Álgebra Lineal II
Escuela Profesional de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

Lista 3 de Ejercicios

Tema: Operadores auto-adjuntos **Ciclo: 2016.1**

A lo largo de esta lista, E y F denotarán e.p.i. de dimensión finita (salvo se diga lo contrario), $\mathcal{L}(E,F) := \{A : E \to F \ ; \ A \text{ es lineal}\}$, $\mathrm{End}(E) := \mathcal{L}(E,E)$, y un operador $A \in \mathrm{End}(E)$ será llamado de **normal** si A y A^* conmutan, **diagonalizable** si E posee una base formada por autovectores de A e **involución** si $A^2 = I$.

1. Sean $P, Q \in \mathrm{End}(E)$ proyecciones. Pruebe que $P = Q$ sii tienen los mismos autovectores con los mismos autovalores.
2. Sean $P \in \mathrm{End}(E)$ una proyección. Pruebe que P es auto-adjunta sii P es normal.
3. Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$. Pruebe que A es auto-adjunto si B es invertible y BAB^* es auto-adjunto.
4. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$ auto-adjunto y sea $v \in E$. Pruebe que para todo $k \in \mathbb{N}$:
$$A^k v = 0 \quad \Rightarrow \quad Av = 0.$$
5. Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$ involuciones auto-adjuntas. Pruebe que AB es una involución auto-adjunta sii $AB = BA$.
6. Dados los vectores $v = (2,-1,-2)$ y $w = (3,-6,-6)$, determine el operador auto-adjunto $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que $Av = (1,1,13)$ y $Aw = (3,21,33)$, sabiendo que la traza de A es 5.
7. Dados los vectores $u = (4,4,-2)$, $v = (4,-2,4)$ y $w = (1,-2,-2)$. Sea $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que $Au = (10,-2,-2)$, $Av = (-2,10,-2)$ y $Aw = (1,1,-5)$. Pruebe que A es auto-adjunto.
8. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$, $v \mapsto Av = \langle v, a\rangle b$ con $a, b \in E \setminus \{0\}$. Pruebe que A es auto-adjunto sii b es múltiplo de a.
9. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$.
   (a) Si $A^*A = -A$, pruebe que los autovalores de A pertenecen al conjunto $\{0, -1\}$.
   (b) Dé una matriz $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ tal que $a_{11} = -1/3$ y $\mathbf{a}^\top \mathbf{a} = -\mathbf{a}$.
   (c) ¿Cuántas matriz del tipo del ítem anterior existen?
10. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$. Si E posee una base formada por autovectores de A, pruebe que es posible definir en E un producto interno en relación al cual A es auto-adjunto.
11. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$ diagonalizable. Si $F \subset E$ es un subespacio invariante por A, pruebe que la restricción de A al subespacio F es un operador diagonalizable en F.

12. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$ diagonalizable y sea $F \subset E$ subespacio. Si F es invariante por A, pruebe que existe un subespacio $G \subset E$ también invariante por A tal que $E = F \oplus G$.

13. Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$ auto-adjuntos.
    (a) Pruebe que $AB + BA$ es autoadjunto.
    (b) ¿Qué se puede decir sobre $AB - BA$?

14. Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$ auto-adjuntos. Pruebe que A y B conmutan sii E posee una base ortonormal formada por autovectores comunes a B y A.