2. La adjunta de un operador lineal

A lo largo de esta sección E y F denotarán e.p.i.'s finitos dimensionales. Mostraremos cómo el producto interno nos permite asociar a cada transformación lineal $A : E \to F$ una nueva transformación $A^* : F \to E$, llamada la adjunta de A. Esta transformación nos dará una nueva visión de la transformación A sobre una nueva perspectiva.

Theorem 2.1. La aplicación $\xi : E \to E^*$, $v \mapsto f_v$, donde $f_v(w) = \langle w, v\rangle$ para todo $w \in E$, es un isomorfismo.

Demostración. Ejercicio. □

Observación 2.2. El teorema 2.1 es responsable por el poco (o ningún) uso que se hace de funcionales lineales en espacios, como $\mathbb{R}^n$, donde hay un producto interno: funcionales son substituidos por vectores y la acción de un funcional sobre un vector es sustituida por un producto interno. □

Propiedad 2.3. Sea $A : E \to F$ una transformación lineal. Existe una única transformación lineal $B : F \to E$ tal que

$$\forall v \in E, \forall w \in F : \quad \langle Av, w\rangle = \langle v, Bw\rangle.$$

Demostración. Ejercicio. □

Definición 2.4 (La adjunta)**.** Sea $A : E \to F$ una transformación lineal. Llamaremos de la **adjunta** de A a la transformación lineal $A^* : F \to E$ tal que

$$\forall v \in E, \forall w \in F : \quad \langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle.$$

□

Theorem 2.5. Sean $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ y $= \{v_1, \dots, v_m\} \subset F$ bases ortonormales. Si $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n)$ es la matriz de la transformación lineal $A : E \to F$ en las bases $\mathcal{U}$,, entonces la matriz de la adjunta A^* en las bases ,$\mathcal{U}$ es la transpuesta $\mathbf{a}^\top = [a_{ji}] \in \mathcal{M}(n \times m)$ de $\mathbf{a}$.

Demostración. Ejercicio. □

Definición 2.6 (Rango)**.** El **rango** de una transformación lineal $A : E \to F$ es la dimensión del subespacio $A(E)$. □

Corolario 2.7. Una transformación lineal y su transpuesta tienen el mismo rango.

Demostración. Ejercicio. □

Propiedad 2.8. Sean $A, B : E \to F$ y $C : F \to G$ transformaciones lineales, donde G es un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $I : E \to E$ la identidad. Se cumple:

(I) $I^* = I$

(II) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(III) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$

(IV) $(CA)^* = A^* C^*$

(V) $A^{**} = A$

Demostración. *Ejercicio.* $\square$

Propiedad 2.9. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}(m \times n)$ y $\mathbf{c} \in \mathcal{M}(p \times m)$. Sea $\mathbf{I} \in \mathcal{M}(n \times n)$ la matriz identidad. Se cumple:

(I) $\mathbf{I}^\top = \mathbf{I}$

(II) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\top = \mathbf{a}^\top + \mathbf{b}^\top$

(III) $(\alpha \mathbf{a})^\top = \alpha \mathbf{a}^\top$

(IV) $(\mathbf{c}\mathbf{a})^\top = \mathbf{a}^\top \mathbf{c}^\top$

(V) $(\mathbf{a}^\top)^\top = \mathbf{a}$

Demostración. *Ejercicio.* $\square$

Propiedad 2.10. Sean $A : E \to F$ una transformación lineal y $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(n \times n)$. Se cumple:

(I) A es inyectiva $\Rightarrow$ A^* es sobreyectiva.

(II) A es sobreyectiva $\Rightarrow$ A^* es inyectiva.

(III) A es isomorfismo $\Leftrightarrow$ A^* es isomorfismo.

(IV) A^* es isomorfismo $\Rightarrow$ $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(V) $\mathbf{a}$ es invertible $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}^\top$ es invertible.

(VI) $\mathbf{a}^\top$ es invertible $\Rightarrow$ $(\mathbf{a}^\top)^{-1} = (\mathbf{a}^{-1})^\top$.

Demostración. *Ejercicio.* $\square$

Las nociones de rectas y planos perpendiculares de la geometría elemental se extienden en álgebra lineal al concepto de complemento ortogonal, el cual ayuda a entender las relaciones entre una transformación lineal y su adjunta (ver teorema 2.19)

Definición 2.11 (Complemento ortogonal)**.** El **complemento ortogonal** de un conjunto no vacío $X \subset E$ es el conjunto

$$X^\perp := \{v \in E \; ; \; \langle v, x \rangle = 0, \, \forall x \in X\}.$$

$\square$

Propiedad 2.12. Sean $X, Y \subset E$ no vacíos. Se cumple:

(I) $X^\perp$ es un subsespacio vectorial.

(II) $X \subset Y \quad \Rightarrow \quad Y^\perp \subset X^\perp$.

(III) $X \cap X^\perp = \{0\}$.

(IV) $\operatorname{span}(X)^\perp = X^\perp$.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Ejemplo 2.13. Se tiene que $\{0\}^\perp = E$ y $E^\perp = \{0\}$. $\square$

Ejemplo 2.14. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ el subespacio vectorial generado por el vector no nulo $v = (a_1, \ldots, a_n)$. Luego $F^\perp$ es el hiperplano definido por la ecuación

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

$\square$

Theorem 2.15. Para todo subespacio vectorial $F \subset E$ se tiene la descomposición en suma directa

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Demostración. Ejercicio. $\square$

Corolario 2.16. Para todo subespacio vectorial $F \subset E$ se tiene

$$\dim(E) = \dim(F) \oplus \dim(F^\perp).$$

Demostración. Ejercicio. $\square$

Corolario 2.17. Para todo subespacio vectorial $F \subset E$ se tiene

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

Demostración. Ejercicio. $\square$

Observación 2.18. En la sección anterior vimos que la proyección de un vector $v \in E$ sobre un subespacio $F \subset E$ está dado por el vector

$$P_F(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle u_i, v \rangle u_i,$$

donde $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset F$ es una base ortonormal de F. El teorema 2.15 nos da un camino para demostrar que dicho vector no depende de la base ortonormal escogida. *Ejercicio.* $\square$

Theorem 2.19. Sean $A : E \to F$ una transformación lineal. Se cumple:

(I) $\ker(A^*) = \operatorname{im}(A)^\top$.

(II) $\operatorname{im}(A^*) = \ker(A)^\top$.

(III) $\ker(A) = \operatorname{im}(A^*)^\top$.

(IV) $\operatorname{im}(A) = \ker(A^*)^\top$.

Demostración. *Ejercicio.* □

Corolario 2.20. A fin de que un sistema lineal de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

posea solución es necesario y suficiente que el vector $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ sea perpendicular a toda solución $y = (y_1, \ldots, y_m)$ del sistema homogéneo transpuesto

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}y_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Demostración. *Ejercicio.* □

Observación 2.21. El corolario 2.20 nos permite concluir la existencia de soluciones sin que sea necesario exhibir una de ellas. □

Corolario 2.22. Una transformación lineal y su transpuesta tienen el mismo rango.

Demostración. *Ejercicio.* □

Observación 2.23. La prueba del corolario 2.22 es una alternativa para la prueba del corolario 2.7 sin el uso de matrices. □

Definición 2.24. Un operador $A \in \operatorname{End}(E)$ será llamado de **normal** si A y A^* conmutan.

Ejercicio 2.1. Sea $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Probar que

(I) Si A es sobreyectiva, entonces AA^* es invertible y $A^*(AA^*)^{-1}$ es una inversa a la derecha de A.

(II) Si A es inyectiva, entonces A^*A es invertible y $(A^*A)^{-1}A^*$ es una inversa a la izquierda de A.

Ejercicio 2.2. Encuentre una inversa a la derecha para la transformación lineal $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x - y - z)$.

Ejercicio 2.3. Encuentre una inversa a la izquierda para la transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y, x + 3y, 4x + y)$.

Ejercicio 2.4. Sea $P : E \to E$ un operador de proyección. Pruebe que también P^* es un operador de proyección y dé un ejemplo en que $P \neq P^*$.

Ejercicio 2.5. Considere en $E := \mathcal{M}(n \times n)$ el producto interno definido por

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{(i,j)\in J} a_{ij} b_{ij},$$

donde $J := \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ y $\mathbf{a} = [a_{ij}], \mathbf{b} = [b_{ij}] \in E$. Muestre que el subespacio vectorial A de las matrices antisimétricas es el complemento ortogonal del subespacio S de las matrices simétricas.

Ejercicio 2.6. Considere en $E := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ es continua}\}$ el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx,$$

donde $f, g \in E$. Muestre que el subespacio vectorial P de las funciones pares es el complemento ortogonal del subespacio I de las funciones impares.

Ejercicio 2.7. Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$. Pruebe que si A y B conmutan, entonces también A^* y B^* conmutan.

Ejercicio 2.8. Sea $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(m \times n)$. Demuestre que o el sistema $\mathbf{a}x = b$ tiene soloución cualquiera que sea $b \in \mathcal{M}(m \times 1)$ o el sistema homogéneo transppuesto $\mathbf{a}^\top y = 0$ admite una solución no trivial.

Ejercicio 2.9. Sea $X \subset E$ no vacío. Pruebe que $X^{\top\top} = \mathrm{span}(X)$.

Ejercicio 2.10. Sean $F, G \subset E$ subespacios vectoriales. Demuestre que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ y $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Ejercicio 2.11. La teoría nos dice que la traza de toda matriz asociada a un endomorfismo es siempre la misma. Considere en $\mathcal{L}(E, F)$ la aplicación definida por

$$\langle A, B \rangle = (A^* B),$$

donde $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$. Pruebe que esto define un producto interno en $\mathcal{L}(E, F)$ y que

$$\langle A, B \rangle = \sum_{(i,j)\in J} a_{ij} b_{ij},$$

donde $J := \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ y $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{b} = [b_{ij}]$ son las matrices de A y B en relación a bases ortonormales de E y F, respectivamente.

Ejercicio 2.12. Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 3x - 2y - z, -2x + 3y + 2z)$. Obtenga bases para los siguientes subespacios: $\mathrm{im}(A), \ker(A), \mathrm{im}(A^*)$ y $\ker(A^*)$.

Ejercicio 2.13. Sea $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Pruebe que

(I) $A|_{\mathrm{im}(A^*)}$ define un isomorfismo entre $\mathrm{im}(A^*)$ e $\mathrm{im}(A)$.

(II) $A^*|_{\mathrm{im}(A)}$ define un isomorfismo entre $\mathrm{im}(A)$ e $\mathrm{im}(A^*)$.

¿Son estos isomorfismos uno el inverso del otro?

Ejercicio 2.14. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} |Au_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |A^*u_i|^2,$$

donde $\mathcal{U} := \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de E.

Ejercicio 2.15. Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$. Demuestre que si A y B conmutan, entonces $\ker(B)$ e $\mathrm{im}(B)$ son subespacios invariantes por A.

Ejercicio 2.16. Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$ y el polinomio $p(x)$. Pruebe que los subespacios vectoriales $\ker(p(A))$ e $\mathrm{im}(p(A))$ son invariantes por A.

Ejercicio 2.17. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$. Demuestre que

(I) Si F y G son subespacios invariantes por A, entonces $F \cap G$ y $F + G$ también son invariantes por A.

(II) Si u y v son autovectores de A y A^*, respectivamente, correspondientes a autovalores que son distintos, entonces $\langle u, v\rangle = 0$.

Ejercicio 2.18. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$ un operador normal. Demuestre que

(I) $\forall v \in E : \ |Av| = |A^*v|$.

(II) todo autovector de A es también autovector de A^*, con el mismo autovalor.

(III) $\ker(A)^{\perp} = \mathrm{im}(A)$

Ejercicio 2.19. Sea $E := C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Muestre que los subespacios F, G generados por los conjuntos

(I) $\{\cos(x), \sin(x)\}$,

(II) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$,

respectivamente, son invariantes por el operador derivación $D : E \to E$.

Ejercicio 2.20. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$ con $\dim(E) = n$. Pruebe que

(I) A posee un subespacio invariante de dimensión $n-1$ o $n-2$.

(II) Si A posee n autovalores distintos, entonces existen exactamente 2^n subespacios de E invariantes por A.

Ejercicio 2.21. Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, 0)$.

(I) ¿Cuales son los autovalores de A?

(II) ¿Cuales son los autovectores de A?

(III) Si
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
¿existe alguna matriz invertible $\mathbf{b} \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ tal que $\mathbf{b}^{-1}\mathbf{ab}$ sea diagonal?

Ejercicio 2.22. Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + y, 2x + 2y)$.

(I) Muestre que A posee autovalores 4 y 1.

(II) Halle una base $\mathcal{U} = \{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $Au = 4u$ y $Av = v$.

(III) Si
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$
halle una matriz invertible $\in \mathcal{M}(2 \times 2)$ tal que
$$^{-1}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$