6. Operadores normales (caso real)

A lo largo de esta sección, E denotará un e.p.i. real de dimensión finita (salvo se diga lo contrario), $\mathcal{L}(E,F) := \{A : E \to F\ ;\ A \text{ es lineal}\}$ y $\mathrm{End}(E) := \mathcal{L}(E,E)$. A continuación, estudiaremos el tipo más general de endomorfismos sobre E para los cuales existe una base ortonormal en la cual la matriz del operador tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & \alpha_1 & -\beta_1 & & & \\ & & & \beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_s & -\beta_s \\ & & & & & & \beta_s & \alpha_s \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Estos son los operadores normales.

Definición 6.1. Un(a) endomorfismo A (matriz cuadrada **a**) se llama **normal** cuando conmuta con su adjunto (transpuesta). □

Observación 6.2. Un endomorfismo es normal sii su matriz relativa a una base ortonormal es una matriz normal. □

Ejemplo 6.3. Una matriz normal de orden 2 o es simétrica o es una matriz de semejanza en el plano. □

Definición 6.4. Un endomorfismo A es **antisimétrico** cuando $A^* = -A$. □

Observación 6.5. Un endomorfismo es simétrico sii su matriz relativa a una base ortonormal es una matriz antisimétrica. □

Propiedad 6.6.

(I) Todo operador antisimétrico sobre un espacio unidimensional es el endomorfismo nulo.

(II) El único autovalor posible de un operador antisimétrico es el 0. □

Ejemplo 6.7. Los operadores autoadjuntos, los ortogonales y los antisimétricos son normales. Análogamente, las matrices simétricas, las ortogonales cuadradas y las antisimétricas son normales. □

Theorem 6.8. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$ normal. Existe una base ortonormal de E en la cual la matriz de A tiene la forma (1) donde los elementos no expuestos son iguales a cero.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Observación 6.9.

(I) Los números $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son autovalores de A. Entre ellos, los no nulos tienen la forma $\lambda_i = \pm\sigma_j$, donde σ_j es un valor singular de A. Los otros valores singulares de A son $\sigma_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$, $j = 1, \dots, s$.

(II) Si A no posee autovectores, la matriz (1) la parte superior diagonal. Por otro lado, si A es autoadjunto, no existen los bloques de orden 2 de la parte inferior. $\square$

Corolario 6.10. Sea $A \in \mathrm{End}(E)$ antisimétrico.

(I) Existe una base ortonormal de E en la cual la matriz de A tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -\beta_1 & & & \\ & & & \beta_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -\beta_s \\ & & & & & & \beta_s & 0 \end{bmatrix}.$$

(II) El rango de A es un número par.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Ejemplo 6.11. Todo operador antisimétrico en el espacio $\mathbb{R}^3$ consiste en el producto vectorial por un vector fijo de $\mathbb{R}^3$. $\square$

Ejercicio 6.1. Sea $A = B+C$ la descomposición del operador A como suma del operador autoadjunto B son el operador antisimétrico C. Pruebe que A es normal sii $BC = CB$

Ejercicio 6.2. Pruebe que los operadores autoadjuntos $S, T \in \mathrm{End}(E)$ son iguales sii

$$\langle Sv, v\rangle = \langle Tv, v\rangle$$

para todo $v \in E$. Use este hecho para demostrar que $A \in \mathrm{End}(E)$ es normal sii $|Av| = |A^*v|$ para todo $v \in E$.

Ejercicio 6.3. Si $\dim(E) = n$ y el operador normal $A \in \mathrm{End}(E)$ tiene n autovalores distintos, pruebe que A es autoadjunto.

Ejercicio 6.4. Sean $u_1, \dots, u_n$ las filas y $v_1, \dots, v_n$ las columnas de una matriz $\mathbf{a}$. Pruebe que

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle v_i, v_j\rangle$$

para cualesquiera i, j sii $\mathbf{a}$ es normal.

Ejercicio 6.5. Entre las matrices abajo, determine cuales son normales.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 3 & 9 & 6 \\ 6 & -6 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6.6.

(I) Pruebe que una projección P es un operador normal sii $P = P^*$.

(II) Pruebe un resultado análogo para una involución.

Ejercicio 6.7. Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$ operadores normales. Si $AB = 0$, pruebe:

(I) $\mathrm{im}(B) \subset \ker(A)$,

(II) $\mathrm{im}(B^*) \subset \ker(A^*)$,

(III) $\mathrm{im}(A) \subset \ker(B)$,

(IV) $BA = 0$.

Ejercicio 6.8. Si $A, B \in \mathrm{End}(E)$ son normales y conmutan, pruebe que AB es normal.

Ejercicio 6.9.

(I) De ejemplos de operadores normales A y B tales que $A+B$ y AB no son normales.

(II) De también un ejemplo en que AB es normal, pero A y B no conmutan.

Ejercicio 6.10. Sea $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$,

$$A(x, y, z, t) = (y - z + t, -x - z + 2t, x + y - t, -x - 2y + z).$$

(I) Muestre que A es antisimétrico.

(II) Encuentre bases ortonormales $\{u, v\} \subset \ker(A)$ y $\{u', v'\} \subset \ker(A)^{\perp}$.

(III) Determine la matriz de A en la base $\{u, v, u', v'\} \subset \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 6.11. Si un subespacio $F \subset E$ es invariante por el operador normal $A \in \mathrm{End}(E)$. Pruebe que

(I) F también es invariante por A^* y que

(II) $F^{\perp}$ es invariante por A y A^*.