Álgebra Lineal 2
Escuela Profesional de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

Examen Parcial

Tema: La adjunta, subespacios invariantes y operadores auto-adjuntos **Ciclo: 2016.1**

A lo largo de este examen, E denotará un e.p.i. real de dimensión finita, $\mathrm{End}(E) := \mathcal{L}(E, E)$, y un operador $A \in \mathrm{End}(E)$ será llamado de **normal** si A y A^* conmutan.

1. [5 pts.] Sea $A \in \mathrm{End}(E)$ un operador normal. Demuestre que
   (a) todo autovector de A es también autovector de A^*, con el mismo autovalor.
   (b) $\ker(A)^\perp = \mathrm{im}(A)$
2. [5 pts.] Sean $P \in \mathrm{End}(E)$ una proyección. Pruebe que P es auto-adjunto si es normal.
3. [5 pts.] Sea $F := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Muestre que los subespacios G, H generados por los conjuntos
   (a) $\{\cos(x), \sin(x)\}$,
   (b) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$,

   respectivamente, son invariantes por el operador derivación $D : F \to F$.
4. [5 pts.] Considere en $F := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ es continua}\}$ el producto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

   donde $f, g \in F$. Muestre que el subespacio vectorial P de las funciones pares es el complemento ortogonal del subespacio I de las funciones impares.

Lunes, 16 de Mayo de 2016