Álgebra Lineal II
Escuela Profesional de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

Lista 2 de Ejercicios

Tema: La adjunta y subespacios invariantes **Ciclo: 2016.1**

A lo largo de esta lista, E y F denotarán e.p.i. de dimensión finita (salvo se diga lo contrario), $\mathcal{L}(E,F) := \{A : E \to F \ ; \ A \text{ es lineal}\}$, $\mathrm{End}(E) := \mathcal{L}(E,E)$ y un operador $A \in \mathrm{End}(E)$ será llamado de **normal** si A y A^* conmutan.

1. Sea $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Probar que
   (a) Si A es sobreyectiva, entonces AA^* es invertible y $A^*(AA^*)^{-1}$ es una inversa a la derecha de A.
   (b) Si A es inyectiva, entonces A^*A es invertible y $(A^*A)^{-1}A^*$ es una inversa a la izquierda de A.
2. Encuentre una inversa a la derecha para la transformación lineal $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x+2y+3z, 2x-y-z)$.
3. Encuentre una inversa a la izquierda para la transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y) \mapsto (x+2y, 2x-y, x+3y, 4x+y)$.
4. Sea $P : E \to E$ un operador de proyección. Pruebe que también P^* es un operador de proyección y dé un ejemplo en que $P \neq P^*$.
5. Considere en $E := \mathcal{M}(n \times n)$ el producto interno definido por
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{(i,j)\in J} a_{ij} b_{ij},$$
donde $J := \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}$ y $\mathbf{a} = [a_{ij}], \mathbf{b} = [b_{ij}] \in E$. Muestre que el subespacio vectorial A de las matrices antisimétricas es el complemento ortogonal del subespacio S de las matrices simétricas.
6. Considere en $E := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ es continua}\}$ el producto interno definido por
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$
donde $f, g \in E$. Muestre que el subespacio vectorial P de las funciones pares es el complemento ortogonal del subespacio I de las funciones impares.
7. Sean $A, B \in \mathrm{End}(E)$. Pruebe que si A y B conmutan, entonces también A^* y B^* conmutan.

8. Sea $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(m \times n)$. Demuestre que o el sistema $\mathbf{a}x = b$ tiene soloución cualquiera que sea $b \in \mathcal{M}(m \times 1)$ o el sistema homogéneo transppuesto $\mathbf{a}^\top y = 0$ admite una solución no trivial.

9. Sea $X \subset E$ no vacío. Pruebe que $X^{\top\top} = \operatorname{span}(X)$.

10. Sean $F, G \subset E$ subespacios vectoriales. Demuestre que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ y $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

11. La teoría nos dice que la traza de toda matriz asociada a un endomorfismo es siempre la misma. Considere en $\mathcal{L}(E, F)$ la aplicación definida por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^* B),$$

donde $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$. Pruebe que esto define un producto interno en $\mathcal{L}(E, F)$ y que

$$\langle A, B\rangle = \sum_{(i,j)\in J} a_{ij} b_{ij},$$

donde $J := \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ y $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{b} = [b_{ij}]$ son las matrices de A y B en relación a bases ortonormales de E y F, respectivamente.

12. Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 3x - 2y - z, -2x + 3y + 2z)$. Obtenga bases para los siguientes subespacios: $\operatorname{im}(A), \ker(A), \operatorname{im}(A^*)$ y $\ker(A^*)$.

13. Sea $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Pruebe que

    (a) $A|_{\operatorname{im}(A^*)}$ define un isomorfismo entre $\operatorname{im}(A^*)$ e $\operatorname{im}(A)$.

    (b) $A^*|_{\operatorname{im}(A)}$ define un isomorfismo entre $\operatorname{im}(A)$ e $\operatorname{im}(A^*)$.

    ¿Son estos isomorfismos uno el inverso del otro?

14. Sea $A \in \operatorname{End}(E)$. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} |Au_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |A^* u_i|^2,$$

donde $\mathcal{U} := \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de E.

15. Sean $A, B \in \operatorname{End}(E)$. Demuestre que si A y B conmutan, entonces $\ker(B)$ e $\operatorname{im}(B)$ son subespacios invariantes por A.

16. Sean $A, B \in \operatorname{End}(E)$ y el polinomio $p(x)$. Pruebe que los subespacios vectoriales $\ker(p(A))$ e $\operatorname{im}(p(A))$ son invariantes por A.

17. Sea $A \in \operatorname{End}(E)$. Demuestre que

    (a) Si F y G son subespacios invariantes por A, entonces $F \cap G$ y $F + G$ también son invariantes por A.

    (b) Si u y v son autovectores de A y A^*, respectivamente, correspondientes a autovalores que son distintos, entonces $\langle u, v\rangle = 0$.

18. Sea $A \in \operatorname{End}(E)$ un operador normal. Demuestre que

    (a) $\forall v \in E : \ |Av| = |A^* v|$.

    (b) todo autovector de A es también autovector de A^*, con el mismo autovalor.

(c) $\ker(A)^{\perp} = \operatorname{im}(A)$

19. Sea $E := C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Muestre que los subespacios F, G generados por los conjuntos

    (a) $\{\cos(x), \sin(x)\}$,

    (b) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$,

    respectivamente, son invariantes por el operador derivación $D : E \to E$.

20. Sea $A \in \operatorname{End}(E)$ con $\dim(E) = n$. Pruebe que

    (a) A posee un subespacio invariante de dimensión $n-1$ o $n-2$.

    (b) Si A posee n autovalores distintos, entonces existen exactamente 2^n subespacios de E invariantes por A.

21. Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, 0)$.

    (a) ¿Cuales son los autovalores de A?

    (b) ¿Cuales son los autovectores de A?

    (c) Si

    $$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

    ¿existe alguna matriz invertible $\mathbf{b} \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ tal que $\mathbf{b}^{-1}\mathbf{ab}$ sea diagonal?

22. Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + y, 2x + 2y)$.

    (a) Muestre que A posee autovalores 4 y 1.

    (b) Halle una base $\mathcal{U} = \{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $Au = 4u$ y $Av = v$.

    (c) Si

    $$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

    halle una matriz invertible $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ tal que

    $$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{ap} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$