**Escuela Profesional de Matemática**
**Facultad de Ciencias**
**Universidad Nacional de Ingeniería**

# Práctica Calificada 6

**Tema: Operadores normales**
**Curso: Álgebra lineal 2** **Ciclo: 2016.1**

---

A lo largo de esta práctica $E$ denotará un e.p.i. real de dimensión finita (salvo se diga lo contrario), $\mathcal{L}(E, F) := \{A : E \to F \; ; \; A \text{ es lineal}\}$ y $\mathrm{End}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

1. [5 pts.] Sean $u_1, \ldots, u_n$ las filas y $v_1, \ldots, v_n$ las columnas de una matriz $\mathbf{a}$. Pruebe que

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$$

para cualesquiera $i, j$ sii $\mathbf{a}$ es normal.

2. [5 pts.] Entre las matrices de abajo, determine cuales son normales.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 3 & 9 & 6 \\ 6 & -6 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. [5 pts.] Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$ operadores normales. Si $AB = 0$, pruebe:
   (a) $\mathrm{im}(B) \subset \ker(A)$,
   (b) $\mathrm{im}(B^*) \subset \ker(A^*)$,
   (c) $\mathrm{im}(A) \subset \ker(B)$,
   (d) $BA = 0$.

4. [5 pts.] Si un subespacio $F \subset E$ es invariante por el operador normal $A \in \mathrm{End}(E)$. Pruebe que
   (a) $F$ también es invariante por $A^*$ y que
   (b) $F^\perp$ es invariante por $A$ y $A^*$.

Jueves, 30 de Junio del 2016