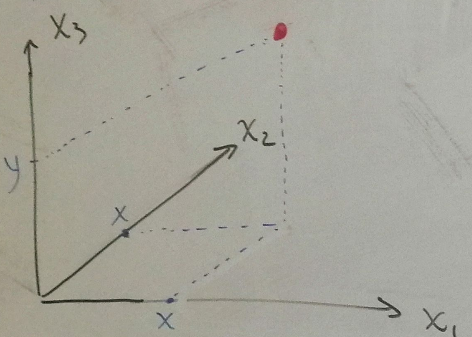
Preguta 1 (PC 2)

(i)

(P) $\quad \min f(\beta) := \|y - X\beta\|_2^2$



nuestro modelo: $\beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Luego, reemplazando el modelo en el problema de optimización:

$$y - (\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y \end{bmatrix}}_{y} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & x \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}}_{\beta}$$

$$f(\beta) := \left[y - (\beta_1 + x\beta_2 + x\beta_3) \right]^2$$

$$f(2\beta_1, \beta_2, \beta_3) \neq 2 f(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

¡f No el lineal!

pero f es convexo; entonces

(P) es un problema de programación convexo

Pregunta 1 (PC 2)

(ii) $X^T X = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & x \end{bmatrix}$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ x & x^2 & x^2 \\ x & x^2 & x^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u \\ v \\ v \end{array}$$

$\text{Span}(u) = \text{Span}(\{u, v, v\})$

$= \text{espacio\_fila}$

Luego, $\text{rank}(X^T X) = 1$, y así,

$X^T X$ es singular y NO podemos aplicar la solución 'closed-form'

(iii) Sea $\beta^* \in \mathbb{R}^3$.

Como f es diferenciable y convexa:

$f(\beta^*)$ es una solución de (P)

$\Updownarrow$

β^* es un mínimo global de f

$\Updownarrow$

β^* " local "

$\Updownarrow$

$\nabla f(\beta^*) = 0$

Pregunta 1 (PC 2)

Así, resolver (P) es equivalente a resolver:

$$\nabla f(\beta^*) = 0.$$

Como

$$f(\beta) = (y - \beta_1 - x\beta_2 - x\beta_3)^2,$$

entonces

$$\nabla f(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta_1}(\beta) \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_2}(\beta) \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_3}(\beta) \end{bmatrix} = 2(\quad)\begin{bmatrix} -1 \\ -x \\ -x \end{bmatrix}$$

Así, tenemos que resolver:

$$2(\quad)\begin{bmatrix} -1 \\ -x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lo cual es equivalente a

$$y - \beta_1 - x\beta_2 - x\beta_3 = 0.$$

Así,

$$C.S. = \{\beta \in \mathbb{R}^3 ; \beta_1 = y - x\beta_2 - x\beta_3\}$$

$$= \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{span}\left(\begin{bmatrix} -x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Así, hay infinitas soluciones (modelos)