Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Tarea 2 Evaluada

Nombre	Matrícula
Juan Pablo Echeagaray González	A00830646
Verónica Victoria García De la Fuente	A00830383
Emily Rebeca Méndez Cruz	A00830768
Eugenio Santiesteban Zolezzi	A01720932
Daniel de Zamacona Madero	A01570576

Optimización Estocástica

MA2004B

Jaime Eduardo Martínez Sánchez

15 de agosto del 2022

Problemas

Problema 1

Use una ruleta con 6 colores diferentes y equi-probables, y simule la probabilidad de éxito de cada una de ellas. Realice 100 réplicas.

El resultado de esta simulación puede observarse en la figura 1.

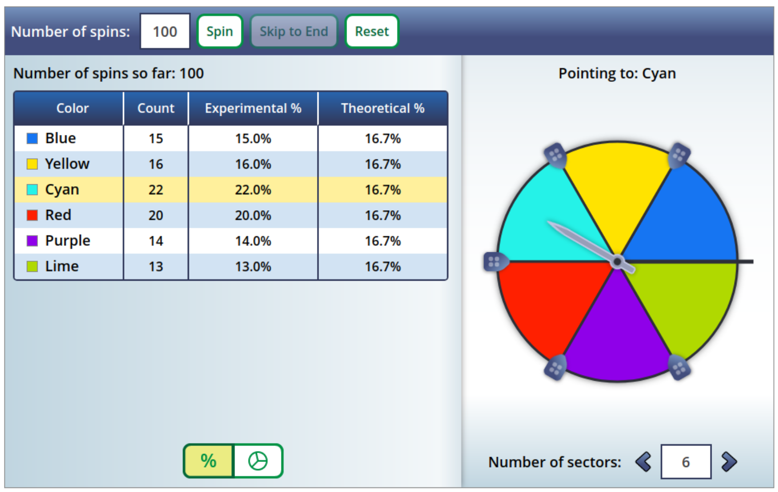


Figura 1: Simulación de la ruleta con 6 colores diferentes y equi-probables

Problema 2

Use 4 colores diferentes en la ruleta, de tal forma que el primer color tenga el doble de probabilidad de éxito del segundo color, el segundo color tenga la tercera parte de probabilidad del tercer color, y el último color tenga una probabilidad de éxito igual a la mitad de la suma de las probabilidades del segundo y tercer color.

1. Calcule la probabilidad teórica de éxito de cada color.
2. Use la ruleta para simular las probabilidades del inciso anterior usando 200 réplicas

En este caso, el calcular la probabilidad teórica de éxito de cada uno de los colores se traduce en resolver un sistema de ecuaciones lineales; esto porque del problema sabemos lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{4} P(x_i) = 1$$
$$P(x_1) = 2P(x_2)$$
$$P(x_2) = \frac{1}{3}P(x_3)$$
$$P(x_4) = \frac{1}{2}(P(x_2) + P(x_3))$$

Si ahora traducimos este sistema de ecuaciones que tiene como variables probabilidades a uno en el que solamente se trabajen con simples variables, tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Cuando resolvemos este sistema de ecuaciones llegamos al siguiente vector de probabilidades:

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.125 \\ 0.375 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Así, la probabilidad de cada color es respectivamente cada una de las entradas del vector anterior. Simulando esto con la ruleta de colores, observamos las probabilidades experimentales en la figura 2:

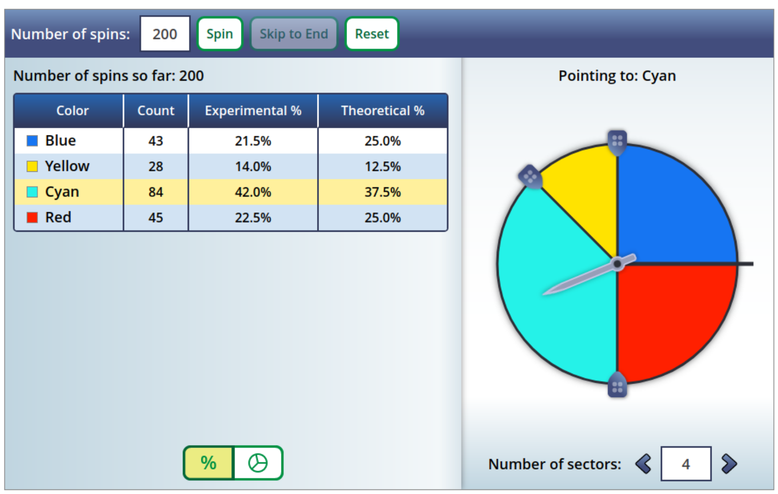


Figura 2: Simulación de la ruleta con 4 colores diferentes y probabilidades distintas

Problema 3

Una agencia distribuidora de autos, tiene disponible en exhibición para su venta los siguientes productos: 15 coches compactos, 5 coches de lujo, 8 camionetas y 7 jeeps. Un hotel va a realizar una compra de 5 unidades, la agencia está interesada en conocer la probabilidad de que el hotel compre 2 coches de lujo y 3 camionetas.

1. Encuentre la probabilidad teórica de este evento.
2. Use la ruleta para simular la probabilidad el inciso anterior.

3. Realizar un código (en R, Matlab, Python, etc.) para simular el resultado del inciso 1.

Reconociendo que la distribución que seguirá este experimento es de carácter hipergeométrico multivariado, podemos calcular la probabilidad teórica solicitada mediante la ecuación:

$$P(0,2,3,0) = \frac{\binom{15}{0}\binom{5}{2}\binom{8}{3}\binom{7}{0}}{\binom{35}{5}}$$
$$P(0,2,3,0) \simeq 0.017$$

El código implementado se encuentra en la sección de anexos.

Problema 4

En una urna se tienen 30 canicas rojas, 24 negras, 8 amarillas, 15 blancas y 13 verdes. Si se procede a sacar aleatoriamente 5 canicas sin reemplazo y nos interesa obtener la probabilidad de que 2 canicas sean del mismo color,

1. Calcule la probabilidad exacta de este evento.
2. Realice una simulación de 50 réplicas para obtener una estimación de la probabilidad solicitada en el inciso anterior

La simulación, así como los resultados de la misma pueden verse en los anexos.

Problema 5

Una cadena de Markov, $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$, con 3 estados tiene la siguiente matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Calcule las siguientes probabilidades:

1. $\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_0 = 1)$
2. $\mathbb{P}(X_3 = 2 \mid X_0 = 2)$
3. $\mathbb{P}(X_2 = 1)$
4. $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1)$
5. $\mathbb{P}(X_3 = 2 \mid X_0 = 1)$
6. $\mathbb{P}(X_3 = 0)$

Para el inciso 1:

$$\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_0 = 1) = P_{10}P_{00} + P_{11}P_{10} + P_{12}P_{20}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{11}{20} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_0 = 1) = \frac{313}{1200} \simeq 0.26083$$

Para el inciso 2:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 = 2 \mid X_0 = 2) =& P_{22}P_{22}P_{22} + P_{20}P_{02}P_{22} + P_{20}P_{00}P_{02} + P_{22}P_{20}P_{02} + P_{21}P_{12}P_{22} + \\ & P_{21}P_{11}P_{22} + P_{22}P_{21}P_{12} + P_{20}P_{01}P_{12} + P_{21}P_{10}P_{02} \\ \mathbb{P}(X_3 = 2 \mid X_0 = 2) =& \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \\ & + \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{20} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X_3 =& 2 \mid X_0 = 2) = \frac{1723}{9000} \simeq 0.19144\end{aligned}$$

Para el inciso 3 no se dispone de un vector de probabilidades para los estados iniciales, así que supondremos que los 3 estados tienen la misma probabilidad de haber ocurrido:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \\ \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2)\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0) = P_{00}P_{01} + P_{01}P_{11} + P_{02}P_{21}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{20} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0) = \frac{13}{24}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) = P_{11}P_{11} + P_{10}P_{01} + P_{12}P_{21}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) = \frac{11}{20} \cdot \frac{11}{20} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) = \frac{219}{400}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = P_{21}P_{11} + P_{22}P_{21} + P_{20}P_{01}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{20} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = \frac{11}{20}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{13}{24} + \frac{219}{400} + \frac{11}{20}\right)$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1967}{3000} \simeq 0.54638$$

Para el inciso 4:

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0) = P_{00}P_{01} + P_{01}P_{11} + P_{02}P_{21} = \frac{13}{24}$$

Para el inciso 5:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = 2 \mid X_0 = 1) =& P_{12}P_{22}P_{22} + P_{10}P_{01}P_{12} + P_{12}P_{21}P_{12} + P_{11}P_{11}P_{12} + \\
& P_{10}P_{00}P_{02} + P_{12}P_{20}P_{02} + P_{11}P_{12}P_{22} + P_{11}P_{10}P_{02} + P_{10}P_{02}P_{22} \\
\mathbb{P}(X_3 = 2 \mid X_0 = 1) =& \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{11}{20}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \\
& \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{11}{20}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{11}{20}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} \\
\mathbb{P}(X_3 = 2 \mid X_0 = 1) =& \frac{6887}{36000} \simeq 0.1913055
\end{aligned}$$

Para el inciso 6 se aplica la misma lógica que en el inciso 3, no disponemos de un vector de probabilidades iniciales para cada uno de los estados, por lo que supondremos que cada uno tuvo la misma probabilidad de haber ocurrido:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = 0) = \mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \\
\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_0 = 0) =& P_{00}P_{00}P_{00} + P_{01}P_{11}P_{10} + P_{02}P_{22}P_{20} + P_{01}P_{12}P_{20} + P_{02}P_{21}P_{10} + \\
& P_{00}P_{01}P_{10} + P_{00}P_{02}P_{20} + P_{01}P_{10}P_{00} + P_{02}P_{20}P_{00} \\
\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_0 = 0) =& \frac{5681}{21600} \simeq 0.263 \\
\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_0 = 1) =& P_{11}P_{11}P_{10} + P_{10}P_{00}P_{00} + P_{11}P_{10}P_{00} + P_{12}P_{21}P_{10} + P_{12}P_{22}P_{20} + \\
& P_{11}P_{12}P_{20} + P_{10}P_{01}P_{10} + P_{10}P_{02}P_{20} + P_{12}P_{20}P_{00} \\
\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_0 = 1) =& \frac{151}{576} \simeq 0.262 \\
\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_0 = 2) =& P_{22}P_{22}P_{20} + P_{22}P_{20}P_{00} + P_{22}P_{21}P_{10} + P_{20}P_{00}P_{00} + P_{20}P_{02}P_{20} + \\
& P_{20}P_{01}P_{10} + P_{21}P_{10}P_{00} + P_{21}P_{12}P_{20} + P_{21}P_{11}P_{10} \\
\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_0 = 2) =& \frac{4711}{18000} \simeq 0.26172 \\
\mathbb{P}(X_3 = 0) =& \frac{1}{3}\left(\frac{5681}{21600} + \frac{151}{576} + \frac{4711}{18000}\right) = \frac{169967}{648000} \simeq 0.262294
\end{aligned}$$

A. Código desarrollado

Tarea 2 Evaluada

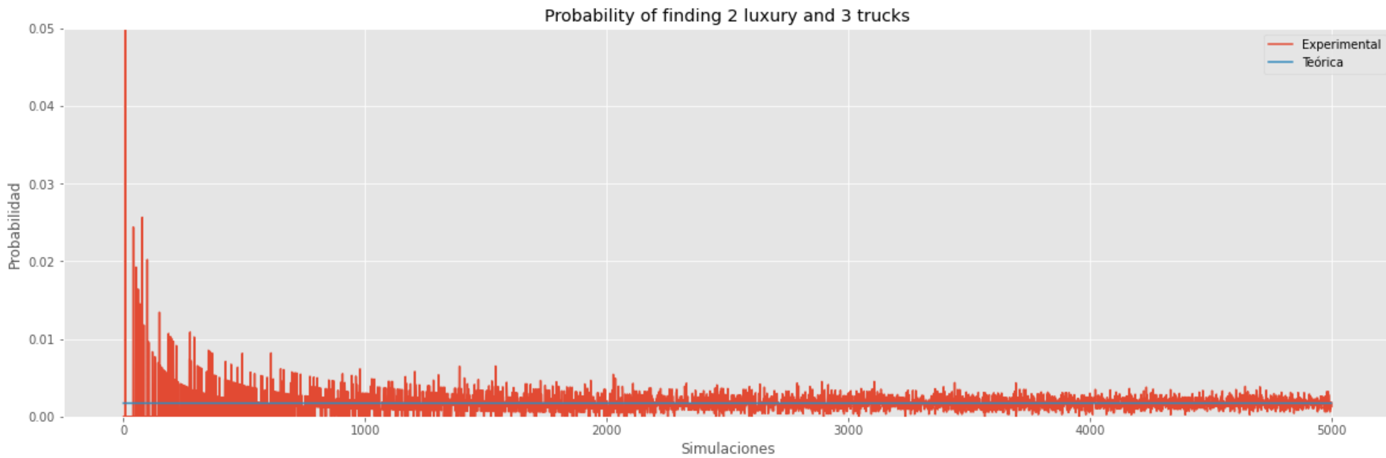
In [ ]:
```
from math import comb
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(7501)
seed = 7501
plt.style.use('ggplot')
```

Distribuidora de autos

Una agencia distribuidora de autos, tiene disponible en exhibición para su venta los siguientes productos: 15 coches compactos, 5 coches de lujo, 8 camionetas y 7 jeeps. Un hotel va a realizar una compra de 5 unidades, la agencia está interesada en conocer la probabilidad de que el hotel compre 2 coches de lujo y 3 camionetas.

- Encuentre la probabilidad teórica de este evento.
- Use la ruleta para simular la probabilidad el inciso anterior.
- Realizar un código (en R, Matlab, Python, etc.) para simular el resultado del primer inciso

In [ ]:
```
def problem_3():

    # First calculate theoretical probability
    p1_theoretical = comb(15, 0) * comb(5,2) * comb(8,3) * comb(7,0) / comb(35,5)

    # Now design a simulation to test the theoretical probability

    # Generate an array that encodes the population of the whole fleet
    # [compact, luxury, trucks, jeeps]
    # P(2 luxury and 3 trucks)
    # Looking for [0, 2, 3, 0]
    simuls = 5e3
    cars = [15, 5, 8, 7]
    gen = np.random.Generator(np.random.PCG64(seed))

    res = []
    for i in range(1, int(simuls)):
        samples = gen.multivariate_hypergeometric(cars, 5, size=int(i))
        prob = np.sum(np.sum(samples == np.array([0, 2, 3, 0]), axis = 1) == 4) / i
        res.append(prob)

    plt.figure(figsize=(20,6))
    plt.plot(np.arange(1, len(res)+1), res, label='Experimental')
    plt.plot(np.ones(len(res)) * p1_theoretical, label='Teórica')
    plt.ylim(0, 0.05)
    plt.xlabel('Simulaciones')
    plt.ylabel('Probabilidad')
    plt.legend()
    plt.title('Probability of finding 2 luxury and 3 trucks');
    plt.show()

    print(f'P(0, 2, 3, 0) = {p1_theoretical:.5f}')
    print(f'P_E(0, 2, 3, 0) = {res[-1]:.5f}')

problem_3()
```




```
P(0, 2, 3, 0) = 0.00173
P_E(0, 2, 3, 0) = 0.00180
```

Problema canicas

En una urna se tienen 30 canicas rojas, 24 negras, 8 amarillas, 15 blancas y 13 verdes. Si se procede a sacar aleatoriamente 5 canicas sin reemplazo y nos interesa obtener la probabilidad de que 2 canicas sean del mismo color,

- Calcule la probabilidad exacta de este evento.
- Realice una simulación de 50 réplicas para obtener una estimación de la probabilidad solicitada en a)

In [ ]:
```
draw, simuls = 5, 50
gen = np.random.Generator(np.random.PCG64(seed))
colors = [30, 24, 8, 15, 13]
gen = np.random.Generator(np.random.PCG64(seed))
samples = gen.multivariate_hypergeometric(colors, 5, size=int(simuls))

with_reps = samples[np.where(np.any(samples == 2, axis=1))]

counts = np.count_nonzero(with_reps == 2, axis=1)
len(with_reps[counts == 1]) / simuls
```

Out[ ]:
```
0.38
```