frecuencias de las ondas durante la fase de amortiguamiento.
- Aunque no existen métodos directos para medir la circulación de un remanente, este estudio muestra que es posible restringir sus valores utilizando leyes de conservación, y así obtener predicciones físicamente consistentes para la evolución del objeto postfusión. Sin embargo, no hay un rango general de circulaciones válidas ya que depende de la E.O.S que se esté empleando.
- Según el modelo de elipsoides de Riemann-S, la señal del objeto postfusión no es detectable por el observatorio LIGO. Esto se debe a que el objeto emite en un rango de frecuencias muy alto, entre 1450 y 1700  $Hz$ , por lo cual  $h_c$  se encuentra muy cercano al ruido de los detectores L1 y H1, y sobre estimando el valor esperado de la razón señal ruido es del orden de  $\sim 4$ , pero se requiere que sea superior a 8 para poder detectar la señal.

---

# CAPÍTULO V

---

## Discusión y conclusiones

Este estudio sobre la fusión de sistemas binarios y la correspondiente emisión de ondas gravitacionales permite caracterizar el comportamiento del remanente postfusión de una binaria de estrellas de neutrones y su detectabilidad, con aplicación al evento GW170817. Se determina que los sistemas binarios de estrellas de neutrones, si bien emiten una alta cantidad de energía en forma de radiación gravitacional  $\sim 10^{53}$  erg, con una eficiencia neta de aproximadamente 2 %, no es tan alta en contraste con la prevista en la Ref. [1], mayor al 5 %. Esto se debe a que aquel estudio considera que las estrellas durante la fase de inmersión tenían la misma frecuencia angular de rotación que la frecuencia orbital, lo cual implicaría una mayor emisión en ondas gravitacionales, pero no hay un sustento físico claro para suponer ese comportamiento. Adicionalmente, según la Ref. [3], el espín observado de las componentes estelares es despreciable. Y según simulaciones numéricas presentes en la literatura, la fusión de binarias de neutrones no debería tener eficiencia neta emitiendo radiación gravitacional superior al 4.5 % [52].

Con respecto al objeto postfusión de GW170817, modelado como un elipsoide de Riemann-S, se determina que el ancho de banda de emisión de las ondas gravitacionales se encuentra en el rango de los kilohercios, aproximadamente entre 1450 y 1700  $Hz$ , con tiempos de emisión durante la fase de amortiguamiento del orden de centésimas de segundo, aproximadamente entre 0.025 y 0.035 *seg*. Por lo tanto, según el modelo de elipsoides de Riemann-S, el objeto postfusión asociado a GW170817 no se detectó porque de facto no era detectable, ya que la señal se salía del ancho de banda de funcionamiento óptimo del observatorio LIGO [6]. No obstante, futuros proyectos como el telescopio Einstein podrían llegar a detectar eventos de este tipo, ya que operan de manera más óptima y con mayor sensibilidad en el rango de los kilohercios [53].

Durante la fase de amortiguamiento se observa un comportamiento de espín-up, es decir, un aumento progresivo de la frecuencia con el tiempo. Esto se debe a que conforme el sistema emite ondas gravitacionales, se vuelve simétrico respecto al eje de rotación, por lo tanto disminuye su momento de inercia de tal manera que aún perdiendo energía logra continuar en aumento la frecuencia de las ondas. Se determina que tanto la amplitud, como la frecuencia de las ondas gravitacionales, son mayores para menores valores de circulación. Aunque no existen métodos directos para medir la circulación de un remanente, es posible restringir sus valores utilizando leyes de conservación, para



así poder obtener soluciones físicamente consistentes. Sin embargo, no hay un rango genérico de valores válidos para la circulación, ya que depende de la E.O.S.

Los modelos de leyes de conservación y elipsoides de Riemann-S sugieren que el remanente pudo haber sido una estrella de neutrones con rotación rápida y una alta emisión de energía en forma de ondas gravitacionales,  $\sim 10^{53}[\text{erg}]$ , aunque no necesariamente suficiente para explicar por completo la baja energía detectada en otros canales de emisión, como los estallidos de rayos gamma  $\sim 10^{46}[\text{erg}]$ , ya que la pérdida de energía total por defecto de masa se estima en aproximadamente  $2.5 \times 10^{53}[\text{erg}]$ . Este estallido de rayos gamma corto, GRB170817A, es a la fecha el estallido más tenue de su clase observado [54]. Según esta última referencia la baja energía de GRB170817A se explica principalmente porque el chorro de radiación no apuntaba directamente hacia la Tierra, y en lugar del chorro principal de rayos gamma, se observó la emisión débil de sus estructuras laterales, combinada con una kilonova térmica. Cabe destacar que, debido a la dependencia del remanente central con la ecuación de estado de las estrellas progenitoras, no se descarta la posibilidad de que el remanente haya colapsado en un agujero negro. Al suponer una estrella de neutrones de rápida rotación como objeto postfusión, esta habría evolucionado a lo largo de una secuencia de equilibrio de Riemann-S hasta llegar a un objeto final de configuración esferoidal, la cual no emite ondas gravitacionales por ser axialmente simétrico.

Se determina también que, a menor masa del disco de acreción alrededor del remanente estelar, mayor es la pérdida de momento angular y, por lo tanto, mayor la eficiencia en la emisión de ondas gravitacionales. Además, el valor de la circulación del remanente restringe el punto de inicio en la secuencia evolutiva del objeto remanente. Las limitaciones de este estudio se encuentran alrededor de la fase de fusión, la cual no se considera debido a su corto lapso de tiempo y baja emisión en radiación gravitacional, según simulaciones de relatividad numérica presentes en la literatura [27]. No obstante, es una fase importante, ya que es el puente entre la fase de inmersión y la fase de amortiguamiento, y puede influir en como se describen las frecuencias de las ondas gravitacionales de manera continua, además, la pérdida de momento angular durante la fase de fusión influye en el punto de inicio que se selecciona durante la evolución de la fase de amortiguamiento. Tampoco se considera la variación relativista de la masa del objeto remanente, lo cual permitiría una descripción más clara de la dinámica de la fuente. En conjunto, estos resultados refuerzan la relevancia de los modelos semi-analíticos como complemento a las simulaciones numéricas, contribuyendo a una mejor interpretación de futuras observaciones.

# Apéndices

---

# APÉNDICE A

---

## Radiación de ondas gravitacionales

Este apéndice muestra la derivación de formulas relacionadas con la perturbación de la métrica y la radiación de ondas gravitacionales de fuentes no relativistas. Primero se retoma la ecuación (1.2.4), se pasa al gauge (TT) y se resuelve la ecuación tensorial usando la función de Green de la versión escalar de tal ecuación [20]:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{kl}(t_{ret}, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (\text{A.1})$$

donde  $t_{ret} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$ ,  $\mathbf{x}$  es el vector posición en donde se quiere evaluar la perturbación  $h_{ij}^{TT}$ , mientras que  $\mathbf{x}'$  denota la posición de la fuente (ver figura 28). Al aplicar la aproximación de fuentes de campo débil i.e.  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = D \left(1 - \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{n}}{D} + \mathcal{O}(\frac{x'^2}{D^2})\right)$ , con  $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|$ , la ecuación queda de la siguiente manera:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{Dc^4} \Lambda_{ij,kl} \int T_{kl}\left(t - \frac{D}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \mathbf{x}'\right) d^3x'. \quad (\text{A.2})$$

En el denominador, el término aproximado de  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  solo introduce una pequeña variación global en la amplitud, por lo que no es necesario incluir términos de orden  $\mathcal{O}(r'/D)$ , se aproxima a la distancia  $D$ . En el tiempo retardado el término a primer orden sí afecta directamente la fase de la radiación, por lo que no se puede despreciar i.e.  $T_{kl}(t_{ret}, \mathbf{x}') = T_{kl}\left(t - \frac{D}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \mathbf{x}'\right)$ .

Por otra parte, cuando las velocidades de la fuente no son relativistas,  $v \ll c$ , de tal manera que la longitud de las ondas gravitacionales  $\lambda$  son mayores a una longitud característica de la fuente  $d$ ,  $\lambda \gg d$ , se puede aplicar la expansión a bajas velocidades. Por lo cual, el tensor energía impulso  $T_{kl}$  se puede expresar en términos de sus componentes de fourier, donde  $\tilde{T}_{kl}$  sería un pico, de frecuencia  $\omega_s$ , rodeado de demás frecuencias con  $\omega_s d \ll c$ :

$$T_{kl}\left(t - \frac{D}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \mathbf{x}'\right) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{T}_{kl}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega(t - \frac{D}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{n}}{c})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}. \quad (\text{A.3})$$

La aproximación de bajas velocidades en la fuente implica que  $\frac{\omega_s d}{c} \ll 1$  y como  $\mathbf{x}' \cdot \hat{n} \leq d$ ,

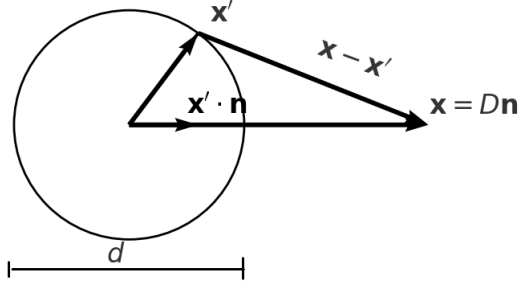


Figura 28: Ilustración gráfica de la relación entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$ , donde  $D$  corresponde a la distancia al punto donde se evalúa la perturbación  $h_{ij}^{TT}$  y  $d$  corresponde a una longitud característica de la fuente.

entonces  $\frac{\omega_s}{c} \mathbf{x}' \cdot \hat{n} \leq \frac{\omega_s d}{c} \ll 1$ , por lo tanto al expandir se obtiene:

$$e^{-i\omega\left(t - \frac{D}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{n}}{c}\right)} = e^{-i\omega\left(t - \frac{D}{c}\right)} \left(1 - \frac{i\omega}{c} x'^i n^i + \frac{1}{2} \left(\frac{-i\omega}{c}\right)^2 x'^i x'^j n^i n^j + \dots\right), \quad (\text{A.4})$$

lo cual es equivalente a expandir el tensor energía impulso como una serie de Taylor en el dominio temporal:

$$T_{kl} \left(t - \frac{D}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \mathbf{x}'\right) \approx \left(T_{kl}|_{(t - \frac{D}{c}, \mathbf{x}')} + \frac{x'^i n^i}{c} \partial_t T_{kl} + \frac{x'^i x'^j n^i n^j}{2c^2} \partial_t^2 T_{kl} + \dots\right), \quad (\text{A.5})$$

donde las derivadas son evaluadas en  $(t - \frac{D}{c}, \mathbf{x}')$ . Se reemplaza en (A.2) y se obtiene que:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{Dc^4} \Lambda_{ij,kl} \left(S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{n_m n_p}{2c^2} \ddot{S}^{kl,mp} + \dots\right), \quad (\text{A.6})$$

donde los nuevos términos que aparecen entre paréntesis corresponden a los siguientes momentos:

$$\begin{aligned} S^{ij}(t) &= \int d^3 x' T^{ij}(t, \mathbf{x}') \\ S^{ij,k}(t) &= \int d^3 x' T^{ij}(t, \mathbf{x}') x'^k \\ S^{ij,kl}(t) &= \int d^3 x' T^{ij}(t, \mathbf{x}') x'^k x'^l. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Análogamente también se definen los siguientes momentos

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{c^2} \int d^3x' T^{00}(t, \mathbf{x}'), \\
 M^i &= \frac{1}{c^2} \int d^3x' T^{00}(t, \mathbf{x}') x'^i, \\
 M^{ij} &= \frac{1}{c^2} \int d^3x' T^{00}(t, \mathbf{x}') x'^i x'^j, \\
 P^i &= \frac{1}{c} \int d^3x' T^{0i}(t, \mathbf{x}'), \\
 P^{i,j} &= \frac{1}{c} \int d^3x' T^{0i}(t, \mathbf{x}') x'^j.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Al aplicar la conservación del tensor energía-impulso, conservación de la masa y conservación del momento total se obtiene:  $\partial_0 T^{00} = \frac{1}{c} \partial_t T^{00} = -\partial_i T^{0i}$ ,  $\dot{M} = c \partial_0 M = 0$ ,  $\dot{P}^i = 0$ , considerando los anteriores resultados, se puede demostrar qué [20]:

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij}. \tag{A.9}$$

## A.1. Radiación de cuadrupolo

En la expresión (A.6) se aprecia que el primer término es aquel que más aporta al tensor  $h_{ij}^{TT}$ , por lo cual si se toma en cuenta solo el aporte del primer término, y se considera la relación (A.9), se obtiene:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) \Big|_{\text{cuad}} = \frac{2G}{Dc^4} \Lambda_{ij,kl} \ddot{M}^{kl}(t - D/c). \tag{A.10}$$

El momento de masa  $M^{kl}$  por definición es simétrico, entonces se puede representar de la siguiente manera:

$$M^{kl} = \left( M^{kl} - \frac{1}{3} \delta^{kl} M_{ii} \right) + \frac{1}{3} \delta^{kl} M_{ii}, \tag{A.11}$$

donde el primer término sería aquel sin traza. Obsérvese que la contracción  $\Lambda_{ij,kl} \delta^{kl} = 0$ , por lo tanto, el tratamiento de las ecuaciones puede continuar correctamente, únicamente considerando el término sin traza, el cual se denomina momento cuadrupolar:

$$Q^{ij} = M^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} M_{kk} = \int d^3x' \rho(t, \mathbf{x}') \left( x'^i x'^j - \frac{1}{3} x'^2 \delta^{ij} \right), \tag{A.12}$$

donde  $\rho(t, \mathbf{x}') = \frac{1}{c^2} T^{00}$ . Al definir  $\ddot{Q}_{ij}^{TT}(t - D/c) \equiv \Lambda_{ij,kl} \ddot{Q}_{kl}(t - D/c)$  entonces la expresión final es la siguiente:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) \Big|_{\text{cuad}} = \frac{2G}{Dc^4} \Lambda_{ij,kl} \ddot{Q}^{kl}(t - D/c). \quad (\text{A.13})$$

Esta expresión corresponde a la aproximación cuadrupolar de la radiación de ondas gravitacionales. Se halla la energía radiada a partir de la última expresión, y considerando la ecuación de la luminosidad de las ondas gravitacionales (1.4.6):

$$L_{(GW)} = \frac{dE}{dt} = \frac{c^3 D^2}{32\pi G D^2 c^8} \int d\Omega \langle \Lambda_{ij,mn} \Lambda_{ij,kl} \ddot{Q}_{mn} \ddot{Q}_{kl} \rangle, \quad (\text{A.14})$$

al aplicar la siguiente propiedad  $\Lambda_{ij,mn} \Lambda_{ij,kl} = \Lambda_{kl,mn}$  e integrar sobre toda la superficie esférica de radio  $D$ , se obtiene  $\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15} (11\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ , por lo tanto, la luminosidad es:

$$L_{(GW)} \Big|_{\text{cuad}} = \frac{G}{60c^5} (11\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle - 4\langle \ddot{Q}_{ii} \ddot{Q}_{kk} \rangle + \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle), \quad (\text{A.15})$$

$$L_{(GW)} \Big|_{\text{cuad}} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle. \quad (\text{A.16})$$

Cabe recordar que el valor esperado corresponde a un promedio temporal sobre periodos característicos de las ondas gravitacionales y evaluado en  $t - D/c$ .

## A.2. Emisión gravitacional de una binaria

En esta sección se presenta el desarrollo matemático para determinar la radiación gravitacional de un sistema binario de masas puntuales (ver figura 2). Tomando las ecuaciones de la órbita parametrizada (1.5.4), y utilizando la expresión para el segundo momento de masa (A.8), se obtiene que para un sistema binario de masas puntuales  $M^{ij}$  corresponde a:

$$M^{ij} = m_1 x_1^i x_1^j + m_2 x_2^i x_2^j = m_{\text{tot}} x_{CM}^i x_{CM}^j + \mu (x_{CM}^i x_0^j + x_{CM}^j x_0^i) + \mu x_0^i x_0^j, \quad (\text{A.17})$$

donde  $x_{CM}^i$  denota la posición del centro de masa. Por lo tanto, en el marco del centro de masa (CM), el segundo momento de masa está dado por:

$$M^{ij} = \mu x_0^i(t) x_0^j(t) \quad (\text{A.18})$$

por lo que las componentes son:

$$\begin{aligned}
 M^{11} &= \mu r_{sep}^2 \frac{1 - \cos(2\Omega_s t)}{2}, \\
 M^{22} &= \mu r_{sep}^2 \frac{1 + \cos(2\Omega_s t)}{2}, \\
 M^{12} &= -\frac{1}{2} \mu r_{sep}^2 \sin(2\Omega_s t).
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Las segundas derivadas temporales están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \ddot{M}^{11} &= -\ddot{M}^{22} = 2\mu r_{sep}^2 \Omega_s^2 \cos(2\Omega_s t) \\
 \ddot{M}^{12} &= 2\mu r_{sep}^2 \Omega_s^2 \sin(2\Omega_s t).
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

A partir de la expresión (A.13) las polarizaciones de una onda gravitacional que viaja en dirección  $\hat{n} = \hat{z}$  están dadas por [20]:

$$\begin{aligned}
 h_+(t, \hat{z}) &= \frac{1}{D} \frac{G}{c^4} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}) \\
 h_x(t, \hat{z}) &= \frac{2}{D} \frac{G}{c^4} \ddot{M}_{12},
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

mientras que en caso de que la onda gravitacional viaje en dirección  $\hat{n}$  arbitraria (ver figura 29) las polarizaciones de la onda gravitacional están dadas por:

$$\begin{aligned}
 h_+(t, \hat{n}) &= \frac{1}{D} \frac{G}{c^4} (\ddot{M}'_{11} - \ddot{M}'_{22}) \\
 h_x(t, \hat{n}) &= \frac{2}{D} \frac{G}{c^4} \ddot{M}'_{12},
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

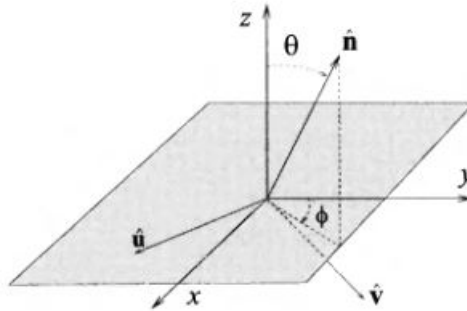


Figura 29: En esta figura se supone un marco de referencia (x,y,z) que se encuentra en la fuente, en el cual una onda gravitacional se propaga en una dirección arbitraria  $\hat{n}$ , y el observador se encuentra sobre el eje  $\hat{z}$  (tomado de [20]).

donde el símbolo prima hace referencia a  $M'_{ij} = (\mathcal{R}^T M \mathcal{R})_{ij}$ , siendo  $\mathcal{R}$  la matriz de rotación a emplear en esta situación, más detalles en [20]. Desde el punto de vista

### A.3. EMISIÓN GRAVITACIONAL DE UN OBJETO TRIAXIAL ROTANTE

observacional, solo hay acceso a la radiación que una estrella binaria emite en la dirección que apunta desde el sistema binario hacia nosotros. Por lo tanto, el ángulo  $\theta$  es igual al ángulo entre la normal a la órbita y la línea de visión,  $\iota$  (ver Figura 29). Dicho lo anterior, ya se pueden determinar las polarizaciones de la onda gravitacional reemplazando las segundas derivadas temporales de los segundos momentos en la masa, y considerando la matriz de rotación:

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{1}{D} \frac{4G\mu\Omega_s^2 r_{sep}^2}{c^4} \left( \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right) \cos(2\Omega_s t) \\ h_x(t) &= \frac{1}{D} \frac{4G\mu\Omega_s^2 r_{sep}^2}{c^4} \cos(\theta) \sin(2\Omega_s t) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

### A.3. Emisión gravitacional de un objeto triaxial rotante

En esta sección se presenta el desarrollo matemático para determinar la radiación gravitacional de un objeto triaxial rotante (ver figura 3). Se denota  $\mathcal{I}'_{ij} = \text{diag}(\mathcal{I}'_1, \mathcal{I}'_2, \mathcal{I}'_3)$ , el tensor de inercia en el sistema coordenado  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , y  $\mathcal{I}_{ij}$ , en el sistema  $(x_1, x_2, x_3)$ , es decir en los marcos de referencia co-rotante con el objeto y estático respectivamente. Evidentemente,  $\mathcal{I}'_{ij}$  es una matriz constante, mientras que  $\mathcal{I}_{ij}$  es dependiente del tiempo y se define de la siguiente manera [55]:

$$\mathcal{I}_{ij} = \int d^3\mathbf{x} \rho(t, \mathbf{x}) (x^2 \delta^{ij} - x^i x^j). \quad (\text{A.24})$$

El tensor de inercia transforma de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} \mathcal{I}_{kl} = R_{ik} R_{jl} \mathcal{I}_{kl}. \quad (\text{A.25})$$

Por lo tanto, las componentes de  $\mathcal{I}_{ij}$  son:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{11} &= 1 + \frac{\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2}{2} \cos(2\Omega_{rot} t), \\ \mathcal{I}_{22} &= 1 - \frac{\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2}{2} \cos(2\Omega_{rot} t), \\ \mathcal{I}_{12} &= \frac{\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2}{2} \sin(2\Omega_{rot} t), \\ \mathcal{I}_{33} &= \mathcal{I}'_3. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Además, del álgebra tensorial es bien sabido que haciendo uso de la propiedad cíclica de la traza, la misma se conservará, i.e la traza es invariante ante rotaciones. Por otra parte, observe que por la definición del tensor de inercia (A.24), es equivalente a la definición



del momento  $M_{ij}$ , a excepción de un signo y de la traza, pero como ya se mostró, la traza es constante, así que se las segundas derivadas temporales de los segundos momentos de masa son:

$$\begin{aligned}\ddot{M}_{11} &= -\ddot{\mathcal{I}}_{11} = \frac{\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2}{2} \cos(2\Omega_{rot}t) 4\Omega_{rot}^2, \\ \ddot{M}_{22} &= -\ddot{\mathcal{I}}_{22} = -\frac{\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2}{2} \cos(2\Omega_{rot}t) 4\Omega_{rot}^2, \\ \ddot{M}_{12} &= -\ddot{\mathcal{I}}_{12} = \frac{\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2}{2} \sin(2\Omega_{rot}t) 4\Omega_{rot}^2.\end{aligned}\tag{A.27}$$

Por lo tanto, al considerar la expresión para las polarizaciones de las ondas gravitacionales, presentada en (A.21), las mismas están dadas por:

$$\begin{aligned}h_+ &= \frac{G}{Dc^4} 4\Omega_{rot}^2 (\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2) \cos(2\Omega_{rot}t) \left( \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right), \\ h_\times &= \frac{G}{Dc^4} 4\Omega_{rot}^2 (\mathcal{I}'_1 - \mathcal{I}'_2) \sin(2\Omega_{rot}t) \cos \iota.\end{aligned}\tag{A.28}$$

donde  $\iota$  corresponde al ángulo entre la línea de visión y el eje  $x_3$  respecto al cual se encuentra rotando la estrella (ver figura 3). Por otra parte, al aplicar la ecuación de la luminosidad de las ondas gravitacionales en la aproximación cuadrupolar (A.16), se obtiene:

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = -\frac{32G}{5c^5} \Omega_{rot}^6 (\mathcal{I}'_2 - \mathcal{I}'_1)^2.\tag{A.29}$$

---

# APÉNDICE B

---

## Potencial radiación-reacción

El análisis empieza con la solución (A.13) para la parte espacial del campo de radiación en el gauge original:

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \Big|_{\text{cuad}} = \frac{2G}{Dc^4} \ddot{M}^{ij}(t - D/c), \quad (\text{B.1})$$

aunque esta solución es originalmente derivada descartando los términos que decaen más rápido que  $1/D$ , es de hecho una solución exacta a las ecuaciones de campo en el vacío  $\bar{h}^{jk}{}_{,\alpha}{}^\alpha = 0$  de la teoría linearizada. Por lo tanto, es válida para las zonas intermedias y cercanas ( $D \leq \lambda$ , con  $D > R$ ) así como en la zona de radiación (ver figura 1). Si se reemplaza la condición de onda saliente por una condición de onda entrante en el infinito, la solución exacta corresponde a:

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{Dc^4} \ddot{M}^{ij}(t + D/c). \quad (\text{B.2})$$

Ahora, en aras de describir los efectos de condición de frontera de onda saliente, uno puede escribir la solución exacta de la siguiente forma:

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{Dc^4} \ddot{M}^{ij}(t - \epsilon \frac{D}{c}), \quad \epsilon = \pm 1, \quad (\text{B.3})$$

y entonces se pondría atención a los efectos del signo de  $\epsilon$ . En la zona cercana, pero afuera de la fuente aproximadamente Newtoniana, esta expresión expandida en potencias de  $D$  queda de la siguiente manera:

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2G}{c^4} \left( \frac{M_{ij}^{(2)}}{D} - \frac{\epsilon}{c} M_{ij}^{(3)} + \frac{\epsilon^2}{2!c^2} M_{ij}^{(4)} D - \frac{\epsilon^3}{3!c^3} M_{ij}^{(5)} D^2 + \dots \right), \quad (\text{B.4})$$

cabe recordar que el número entre paréntesis representa el orden de la derivada temporal, además  $\epsilon^{2n}$  será 1, mientras que  $\epsilon^{2n+1}$  será  $\epsilon$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Las expresiones correspondientes de  $\bar{h}_{0j}$  y  $\bar{h}_{00}$  se obtienen de las condiciones de gauge ya antes mencionadas  $\bar{h}^\beta_{\alpha,\beta} = 0$ , y entonces  $\bar{h}_{j0,0} = \bar{h}_{jk,k}$ :

$$\bar{h}_{00} = \frac{2G}{c^4} \left( \frac{(3x^j x^k - D^2 \delta^{jk})}{D^5} c^2 M_{jk} - \frac{(x^j x^k - D^2 \delta^{jk})}{2! D^3} M_{jk}^{(2)} - \epsilon \frac{2}{3! c} M_{jj}^{(3)} + \frac{3(x^j x^k + D^2 \delta^{jk})}{4! D c^2} M_{jk}^{(4)} - \epsilon \frac{4(2x^j x^k + D^2 \delta^{jk})}{5! c^3} M^{(5)} + \dots \right). \quad (\text{B.5})$$

Al acercarse a la fuente, el término principal es aquel que cae con  $1/D^3$ , es decir:

$$\bar{h}_{00} \approx \frac{2G(3x^j x^k - D^2 \delta^{jk})}{c^2 D^5} M_{jk} = \frac{6G Q_{jk} n^j n^k}{c^2 D^3}. \quad (\text{B.6})$$

Es precisamente este término el que se relaciona con la parte cuadrupolar del potencial Newtoniano,  $\Phi = -\frac{c^2}{2} h_{00} = -\frac{c^2}{4} \bar{h}_{00}$ . Los demás términos sin  $\epsilon$ 's enfrente son correcciones del potencial Newtoniano. Mientras que los términos con  $\epsilon$ 's enfrente están asociados con la reacción a la radiación [20, 12]. Así que, se extraen estos términos y se asocian con el potencial de reacción:

$$\bar{h}_{00}^{(react)} = -\frac{2G}{3c^5} M_{jj}^{(3)} - \frac{1}{15} \frac{G}{c^7} (2x^j x^k + D^2 \delta^{jk}) M_{jk}^{(5)}. \quad (\text{B.7})$$

A continuación, se emplea la relación entre el tensor  $\bar{h}_{\mu\nu}$  (con traza inversa) y el tensor  $h_{\mu\nu}$ :

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}, \quad h_{00} = \bar{h}_{00} + \frac{1}{2} \bar{h}. \quad (\text{B.8})$$

Para obtener  $\bar{h}$ , se utiliza su definición como traza con la métrica de Minkowski:

$$\bar{h} = \eta^{\alpha\nu} \bar{h}_{\nu\alpha} = -\bar{h}_{00} + \bar{h}_{ii}, \quad \bar{h}_{ii} = -2 \frac{G}{c^5} M_{ii}^{(3)} - \frac{1}{3} \frac{G}{c^7} M_{ii}^{(5)} D^2, \quad (\text{B.9})$$

sustituyendo esta expresión en la fórmula de  $h_{00}$ , se obtiene

$$h_{00} = \bar{h}_{00} + \frac{1}{2} (-\bar{h}_{00} + \bar{h}_{ii}) = \frac{1}{2} (\bar{h}_{00} + \bar{h}_{ii}), \quad (\text{B.10})$$

$$\therefore h_{00}^{(react)} = -\frac{G}{3c^5} M_{jj}^{(3)} - \frac{1}{2 \times 15} \frac{G}{c^7} (2x^j x^k + D^2 \delta^{jk}) M_{jk}^{(5)} - \frac{G}{c^5} M_{ll}^{(3)} - \frac{G}{6c^7} M_{ii}^{(5)} D^2, \quad (\text{B.11})$$

$$h_{00}^{(react)} = -\frac{4G}{3c^5} M_{jj}^{(3)} - \frac{G}{15c^7} (x^j x^k + 3D^2 \delta^{jk}) M_{jk}^{(5)}. \quad (\text{B.12})$$

Se realiza una transformación de gauge que exprese las ecuaciones de forma Newtoniana, siguiendo el desarrollo presentado en la Ref. [12]:

---


$$x_{new}^\mu = x_{old}^\mu + \xi^\mu(x), \quad h_{\mu\nu_{new}} = h_{\mu\nu_{old}} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}), \quad (\text{B.13})$$

donde la función  $\xi$  convenientemente se expresa de la siguiente manera:

$$\xi_j = \frac{G}{c^5} \left( -M_{jk}^{(3)} x^k + \frac{1}{3} M_{ll}^{(3)} x^j \right), \quad \xi_0 = \frac{G}{c^4} \left( -\frac{2}{3} M_{ll}^{(2)} + \frac{1}{6} M_{jk}^{(4)} x^j x^k - \frac{1}{6} M_{ll}^{(4)} D^2 \right) \quad (\text{B.14})$$

Finalmente, en este nuevo gauge la expresión corresponde a:

$$h_{00}^{(react)} = -\frac{2G}{5c^7} Q_{jk}^{(5)} x^j x^k, \quad \rightarrow \quad \Phi = -\frac{c^2}{2} h_{00}^{(react)} = \frac{G}{5c^5} Q_{jk}^{(5)} x^j x^k \quad (\text{B.15})$$

---

# APÉNDICE C

---

## Construcción del remanente

Este apéndice muestra la derivación matemática de los modelos para el objeto postfusión. Los procedimientos acá presentes siguen el desarrollo de las Refs. [41, 42, 14, 13, 43]. También se emplean resultados matemáticos presentes en el libro sobre figuras de equilibrio elipsoidales [32].

### C.1. Caso esférico: estrella polítropa

Las ecuaciones de estructura empleadas para la estrella remanente son:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \frac{dP}{dr} = \frac{-Gm\rho}{r^2}, \quad (\text{C.1})$$

donde  $\rho$  representa la densidad,  $P$  la presión,  $m$  la masa y  $r$  la distancia radial desde el centro hasta un punto contenido en la estrella. Estas ecuaciones se condensan en la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \quad (\text{C.2})$$

Las estrellas polítopas se caracterizan por las siguientes relaciones [40]:

$$P = K\rho^\gamma, \quad \rho = \rho_c \theta^n, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}, \quad (\text{C.3})$$

donde  $\rho_c$  es la densidad central de la estrella,  $K$  es una constante relacionada con las propiedades físicas de la estrella,  $n$  es el índice politrópico, con  $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ , y  $\theta$  es una variable sin dimensiones que determina el comportamiento de la densidad  $\rho$ . Se normalizan las ecuaciones por medio de las siguientes expresiones:

$$r = a\xi, \quad a = \left( \frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n-1}}}{4\pi G} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.4})$$

### C.1. CASO ESFÉRICO: ESTRELLA POLÍTROPA

---

La constante  $a$  relaciona la variable  $r$  con la variable sin dimensiones  $\xi$ . Se obtiene la ecuación de Lane-Emden:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (\text{C.5})$$

donde se puede demostrar que se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0, \quad \theta(\xi_1) = 0 \rightarrow \text{superficie}. \quad (\text{C.6})$$

Estas condiciones de contorno se imponen sobre la solución de la ecuación de Lane-Emden para garantizar la consistencia física del modelo. La primera condición,  $\theta(0) = 1$ , refleja que la densidad en el centro de la estrella ( $r = 0$ ) alcanza su valor máximo, correspondiente a la densidad central. La segunda,  $\theta'(0) = 0$ , asegura la regularidad de la solución en el origen, evitando un gradiente de densidad no físico en el centro. Finalmente, la condición  $\theta(\xi_1) = 0$  define el radio adimensional  $\xi_1$  en el cual la función de densidad se anula, lo cual representa la superficie de la estrella, donde la presión debe caer a cero. De (C.1), la masa de una polítropa esférica es:

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi = 4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \quad (\text{C.7})$$

$$\therefore \frac{M}{R^3} = 4\pi \rho_c \frac{|\theta'(\xi_1)|}{\xi_1} \quad (\text{C.8})$$

El caso de densidad homogénea, corresponde al caso de  $n = 0$  y por lo tanto se denomina, caso incompresible. La energía interna de una polítropa viene dada por:

$$U = \int u dm = \int \frac{nP}{\rho} dm = K \rho_c^{1/n} \frac{Mn}{|\xi_1^2 \theta'(\xi_1)|} \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^{n+1} d\xi, \quad (\text{C.9})$$

al considerar la ecuación de Lane-Emden se obtiene:

$$U = K \rho_c^{1/n} \frac{Mn}{|\xi_1^2 \theta'(\xi_1)|} \frac{n+1}{5-n} \xi_1^3 |\theta'(\xi_1)|^2 = k_1(n) K \rho_c^{\frac{1}{n}} M, \quad (\text{C.10})$$

donde  $k_1(n)$  se define como:

$$k_1(n) = \frac{n(n+1)}{5-n} \xi_1 |\theta'(\xi_1)| \quad (\text{C.11})$$

La energía potencial gravitacional viene dada por:

$$W = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = - \frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (\text{C.12})$$

Ahora, haciendo uso del resultado obtenido en la subsección sobre las polítopas, podemos expresar esta energía potencial de la siguiente manera:

$$W = - \frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} = - \frac{3}{5-n} GM^{5/3} \rho_c^{1/3} \left( \frac{4\pi|\theta'(\xi_1)|}{\xi_1} \right)^{1/3} = -k_2(n) GM^{5/3} \rho_c^{1/3}, \quad (\text{C.13})$$

con lo cual se define  $k_2(n)$  como:

$$k_2(n) = \frac{3}{5-n} \left( \frac{4\pi|\theta'(\xi_1)|}{\xi_1} \right)^{1/3}. \quad (\text{C.14})$$

El momento de inercia viene dado por:

$$I = \frac{2}{3} \int_0^M r^2 dm = \frac{2}{3} a^5 \rho_c 4\pi \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^4 d\xi = \frac{2}{5} \kappa_n MR^2 \quad (\text{C.15})$$

donde  $\kappa_n$  se define como un factor que permite pasar del momento de inercia de una estrella esférica homogénea al de una polítopa:

$$\kappa_n = \frac{5}{3} \frac{\int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^4 d\xi}{\xi_1^4 |\theta'(\xi_1)|}. \quad (\text{C.16})$$

## C.2. Caso esferoidal: estrella polítopa

El potencial gravitacional  $B(\mathbf{r})$  corresponde a:

$$B(\mathbf{r}) = - \int G \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (\text{C.17})$$

que en el caso de un esferoide homogéneo con semiejes  $a_1, (a_2 = a_1)$  y  $a_3$  se puede demostrar que corresponde a [32]:

$$B(\mathbf{r}) = -\pi G \rho_c (A - \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2) \quad (\text{C.18})$$

donde  $x_i$  define la posición  $\mathbf{r}$  en la que se está evaluando el potencial  $B$ , y se definen los parámetros  $A$  y  $A_i$  de la siguiente manera:

$$A = \frac{2a_1^2(1-e^2)^{1/2}}{e} \sin^{-1}(e), \quad A_1 = A_2 = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3} \sin^{-1}(e) - \frac{1-e^2}{e^2}, \quad (\text{C.19})$$

$$A_3 = \frac{2}{e^2} - \frac{2(1-e^2)^{1/2}}{e^3} \sin^{-1}(e), \quad e = \left(1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\right)^{1/2}. \quad (\text{C.20})$$

La energía potencial gravitacional está dada por:

$$W = \frac{1}{2} \int B(\mathbf{r}) dm. \quad (\text{C.21})$$

Al resolver la integral volumétrica en la fuente se obtiene:

$$W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{a_1} \frac{\sin^{-1}(e)}{e}. \quad (\text{C.22})$$

donde  $(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a_3}{a_1}$ . Con base en la aproximación elipsoidal [32], se extrapola este resultado del esferoide homogéneo para dar una estimación en la que, además, se entiende la estrella como un fluido politrópico:

$$W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{a_1} \frac{\sin^{-1}(e)}{e} = -\frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} GM^{\frac{5}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \frac{\sin^{-1}(e)}{e} (1-e^2)^{\frac{1}{6}} \quad (\text{C.23})$$

$$W = -k_2|_{(n=0)} GM^{\frac{5}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \frac{\sin^{-1}(e)}{e} (1-e^2)^{\frac{1}{6}} \quad \therefore \quad W = -k_2(n) GM^{\frac{5}{3}} \rho_c^{\frac{1}{3}} \frac{\sin^{-1}(e)}{e} (1-e^2)^{\frac{1}{6}} \quad (\text{C.24})$$

$$W = -k_2(n) GM^{\frac{5}{3}} \rho_c^{\frac{1}{3}} g(\lambda) \quad \text{donde se define} \quad g(\lambda(e)) = \frac{\sin^{-1}(e)}{e} (1-e^2)^{\frac{1}{6}} \quad (\text{C.25})$$

El momento de inercia de un esferoide homogéneo es trivial y viene dado por:

$$I = \frac{2}{5} Ma_1^2, \quad (\text{C.26})$$

así que la razón entre este momento de inercia y el de una esfera homogénea con el mismo volúmen, es decir cuyo  $R = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$ , viene dado por:

$$\frac{I}{I_{\text{sphere}}} = \frac{a_1^2}{(a_1^2 a_3)^{2/3}} = \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{C.27})$$



De nuevo, bajo la aproximación elipsoidal, se extrapola esta relación para el caso en el que tanto el esferoide como la esfera son polítropas y se supone que tal relación se sigue cumpliendo:

$$I = \frac{I_{sphere}}{\lambda} = \frac{\frac{2}{5}\kappa_n MR^2}{\lambda} = \frac{2}{5}\kappa_n Ma_1^2. \quad (C.28)$$

La energía cinética rotacional viene dada por:

$$T = \frac{J^2}{2I} = \frac{5J^2\lambda}{4\kappa_n MR^2} = \frac{5J^2\lambda}{4} \frac{3\xi_1^4 |\theta'(\xi_1)|}{5 \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^4 d\xi} \frac{M^{-5/3}}{M^{-2/3} R^2}, \quad (C.29)$$

al emplear (C.8), se obtiene la ecuación:

$$T = J^2 \lambda M^{-5/3} \rho_c^{2/3} k_3(n), \quad (C.30)$$

donde se define  $k_3(n)$  como:

$$k_3(n) = \frac{3(4\pi)^{2/3} \xi_1^{10/3} |\theta'(\xi_1)|^{5/3}}{4 \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^4 d\xi} = \frac{5}{4} \frac{(4\pi)^{2/3}}{\kappa_n} \left( \frac{|\theta'(\xi_1)|}{\xi_1} \right)^{2/3}. \quad (C.31)$$

### C.3. Elipsoides de Jacobi compresibles

Se consideran figuras triaxiales uniformemente rotantes alrededor del eje  $a_3$ :

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_3 \quad a_1 > a_2 > a_3. \quad (C.32)$$

Siguiendo el desarrollo matemático de la Ref. [32], se definen los siguientes números característicos del elipsoide:

$$A_i = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\prod_j^3 (a_j^2 + u)(a_i^2 + u)}} \quad A_{12} = A_{21} = \frac{A_1 - A_2}{a_2^2 - a_1^2} \quad B_{ij} = A_j - a_i^2 A_{ij}, \quad (C.33)$$

donde el potencial gravitacional corresponde a la traza del siguiente tensor:

$$\mathbb{B}_{ij}(\mathbf{r}) = -\pi G \rho \left( 2B_{ij} x_i x_j + a_i^2 \delta_{ij} \left( A_i - \sum_l^3 A_l x_l^3 \right) \right). \quad (C.34)$$

La energía potencial gravitacional de un elipsoide homogéneo es:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbb{B}(r) \rho d^3r, \quad (\text{C.35})$$

y al resolver la integral utilizando coordenadas elipsoidales se obtiene:

$$W = -2\pi G\rho \left( A_1 a_1^2 \frac{M}{5} + A_2 a_2^2 \frac{M}{5} + A_3 a_3^2 \frac{M}{5} \right) = -2\pi \frac{1}{5} \frac{3}{4\pi} \frac{GM^2}{R^3} A = \frac{-3}{10} \frac{GM^2}{R^3} A \quad (\text{C.36})$$

$$\therefore W = \frac{-3}{5} \frac{GM^2}{R} f \quad \text{donde se define} \quad f(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{2} \frac{A}{(a_1 a_2 a_3)^{2/3}}, \quad (\text{C.37})$$

tambi3n se puede expresar esta funci3n  $f$  en t3rminos de la raz3n entre los ejes de la siguiente manera:

$$f(a_1, a_2, a_3) = f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{A_1 a_1^2}{a_1^{2/3} a_2^{2/3} a_3^{2/3}} + \dots \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{1(a_2/a_1)^{2/3} (a_3/a_1)^{2/3}} + \dots \right) \quad (\text{C.38})$$

$$\therefore f(\lambda_1, \lambda_2) = \left( \frac{A_1 \lambda_2}{\lambda_1^2} + \frac{A_2 \lambda_1}{\lambda_2^2} + A_3 \lambda_1 \lambda_2 \right), \quad \text{donde} \quad \lambda_i = \left( \frac{a_3}{a_i} \right)^{2/3}. \quad (\text{C.39})$$

Ahora, siguiendo con la aproximaci3n elipsoidal, se obtiene que una estructura elipsoidal autogravitante cuya composici3n se entiende como un fluido politr3pico tiene asociada la siguiente energ3a potencial gravitacional:

$$W = \frac{-3}{5-n} \frac{GM^2}{R} f(\lambda_1, \lambda_2) = -k_2(n) GM^{5/3} \rho_c^{1/3} f(\lambda_1, \lambda_2). \quad (\text{C.40})$$

Se procede con el calculo del momento de inercia, comenzando con el caso de elipsoide homog3neo:

$$I_z = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV, \quad (\text{C.41})$$

$$I_z = \frac{\rho a_1 a_2 a_3}{5} \left( \frac{4}{3} \pi a_1^2 + \frac{4}{3} \pi a_2^2 \right) = \frac{M}{5} (a_1^2 + a_2^2). \quad (\text{C.42})$$

Se halla la raz3n entre los momentos de inercia, esta vez el de un elipsoide homog3neo con el de una esfera homog3nea:

$$\frac{I_{elips}}{I_{sphere}} = \frac{\frac{M}{5}(a_1^2 + a_2^2)}{\frac{2}{5}MR^2} = \frac{1}{2} \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1 a_2 a_3)^{2/3}} = \frac{1}{h}. \quad (C.43)$$

Por lo tanto, al considerar la aproximación elipsoidal, el momento de inercia es:

$$I_{elips} = \frac{I_{sphere}}{h} = \frac{1}{5} \kappa_n M (a_1^2 + a_2^2), \quad (C.44)$$

donde  $h$ , expresada en términos de la razón entre ejes, está dada por:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1 a_2 a_3)^{2/3}} = \frac{2\lambda_1^2 \lambda_2^2}{\lambda_1^3 + \lambda_2^3}. \quad (C.45)$$

Para hallar la energía cinética rotacional de la estructura, el proceso es el mismo al de las subsecciones anteriores, pero en este caso en vez de  $1/\lambda$  se tiene  $1/h$ :

$$T = \frac{J^2}{2I_{elips}} = k_3 h J^2 M^{-5/3} \rho_c^{2/3}. \quad (C.46)$$

Estos resultados son consistentes con el caso esferoidal, ya que si  $a_1 = a_2$ , entonces  $\lambda_1 = \lambda_2 = h(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda$ , y también  $f(\lambda_1, \lambda_2) = g(\lambda)$ .

### Condiciones de equilibrio para los elipsoides de Jacobi

Primero se retoma la ecuación (3.3.7), donde las condiciones de equilibrio son:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \rho_c} \right|_{M,J} = \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda_1} \right|_{M,J} = \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda_2} \right|_{M,J} = 0. \quad (C.47)$$

De las dos últimas condiciones,  $\left. \frac{\partial E}{\partial \lambda_1} \right|_{M,J} = \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda_2} \right|_{M,J} = 0$ , se pueden demostrar las siguientes dos expresiones, que corresponden a la misma ecuación pero intercambiando un sub-índice por el otro:

$$0 = \frac{W}{f} \frac{1}{2R^2} \left( A_1 a_1^2 - \frac{1}{2} A_2 a_2^2 - \frac{1}{2} A_3 a_3^2 \right) + T \frac{2a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (C.48)$$

al sumar ambas condiciones se obtiene:

$$\frac{T}{|W|} = \frac{A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 - 2A_3 a_3^2}{2A}. \quad (C.49)$$

Por otra parte, al reemplazar en la ecuación (C.48) la energía cinética por  $T = \frac{1}{2} I \Omega^2$ , y la energía potencial gravitacional por  $W = -k_2 G M^{5/3} \rho_c^{1/3} f(\lambda_1, \lambda_2)$ , se obtiene:

$$-\frac{20\pi G\bar{\rho}M}{5-n} \left( A_1 a_1^2 - \frac{1}{2} A_2 a_2^2 - \frac{1}{2} A_3 a_3^2 \right) + \kappa_n (2a_1^2 - a_2^2) \Omega^2 = 0, \quad (1 \leftrightarrow 2). \quad (\text{C.50})$$

Al hacer una ecuación más la mitad de la otra se obtiene:

$$\frac{-20}{5-n} \left( A_1 a_1^2 - \frac{1}{2} A_2 a_2^2 - \frac{1}{2} A_3 a_3^2 + \frac{1}{2} A_2 a_2^2 - \frac{1}{4} A_1 a_1^2 - \frac{1}{4} A_3 a_3^2 \right) + \quad (\text{C.51})$$

$$\kappa_n (2a_1^2 - a_2^2 + a_2^2 - \frac{1}{2} a_1^2) \frac{\Omega^2}{\pi G\bar{\rho}} = 0, \quad (\text{C.52})$$

por lo tanto, al definir  $\tilde{\Omega}^2 \equiv \frac{\Omega^2}{\pi G\bar{\rho}}$  y  $q_n \equiv \kappa_n (1 - \frac{n}{5})$ , se reduce la última ecuación a:

$$\tilde{\Omega}^2 q_n a_1^2 - 2A_1 a_1^2 = -2A_3 a_3^2 \quad (1 \leftrightarrow 2). \quad (\text{C.53})$$

Se retoman las definiciones de  $A_{ij}$  y  $B_{ij}$  y se le añade el término  $2a_1^2 a_2^2 A_{12}$  a la última ecuación:

$$2a_1^2 a_2^2 A_{12} + \tilde{\Omega}^2 q_n a_1^2 - 2A_1 a_1^2 = -2A_3 a_3^2 + 2a_1^2 a_2^2 A_{12} \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (\text{C.54})$$

donde al simplificar se obtiene:

$$a_1^2 (\tilde{\Omega}^2 q_n - 2B_{12}) = a_2^2 (\tilde{\Omega}^2 q_n - 2B_{12}) = 2(A_{12} a_1^2 a_2^2 - A_3 a_3^2). \quad (\text{C.55})$$

Para que esta ecuación sea consistente aún teniendo  $a_1 \neq a_2$  se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$\tilde{\Omega}^2 = \frac{2B_{12}}{q_n}, \quad (\text{C.56})$$

$$A_{12} a_1^2 a_2^2 = A_3 a_3^2. \quad (\text{C.57})$$

Por otra parte, se relaciona el momento angular normalizado con la frecuencia angular normalizada de la siguiente manera:

$$\tilde{J} = \frac{J}{(GM^3 R)^{1/2}} = \frac{I\Omega}{(GM^3 R)^{1/2}} \times \frac{\sqrt{\pi G\bar{\rho}}}{\sqrt{\pi G\bar{\rho}}} \quad (\text{C.58})$$

$$\therefore \quad \tilde{J} = \frac{\sqrt{3}}{10} \frac{(a_1^2 + a_2^2)}{R^2} \kappa_n \tilde{\Omega}. \quad (\text{C.59})$$

#### C.4. Elipsoides de Riemann-S Compresibles

Con base en las condiciones de equilibrio para elipsoides de Riemann-S, según la Ref. [32], el campo de velocidades del fluido en un marco de referencia co-rotante con la figura de equilibrio autogravitante debe ser:

$$\mathbf{v} = Q_1 y \hat{e}_1 + Q_2 x \hat{e}_2 \quad (\text{C.60})$$

donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son constantes, para que se cumpla la primera condición. Ahora, para hacer cumplir la segunda condición, según el desarrollo presentado en la Ref. [32], estas constantes son:

$$Q_1 = \frac{-a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta = +\frac{a_1}{a_2} \Lambda \quad Q_2 = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta = -\frac{a_2}{a_1} \Lambda. \quad (\text{C.61})$$

Se redefinen en términos de una nueva constante  $\Lambda$ , manteniendo consistencia entre  $Q_2$  y  $Q_1$ . Al usar la definición de vorticidad, se observa que el campo de velocidades impuesto es consistente:

$$\zeta = (\nabla \times \mathbf{v}) = \left( \hat{e}_1 \left( -Q_2 \frac{\partial x}{\partial z} \right) - \hat{e}_2 \left( Q_1 \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \hat{e}_3 \left( Q_2 \frac{\partial x}{\partial y} - Q_1 \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) = Q_2 - Q_1, \quad (\text{C.62})$$

donde  $\Lambda$  corresponde a la frecuencia angular de los movimientos del fluido interno:

$$\Lambda = -\frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta. \quad (\text{C.63})$$

La velocidad del fluido desde un marco de referencia inercial viene dado por:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v} + \Omega \times \vec{r}, \quad (\text{C.64})$$

haciendo uso de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}^{(0)}$  se calcula el momento angular de la siguiente manera:

$$\vec{J} = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \int \vec{r} \times \mathbf{v}^{(0)} dm = \int \vec{r} \times \mathbf{v}^{(0)} \rho_{(\vec{r})} d^3x = \int (\vec{r} \times \mathbf{v} + \vec{r} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}) \rho_{(\vec{r})} d^3x. \quad (\text{C.65})$$

Para resolver fácilmente esta integral primero se realizan los respectivos productos vectoriales y se divide la integral en sus 3 componentes. Para las componentes  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  se realiza un cambio a coordenadas elipsoidales, para que se haga evidente que las integrales se hacen cero. Por lo tanto, el momento angular queda de la siguiente manera:

$$\vec{J} = \hat{e}_3 \left( \Omega \left( \int (x^2 + y^2) \rho d^3x \right) + \int (Q_2 x^2 - Q_1 y^2) \rho d^3x \right), \quad (\text{C.66})$$

$$\vec{J} = \hat{e}_3 \left( I\Omega - \Lambda a_1 a_2 \int \left( \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} \right) \rho d^3x \right). \quad (\text{C.67})$$

Al realizar la integral, en coordenadas elipsoidales, nos se aprecia que:

$$\frac{x}{a_1} = S \sin(\theta) \cos(\phi) = \tilde{x} \quad \frac{y}{a_2} = S \sin(\theta) \sin(\phi) = \tilde{y}, \quad (\text{C.68})$$

así que es equivalente a hallar el momento de inercia de una esfera polítropa de radio  $R = 1$ , ya que  $S \in [0, 1]$ . Tal momento de inercia corresponde a  $\tilde{I} = \frac{2}{5} \kappa_n M$ . Por lo tanto, el momento angular es:

$$\vec{J} = \hat{e}_3 \left( I\Omega - \Lambda a_1 a_2 \frac{2}{5} \kappa_n M \right). \quad (\text{C.69})$$

La energía cinética viene dada por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} \rho(\vec{r}) d^3x = \frac{1}{2} \left( \int (Q_1^2 y^2 + Q_2^2 x^2) \rho(\vec{r}) d^3x \right), \\ T &= \frac{1}{2} I (\Lambda^2 + \Omega^2) - \frac{2}{5} \kappa_n M a_1 a_2 \Lambda \Omega. \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

Las condiciones de equilibrio son las mismas que en la anterior sección pero ahora las derivadas parciales deben ser realizadas para una masa  $M$ , momento angular  $J$  y circulación  $C$ , fijas. Dadas las dos condiciones  $(\frac{\partial E}{\partial \lambda_1} \Big|_{M,J,C} = \frac{\partial E}{\partial \lambda_2} \Big|_{M,J,C} = 0)$  y siguiendo el mismo procedimiento que con los elipsoides de Jacobi, se obtiene que las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^2 + \frac{a_1^2 a_2^2}{(a_1^2 + a_2^2)} \hat{\zeta}^2 - 2B_{12} &= 0, \\ \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \hat{\zeta} \hat{\Omega} - a_1^2 a_2^2 A_{12} + a_3^2 A_3 &= 0, \\ C &= \pi a_1 a_2 (\zeta + 2\Omega). \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

Donde las nuevas variables normalizadas corresponden a:

$$\hat{\Omega}^2 \equiv q_n \tilde{\Omega}^2 = q_n \frac{\Omega^2}{\pi G \bar{\rho}}, \quad \hat{\zeta}^2 \equiv q_n \tilde{\zeta}^2 = q_n \frac{\zeta^2}{\pi G \bar{\rho}}, \quad \bar{C} = \frac{C}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}_0} R_0^2}. \quad (\text{C.72})$$

# Bibliografía

- [1] L. L. C. Hanna, M. C. Johnson, Estimating gravitational radiation from super-emitting compact binary systems, *Physical Review D* **95**, 124042 (2017).
- [2] L. M. Becerra, C. Fryer, J. F. Rodriguez, J. A. Rueda, and R. Ruffini, Neutron Star Binaries Produced by Binary-Driven Hypernovae, Their Mergers, and the Link between Long and Short GRBs, *Universe* **9**, 332 (2023).
- [3] LIGO and V. Collaboration, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Physical Review Letters* **116**, 061102 (2016).
- [4] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, and et al., GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral, *Physical Review Letters* **119**, 161101 (2017).
- [5] B. D. Metzger, Kilonovae, *Living Reviews in Relativity* **23**, 1 (2019).
- [6] L. S. Collaboration, LIGO O3b Catalog, (2022).
- [7] F. J. Dyson, Gravitational Machines, in *Interstellar Communication*, edited by A. Cameron, chapter 12, Benjamin Press, (1963).
- [8] L. S. Collaboration, V. Collaboration, F. G. ray Burst Monitor, and INTEGRAL, Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A, *The Astrophysical Journal Letters* **848**, L13 (2017).
- [9] A. Buonanno, L. E. Kidder, and L. Lehner, Estimating the final spin of a binary black hole coalescence, *Physical Review D* **77**(2), 026004 (2008).
- [10] M. Kesden, G. Lockhart, and E. S. Phinney, Maximum black-hole spin from quasicircular binary mergers, *Physical Review D* **82**(4), 044045 (2010).
- [11] K. S. Thorne, Disk-Accretion onto a Black Hole. II. Evolution of the Hole, *The Astrophysical Journal* **191**, 507–520 (1974).
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [13] F. Cipolletta, C. Cherubini, S. Filippi, J. A. Rueda, and R. Ruffini, Fast rotating neutron stars with realistic nuclear matter equation of state, *Physical Review D* **92**(2), 023007 (2015).

- [14] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, Wiley-VCH, 1983.
- [15] L. Rezzolla, E. R. Most, and L. R. Weih, Using Gravitational-wave Observations and Quasi-universal Relations to Constrain the Maximum Mass of Neutron Stars, *The Astrophysical Journal Letters* **852**(1), L25 (2018).
- [16] K. Hotokezaka, K. Kyutoku, H. Okawa, M. Shibata, and K. Kiuchi, Binary black hole mergers in the first advanced LIGO observing run, *Physical Review D* **83**(12), 124008 (2011).
- [17] A. Einstein, Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* , 688–696 (1916).
- [18] A. Einstein, Über Gravitationswellen, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* , 154–167 (1918).
- [19] C. M. Will, The Confrontation between General Relativity and Experiment, *Living Reviews in Relativity* **17**, 4 (2014).
- [20] M. Maggiore, *Gravitational Waves*, Oxford University Press, 2018.
- [21] J. F. R. Ruiz, Thesis Semi-analytical Approaches to Gravitational Radiation from Astrophysical Sources, 2019.
- [22] A. A. Michelson and E. W. Morley, On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether, *American Journal of Science* **34**, 333–345 (1887).
- [23] T. Accadia, F. Acernese, F. Antonucci, and et al., Status of the Virgo project, *Classical and Quantum Gravity* **28**(11), 114002 (2011).
- [24] European Space Agency and NASA, LISA Laser Interferometer Space Antenna, Mission Concept Document, 2022.
- [25] M. P. et al., The Einstein Telescope: A third-generation gravitational wave observatory, *Class. Quantum Grav.* **27**, 194002 (2010).
- [26] R. Lazkoz and J. A. V. Kroon, Ondas gravitatorias, *Revista Mexicana de Física* **49**(2), 177–186 (2003).
- [27] S. Bernuzzi, Neutron star merger remnants, *General Relativity and Gravitation* **52**(11), 108 (2020).
- [28] É. É. Flanagan and S. A. Hughes, The basics of gravitational wave theory, *New Journal of Physics* **7**, 204 (2005).



- 
- [29] Y. Pan, A. Buonanno, M. Boyle, L. T. Buchman, L. E. Kidder, H. P. Pfeiffer, and M. A. Scheel, Inspiral-merger-ringdown multipolar waveforms of nonspinning black-hole binaries using the effective-one-body formalism, *Physical Review D* **84**(12), 124052 (2011).
- [30] L. Lehner and F. Pretorius, Numerical Relativity and Astrophysics, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **52**, 661–694 (2014).
- [31] A. Buonanno and T. Damour, Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics, *Physical Review D* **59**(8), 084006 (April 1999).
- [32] S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Dover, NY, USA, 1969.
- [33] M. Shibata and K. Taniguchi, Coalescence of Black Hole-Neutron Star Binaries, *Living Reviews in Relativity* **14**, 6 (2011).
- [34] A. Buonanno and T. Damour, Transition from inspiral to plunge in binary black hole coalescences, *Physical Review D* **62**(6), 064015 (2000).
- [35] F. Cipolletta, C. Cherubini, S. Filippi, J. A. Rueda, and R. Ruffini, Last stable orbit around rapidly rotating neutron stars, *Physical Review D* **96**(2), 024046 (2017).
- [36] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
- [37] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH, 2008.
- [38] R. Oechslin, H.-T. Janka, and A. Marek, Relativistic neutron star merger simulations with non-zero temperature equations of state, *Astronomy & Astrophysics* **467**(1), 395–409 (2007).
- [39] A. Bauswein, S. Goriely, and H.-T. Janka, Systematics of Dynamical Mass Ejection, Nucleosynthesis, and Radioactively Powered Electromagnetic Signals from Neutron-star Mergers, *The Astrophysical Journal* **773**(1), 78 (2013).
- [40] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, 1939.
- [41] D. Lai, F. A. Rasio, and S. L. Shapiro, Ellipsoidal Figures of Equilibrium: Compressible Models, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **88**, 205–252 (1993).
- [42] D. Lai and S. L. Shapiro, Gravitational Radiation from Rapidly Rotating Nascent Neutron Stars, *The Astrophysical Journal* **442**, 259–272 (1995).
- [43] B. D. Miller, The Effect of Gravitational Radiation-Reaction on the Evolution of the Riemann S-Type Ellipsoids, *The Astrophysical Journal* **187**, 609–620 (1974).

- [44] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1987.
- [45] W. H. Press and S. A. Teukolsky, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 2007.
- [46] K. Takami, L. Rezzolla, and L. Baiotti, Spectral properties of the post-merger gravitational-wave signal from binary neutron stars, *Physical Review D* **91**(6), 064001 (2015).
- [47] D. A. Coulter, R. J. Foley, C. D. Kilpatrick, and et al., Swope Supernova Survey 2017a (SSS17a), the Optical Counterpart to a Gravitational Wave Source, *Science* **358**(6370), 1556–1558 (2017).
- [48] R. Ruffini, J. A. Rueda, M. Muccino, and et al., On the Classification of GRBs and Their Occurrence Rates, *The Astrophysical Journal* **832**(2), 136 (2016).
- [49] B. P. Abbott and et al., GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State, *Physical Review Letters* **121**(16), 161101 (2018).
- [50] R. L. Forward, Wideband laser-interferometer gravitational-radiation experiment, *Physical Review D* **17**(2), 379–390 (1978).
- [51] S. W. Hawking and W. Israel, editors, *Three Hundred Years of Gravitation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [52] F. Zappa, S. Bernuzzi, D. Radice, A. Perego, and T. Dietrich, Gravitational-Wave Luminosity of Binary Neutron Stars Mergers, *Physical Review Letters* **120**, 111101 (2018).
- [53] N. B. e. a. M. Maggiore, C. Van Den Broeck, Science Case for the Einstein Telescope, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2020**, 050 (2020).
- [54] B.-B. Zhang, B. Zhang, H. Sun, and et al., A peculiar low-luminosity short gamma-ray burst from a double neutron star merger progenitor, *Nature* **615**, 813–817 (2023).
- [55] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Classical Fields: Volume 2*, Butterworth-Heinemann, 1975.