Convergencia y Derivación de Series

Juan Espejo*

20 de julio de 2017

Definición 1 (Convergencia puntual y convergencia uniforme)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$. Se dice que una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$

(i) *converge puntualmente* a f, $f_n \to f$, si para cada $x \in X$: $f_n(x) \to f(x)$.

(ii) *converge uniformemente* a f, $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0,\ x \in X \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Observación 2. Siguiendo la notación de arriba, dado $\epsilon > 0$, la *faja de radio ϵ en torno del gráfico de f* es el conjunto

$$F(f;\epsilon) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \in X,\ f(x) - \epsilon < y < f(x) + \epsilon\}.$$

Desde una perspectiva geométrica, decir que $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$ significa que para todo $\epsilon > 0$, el gráfico de f_n está contenido en la faja de radio ϵ en torno del gráfico de f para todo n suficientemente grande, ver figura 1.

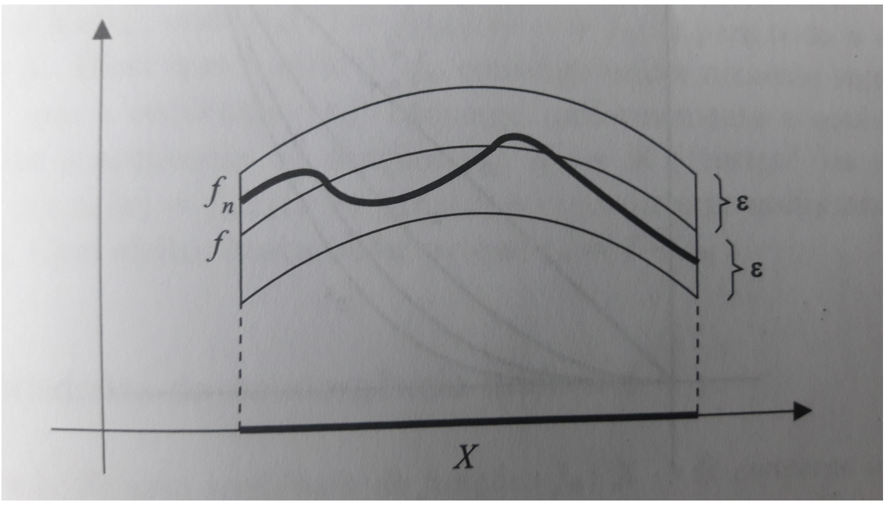

Figura 1: *El gráfico de f_n contenido en la faja $F(f;\epsilon)$, tomado de la figura 10 de [1].*

*jespejod@uni.edu.pe

Observación 3. Siguiendo la notación de arriba:

$$f_n \xrightarrow{\text{uni}} f \quad \Rightarrow \quad f_n \to f.$$

Propiedad 4. Siguiendo la notación de arriba, si

(i) $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$ y

(ii) cada f_n es continua,

entonces, f es continua.

Demostración. Ver teorema 1 del capítulo 12 de [1]. □

Lema 5. Siguiendo la notación de arriba, $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$ si y solo si ...

Demostración. Ver teorema 7.8 de Rudin. □

Theorem 6. Siguiendo la notación de arriba, sea $(M_n) \subset \mathbb{R}$. Si

(i) para cada $x \in X$ y n: $|f_n(x)| \leq M_n$ y

(ii) $\sum M_n$ converge,

entonces $\sum f_n$ converge uniformemente (sobre X).

Demostración. ...

Ejemplo 7. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$.

(i) $f_n \to 0$

(ii) $f_n \to 0$ sobre compactos.

Ejemplo 8. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, y sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$.

(i) $f_n \to f$

(ii) f_n NO converge uniformemente a f.

Ejemplo 9. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$.

(i) $f_n \to 0$

(ii) f_n NO converge uniformemente a f.

Propiedad 10. Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas. Si $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

i.e.,

$$\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n.$$

Demostración. ...

Ejemplo 11. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx^n(1-x^n)$.

(i) $f_n \to 0$

(ii) $\int f_n$ NO converge a 0.

Lema 12 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

(i) existe $c \in [a,b]$ tal que $F(x) = F(c) + \int_c^x f(t)dt$ para todo $x \in [a,b]$.

(ii) F es una primitiva de f.

Demostración. Ver teorema 1 del capítulo 11 de [1]. □

Theorem 13 (Dereivación término a término)**.** Sea $(f_n) \subset C^1[a,b]$. Si

(i) $f_n' \xrightarrow{\text{uni}} g$ y

(ii) $(f_n(c))$ converge para algún $c \in [a,b]$,

entonces $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$ con $f \in C^1[a,b]$ y $f' = g$, i.e.,

$$(\lim f_n)' = \lim f_n'.$$

Demostración. ...

Corolario 14 (Derivación de series)**.** Sea $(f_n) \subset C^1[a,b]$. Si

(i) $\sum f_n' \xrightarrow{\text{uni}} g$ y

(ii) $\sum f_n(c)$ converge para algún $c \in [a,b]$,

entonces $\sum f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$ con $f \in C^1[a,b]$ y $f' = g$, i.e.,

$$\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'.$$

Demostración. ...

Ejemplo 15.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^{2n}} = 1 + x^2,$$

si $x \neq 0$.

Referencias

[1] E. L. Lima. *Análise Real*, volume 1. IMPA, 2011. 11 edição.