Modelos de Computación

Entrega de Complejidad

Ginés Carrillo Ibáñez
Grupo 1. Subgrupo 9
Juan Diego Gallego Nicolás
Grupo 1. Subgrupo 9
Yago Ibarrola Lapeña
Grupo 1. Subgrupo 9

Universidad de Murcia

Grado en Ingeniería Informática

2024/2025

Definición: dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y un entero positivo k, un k – *clique* es un subgrafo de G que es completo. $G' = (V', E') \subseteq (V, E)$ es k – *clique* de $G \Leftrightarrow \frac{|V'|(|V'|-1)}{2} \Leftrightarrow \forall v, w \in V', v \neq w \ (v, w) \in E'$. Un k – *clique* también puede recibir el nombre de *clique* de orden k.

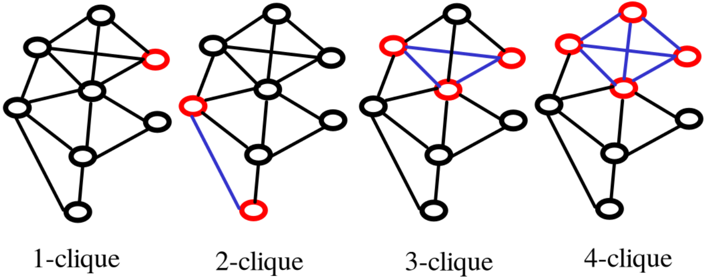
Propiedades:

- Todo grafo no vacío tiene al menos un 1 – *clique*
- Todo grafo $G = (V, E)$ con $E \neq \emptyset$ tiene al menos un 2 – *clique*
- Si un grafo tiene un k – *clique*, tiene *cliques* de todos los órdenes de 1
- Todo grafo completo de n vértices tiene *cliques* de todos los órdenes de 1 a n

Problema Decisional de la Clique en un Grafo No Dirigido

k – clique

En el siguiente grafo podemos encontrar cliques de órdenes de 1 hasta 4:



Definición: se define el lenguaje $K - CLIQUE$ como:

$$K - CLIQUE := \{\langle G\rangle \mid G \text{ es un g.n.d. con un } K - clique\}$$

Proposición: $K - CLIQUE \in \mathcal{P}\ \forall K > 0$

Demostración: basta diseñar una MT que compruebe las $\binom{|V|}{k} = \frac{|V|!}{k!(|V|-k)!} = O(|V|^k)$ posibles combinaciones sin repetición de nodos del grafo codificado. Sea M_K la MT que ante una entrada $\langle G\rangle$:

I Decodifica la entrada

II Si $|V| < K$ RECHAZA

III Para cada subconjunto $V_K \subseteq V$ de K vértices de $G = (V, E)$ comprobar si existe una arista en E para cada par de vértices distintos de V_K.

IV Si algún V_K no cumple la condición RECHAZA, sino ACEPTA

Como $|E| < |V|^2$, se trata de una máquina determinista con complejidad polinómica.

Definición: se define el lenguaje *CLIQUE* como:

$$CLIQUE := \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ es un g.n.d. con un } k - clique\}$$

Por la diapositiva anterior, pudiera parecer que $CLIQUE \in \mathcal{P}$ trivialmente. No obstante, veremos más adelante que el lenguaje es $\mathcal{NP}-$completo. Primero veamos que es $\mathcal{NP}$

Proposición: $CLIQUE \in \mathcal{NP}$
Demostración: Sea M_{CLIQUE} la MT no determinista que ante una entrada $\langle G, k\rangle$:

I Elige un subconjunto $V_k \subseteq V$ de k vértices de $G = (V, E)$

II Compruba que hay un arco entre cada par de vértices de V_k

Por el mismo razonamiento que en el caso de M_K, M_{CLIQUE} es una $MTND$.

Para demostrar la $\mathcal{NP}-$completitud de CLIQUE vamos a necesitar las siguientes propiedades que no demostramos:

1. El lenguaje $3\mathit{SAT}$ formado por las formulas de lógica proposicional de la forma $\bigwedge_{i=1}^{n}(p_1^i \vee p_2^i \vee p_3^i)$ satisfacibles es $\mathcal{NP}-$completo.
2. **Tercer Teorema de la Reducibilidad:** sean L y L' dos lenguajes con $L \leq_p L'$. Si L es $\mathcal{NP}-$completo y L' es $\mathcal{NP}$, entonces L' es $\mathcal{NP}-$completo.

Si demostramos $3\mathit{SAT} \leq_p \mathit{CLIQUE}$ tendremos el resultado que buscamos.

Sea $\Phi = \bigwedge_{i=1}^{n} (p_1^i \vee p_2^i \vee p_3^i)$ una fórmula proposicional cualquiera. Sea M la MT que toma como entrada Φ y construye un grafo G_Φ:

1. Para cada $i = 1, \ldots, n$, crea un grupo de tres vértices $V_{p_1^i}, V_{p_2^i}, V_{p_3^i}$
2. Crea una arista entre cualquier par de véctices $V_{p_a^i}, V_{p_b^j}$ que cumpla:

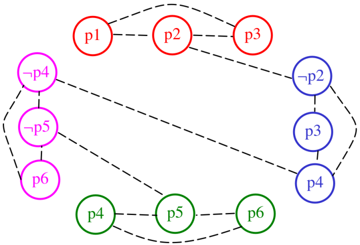
   $i \neq j$
   $p_a^i \neq \neg p_b^j$ (como variables)

Es decir, crea 3 nodos por cláusula (uno por literal) y conecta cada nodo con todos los nodos de otras cláusulas con los que no haya un conflicto lógico. Es claro que el proceso de generación del grafo es polinomial con respecto al número de cláusulas de Φ

Tomemos como ejemplo la fórmula de la tarea:

$$\Phi = (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (p_3 \vee p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee p_6)$$

Aplicando el proceso definido en la diapositiva anterior, el grafo G_Φ es el complementario al siguiente[1]:



[1] Es más fácil de visualizar el complementario ya que el grafo tiene muchos vértices

Teorema: Dado un entero $k > 0$ y $\Phi = \bigwedge_{i=1}^{k}(p_1^i \vee p_2^i \vee p_3^i)$ una proposición, $\Phi \in 3SAT \Leftrightarrow G_\Phi$ tiene un $k - clique$

Demostración:
$\boxed{\Rightarrow}$ Si Φ es satisfacible. Elegimos un literal $p_i^{a_i}$ para cada $i = 1, \ldots, k$ $(a_i = 1, 2, 3)$. Los vértices $V_{p_1^{a_1}}, \ldots, V_{p_k^{a_k}}$ deben tener todos aristas entre si pues todas los literales pertenecen a cláusulas distintas y no pueden ser contradictorios. Por tanto, el grafo completo formado por dichos vértices es un $k - clique$ de $G_\Phi \in CLIQUE$.
$\boxed{\Leftarrow}$ De igual manera, si G_Φ es un grafo con un $k - clique$, este debe estar formado por vértices que corresponden a literales de cláusulas distintas y no contradictorios dos a dos. Estos literales tomados como verdaderos forman una asignación satisfactoria para Φ con lo que $Phi \in 3SAT$.

En suma, la aplicación que transforma una proposición $\Phi = \bigwedge_{i=1}^{k}(p_1^i \vee p_2^i \vee p_3^i)$ en una grafo G_Φ es polinómica y cumple $Phi \in 3SAT \Leftrightarrow G_\Phi \in CLIQUE$. Esto significa que es una polirreducción.

Aplicando directamente el **Tercer Teorema de la Reducibilidad**, $G_\Phi \in \mathcal{NP}$−completo. $\square$