Demostraciones

Esteban Molina y Juan Diego Pulido

Mayo 2023

1 Introducción

Las distribuciones P_θ con $\theta \in \Theta$ pertenece a la familia exponencial de distribuciones si su función de masa de probabilidad (fmp) o función de densidad de probabilidad (fdp) puede escribirse como:

$$p(x|\eta) = h(x) \exp(\eta t(x) - a(\eta))$$

donde $h(x)$, $a(\eta)$ y $t(x)$ son funciones reales.

2 Distribución Bernoulli

La distribución Bernoulli se utiliza para la regresión logística. La función de masa de probabilidad (fmp) para una variable aleatoria X que sigue una distribución Bernoulli con parámetro p es:

$$p(x|p) = p^x (1-p)^{1-x}$$

donde $x \in \{0, 1\}$.

Para expresar esta distribución en la forma de la familia exponencial, podemos realizar los siguientes pasos:

1. Reescribimos la fmp:

$$p(x|p) = (1-p) \left(\frac{p}{1-p} \right)^x$$

2. Definimos $\eta = \log \left(\frac{p}{1-p} \right)$, por lo tanto, $p = \frac{e^\eta}{1+e^\eta}$.
3. Entonces, la fmp se puede escribir como:

$$p(x|\eta) = \left(\frac{1}{1+e^\eta} \right) (e^\eta)^x$$

4. Separamos los términos independientes de x:

$$p(x|\eta) = \frac{e^{\eta x}}{1+e^\eta}$$

5. Identificamos las funciones $h(x)$, $t(x)$, y $a(\eta)$:

$$h(x) = 1$$

$$t(x) = x$$

$$a(\eta) = \log(1 + e^{\eta})$$

Así, la distribución Bernoulli pertenece a la familia exponencial.

3 Distribución Normal

La distribución normal (utilizada en la regresión lineal) tiene la función de densidad de probabilidad (fdp):

$$p(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Para simplificar, consideremos el caso con varianza fija, es decir, σ^2 es constante. Entonces, podemos reescribir la fdp como:

$$p(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma^2}\right)$$

Separando los términos en μ y x:

$$p(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$$

Identificamos las funciones $h(x)$, $t(x)$, y $a(\mu)$:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$t(x) = x$$

$$a(\mu) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2}$$

Así, la distribución normal pertenece a la familia exponencial.

4 Distribución Poisson

La distribución Poisson se utiliza para la regresión Poisson sobre conteos. La función de masa de probabilidad (fmp) es:

$$p(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Para expresar esto en la forma de la familia exponencial, podemos realizar los siguientes pasos:

1. Reescribimos la fmp:

$$p(x|\lambda) = \frac{e^{x \log \lambda} e^{-\lambda}}{x!}$$

2. Identificamos las funciones $h(x)$, $t(x)$, y $a(\lambda)$:

$$h(x) = \frac{1}{x!}$$

$$t(x) = x$$

$$a(\lambda) = \lambda$$

Así, la distribución Poisson pertenece a la familia exponencial.

5 Conclusión

Se ha demostrado las distribuciones Bernoulli, normal y Poisson pueden escribirse en la forma de la familia exponencial de distribuciones. Esto se logra identificando las funciones $h(x)$, $t(x)$ y $a(\eta)$ para cada una de estas distribuciones.