Álgebra Lineal 2
Escuela Profesional de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

Lista 5 de Ejercicios

Tema: Operadores ortogonales **Ciclo: 2016.1**

A lo largo de esta lista, E, F y G denotarán e.p.i.'s reales de dimensión finita (salvo se diga lo contrario), $\mathcal{L}(E,F) := \{A : E \to F\ ;\ A \text{ es lineal}\}$ y $\operatorname{End}(E) := \mathcal{L}(E,E)$. Sea $r > 0$, una aplicación $S : E \to E$ es llamada de **semejanza de razón** r si $|Su - Sv| = r|u - v|$ para todo $u, v \in E$; decimos que S **preserva ángulos** si

$$\frac{\langle Su, Sv\rangle}{|Su||Sv|} = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}$$

para todo $u, v \in E \setminus \{0\}$. Una semejanza de razón 1 es llamada **isometría**.

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación tal que $f(0) = 0$ y $|fu - fv| = |u - v|$ para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que
   (a) $\forall u \in \mathbb{R}^n : |f(u)| = |u|$.
   (b) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \langle fu, fv\rangle = \langle u, v\rangle$.
   (c) $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
   (d) $\forall u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\langle f(v), f(e_i)\rangle = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Luego, $f(u) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n)$.
   (e) $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ y es ortogonal.

2. Pruebe que toda semejanza $S : E \to E$ de razón $r > 0$ tiene la forma $S = rA + b$, donde $A \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ es ortogonal y $b \in \mathbb{R}^n$.

3. Sea E subespacio vectorial de F y sea $A \in \mathcal{L}(E,F)$ ortogonal. Pruebe que existe un endomorfismo ortogonal sobre F que extiende a A.

4. Sean $A \in \mathcal{L}(E,F)$ y $B \in \mathcal{L}(E,G)$ invertibles. Pruebe que existe $C \in \mathcal{L}(F,G)$ ortogonal e invertible con $B = CA$ sii $|Av| = |Bv|$ para todo $v \in E$.

5. Sean $A, B \in \operatorname{End}(E)$ con $|A| = |B|$. Pruebe que existe $C \in \operatorname{End}(E)$ ortogonal con $B = CA$.

6. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ unitario. Pruebe las siguientes afirmaciones.
   (a) $H_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto v - 2\langle v, u\rangle u$, es ortogonal.
   (b) Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = |w|$ y $v \neq w$. Tomando $u = (v - w)/|v - w|$, se tiene que $H_u(v) = w$.

7. Pruebe que todo $A \in \operatorname{End}(E)$ puede ser expresado como $A = UP$, donde $P, U \in \operatorname{End}(E)$, U es ortogonal y $P \geq 0$.

8. Sean $A, S \in \mathrm{End}(E)$. Pruebe las siguientes proposiciones.
   (a) Si A transforma vectores unitarios en vectores unitarios, entonces A es ortogonal.
   (b) Si S es invertible y transforma dos vectores cualesquiera de la misma longitud en vectores de la misma longitud, entonces S es una semejanza.
9. Sea $S \in \mathrm{End}(E)$ invertible que preserva ángulos. Pruebe las siguientes afirmaciones.
   (a) S transforma vectores ortogonales de la misma longitud en vectores ortogonales de igual longitud.
   (b) S es una semejanza.
10. Si la descomposición polar de un endomorfismo es única, pruebe que dicho endomorfismo es invertible.
11. Sea $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, $(x, y, z) \mapsto (2x + 3y - 6z, 6x + 2y + 3z, -3x + 6y + 2z)$.
    (a) Pruebe que A es una semejanza de razón 7.
    (b) Verifique que o $7 \in \sigma(A)$ o bien $-7 \in \sigma(A)$.
    (c) Encuentre un autovector de A, complételo a fin de obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y determine la matriz del operador A en esta base.
12. ¿Puede una matriz ortogonal ser antisimétrica?
13. Encuentre la descomposición polar de las siguientes matrices:
    (a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
    (b) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$