Escuela Profesional de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

Práctica Calificada 5

Tema: Operadores ortogonales
Curso: Álgebra lineal 2 **Ciclo: 2016.1**

A lo largo de esta práctica, E, F y G denotarán e.p.i.'s reales de dimensión finita (salvo se diga lo contrario), $\mathcal{L}(E,F) := \{A : E \to F \ ; \ A \text{ es lineal}\}$ y $\mathrm{End}(E) := \mathcal{L}(E,E)$. Sea $r > 0$, una aplicación $S : E \to E$ es llamada de **semejanza de razón** r si $|Su - Sv| = r|u - v|$ para todo $u, v \in E$; decimos que S **preserva ángulos** si

$$\frac{\langle Su, Sv\rangle}{|Su||Sv|} = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}$$

para todo $u, v \in E \setminus \{0\}$. Una semejanza de razón 1 es llamada **isometría**.

1. [5 pts.] Sea $S \in \mathrm{End}(E)$ invertible que preserva ángulos. Pruebe las siguientes afirmaciones.
   (a) S transforma vectores ortogonales de la misma longitud en vectores ortogonales de igual longitud.
   (b) S es una semejanza.

2. [5 pts.] Encuentre la descomposición polar de las siguientes matrices:
   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
   (b) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. [5 pts.] Sean $A \in \mathcal{L}(E,F)$ y $B \in \mathcal{L}(E,G)$ invertibles. Pruebe que existe $C \in \mathcal{L}(F,G)$ ortogonal e invertible con $B = CA$ sii $|Av| = |Bv|$ para todo $v \in E$.

4. [5 pts.] Pruebe que todo $A \in \mathrm{End}(E)$ puede ser expresado como $A = UP$, donde $P, U \in \mathrm{End}(E)$, U es ortogonal y $P \geq 0$.

Jueves, 23 de Junio de 2016