ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
INGENIERÍA EN COMPUTACIÓN

PERÍODO ACADÉMICO: 2025-A
ASIGNATURA: ICCD412 Métodos Numéricos **GRUPO:** GR2
TIPO DE INSTRUMENTO: Practica 4
FECHA DE ENTREGA LÍMITE: 02/06/2025
ALUMNO: Murillo Tobar Juan

---

1 TEMA

Polinomio de Taylor, Lagrange

2 OBJETIVOS

- Comprender como se obtiene el polinomio de Taylor a partir de la resolución y simplificación de sumatorios que implican multiplicaciones.
- Relacionar las diferencias entre la serie de sumas del polinomio de Taylor y la serie de multiplicaciones de la serie de Lagrange.

3 MARCO TEÓRICO

Polinomio de Taylor

Como se menciona en [1], este método nos proporciona un medio para aproximar un valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto. Además, se establece que cualquier "smooth function", es decir una función que es derivable infinitamente, puede ser aproximada como un polinomio.

4 DESARROLLO

Para las siguientes funciones, usar el polinomio de Taylor:

$e^{sinx}, x_0 = 1, n = 3$

Primero sacamos todas sus derivadas

a) $f(x) = e^{sinx}$

$f'(x) = e^{sinx}cosx$

$f''(x) = e^{sinx}cos^2x - sin(x)e^{sinx}$

$f'''(x) = (-3sinx + cos^2x - 1)e^{sinx}cosx$

$f''''(x) = (3sin^2x - 6sinxcos^2x + sinx + cos^4x - 4cos^2x)e^{sinx}$

Ahora comenzamos a resolver el sumatorio y nos quedaría la siguiente forma

$$P_n(x) = e^{sin1} + e^{sin1}cos1(x-1) + \frac{e^{sin1}cos^2(1) - sin(1)e^{sin(1)}}{2}(x-1)^2 + \frac{(-3sin(1) + cos^2(1) - 1)e^{sin(1)}cos(1)}{6}(x-1)^3$$

Ahora resolvemos el error de truncamiento Rn.

$$R_n = \frac{(3sin^2(\xi(x)) - 6sin(\xi(x))cos^2(\xi(x)) + sin(\xi(x)) + cos^4(\xi(x)) - 4cos^2(\xi(x)))e^{sin(\xi(x))}}{24}(x-1)^4$$

La función de aproximación nos quedaría como

$$P_n(x) = e^{sin1} + e^{sin1}cos1(x-1) + \frac{e^{sin1}cos^2(1) - sin(1)e^{sin(1)}}{2}(x-1)^2 + \frac{(-3sin(1) + cos^2(1) - 1)e^{sin(1)}cos(1)}{6}(x-1)^3$$

$$+$$

$$\frac{(3sin^2(\xi(x)) - 6sin(\xi(x))cos^2(\xi(x)) + sin(\xi(x)) + cos^4(\xi(x)) - 4cos^2(\xi(x)))e^{sin(\xi(x))}}{24}(x-1)^4$$

b) $ln(1 + x), x_0 = 2, n = 5$

Primero sacamos todas sus derivadas

$f(x) = ln(x + 1)$

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)}$

$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$

$f''''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$

$f'''''(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$

$f''''''(x) = -\frac{120}{(x+1)^6}$

Ahora comenzamos a resolver el sumatorio y nos quedaría la siguiente forma

$$P_n(x) = ln(1+x) + \frac{1}{(x+1)}(x-2) - \frac{1}{2(x+1)^2}(x-2)^2 + \frac{2}{6(x+1)^3}(x-2)^3 - \frac{6}{24(x+1)^4}(x-2)^4 + \frac{24}{120(x+1)^5}(x-2)^5$$

Ahora resolvemos el error de truncamiento Rn.

$$R_n = \frac{-\frac{120}{(\xi(x)+1)^6}}{720}(x-1)^6$$

$$R_n = -\frac{120}{720(\xi(x)+1)^6}(x-1)^6$$

La función de aproximación nos quedaría como

$$P_n(x) = P(x) = (1/1215)x^5 - (1/36)x^4 + (17/243)x^3 - (131/486)x^2 + (211/243)x + (ln(3) - 1126/1215) - \frac{120}{720(\xi(x)+1)^6}(x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1)$$

c) $cos2x, x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3$

Primero sacamos todas sus derivadas

$f(x) = cos2x$

$f'(x) = -2sin(2x)$

$f''(x) = -4cos(2x)$

$f'''(x) = 8sin(2x)$

$f''''(x) = 16cos(2x)$

Ahora comenzamos a resolver el sumatorio y nos quedaría la siguiente forma

$$P_n(x) = cos2x - 2sin(2x)(x - \frac{\pi}{2}) - 4cos(2x)\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2} + 8sin(2x)\frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{6}$$

$$= (-1) - 0 * (x - \pi/2) - (-2) * (x - \pi/2)^2 + 0 * (x - \pi/2)^3$$
$$= -1 + 2 * (x - \pi/2)^2$$
$$P(x) = 2x^2 - 2\pi x + (\pi^2/2 - 1)$$

Ahora resolvemos el error de truncamiento Rn.

$$R_n = \frac{16cos(2\xi(x))}{24}(x-1)^4$$

La función de aproximación nos quedaría como

$$P_n(x) = 2x^2 - 2\pi x + (\pi^2/2 - 1) + \frac{16cos(2\xi(x))}{24}(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)$$

d) $\sqrt[3]{x}, x_0 = 2, n = 4$

Primero sacamos todas sus derivadas

$f(x) = x^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$

$f''(x) = -\frac{2}{9x^{5/3}}$

$f'''(x) = \frac{10}{27x^{8/3}}$

$f''''(x) = -\frac{80}{81x^{11/3}}$

$f'''''(x) = \frac{880}{243x^{14/3}}$

Ahora comenzamos a resolver el sumatorio y nos quedaría la siguiente forma

$$P_n(x) = x^{1/3} + \frac{1}{3x^{2/3}}(x-2) - \frac{2}{9x^{5/3}}\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{10}{27x^{8/3}}\frac{(x-2)^3}{6} - \frac{80}{81x^{11/3}}\frac{(x-2)^4}{24}$$

Ahora resolvemos el error de truncamiento Rn.

$$R_n = \frac{\frac{880}{243\xi(x)^{14/3}}}{120}(x-1)^5$$

$$R_n = \frac{22}{729\xi(x)^{14/3}}(x-1)^5$$

La función de aproximación nos quedaría como

$$P_n(x) = -5/(2432^{(11/3)})x^4 + 20/(2432^{8/3})x^3 - 137/(2432^{(8/3)})x^2 + 269/(2432^{(8/3)})x + 40/(2432^{(8/3)}) + \frac{22}{729\xi(x)^{14/3}}(x-1)^5$$

e) $cos\pi x^2, x_0 = 0, n = 6$

Como el punto de evaluación es cero no se puede.

f) $\frac{x}{e^x}, x_0 = 3, n = 3$

Primero sacamos todas sus derivadas

$f(x) = \frac{x}{e^x}$

$f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x}$

$f''(x) = (x-2)e^{-x}$

$f'''(x) = (3-x)e^{-x}$

$f''''(x) = (x-4)e^{-x}$

Ahora comenzamos a resolver el sumatorio y nos quedaría la siguiente forma

$$P_n(x) = \frac{3}{e^3} - 2e^{-3}(x-3) + \frac{e^{-3}(x-3)^2}{2}$$

$$P_n(x) = \frac{3}{e^3} - 2e^{-3}x + 6e^{-3} + \frac{e^{-3}(x^2-6x+9)}{2}$$

$$P_n(x) = \left(\frac{3}{e^3} + \frac{6}{e^3}\right) + \left(\frac{-2x}{e^3} - \frac{6x}{2e^3}\right) + \frac{x^2}{2e^3} + \frac{9}{2e^3}$$

$$P_n(x) = \frac{9}{e^3} + \frac{-4x-6x}{2e^3} + \frac{x^2}{2e^3} + \frac{9}{2e^3}$$

$$P_n(x) = \frac{18}{2e^3} + \frac{9}{2e^3} + \frac{-10x}{2e^3} + \frac{x^2}{2e^3}$$

$$P_n(x) = \frac{x^2-10x+27}{2e^3}$$

Ahora resolvemos el error de truncamiento Rn.

$$R_n = \frac{(\xi-4)e^{-\xi}}{24}(x-1)^4$$

La función de aproximación nos quedaría como

$$P_n(x) = \frac{x^2-10x+27}{2e^3} + \frac{(\xi(x)-4)e^{-\xi(x)}}{24}(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)$$

Determine para el ejercicio 1.a el polinomio de Taylor dado que x = 1.5 y un error relativo de 0.0001

Para esto calcularemos los diferentes valores con redondeo de 6 cifras decimales

$P_1 = 2{,}946467$

$E_{rel} = |\frac{e^{sin(1,5)}-2{,}946467}{e^{sin(1,5)}}| = 0{,}086663$

$P_2 = 2{,}946467$

$E_{rel} = |\frac{e^{sin(1,5)}-2{,}787115}{e^{sin(1,5)}}| = 0{,}027894$

$P_3 = 2{,}702708$

$E_{rel} = |\frac{e^{sin(1,5)}-2{,}702708}{e^{sin(1,5)}}| = 0{,}003236$

$P_4 = 2{,}705180$

$E_{rel} = |\frac{e^{sin(1,5)}-2{,}705180}{e^{sin(1,5)}}| = 0{,}002324$

$P_5 = 2{,}711367$

$E_{rel} = |\frac{e^{sin(1,5)}-2{,}711366}{e^{sin(1,5)}}| = 0{,}000042$

Hasta aquí ya se cumple la condición por lo tanto seria P_4

Dados los siguientes puntos, usar el polinomio de Lagrange:

a) (2,1.43);(3.20,2.79);(4,3.56)

Encontramos los $L_n(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x-3{,}20)(x-4)}{(2{,}4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(-0{,}96)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3{,}20)}{(1{,}6)}$$

Ahora reemplazamos para formar el polinomio

$$P(x) = 1{,}43\frac{(x-3{,}20)(x-4)}{(2{,}4)} + 2{,}79\frac{(x-2)(x-4)}{(-0{,}96)} + 3{,}56\frac{(x-2)(x-3{,}20)}{(1{,}6)}$$

$$P(x) = (143/240)(x-16/5)(x-4) - (93/32)(x-2)(x-4) + (89/40)(x-2)(x-16/5)$$

$$P(x) = (143/240)x-(429/100)x+(572/75)-(93/32)x+(279/16)x-(93/4)+(89/40)x-(1157/100)x+(356/25)$$

$$P(x) = -41/480x^2 + 631/400x - 83/60$$

b) (1,10);(-4;10);(-7;34)

$$L_0(x) = \frac{(x+4)(x+7)}{(40)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x+7)}{(-15)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{(24)}$$

Ahora reemplazamos para formar el polinomio

$$P(x) = 10\frac{(x+4)(x+7)}{(40)} + 10\frac{(x-1)(x+7)}{(-15)} + 34\frac{(x-1)(x+4)}{(24)}$$

$$= (1/4)(x+4)(x+7) - (2/3)(x-1)(x+7) + (17/12)(x-1)(x+4)$$

$$= (1/4)(x+11x+28) - (2/3)(x+6x-7) + (17/12)(x+3x-4)$$

$$= (1/4)x + (11/4)x + 7 - (2/3)x - 4x + (14/3) + (17/12)x + (17/4)x - (17/3)$$

$$x : (1/4 - 2/3 + 17/12) = (3/12 - 8/12 + 17/12) = 1$$

$$x : (11/4 - 4 + 17/4) = (11/4 - 16/4 + 17/4) = 3$$

$$CTE : (7 + 14/3 - 17/3) = (21/3 + 14/3 - 17/3) = 6$$

$$P(x) = x^2 + 3x + 6$$

c) (4,808);(0,4);(-6;1438);(-4;160)

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x+6)(x+4)}{(320)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-4)(x+6)(x+4)}{(-96)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-4)(x-0)(x+4)}{(-120)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-4)(x-0)(x+6)}{(64)}$$

Ahora reemplazamos para formar el polinomio

$P(x) = 808x(x+6)(x+4)/320+4(x-4)(x+6)(x+4)/(-96)+1438(x-4)x(x+4)/(-120)+160(x-4)x(x+6)/64$

$= (101/40)x+(101/4)x+(303/5)x-(1/24)x-(1/4)x+(2/3)x+4-(719/60)x+(2876/15)x+(5/2)x+5x-60x$

$= [(303/120-5/120-1438/120+300/120)x]+[(100/4+5)x]+[(909/15+10/15+2876/15-900/15)x]+[4]$

$= (-840/120)x + 30x + (2895/15)x + 4$

$$P(x) = -7x^3 + 30x^2 + 193x + 4$$

Corrección del código

```
def polinomio_taylor(func_str, x0, grado, decimales):

    """
    :func_str: string, función original
    :x0: entero, punto alrededor del cual se desarrolla el polinomio
    :grado: entero, grado de polinomio de Taylor
    :decimales: entero, decimales a truncar
    :return: polinomio de taylor aproximado a la función origianl, f(x) = P_n(x) + R_n(x)
    """

    x = sp.Symbol('x')
    f = sp.sympify(func_str)

    taylor_expr = 0

    for n in range(grado + 1):
        derivada = f.diff(x, n)
        deriv_val = derivada.subs(x, x0)
        factorial_n = sp.factorial(n)
        coef = deriv_val / factorial_n

        if coef.is_number:
            coef = truncar(float(coef), decimales)

        if coef == 0:
            continue

        base = (x - x0)**n if x0 != 0 else x**n
        taylor_expr += coef * base

    taylor_expr = sp.expand(taylor_expr)
    taylor_expr = sp.collect(taylor_expr, x)
    lista = ["("+str(truncar(taylor_expr.coeff(x,aux), decimales))+")*x**"+str(aux) for aux in range(grado+1)][::-1]
    exp = "+".join(lista)
    print(exp)
    taylor_expr = sp.sympify(exp)
    Pn_str = str(taylor_expr)

    n_plus_1 = grado + 1
    factorial_np1 = sp.factorial(n_plus_1)
    inverso_truncado = truncar(1 / float(factorial_np1), decimales)

    base_error = sp.expand((x - x0)**n_plus_1)
    Rn_str = f"( {inverso_truncado}*{func_str}^({n_plus_1})(\xi(x)) )*({base_error})"

    print(f"P_n(x) = {Pn_str}")
    print(f"R_n(x) = {Rn_str}")

    return f"f(x) = {Pn_str} + {Rn_str}"
```

Cambio realizado

```
    lista = ["("+str(truncar(taylor_expr.coeff(x,aux), decimales))+")*x**"+str(aux) for aux in range(grado+1)][::-1]
    exp = "+".join(lista)
    print(exp)
    taylor_expr = sp.sympify(exp)
```

CONCLUSIONES

- El polinomio de Taylor cuando el centroide es 0 no funciona y para su resolución se debe aplicar los valores al sumatorio.
- El polinomio de Lagrange es un poco menos complejo a la hora de realizar operaciones como es el caso del polinomio de Taylor.

RECOMENDACIONES

- Fijarse en X_0 cuando nos toque realizar el polinomio de Taylor.

REFERENCIAS

[1] R. C. Steven Chapra, *Numerical Methods for Engineers 7th Edition*. McGraw-Hill, 2014. [Online]. Available: http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=f84e847c0120647f7143d7e036978163