Escuela Profesional de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

Examen Final

Curso: Álgebra lineal 2 **Ciclo: 2016.1**

A lo largo de este examen, E, F y G denotarán e.p.i.'s reales de dimensión finita y $\mathrm{End}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

1. [4 pts.] Sea E subespacio vectorial de F y sea $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ortogonal. Pruebe que existe un endomorfismo ortogonal sobre F que extiende a A.

2. [4 pts.] Sean $A \in \mathcal{L}(E, F)$ y $B \in \mathcal{L}(E, G)$ invertibles. Pruebe que existe $C \in \mathcal{L}(F, G)$ ortogonal e invertible con $B = CA$ sii $|Av| = |Bv|$ para todo $v \in E$.

3. [4 pts.] Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$ con $|Av| = |Bv|$ para todo $v \in E$. Pruebe que existe $C \in \mathrm{End}(E)$ ortogonal con $B = CA$. (Sugerencia: Observe que $\ker(A) = \ker(B)$ y considere $F := \ker(A)^{\perp}$. Luego, considere los isomorfismos $A_0 : F \to \mathrm{im}(A)$ y $B_0 : F \to \mathrm{im}(B)$ obtenidos de restringir A y B, respectivamente.)

4. [4 pts.] Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$ autoadjuntos. Pruebe que A y B conmutan sii E posee una base ortonormal formada por autovectores comunes a A y a B.

5. [4 pts.] Si un subespacio $F \subset E$ es invariante por el operador normal $A \in \mathrm{End}(E)$. Pruebe que

   (a) F también es invariante por A^* y que

   (b) $F^{\perp}$ es invariante por A y A^*.

Lunes, 11 de Julio del 2016.