2. La adjunta de un operador lineal

A lo largo de esta sección E y F denotarán e.p.i.'s finitos dimensionales. Mostraremos cómo el producto interno nos permite asociar a cada transformación lineal $A : E \to F$ una nueva transformación $A^* : F \to E$, llamada la adjunta de A. Esta transformación nos dará una nueva visión de la transformación A sobre una nueva perspectiva.

Teorema 2.1. La aplicación $\xi : E \to E^*$, $v \mapsto f_v$, donde $f_v(w) = \langle w, v\rangle$ para todo $w \in E$, es un isomorfismo.

Demostración. Ejercicio. □

Observación 2.2. El teorema 2.1 es responsable por el poco (o ningún) uso que se hace de funcionales lineales en espacios, como $\mathbb{R}^n$, donde hay un producto interno: funcionales son substituidos por vectores y la acción de un funcional sobre un vector es sustituida por un producto interno. □

Propiedad 2.3. Sea $A : E \to F$ una transformación lineal. Existe una única transformación lineal $B : F \to E$ tal que

$$\forall v \in E, \forall w \in F : \quad \langle Av, w\rangle = \langle v, Bw\rangle.$$

Demostración. Ejercicio. □

Definición 2.4 (La adjunta)**.** Sea $A : E \to F$ una transformación lineal. Llamaremos de la **adjunta** de A a la transformación lineal $A^* : F \to E$ tal que

$$\forall v \in E, \forall w \in F : \quad \langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle.$$

□

Teorema 2.5. Sean $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ y $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset F$ bases ortonormales. Si $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n)$ es la matriz de la transformación lineal $A : E \to F$ en las bases $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, entonces la matriz de la adjunta A^* en las bases $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ es la transpuesta $\mathbf{a}^\top = [a_{ji}] \in \mathcal{M}(n \times m)$ de $\mathbf{a}$.

Demostración. Ejercicio. □

Definición 2.6 (Rango)**.** El **rango** de una transformación lineal $A : E \to F$ es la dimensión del subespacio $A(E)$. □

Corolario 2.7. Una transformación lineal y su transpuesta tienen el mismo rango.

Demostración. Ejercicio. □

Propiedad 2.8. Sean $A, B : E \to F$ y $C : F \to G$ transformaciones lineales, donde G es un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $I : E \to E$ la identidad. Se cumple:

(I) $I^* = I$

(II) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(III) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$

(IV) $(CA)^* = A^* C^*$

(V) $A^{**} = A$

Demostración. *Ejercicio.* □

Propiedad 2.9. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}(m \times n)$ y $\mathbf{c} \in \mathcal{M}(p \times m)$. Sea $\mathbf{I} \in \mathcal{M}(n \times n)$ la matriz identidad. Se cumple:

(I) $\mathbf{I}^\top = \mathbf{I}$

(II) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^\top = \mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top$

(III) $(\alpha \mathbf{a})^\top = \alpha \mathbf{a}^\top$

(IV) $(\mathbf{ca})^\top = \mathbf{a}^\top \mathbf{c}^\top$

(V) $(\mathbf{a}^\top)^\top = \mathbf{a}$

Demostración. *Ejercicio.* □

Propiedad 2.10. Sean $A : E \to F$ una transformación lineal y $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(n \times n)$. Se cumple:

(I) A es inyectiva $\quad \Rightarrow \quad A^*$ es sobreyectiva.

(II) A es sobreyectiva $\quad \Rightarrow \quad A^*$ es inyectiva.

(III) A es isomorfismo $\quad \Leftrightarrow \quad A^*$ es isomorfismo.

(IV) A^* es isomorfismo $\quad \Rightarrow \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(V) $\mathbf{a}$ es invertible $\quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}^\top$ es invertible.

(VI) $\mathbf{a}^\top$ es invertible $\quad \Rightarrow \quad (\mathbf{a}^\top)^{-1} = (\mathbf{a}^{-1})^\top$.

Demostración. Ejercicio. □

Las nociones de rectas y planos perpendiculares de la geometría elemental se extienden en álgebra lineal al concepto de complemento ortogonal, el cual ayuda a entender las relaciones entre una transformación lineal y su adjunta (ver teorema 2.19)

Definición 2.11 (Complemento ortogonal)**.** El **complemento ortogonal** de un conjunto no vacío $X \subset E$ es el conjunto

$$X^{\perp} := \{v \in E \; ; \; \langle v, x \rangle = 0, \, \forall x \in X\}.$$

□

Propiedad 2.12. Sean $X, Y \subset E$ no vacíos. Se cumple:

(I) $X^{\perp}$ es un subsespacio vectorial.

(II) $X \subset Y \quad \Rightarrow \quad Y^{\perp} \subset X^{\perp}$.

(III) $X \cap X^{\perp} = \{0\}$.

(IV) $\text{span}(X)^{\perp} = X^{\perp}$.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 2.13. Se tiene que $\{0\}^{\perp} = E$ y $E^{\perp} = \{0\}$. □

Ejemplo 2.14. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ el subespacio vectorial generado por el vector no nulo $v = (a_1, \ldots, a_n)$. Luego $F^{\perp}$ es el hiperplano definido por la ecuación

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

□

Teorema 2.15. Para todo subespacio vectorial $F \subset E$ se tiene la descomposición en suma directa

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 2.16. Para todo subespacio vectorial $F \subset E$ se tiene

$$\dim(E) = \dim(F) \oplus \dim(F^{\perp}).$$

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 2.17. Para todo subespacio vectorial $F \subset E$ se tiene

$$(F^{\perp})^{\perp} = F.$$

Demostración. Ejercicio. □

Observación 2.18. En la sección anterior vimos que la proyección de un vector $v \in E$ sobre un subespacio $F \subset E$ está dado por el vector

$$P_F(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle u_i, v \rangle u_i,$$

donde $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset F$ es una base ortonormal de F. El teorema 2.15 nos da un camino para demostrar que dicho vector no depende de la base ortonormal escogida. *Ejercicio.* □

Teorema 2.19. Sean $A : E \subset F$ una transformación lineal. Se cumple:

(I) $\ker(A^*) = \operatorname{im}(A)^{\top}$.

(II) $\operatorname{im}(A^*) = \ker(A)^{\top}$.

(III) $\ker(A) = \operatorname{im}(A^*)^{\top}$.

(IV) $\operatorname{im}(A) = \ker(A^*)^{\top}$.

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 2.20. A fin de que un sistema lineal de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

posea solución es necesario y suficiente que el vector $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ sea perpendicular a toda solución $y = (y_1, \ldots, y_m)$ del sistema homogéneo transpuesto

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Demostración. Ejercicio. □

Observación 2.21. El corolario 2.20 nos permite concluir la existencia de soluciones sin que sea necesario exhibir una de ellas. □

Corolario 2.22. Una transformación lineal y su transpuesta tienen el mismo rango.

Demostración. Ejercicio. □

Observación 2.23. La prueba del corolario 2.22 es una alternativa para la prueba del corolario 2.7 sin el uso de matrices. □