ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
INGENIERÍA EN COMPUTACIÓN

PERÍODO ACADÉMICO: 2025-A
ASIGNATURA: ICCD412 Métodos Numéricos **GRUPO:** GR2
TIPO DE INSTRUMENTO: Tarea 10
FECHA DE ENTREGA LÍMITE: 01/06/2025
ALUMNO: Murillo Tobar Juan

TEMA

Splines Cúbicos

OBJETIVOS

- Comprender como se obtiene las ecuaciones para hallar los coeficientes para los diferentes splines cúbicos.
- Realizar ejercicios con splines en condiciones frontera natural y condicionado, además saber cuales son sus diferencias.

DESARROLLO

Dados los puntos x = [-2, - 1, 1,3], y = [3, 1, 2, -1] a) Determine el spline cúbico con frontera natural

Primero establecemos los intervalos para los splines: $[-2,-1]$, $[-1,1]$, $[1,3]$

$S_0 = a_0 + b_0(x+2) + c_0(x+2)^2 + d_0(x+2)^3 = y_0 = 3$

$S_1 = a_1 + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 = y_1 = 1$

$S_2 = a_2 + b_2(x-1) + c_2(x-1)^2 + d_2(x-1)^3 = y_2 = 2$

Ahora encontramos las ecuaciones para obtener los coeficientes.

$a_0 + b_0(0) + c_0(0)^2 + d_0(0)^3 = y_0 = 3$

(1) $a_0 = 3$

$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 1$

(2) $b_0 + c_0 + d_0 = -2$

$a_1 + b_1(0) + c_1(0) + d_1(0) = 1$

(3) $a_1 = 1$

$a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 2$

(4) $2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 1$

(5) $a_2 = 2$

$a_2 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = -1$

(6) $2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = -3$

$b_0 + 2c_0(x_1 + 2) + 3d_0(x_1 + 2)^2 = b_1 + 2c_1(0) + 3d_1(0)$

(7) $b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$

$2c_0 + 6d_0(x_1 + 2) = 2c_1 + 6d_1(0)$

(8) $2c_0 + 6d_0 = 2c_1$

$b_1 + 2c_1(2) + 3d_1(2)^2 = b_2$

(9) $b_1 + 4c_1 + 12d_1 = b_2$

(10) $2c_1 + 12d_1 = 2c_2$

(11) $2c_0 = 0$

(12) $2c_2 + 12d_2 = 0$

(11.a) $b_0 = B_0 = 1$

(12.b) $b_2 + 4c_2 + 12d_2 = -1$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos

$d_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4}b_1$

$b_2 = -2b_1 - 2c_1 + \frac{3}{2}$

$2c_2 = -4c_1 - 3b_1 + \frac{3}{2}$

$2b_2 + \frac{8}{3}c_2 = -3$

$-8b_1 - \frac{28}{3}c_1 = -8$

Reemplazando con las demás ecuaciones obtenemos los siguiente splines

$S_0 = 3 - \frac{28}{3}(x+2) + \frac{6}{11}(x+2)^3 = 3$

$S_1 = 1 - \frac{10}{11}(x+1) + \frac{18}{11}(x+1)^2 - \frac{41}{88}(x+1)^3 = 1$

$S_2 = 2 + \frac{1}{22}(x-1) - \frac{51}{44}(x-1)^2 + \frac{17}{88}(x-1)^3 = 2$

$6 - \frac{28}{3}(x+2) + \frac{6}{11}(x+2)^3 - \frac{10}{11}(x+1) + \frac{18}{11}(x+1)^2 - \frac{41}{88}(x+1)^3 + \frac{1}{22}(x-1) - \frac{51}{44}(x-1)^2 + \frac{17}{88}(x-1)^3 = 6$

b) Determine el spline cúbico con frontera condicionada B0 = 1 BN=-1

En este caso obtendremos los siguientes splines

$S_0 = 3 - 1(x+2) - \frac{136}{23}(x+2)^2 + \frac{67}{23}(x+2)^3 = 3$

$S_1 = 1 - \frac{48}{23}(x+1) + \frac{65}{23}(x+1)^2 - \frac{141}{184}(x+1)^3 = 1$

$S_2 = 2 + \frac{1}{46}(x-1) - \frac{163}{92}(x-1)^2 + \frac{93}{184}(x-1)^3 = 2$

Dados los puntos (0,1); (1,5); (2,3), determine el spline cúbico

Primero establecemos los intervalos para los splines: $[0,1]$, $[1,2]$

$S_0 = a_0 + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 + d_0(x-0)^3 = y_0 = 1$

$S_1 = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3 = y_1 = 5$

Obtenemos las siguientes ecuaciones

(1) $a_0 = 1$

(2) $b_0 + c_0 + d_0 = 4$

(3) $a_1 = 5$

(4) $b_1 + c_1 + d_1 = -2$

(5) $b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$

(6) $2c_0 + 6d_0 = 2c_1$

(7) $2c_0 = 0$

(8) $2c_1 + 6d_1 = 0$

Que resolviendo el sistema obtenemos los siguientes splines

$S_0 = 1 + \frac{11}{2}(x-0) - \frac{3}{2}(x-0)^3 = 1$

$S_1 = 5 + 1(x-1) - \frac{9}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{2}(x-1)^3 = 5$

Dados los puntos (-1,1); (1,3);(0.5,4.8), determine el spline cúbico sabiendo que $f'(x_0) = 1$, $f'(x_n) = 2$

Primero establecemos los intervalos para los splines: $[-1,1]$, $[1,0{,}5]$

$S_0 = a_0 + b_0(x+1) + c_0(x+1)^2 + d_0(x+1)^3 = y_0 = 1$

$S_1 = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3 = y_1 = 3$

Obtenemos las siguientes ecuaciones

(1) $a_0 = 1$

(2) $2b_0 + 4c_0 + 8d_0 = 2$

(3) $a_1 = 3$

(4) $-0{,}5b_1 + 0{,}25c_1 - 0{,}125d_1 = 1{,}8$

(5) $b_0 + 4c_0 + 12d_0 = b_1$

(6) $2c_0 + 12d_0 = 2c_1$

(7) $b_0 = 1$

(8) $b_1 - c_1 + 0{,}75d_1 = 2$

En este caso para obtener mas precisión realizaremos las operaciones en forma de fracción.

$S_0 = 1 + 1(x+1) + \frac{74}{15}(x+1)^2 - \frac{37}{15}(x+1)^3 = 1$

$S_1 = 3 - \frac{133}{15}(x-1) - \frac{148}{15}(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 = 3$

REFERENCIAS