Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Reto - Fase 1: Sistema dinámico SIR

Francisco García Barrada

A01735207

Emmanuel Isaí Godínez Flores

A01612966

Emanuel Park Kim

A00831441

José Miguel Pérez Flores

A00832401

Juan Pablo Echeagaray González

A00830646

Modelación de sistemas con ecuaciones diferenciales

MA1002B.2

Dr. Abraham Benito Barragán Amigón

Dra. María Dolores García Martínez

10 de noviembre del 2021

1. Preguntas detonadoras

Las preguntas detonadoras y el código que se encuentra en el presente documento están enfocadas a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales que modela el comportamiento de una pandemia. Dicho modelo es conocido como el modelo SIR:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta\frac{I}{N}S \tag{1}$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{I}{N}S - \gamma I \tag{2}$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{3}$$
$$S(0) = 999999 \tag{4}$$
$$I(0) = 1 \tag{5}$$
$$R(0) = 0 \tag{6}$$

Los parámetros β y γ variarán dependiendo de las preguntas en cuestión, aunque de base se usarán los valores 1 y 0.1 respectivamente.

Pregunta 1

Analizando el dataframe *output* encuentre el día en que el número de contagios es máximo (el pico de la curva verde.) ¿Después de cuántos días del inicio ocurre el máximo? Usando las ecuaciones diferenciales del modelo, encuentre una relación entre los parámetros del modelo válida para el valor de t correspondiente al máximo de la curva de infección.

Observando el dataframe obtenido de la aproximación de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales, hemos encontrado que el máximo de contagiados ocurre aproximadamente entre los días 18 y 19, el máximo de infectados es de aproximadamente 675506.

Usando la segunda ecuación en (6), y recordando que cuando una derivada es 0, se tiene un máximo en la función original:

$$max(I) =?$$
$$I'(t) = \beta\frac{I(t)}{N}S(t) - \gamma I(t)$$
$$0 = \beta\frac{I(t_{max})}{N}S(t_{max}) - \gamma I(t_{max})$$
$$0 = \beta\frac{S(t_{max})}{N} - \gamma$$
$$S(t_{max}) = \frac{\gamma N}{\beta}$$
$$S(t_{max}) = 100000$$

Con esta expresión, sabemos que tendremos un máximo en el tiempo t_{max} cuando el número de susceptibles sea igual a 100000. Este resultado puede verificarse numéricamente si reducimos el tamaño de h en la ejecución del método de Euler.

Pregunta 2

Analizando el dataframe *output* encuentre después de cuántos días el número de "susceptibles" se reduce a la mitad. Usando la ecuación diferencial que expresa la variación del número de susceptibles, encuentre de manera analítica una fórmula que exprese el tiempo t necesario para que el número de susceptibles sea la mitad del valor incial en función de β.

Una expresión analítica no puede ser derivada con la información que se dispone, pero hemos calculado que el valor numérico para el día en el que el número de susceptibles se reduzca a la mitad de su valor inicial es 16. Hemos redondeado este valor, y el valor del paso h no es tan pequeño, por lo que una mejor aproximación podría conseguirse al reducirse el valor de h y al redondear el resultado a un número que incluya decimales.

Preguntas 3 y 4

Comente acerca de los cambios que se observan en las curvas. Encuentre una relación entre β y γ necesaria para que ocurra la epidemia. Para que haya una epidemia la fuerza de infección (β) debe ser suficientemente alta por un tiempo suficientemente largo (γ suficientemente bajo) de manera que se pueda transmitir el agente patógeno. A partir de este estudio se puede definir el coeficiente R_0 de la infección.

En este caso R_0 es la tasa reproductiva básica, es decir, la cantidad de personas que un infectado puede infectar mientras sea infeccioso, no en un día, en promedio. El problema comienza cuando este valor de R0 es mayor a 1, cada persona infectada afectará a, por ejemplo 2 personas, y estas dos personas a otras 2 y así sucesivamente, en este escenario es cuando decimos que estamos ante una epidemia (o pandemia si es global). Y está dada por la ecuación $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, por eso notamos que mientras variamos a un número más elevado de con un valor constante de (o viceversa) este, por consecuencia, es mayor y por lo tanto, como podemos ver en las gráficas, el pico de infectados llega mucho antes, es decir, la cantidad total de personas susceptibles son infectadas más rápidamente.

Reto - Fase 1: Sistema dinámico SIR

Modelación de sistemas con ecuaciones diferenciales

Equipo 8:

- Juan Pablo Echeagaray González
- Francisco García Barrada
- Emmanuel Isaí Godínez Flores
- Emanuel Park Kim
- José Miguel Pérez Flores

Profesores:

- Dr. Abraham Benito Barragán Amigón
- Dr. María Dolores García Martínez

7 de noviembre del 2021

In [ ]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('seaborn-darkgrid')
%matplotlib inline
```

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{I}{N} S$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - \gamma I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Condiciones iniciales

In [ ]:
```
N = 1_000_000 # Población total
t_0 = 0
t_f = 60
h = 0.1
n = int((t_f - t_0) / h)
t = np.linspace(t_0, t_f, n + 1)
init = [999_999, 1, 0]  # [S(0), I(0), R(0)]
beta = 1
gamma = 0.1
```

Usando el método de Euler

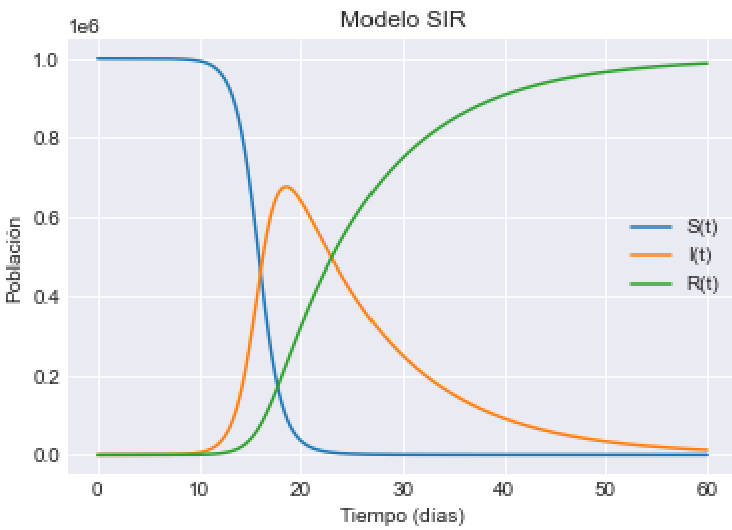
In [ ]:
```
# Inicializar listas que contendrán las aproximaciones
S = np.zeros(n + 1)
```

```
I = np.zeros(n + 1)
R = np.zeros(n + 1)
S[0] = init[0]
I[0] = init[1]
R[0] = init[2]
```

In [ ]:
```
for i in range(n):
    S[i + 1] = S[i] + h * (- beta * I[i] * S[i] / N)
    I[i + 1] = I[i] + h * (beta * I[i] * S[i] / N - gamma * I[i])
    R[i + 1] = R[i] + h * (gamma * I[i])
```

In [ ]:
```
plt.plot(t, S, label='S(t)')
plt.plot(t, I, label='I(t)')
plt.plot(t, R, label='R(t)')
plt.xlabel('Tiempo (días)')
plt.ylabel('Población')
plt.title('Modelo SIR')
plt.legend()
```

Out[ ]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x1c57df9bc70>
```



Respaldo de resultados

In [ ]:
```
df_euler = pd.DataFrame(np.array([S, I, R]).T, columns=['S', 'I', 'R'], index=t)
df_euler.to_csv('euler.csv')
```

Preguntas

Pregunta 1

Analizando el dataframe “output” encuentre el día en que el número de contagios es máximo ¿Después de cuántos días del inicio ocurre el máximo? Usando las ecuaciones diferenciales del modelo, encuentre una relación entre los parámetros del modelo válida para el valor de t correspondiente al máximo de la curva de infección.

In [ ]:
```
max_inf = df_euler['I'].max()
day_inf = df_euler['I'].idxmax()
sus = df_euler['S'][day_inf]
```

```
print(f'El número máximo de infectados es {max_inf:.0f} al día {day_inf:.0f}')
print(f'El número de contagiados ese día es {sus:.0f}')
```

```
El número máximo de infectados es 675506 al día 19
El número de contagiados ese día es 95623
```

Dado que la derivada de $I(t)$ es:

$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{I}{N}S - \gamma I \tag{1}$$

Un extremo de la función estará en un tiempo dado cuando la expresión anterior sea igual a 0, sabiendo esto, podemos inferir las condiciones necesarias para que se de el número máximo de contagios en la población:

$$0 = \beta\frac{I}{N}S - \gamma I$$
$$\beta\frac{1}{N}S = \gamma$$
$$S(t) = \frac{\gamma N}{\beta}$$
$$S(t) = 100000$$

De aquí, sabemos que habrá un máximo de infectados cuando el número de susceptibles sea igual a la expresión anterior, para este problema, el número máximo de contagiados se dará cuando el número de susceptibles sea igual a 100000.

El error que vemos en nuestra aplicación es introducido por el valor del paso h, en el límite cuando $h \to 0$, observaremos el valor calculado.

Pregunta 2

Analizando el dataframe “output” encuentre después de cuántos días el número de “susceptibles” se reduce a la mitad. Usando la ecuación diferencial que expresa la variación del número de susceptibles, encuentre de manera analítica una fórmula que exprese el tiempo t necesario para que el número de susceptibles sea la mitad del valor incial en función de β

In [ ]:
```
max_sup = df_euler['S'].max()
half = 0.5 * max_sup
# Find the day where S reaches half of the maximum
day_sup = df_euler['S'].loc[df_euler['S'] ≥ half].idxmin()
print(f'El número de susceptibles se reduce a la mitad (aproximadamente) el día {c
```

```
El número de susceptibles se reduce a la mitad (aproximadamente) el día 16
```

Pregunta 3

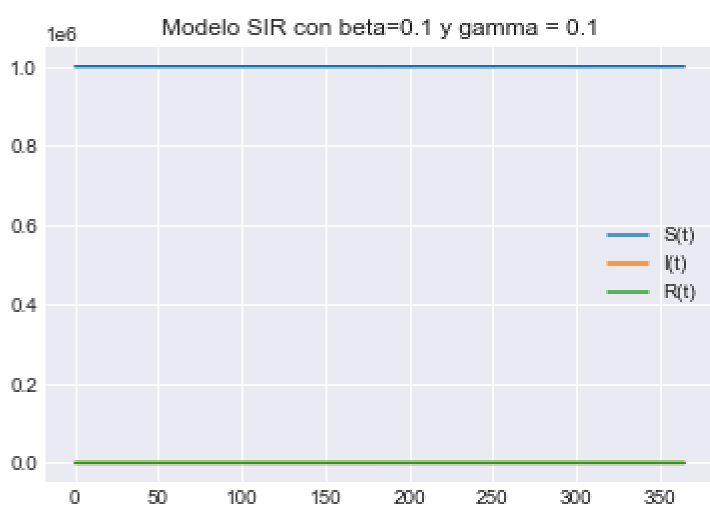
Estudie la dinámica del contagio variando los parámetros β y γ. Empiece con γ = 0.1 constante cambiando β (que representa la ‘fuerza’ de la infeccion):

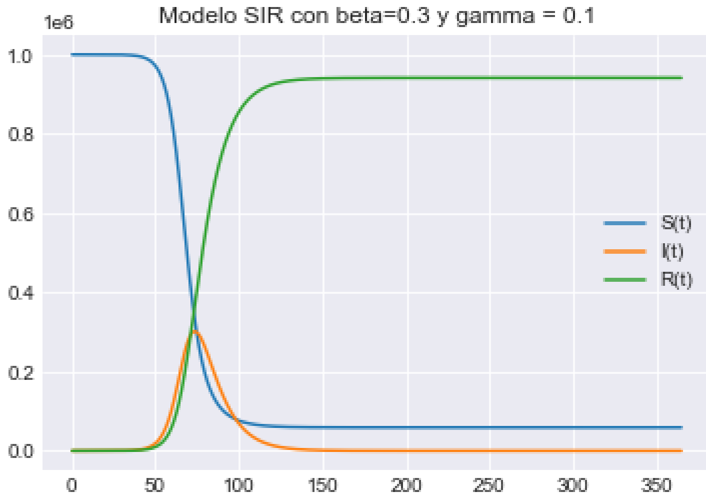
- β = 0.1 365 días
- β = 0.3 365 días
- β = 0.7 60 días
- β = 0.9 60 días

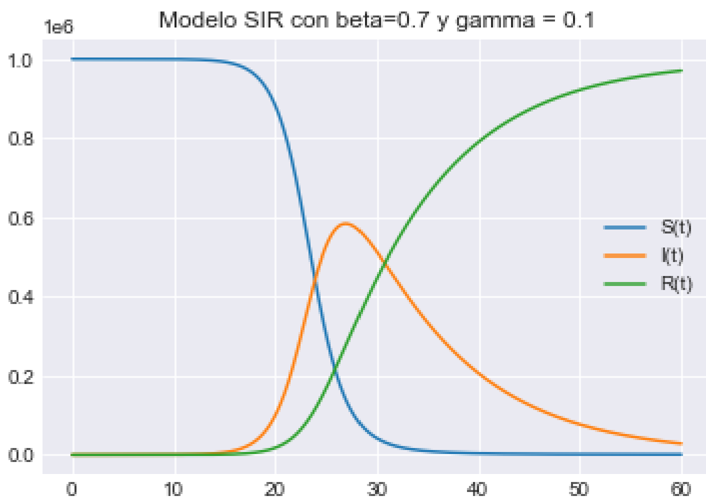
- β = 1.2 60 días

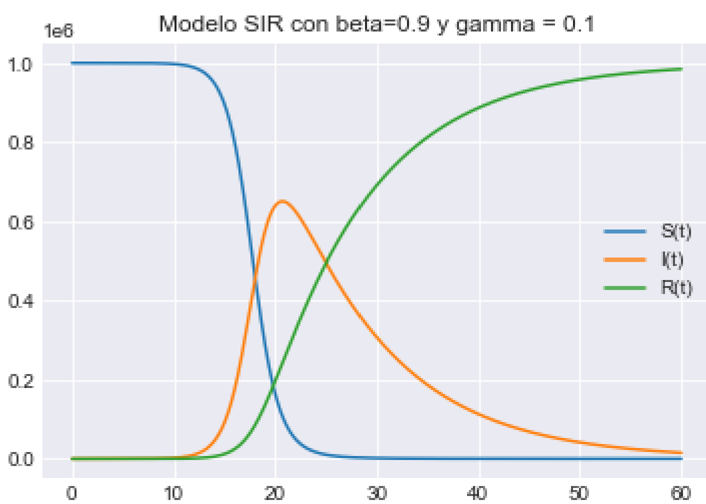
Comente acerca de los cambios que se observan en las curvas. Encuentre una relación entre β y γ necesaria para que ocurra la epidemia. Para que haya una epidemia la fuerza de infección (β) debe ser suficientemente alta por un tiempo suficientemente largo (γ suficientemente bajo) de manera que se pueda transmitir el agente patógeno. A partir de este estudio se puede definir el coeficiente R_0 de la infección.

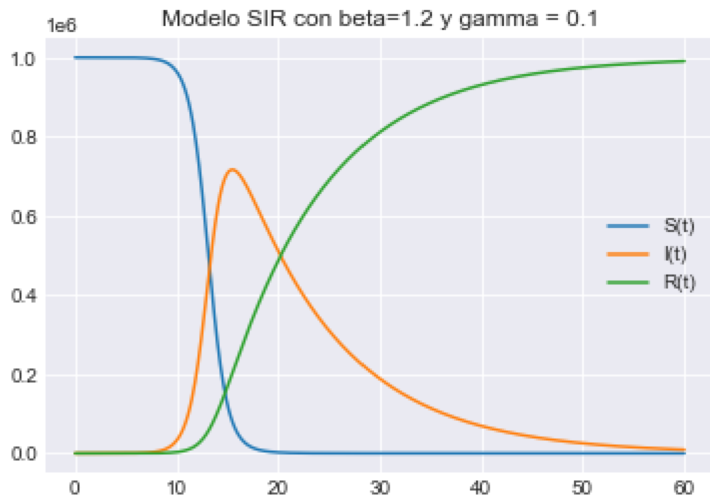
In [ ]:
```
gamma = 0.1
beta_vals = [0.1, 0.3, 0.7, 0.9, 1.2]
days = [365, 365, 60, 60, 60]
t_0 = 0
h = 0.1

for i in range(len(beta_vals)):
    beta = beta_vals[i]
    t_f = days[i]
    n = int((t_f - t_0) / h)
    t = np.linspace(t_0, t_f, n)

    # Inicializar listas que contendrán las aproximaciones
    S = np.zeros(n)
    I = np.zeros(n)
    R = np.zeros(n)
    S[0] = init[0]
    I[0] = init[1]
    R[0] = init[2]

    for i in range(n - 1):
        S[i + 1] = S[i] + h * (- beta * I[i] * S[i] / N)
        I[i + 1] = I[i] + h * (beta * I[i] * S[i] / N - gamma * I[i])
        R[i + 1] = R[i] + h * (gamma * I[i])

    plt.plot(t, S, label=f'S(t)')
    plt.plot(t, I, label=f'I(t)')
    plt.plot(t, R, label=f'R(t)')
    plt.title(f'Modelo SIR con beta={beta} y gamma = {gamma}')
    plt.legend()
    plt.show()
```




Modelo SIR con beta=0.3 y gamma = 0.1
1e6
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
50
100
150
200
250
300
350
S(t)
I(t)
R(t)


Modelo SIR con beta=0.7 y gamma = 0.1
1e6
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50
60
S(t)
I(t)
R(t)


Modelo SIR con beta=0.9 y gamma = 0.1
1e6
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50
60
S(t)
I(t)
R(t)



Pregunta 4

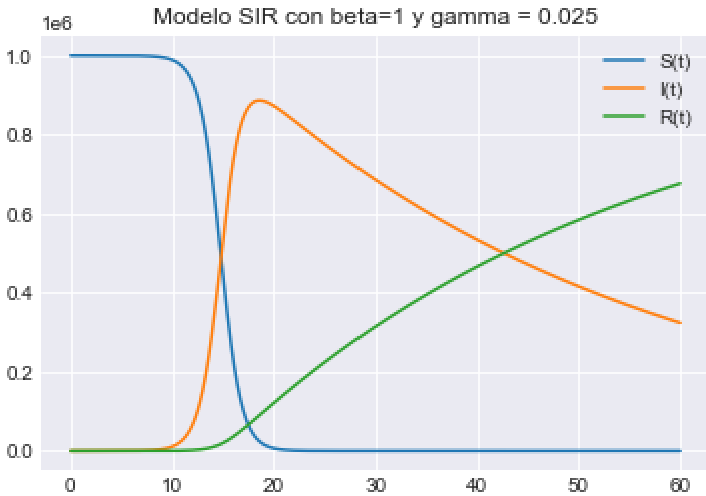
Después, con $\beta = 1$ varíe el valor de γ:

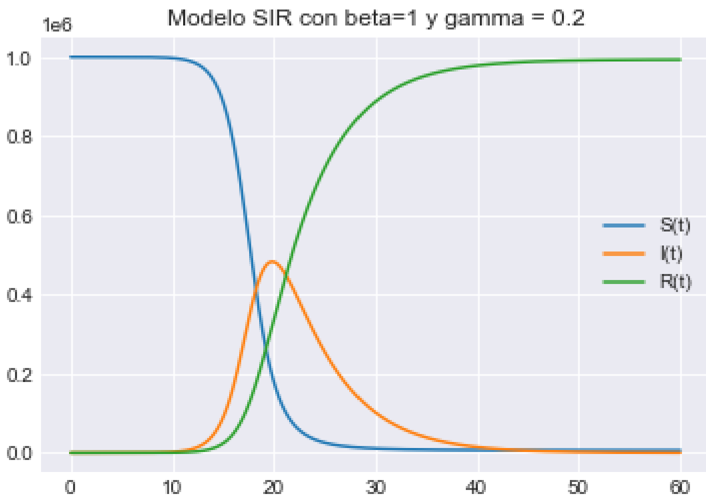
- $\gamma = 0.025$ 60 días
- $\gamma = 0.2$ 60 días
- $\gamma = 0.5$ 60 días
- $\gamma = 1$ 365 días

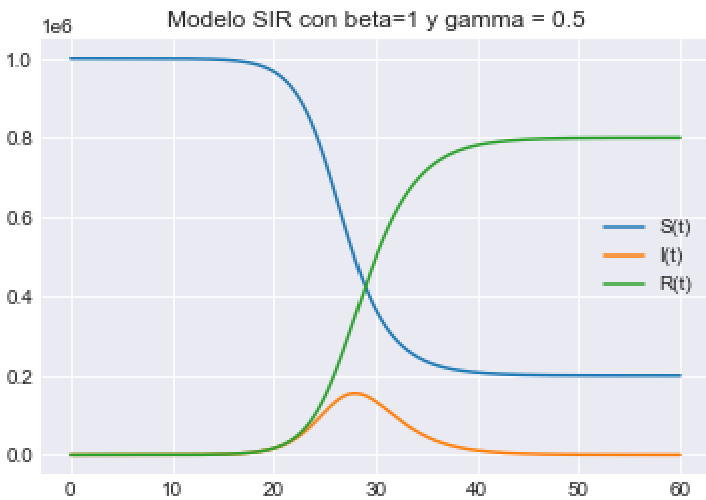
Comente acerca de los cambios que se observan en las curvas. Encuentre una relación entre β y γ necesaria para que ocurra la epidemia. Para que haya una epidemia la fuerza de infección (β) debe ser suficientemente alta por un tiempo suficientemente largo (γ suficientemente bajo) de manera que se pueda transmitir el agente patógeno. A partir de este estudio se puede definir el coeficiente R0 de la infección.

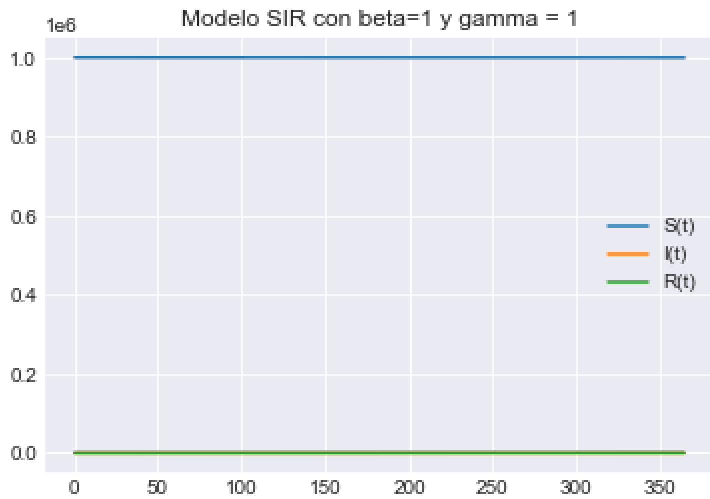
In [ ]:
```
beta = 1
gamma_vals = [0.025, 0.2, 0.5, 1]
days = [60, 60, 60, 365]
t_0 = 0
h = 0.1

for i in range(len(gamma_vals)):
    gamma = gamma_vals[i]
    t_f = days[i]
    n = int((t_f - t_0) / h)
    t = np.linspace(t_0, t_f, n)

    # Inicializar listas que contendrán las aproximaciones
    S = np.zeros(n)
    I = np.zeros(n)
    R = np.zeros(n)
    S[0] = init[0]
    I[0] = init[1]
    R[0] = init[2]

    for i in range(n - 1):
        S[i + 1] = S[i] + h * (- beta * I[i] * S[i] / N)
        I[i + 1] = I[i] + h * (beta * I[i] * S[i] / N - gamma * I[i])
        R[i + 1] = R[i] + h * (gamma * I[i])
```

```
    plt.plot(t, S, label=f'S(t)')
    plt.plot(t, I, label=f'I(t)')
    plt.plot(t, R, label=f'R(t)')
    plt.title(f'Modelo SIR con beta={beta} y gamma = {gamma}')
    plt.legend()
    plt.show()
```









Modelo SIR con beta=1 y gamma = 1
1e6
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
50
100
150
200
250
300
350
S(t)
I(t)
R(t)