3. Subespacios invariantes

A lo largo de esta sección E denotará un espacio vectorial finito dimensional y $\mathrm{End}(E)$ representará al conjunto de todas las transformaciones lineales de E a E.

Definición 3.1. Sean $A \in \mathrm{End}(E)$ y $F \subset E$ un subespacio vectorial. Decimos que F es **invariante** por el operador A si $A(F) \subset F$. □

Observación 3.2. Si F es un subespacio **invariante** por el operador $A \in \mathrm{End}(E)$, la restricción de A a los vectores de F define un operador que haciendo un abuso de notación indicaremos con la misma notación $A : F \to F$. Así, la existencia de un subespacio invariante permite el estudio de un operador más simple por estar definido en un dominio más pequeño. □

Ejemplo 3.3. Los subespacios $\{0\}$ y E son invariantes para cualquier $A \in \mathrm{End}(E)$. □

Ejemplo 3.4. Los subespacios $\ker(A)$ e (A) son invariantes para cualquier $A \in \mathrm{End}(E)$. □

Propiedad 3.5. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$. Se cumple:

(i) Un subespacio unidimensional F es invariante por A sii existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$ para todo $v \in F$.

(ii) Un subespacio bidimensional F generado por $\{u, v\}$ es invariante por A sii $Au, Av \in F$.

Demostración. Ejercicio. □

Definición 3.6 (Autovector y autovalor)**.** Un vector $v \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ se llama un **autovector** del operador $A \in \mathrm{End}(E)$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ se llama un **autovalor** del operador $A \in \mathrm{End}(E)$ cuando existe un vector no nulo u tal que $Au = \alpha u$. Luego, se dice que el autovalor α corresponde al autovector u y, viceversa, que el autovector v corresponde al autovalor λ. □

Observación 3.7. Hallar un autovector (o, equivalentemente, un autovalor) de un operador $A \in \mathrm{End}(E)$ es lo mismo que encontrar un subespacio unidimensional invariante por A. □

Definición 3.8 (Autovalor de una matriz)**.** El número $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **autovalor de la matriz a** $\in \mathcal{M}(n \times n)$ si λ es un autovalor del operador $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz en la base canónica es **a**. □

Ejemplo 3.9. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$. Todo vector no nulo $v \in \ker(A)$ es un autovector de A. □

Ejemplo 3.10. Una rotación $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en torno al origen de un ángulo diferente de 0 y π no admite otros subespacios invariantes además de $\{0\}$ y $\mathbb{R}^2$.*Ejercicio.* □

Ejemplo 3.11. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la rotación $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del ángulo α en torno del eje z, definida por

$$A(x, y, z) = (x\cos(\alpha) - y\,\mathrm{sen}(\alpha), x\,\mathrm{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha), z),$$

tiene al eje z y al plano $z = 0$ como subespacios invariantes.*Ejercicio.* □

Ejemplo 3.12. Sea $S : E \to E$ una reflexión en torno al subespacio F_1, paralelamente a F_2. Todo vector no nulo en F_1 es un autovector de S con autovalor correspondiente 1, y todo vector no nulo en F_2 también es un autovector de S, pero con autovalor correspondiente -1. □

Ejemplo 3.13. Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $A(x, y) = (x + \alpha y, y)$. Para $\alpha \neq 0$, los únicos subespacios invariantes por A son $\{0\}$, la recta $y = 0$ y $\mathbb{R}^2$.*Ejercicio.* □

Observación 3.14. Sean $A \in \mathrm{End}(E)$ y el polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. La notación $p(A)$ indica el operador

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n.$$

□

Lema 3.15. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$. Luego, existe un polinomio mónico irreductible p de grado 1 o 2 y un vector no nulo $v \in E$ tales que $p(A) \cdot v = 0$.

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 3.16. Todo $A \in \mathrm{End}(E)$ posee un subespacio invariante de dimensión 1 o 2.

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 3.17. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$. A autovalores diferentes de A corresponden autovectores l.i.

Demostración. Ejercicio. □

Observación 3.18. Como consecuencia del teorema 3.17, si $\dim(E) = n$, entonces todo $A \in \mathrm{End}(E)$ admite a lo más n autovalores distintos. □

Corolario 3.19. Si $\dim(E) = n$ y $A \in \mathrm{End}(E)$ posee n autovalores distintos, entonces existe una base $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$ en relación a la cual la matriz de A es diagonal.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Observación 3.20. Sea $A \in \operatorname{End}(E)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) λ es un autovalor de A

(ii) $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$

(iii) $\ker(A - \lambda I)$ no posee inverso.

$\square$

Ejemplo 3.21. Sea $\mathcal{U} = \{u, v\}$ una base de E y sea $A \in \operatorname{End}(E)$. Sea

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

la matriz de A respecto a la base $\mathcal{U}$. Entonces, λ es un autovalor de A sii λ es una raíz del polinomio

$$p(x) = x^2 - (a + d)x + ad - bc.$$

Ejercicio. $\square$

Ejemplo 3.22. Una rotación $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en torno al origen de un ángulo θ admite autovalores sii $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. *Ejercicio.* $\square$

Ejemplo 3.23. Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (4x + 3y, x + 2y)$. Luego, existe una base formada por autovectores de A en la que la matriz de A respecto a esta base es diagonal. *Ejercicio.* $\square$