1. Espacios vectoriales con producto interno

El producto interno enriquece y completa la estructura de un espacio vectorial. Esto permite el uso de un lenguaje geométrico altamente sugestivo y el estudio de tipos especiales de operadores, los cuales admiten un análisis más profundo de sus propiedades. Trabajaremos solamente sobre espacios vectoriales reales hasta llegar a la sección de espacios vectoriales complejos. De ahora en adelante E denotará un espacio vectorial.

Definición 1.1 (Producto interno y espacio producto interno (e.p.i.))**.**

A partir de ahora, haciendo un abuso de notación, denotaremos simplemente por E a nuestro e.p.i. $(E, \langle \ , \ \rangle)$.

Propiedad 1.2. Para todo $u, u_1, u_2 \in E$ se cumple:

(i) $\forall v \in E : \langle v, u \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$

(i) $\forall v \in E : \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2.$

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 1.3 (Producto interno canónico sobre $\mathbb{R}^n$)**.**

Ejemplo 1.4.

Ejemplo 1.5.

Observación 1.6. Todo espacio vectorial de dimensión finita puede ser dotado de un producto interno. □

Definición 1.7 (Longitud de un vector)**.** Sea $v \in E$. Llamamos a $|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ la **longitud del vector** v. Además, cuando la longitud de un vector es 1, llamamos a este vector de **unitario**. □

Definición 1.8 (Ortogonalidad)**.** Decimos que dos vectores u y v son **ortogonales** si $\langle u, v \rangle = 0$. Además, cuando cualquier par de vectores distintos de un conjunto X son ortogonales, decimos que este es un **conjunto ortogonal**. Y cuando todos los vectores de un conjunto ortogonal X son unitarios, decimos que este es un **conjunto ortononal**. Finalmente, una **base ortonormal** es una base que es un conjunto ortonormal. □

Propiedad 1.9. El vector nulo es ortogonal a cualquier vector y es el único ortogonal consigo mismo.

Demostración. Ejercicio. □

Propiedad 1.10. Todo subconjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente (l.i.)

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 1.11 (La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es ortonormal)**.**

Ejemplo 1.12.

Propiedad 1.13 (Teorema de Pitágoras)**.**

Propiedad 1.14. Sea $F \subset E$ un subespacio unidimensional. Sea $v \in E$. Luego, existe un único $\hat{v} \in F$ tal que

$$\forall u \in F : \langle v - \hat{v}, u \rangle = 0. \tag{1}$$

Demostración. Para probar la existencia basta tomar $\hat{v} = \langle v, w \rangle w$ donde w es un vector unitario de F. La unicidad queda como *ejercicio.* □

Definición 1.15 (Proyección sobre un subespacio unidimensional)**.** Sea $F \subset E$ un subespacio unidimensional. Para cada $v \in E$ llamamos de **proyección de** v **sobre** F al vector $\hat{v}$ que satisface la ecuación (1) arriba. Y la aplicación $P_F : E \to E$, $v \mapsto P_F(v) = \hat{v}$ es llamada de la **proyección sobre el subespacio unidimensional** F. □

Theorem 1.16 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz)**.** Para cada par de vectores u, v se cumple:

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|.$$

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 1.17. Para cada par de vectores u, v:

$$|\langle u, v \rangle| = |u||v| \quad \Leftrightarrow \quad \{u, v\} \text{ es l.d.}$$

Demostración. Ejercicio. □

Definición 1.18 (Norma y espacio normado)**.**

Propiedad 1.19. Todo e.p.i. es un espacio normado con norma $|\ |$.

Demostración. Ejercicio. □

Propiedad 1.20 (Proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt)**.**

Demostración. Ejercicio. □

Propiedad 1.21. Sea $F \subset E$ un subespacio finito dimensional. Sea $v \in E$. Luego, existe un único $\hat{v} \in F$ tal que

$$\forall u \in F : \langle v - \hat{v}, u \rangle = 0. \tag{2}$$

Demostración. Para probar la existencia basta tomar $\hat{v} = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i$ donde $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ es una base ortonormal de F. La unicidad queda como *ejercicio.* □

Definición 1.22 (Proyección sobre un subespacio finito dimensional)**.** Sea $F \subset E$ un subespacio finito dimensional. Para cada $v \in E$ llamamos de **proyección de v sobre F** al vector $\hat{v}$ que satisface la ecuación (2) arriba. Y la aplicación $P_F : E \to E$, $v \mapsto P_F(v) = \hat{v}$ es llamada de la **proyección sobre el subespacio finito dimensional F**. □

Propiedad 1.23. Sea $F \subset E$ un subespacio finito dimensional. Sea $v \in E$. La distancia de v a F es $|v - P_F(v)|$, i.e.,

$$\forall u \in F : \ |v - P_F(v)| \leq |v - u|.$$

Demostración. Ejercicio. □

Propiedad 1.24. Si $\dim(E) = n$, entonces para cada base de E existe una biyección entre el conjunto de productos internos sobre E y el conjunto de matrices definidas positivas de orden n.

Demostración. Ejercicio. □