Escuela Profesional de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

Práctica Calificada 2

Tema: La adjunta y subespacios invariantes
Curso: Álgebra lineal 2 **Ciclo: 2016.1**

A lo largo de esta lista, E y F denotarán e.p.i. de dimensión finita (salvo se diga lo contrario), $\mathcal{L}(E,F) := \{A : E \to F \ ; \ A \text{ es lineal}\}$ y $\mathrm{End}(E) := \mathcal{L}(E,E)$.

1. [5 pts.] Considere en $E := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ es continua}\}$ el producto interno definido por
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$
donde $f, g \in E$. Muestre que el subespacio vectorial P de las funciones pares es el complemento ortogonal del subespacio I de las funciones impares.

2. [5 pts.] Sea $A \in \mathrm{End}(E)$. Demuestre que
   (a) Si F y G son subespacios invariantes por A, entonces $F \cap G$ y $F + G$ también son invariantes por A.
   (b) Si u y v son autovectores de A y A^*, respectivamente, correspondientes a autovalores que son distintos, entonces $\langle u, v\rangle = 0$.

3. [5 pts.] Sea $A \in \mathrm{End}(E)$ con $\dim(E) = n$. Pruebe que
   (a) A posee un subespacio invariante de dimensión $n - 1$ o $n - 2$.
   (b) Si A posee n autovalores distintos, entonces existen exactamente 2^n subespacios de E invariantes por A.

4. [5 pts.] Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + y, 2x + 2y)$.
   (a) Muestre que A posee autovalores 4 y 1.
   (b) Halle una base $\mathcal{U} = \{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $Au = 4u$ y $Av = v$.
   (c) Si
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$
   halle una matriz invertible $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ tal que
$$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lunes, 25 de Abril de 2016