

# Asignación 3 Tensores y Autovalores Aplicados a una Distribución Discreta de Masas y al uso del PIB

**Juan Diego Figueroa Hernández**  
**Juan Andrés Guarín Rojas**\*

*Universidad Industrial de Santander*  
*CL. 9 Cra 27, Bucaramanga, Santander*

11 de febrero de 2022

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>2</b>
<b>3. Tratamiento de datos y los resultados</b>	<b>3</b>
<b>4. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>7</b>
<b>5. Referencias</b>	<b>8</b>

## Resumen

En este reporte se busca determinar los momentos centrados de dos variables: las posiciones de un sistema de partículas y el porcentaje del PIB aplicado en defensa, salud, educación, y ciencia y tecnología en Colombia en los últimos 13 años. Se realizará un análisis de cada uno de los momentos y su interpretación para cada sistema, a su vez, que se hallarán los autovalores y autovectores de la matriz asociada al segundo momento. Para este trabajo se realizó un código en python que determinó los momentos y permitió hacer el tratamiento de datos. Como resultados se obtuvieron los centros de masas y tensor de inercia asociados a los momentos  $\mu_1$  y  $\mu_2$  del sistema de partículas, y el promedio y la matriz de covarianza asociadas al momento  $\mu_2$ . En conclusión, se determinó que los autovectores del tensor de inercia corresponde a las direcciones de los ejes principales de inercia, y que en el caso del PIB estos representan los patrones normales de evolución de los porcentajes asociados a defensa, salud, educación, y ciencia y tecnología. La matriz de correlación de datos del PIB nos permitió determinar que los gastos en defensa no están para nada correlacionados con los gastos en Salud, Educación y Ciencia y Tecnología.

---

\* e-mails Juan Figueroa: [juan2200815@correo.uis.edu.co](mailto:juan2200815@correo.uis.edu.co); Juan Guarín: [juan2201870@correo.uis.edu.co](mailto:juan2201870@correo.uis.edu.co)

## 1. Introducción

En matemáticas avanzadas se suele describir un tensor como; un objeto algebraico que describe una relación multilineal entre conjuntos de objetos algebraicos, relacionados con un espacio vectorial, sin embargo, el enfoque aplicado es muy importante tenerlo presente para comprender con exactitud la naturaleza de estos artefactos matemáticos, por ello es relevante dar solución a problemas como los planteados en este reporte que consisten en determinar momentos centrados de un sistema de partículas dado, y relacionar estos resultados con su representación física.

En este orden de ideas a continuación se presenta la metodología 2, sección en la que se explica como se hallan los momentos de orden  $i$  haciendo énfasis en como estas relaciones matemáticas evocan relaciones físicas del sistema. En la sección de resultados se muestra a lo que se llegó por medio de python 3, y finalmente en esta sección 4 se mostrarán las conclusiones del presente trabajo en donde se hace un balance entre los problemas planteados, los resultados obtenidos, y que más se pudo concluir al respecto.

## 2. Metodología

Al revizar los datos dados por el ejercicio se aprecia que en el sistema de partículas, los pesos asociados a las partículas,  $v_i$ , fueron la masa de cada partícula,  $v_i = m_i$ . Donde  $i$  itera desde 1 hasta el número total de partículas, en nuestro caso,  $N = 1533$ . Por otra parte el vector de promedios,  $|\bar{x}\rangle$ , correspondió a los promedios de las posiciones en  $x$  y  $y$  de las partículas, y en el caso 3D correspondía por supuesto a los promedios en  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

$$|\bar{x}\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x\rangle_i = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right) = \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Para el cálculo de los momentos centrados se partió de las siguientes expresiones 2, 3 y 4. Donde el momento de orden cero corresponde a la masa total del sistema. El momento de orden uno correspondería al centro de masa del sistema, al dividir entre la masa total del sistema y tomar en cuenta el vector que representa el centro geométrico. Y el momento de orden 2 correspondería al tensor de momento de inercia, cuyos vectores propios propician los ejes principales de inercia.

$$\mu_0(v) = \sum_{i=1}^N v_i \quad (2)$$

$$\mu_1(v) = \sum_{i=1}^N v_i (|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle) \quad (3)$$

$$\mu_2(v) = \sum_{i=1}^N v_i (|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)^2 \quad (4)$$

Con el fin de dar solución al inciso 2 para calcular la matriz de correlación,  $CORR$ , entre los datos económicos nacionales (Defensa, Salud, Educación y Ciencia) se usó la siguiente expresión:

$$CORR_{ij} = \frac{\mu_{2ij}}{\sqrt{\sum_{m=1}^N (x_m^i - \bar{x}^i)^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n^j - \bar{x}^j)^2}}, \quad (5)$$

donde  $x_m^i$  representa el dato del año  $m$ -ésimo correspondiente a la variable  $x^i$ . Al mismo tiempo que,  $\bar{x}^i$  representa el promedio de la variable  $x^i$ :

$$\bar{x}^i = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N x_m^i \quad (6)$$

### 3. Tratamiento de datos y los resultados

Los datos que fueron hallados fueron los momentos centrados y los autovalores junto con los autovectores asociados al momento dos. Para computar los momentos se tomaron las ecuaciones mostradas en [2,3,4], usando vectores para almacenar los datos y aplicando el producto punto entre vectores para simplificar las sumatorias.

En el momento 1,  $\mu_1$ , se dividió el valor obtenido con la ecuación entre la sumatoria de masas, para hacer coincidir su valor con el del centro de masas del sistema.

$$\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i (|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)}{\sum_{i=1}^N v_i} = |r_{cm}\rangle. \quad (7)$$

En el momento 2,  $\mu_2$ , se declararon los vectores que contienen las posiciones en  $x$  y en  $y$  en orden,  $|x\rangle$  y  $|y\rangle$ . Igualmente, se declaró al vector con las masas,  $|m\rangle$ . Que nos permiten tener a las componentes de  $\mu_2$  como:

$$\begin{aligned} \mu_{211} &= \langle m | (|x\rangle - \bar{x}^1 |1\rangle) \odot (|x\rangle - \bar{x}^1 |1\rangle) \rangle, \\ \mu_{212} &= \langle m | (|y\rangle - \bar{x}^2 |1\rangle) \odot (|x\rangle - \bar{x}^1 |1\rangle) \rangle, \\ \mu_{221} &= \langle m | (|x\rangle - \bar{x}^1 |1\rangle) \odot (|y\rangle - \bar{x}^2 |1\rangle) \rangle, \\ \mu_{222} &= \langle m | (|y\rangle - \bar{x}^2 |1\rangle) \odot (|y\rangle - \bar{x}^2 |1\rangle) \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $|1\rangle$  representa el vector de tamaño  $1 \times N$  con todas sus componentes iguales a 1, y  $\odot$  representa producto componente a componente, descrito de la siguiente manera:

Si  $|a\rangle = a^i |e_i\rangle$  y  $|b\rangle = b^i |e_i\rangle$  son vectores, entonces:

$$|a\rangle \odot |b\rangle = a^i b^i |e_i\rangle = c^i |e_i\rangle. \quad (9)$$

Con lo cual  $|a\rangle \odot |b\rangle$  es un vector.

La razón para representar las componentes del momento 2 en la forma de [8], en lugar de las típicas sumatorias [4], es porque este tipo de cuentas son más sencillas de codificar. Ya que, existen rutinas predefinidas en *python* para hacer productos punto y multiplicación de vectores componente a componente como en [9]. La librería utilizada en este artículo fue *numpy*.

Finalmente, para hacer que el momento 2 coincidiera con el tensor de inercia (ver ecuación ||) se realizaron los siguientes cambios a la matriz:

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} \mu_{211} & \mu_{212} \\ \mu_{221} & \mu_{222} \end{pmatrix} \rightarrow I = \mu'_2 = \begin{pmatrix} \mu_{222} & -\mu_{212} \\ -\mu_{221} & \mu_{211} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

donde  $I$  denota al tensor de inercia.

Para el caso tridimensional, se usaron ecuaciones parecidas a [1,7,8] y para el tensor de inercia se realizó lo siguiente:

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} \mu_{211} & \mu_{212} & \mu_{213} \\ \mu_{221} & \mu_{222} & \mu_{223} \\ \mu_{231} & \mu_{232} & \mu_{233} \end{pmatrix} \rightarrow I = \mu'_2 = \begin{pmatrix} \mu_{222} + \mu_{233} & -\mu_{212} & -\mu_{213} \\ -\mu_{221} & \mu_{211} + \mu_{233} & -\mu_{223} \\ -\mu_{231} & -\mu_{232} & \mu_{211} + \mu_{222} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

con el objetivo de garantizar que el tensor de inercia sea de la forma correcta, como en [referenciar]. De la misma manera, se calcularon los autovalores y los autovectores del momento 2. En este caso, se usó la función *numpy.linalg.eig()*, que recibe como dato de entrada a una matriz cuadrada,  $M$  y devuelve a los autovalores y autovectores, estos últimos ya normalizados, es decir, los devuelve como vectores unitarios.

Adicionalmente, se creo una base ortogonal,  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ , con los autovectores del tensor de inercia. Luego, se determinó la matriz de cambio de coordenadas de la base cartesiana,  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ , a la base propia. Para esto se sigue que las coordenadas transforman de la siguiente forma: Si  $(x, y) \rightarrow (x^1, x^2)$  son las coordenadas cartesianas y  $(u, v) \rightarrow (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$  las coordenadas en la base propia, entonces:

$$x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{x}^j. \quad (12)$$

Luego, por la condición de ortogonalidad:

$$\tilde{x}^j = \left( \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \right)^{-1} x^i, \quad (13)$$

donde se quizo representar la transformación de esta forma puesto que permite calcular más sencillamente a  $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}$  y luego a su inversa. Si suponemos que las base propia tiene la forma:

$$|\psi_1\rangle = a_1 |i\rangle + a_2 |j\rangle, \quad |\psi_2\rangle = b_1 |i\rangle + b_2 |j\rangle.$$

Y si  $|x\rangle = \tilde{x}^1 |\psi_1\rangle + \tilde{x}^2 |\psi_2\rangle$  un vector genérico en la base propia, entonces:

$$\begin{aligned} |x\rangle &= \tilde{x}^1 (a_1 |i\rangle + a_2 |j\rangle) + \tilde{x}^2 (b_1 |i\rangle + b_2 |j\rangle) \\ &= (\tilde{x}^1 a_1 + \tilde{x}^2 b_1) |i\rangle + (\tilde{x}^1 a_2 + \tilde{x}^2 b_2) |j\rangle \\ &= x^1 |i\rangle + x^2 |j\rangle \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} x^1 &= \tilde{x}^1 a_1 + \tilde{x}^2 b_1 \\ x^2 &= \tilde{x}^1 a_2 + \tilde{x}^2 b_2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

que constituye a las componentes de los vectores propios en la base cartesiana puestos en columnas. Bajo esa lógica, la matriz de cambio de coordenadas consistió en la matriz inversa a la matriz  $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}$ , que en este caso particular corresponde a las componentes de los autovectores en la base cartesiana dispuestos en columnas, como lo muestra [14]. Esta última expresión puede extenderse de forma similar para cuando se buscan hallar las matrices de cambio de coordenadas de la covarianza del PIB y el de caso 3D del sistema de partículas.

Por otro lado, para el caso del PIB, se realizaron cálculos parecidos a las ecuaciones [1,8] para calcular el momento 2. Este momento 2 correspondió a la matriz de covarianza de los datos. Cabe resaltar que en este caso, los vectores tuvieron 4 componentes (cada asociada a un porcentaje del PIB), por lo que, la matriz de covarianza fue de tamaño  $4 \times 4$ . La cantidad de variables,  $(x^i)$ , fueron 4 que correspondieron al porcentaje del PIB destinado a Defensa, Salud, Educación, y Ciencia y Tecnología, en ese orden como se mencionó en seccion es anteriores. Al mismo tiempo, la cantidad de datos fue de  $N = 15$ . Luego, se calculó la matriz de correlación,  $CORR$ , basada en la ecuación [5]. El código creado en este reporte puede hallarse en el [repositorio](#).

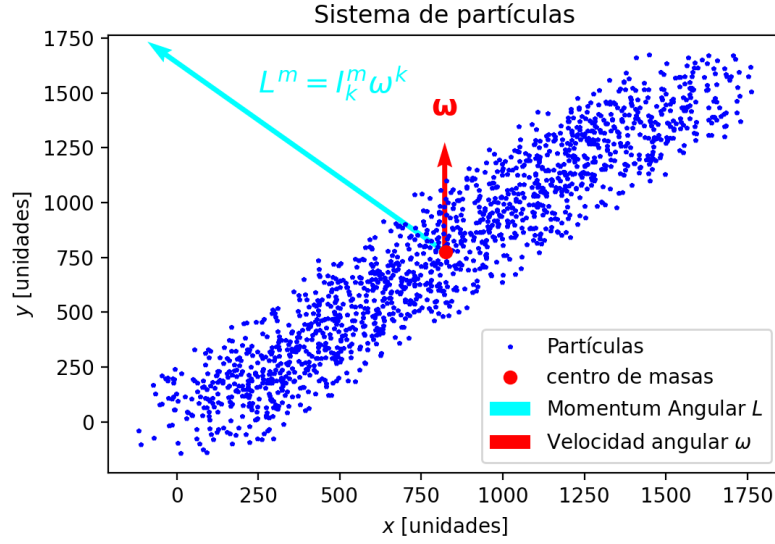


Figura 1: En esta figura se aprecia el sistema de partículas junto con el respectivo centro de masa. El vector  $\omega = 1|j\rangle$  fue usado para calcular  $L$ , mediante la ecuación  $L^m = I_k^m \omega^k$ . Observe que el vector de momento angular,  $L$ , apunta en la dirección esperada en base a  $\mathbf{L} = \sum_i m \mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i$ .

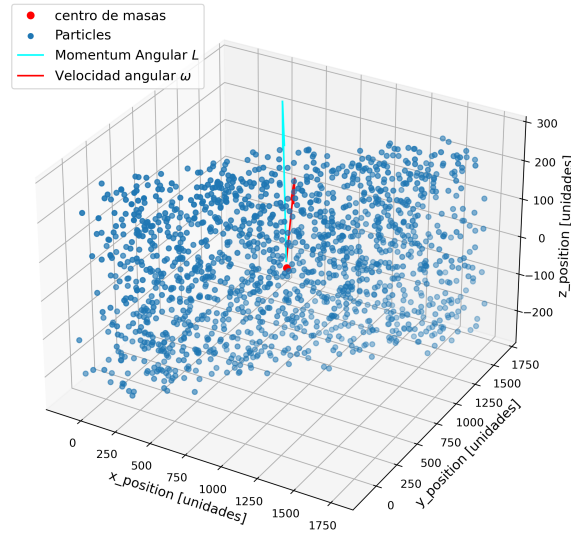


Figura 2: En esta figura se aprecia el sistema de partículas junto con el respectivo centro de masa. El vector  $\omega = 1|k\rangle$  fue usado para calcular  $L$ , mediante la ecuación  $L^m = I_k^m \omega^k$ . Observe que la ubicación del centro de masas es coherente con las partículas alrededor, y que el vector de momento angular,  $L$ , apunta en la dirección esperada basado en el caso 2D.

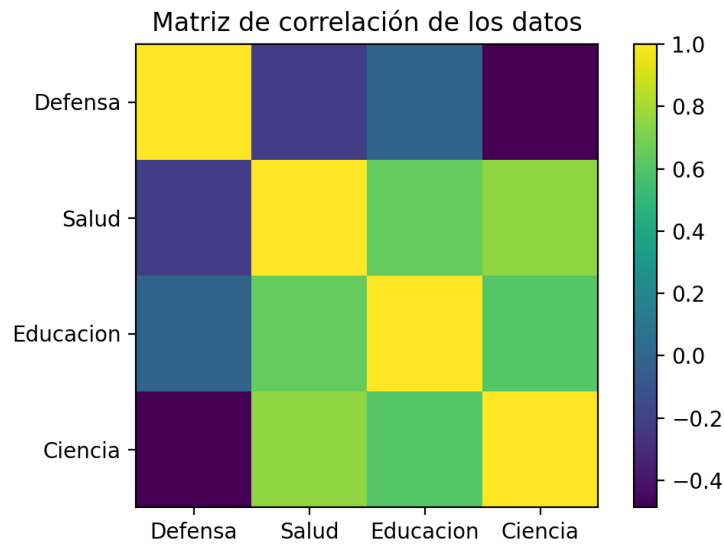


Figura 3: En esta figura se aprecia la matriz de correlación de datos entre los porcentajes del PIB. La mayor correlación de datos se da entre los datos de salud, educación y ciencia. Indicando que un aumento del PIB en Salud está relacionado con un aumento en educación y ciencia. Los gastos en defensa no están para nada relacionados con los demás de la lista.

#### 4. Conclusiones y Recomendaciones

Con base en lo anterior se concluye que:

- Para el inciso 1 al solucionarlo se obtiene que el momento de orden cero es la masa total del sistema, que el momento de orden uno al dividirlo entre la masa total y tomar en cuenta el vector de centro geométrico se obtiene que corresponda al centro de masa, y que el momento de orden 2 al acomodar correctamente sus componentes se obtiene el tensor de momento de inercia del sistema dado. Lo anterior mencionado se visualizó coherentemente para el caso bidimensional y tridimensional.
- Se apreció que los vectores cartesianos no son autovectores del tensor momento de inercia, sin embargo estos autovectores si forman una base para  $R^3$ .
- Se encontraron los ejes principales de inercia en los cuales la distribución de masa se organiza de forma más simple.
- Finalmente para el inciso 1 se encontró la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales, repitiendo lo anterior para el caso 3D ilustrando visualmente buenos resultados.

Por otro lado con base en el desarrollo del marco teórico y los resultados obtenidos, se concluye lo siguiente para el inciso 2.

- Se halló la matriz de covarianza y de correlación correspondientes a los parámetros de los datos económicos nacionales del PIB empleados en Defensa, Salud, Educación, Ciencia y Tecnología. Y se presentó el resultado de manera ilustrativa por medio de una matriz de espéctros.
- Se hallaron los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza, los cuales podrían interpretarse como los patrones normales del cambio de porcentajes del PIB.
- Los cambios del porcentaje del PIB en Salud, Educación y Ciencia están fuertemente relacionados entre sí, como lo indicó la matriz de correlación. Lo que implica que estos tres gastos tienden a crecer o disminuir igual, como si fueren un solo factor.
- Los gastos en defensa no se relacionaron en nada con los de Salud, Educación o ciencia. Llegando a valores negativos al compararse con los demás gastos. Las correlaciones negativas implicaron que un aumento de gastos en defensa se relaciona con una disminución de los gastos en los demás y viceversa.
- Para finalizar se halló la matriz de transformación que nos lleva de la matriz en la base original a la representación de la misma en la base de autovalores y autovectores

Para finalizar cabe destacar, que este trabajo se basó en el documento guía [1] y en los libros del curso [2].

## 5. Referencias

A continuación se presenta el material bibliográfico tomado en cuenta para el desarrollo de este informe

### Referencias

- [1] Núñez L (2020) Tensores y autovalores URL <https://github.com/nunezluis/MisCursos/blob/main/MisMateriales/Asignaciones/TallerTensores/TallerTensoresAutovalores.pdf>.
- [2] Hernández H, Núñez L (2021) *Matemáticas avanzadas: de los espacios lineales al análisis vectorial, con aplicaciones en Maxima* (Universidad industrial de Santander - Universidad de los Andes), , Chapter 1, , .