ESTADISTICA

1- Estadística Descriptiva

1. 1 – Introducción

El campo de la estadística tiene que ver con la recopilación, organización, análisis y uso de datos para tomar decisiones razonables basadas en tal análisis.
Al recoger datos relativos a las características de un grupo de individuos u objetos, sean alturas y pesos de estudiantes de una universidad o tuercas defectuosas producidas por una fábrica, suele ser imposible o poco práctico observar todo el grupo, en especial si es muy grande. En vez de examinar el grupo entero, llamado ***población*** o universo, se examina una pequeña parte del grupo, llamada ***muestra***.
En muchos problemas estadísticos es necesario utilizar una muestra de observaciones tomadas de la población de interés con objeto de obtener conclusiones sobre ella. A continuación se presenta la definición de algunos términos

Una ***población*** está formada por la totalidad de las observaciones en las cuales se tiene cierto interés.

Una ***muestra*** es un subconjunto de observaciones seleccionada de una población

Si una muestra es representativa de una población, es posible inferir importantes conclusiones sobre la población a partir del análisis de la muestra. La parte de la estadística que trata sobre las condiciones bajo las cuales tal inferencia es válida se llama ***estadística inductiva*** o ***inferencia estadística***. Ya que dicha inferencia no es del todo exacta, el lenguaje de las probabilidades aparecerá al establecer nuestras conclusiones.
La parte de la estadística que estudia la muestra sin inferir alguna conclusión sobre la población es la ***estadística descriptiva***.
En particular la estadística descriptiva trata sobre los métodos para recolectar, organizar y resumir datos.
La estadística descriptiva puede a su vez dividirse en dos grandes áreas: métodos gráficos y métodos numéricos.
En lo referente a la notación, ***n*** representa el número de observaciones en un conjunto de datos, las observaciones están representadas por una variable con subíndice (por ejemplo $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Así la representación de los cinco valores, $n = 5$, de la velocidad de un chip de computadora en MHz medida por un ingeniero, será: $x_1 = 481.5$, $x_2 = 493.7$, $x_3 = 471.8$, $x_4 = 486.4$, $x_5 = 496.2$,

1.2 – Distribución de frecuencias e histogramas

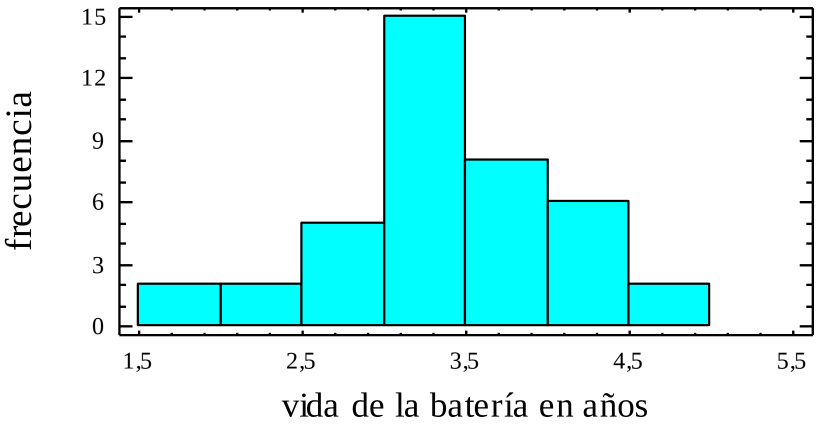
Supongamos que los siguientes datos representan la vida de 40 baterías para automóvil similares, registradas al décimo de año más cercano. Las baterías se garantizan por tres años.

2.2	4.1	3.5	4.5	3.2	3.7	3.0	2.6	3.4	1.6	3.1	3.3	3.8	3.1	4.7	3.7
2.5	4.3	3.4	3.6	2.9	3.3	3.9	3.1	3.3	3.1	3.7	4.4	3.2	4.1	1.9	3.4
4.7	3.8	3.2	2.6	3.9	3.0	4.2	3.5								

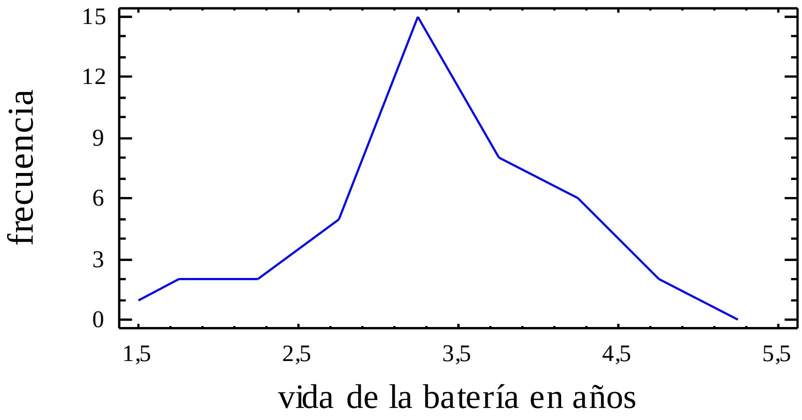
Para organizar los datos buscamos el mínimo y el máximo de la muestra, en este caso el mínimo es 1.6 y el máximo es 4.7
Elegimos un intervalo (a, b) que contenga todos los datos, por ejemplo a = 1.5 y b = 5.0.
Dividimos el intervalo (a, b) en subintervalos que pueden ser de igual longitud, pero no necesariamente, y contamos cuántas observaciones caen en cada subintervalo, esa será la ***frecuencia*** del intervalo. Para esto debemos decidir cuántos subintervalos utilizaremos. En general se puede usar la regla de tomar aproximadamente $\sqrt{n}$ subintervalos.
Los subintervalos se llaman ***intervalos de clase*** o simplemente ***clases***. Resulta satisfactorio utilizar no menos de 5 clases ni más de 20.
En el ejemplo $\sqrt{40} \approx 6$, entonces 6 o 7 clases será una elección satisfactoria.
Como $b-a = 5.0-1.5 = 3.5$, si tomamos r = 7 clases entonces la longitud de cada una sería $(b-a)/r = 0.5$.
Construimos una ***tabla de frecuencias*** de manera tal que, por ejemplo, en el intervalo (1.5 , 2.0) están las observaciones ***mayores*** a 1.5 y ***menores o iguales que*** 2.0.
Los extremos de los intervalos de clase son los ***límites de clase inferior y superior.***

Intervalo de clase	***Marca de clase***	***Frecuencia f***	***Frecuencia relativa***	***Frecuencia acumulada***	***Frecuencia Acumulada relativa***
1.5 – 2.0	1.75	2	0.05	2	0.075
2.0 – 2.5	2.25	2	0.05	4	0.1
2.5 – 3.0	2.75	5	0.125	9	0.225
3.0 – 3.5	3.25	15	0.375	24	0.6
3.5 – 4.0	3.75	8	0.2	32	0.8
4.0 – 4.5	4.25	6	0.15	38	0.95
4.5 – 5.0	4.75	2	0.05	40	1.000

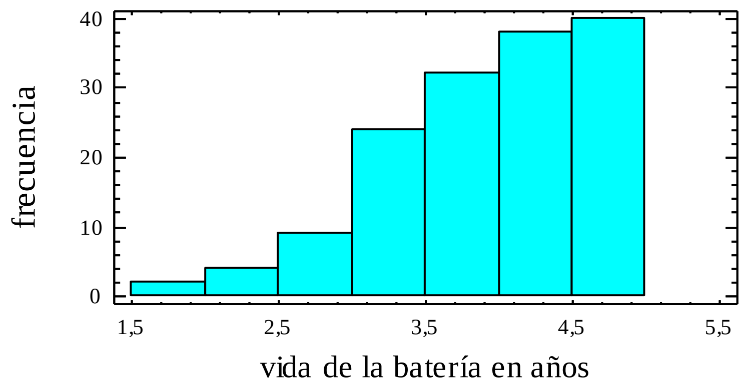
El punto medio de cada clase es la ***marca de clase***. La longitud de cada intervalo de clase es el ***ancho de clase***.
El ***gráfico de la tabla de frecuencias*** es el ***histograma***. Se construye en un sistema de ejes cartesianos. Sobre el eje de absisas se marcan los límites de clase, y en cada clase se construye un rectángulo cuya base es el intervalo de clase y el ***área del mismo*** debe ser proporcional a la ***frecuencia de la clase***. Si los intervalos de clase tienen el ***mismo ancho*** se puede construir cada rectángulo de manera que su ***altura sea igual a la frecuencia*** de la clase correspondiente. Estos histogramas son más fáciles de interpretar.
En la figura siguiente se muestra el histograma referido a la tabla de frecuencias anterior generado por el paquete Statgraphics.



Si se tienen pocos datos los histogramas pueden cambiar de apariencia al variar el número de clases y el ancho de las mismas.
Si se hubiera graficado el ***histograma de frecuencias relativas*** el aspecto sería el mismo con la diferencia de la notación en el eje de ordenadas.
También se puede graficar un ***polígono de frecuencias*** al unir los puntos medios del lado superior de cada rectángulo con segmentos y agregar en los extremos dos clases adicionales de frecuencia cero como indica la siguiente figura



La figura siguiente muestra un ***histograma de frecuencias acumuladas*** disponible en el paquete Statgraphics. En esta gráfica la altura de cada rectángulo representa el número total de observaciones que son menores o iguales al límite superior de la clase respectiva.



Los histogramas son útiles al proporcionar una impresión visual del aspecto que tiene la distribución de las mediciones, así como información sobre la dispersión de los datos.
Al construir una tabla de frecuencias se pierde información, sin embargo esa pérdida de información es a menudo pequeña si se le compara con la concisión y la facilidad de interpretación ganada al utilizar la distribución de frecuencias y el histograma.
Las distribuciones acumuladas también son útiles en la interpretación de datos; por ejemplo en la figura anterior puede leerse de inmediato que existen aproximadamente 25 baterías con duración menor o igual a 3.5 años.

1.3 – Diagrama de tallo y hoja

El diagrama de tallo y hoja es una buena manera de obtener una presentación visual informativa del conjunto de datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada número x_i está formado al menos por dos dígitos. Para construir un diagrama de este tipo los números x_i se dividen en dos partes: un ***tallo***, formada por uno o más dígitos principales, y una ***hoja***, la cual contiene el resto de los dígitos. Para ilustrar lo anterior consideramos los datos que especifican la vida de 40 baterías para automóvil dados anteriormente. Dividimos cada observación en dos partes de manera que el tallo representa el dígito entero que antecede al decimal, y la hoja corresponde a la parte decimal del número. Por ejemplo, para el número 3.7 el dígito 3 designa el tallo, y el 7 la hoja. Para nuestros datos los cuatro tallos 1, 2, 3 y 4 se listan verticalmente del lado izquierdo de la tabla, en tanto que las hojas se registran en el lado derecho correspondiente del valor del tallo adecuado. Entonces la hoja 6 del número 1.6 se registra enfrente del tallo 1, la hoja 5 del número 2.5 enfrente del tallo 2, y así sucesivamente.

Tallo	***Hoja***
1	6 9
2	2 5 6 6 9
3	0 0 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 6 7 7 7 8 8 9 9
4	1 1 2 3 4 5 7 7

Podríamos aumentar el número de tallos para obtener una forma mas adecuada de la distribución de los datos, para esto escribimos dos veces cada valor del tallo y después registramos las hojas 0, 1, 2, 3 y 4 enfrente del valor del tallo adecuado donde aparezca

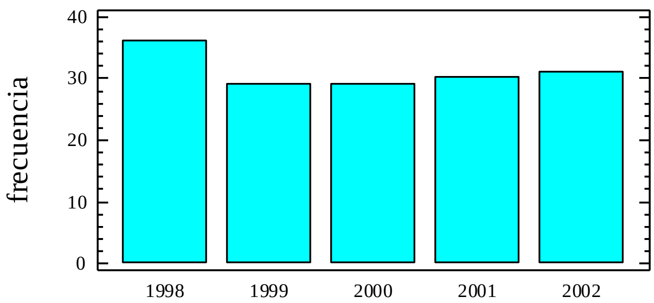
por primera vez, y las hojas 5, 6, 7, 8 y 9 enfrente de este mismo valor del tallo donde aparece por segunda vez.
En la tabla siguiente se ilustra el nuevo diagrama de tallo y hoja donde a los tallos que corresponden a las hojas 0 a 4 se les anotó un símbolo *, y al tallo correspondiente a las hojas 5 a 9 se les anotó el símbolo · .

Tallo	*Hoja*
1	6 9
2*	2
2·	5 6 6 9
3*	0 0 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4
3·	5 5 6 7 7 7 8 8 9 9
4*	1 1 2 3 4
4·	5 7 7

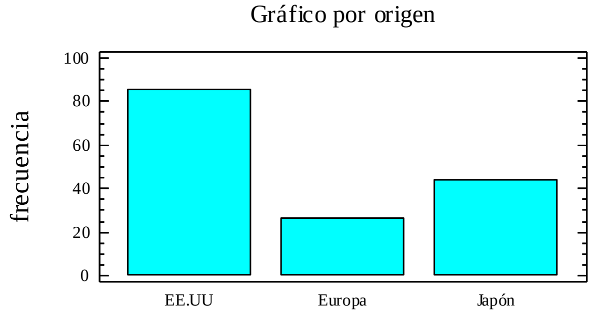
En cualquier problema específico, se debe decidir cuáles son los valores del tallo adecuados. Se trata de una decisión que se toma algo arbitrariamente, aunque nos guiamos por el tamaño de nuestra muestra. Por lo general se eligen entre 5 y 20 tallos. Cuanto menor es el número de datos disponibles, menor será la elección del número de tallos.

<u>Observación</u>:
Las tablas de frecuencia y los histogramas también pueden emplearse en ***datos cualitativos o categóricos***, es decir la muestra no consiste de valores numéricos ***(datos cuantitativos***) sino que los datos se ordenan en ***categorías*** y se registra cuántas observaciones caen en cada categoría (las categorías pueden ser *masculino* , *femenino* o *fumador, no fumador* o clasificar según nivel educativo: *primario, secundario, terciario, universitario, ninguno*). Cuando los datos son categóricos las clases se dibujan con el mismo ancho.
Por ejemplo
El gráfico siguiente corresponde a una muestra de 155 autos clasificados según el año de fabricación: 1998, 1999, 2000, 2001 y 2002. Notar que el modelo 1998 es el de mayor frecuencia.

Grafico de barras por año



En el siguiente gráfico se clasifican los autos según el origen: americano, europeo o japonés. Notar que hay mayoría de autos americanos.



1.4 – Medidas Descriptivas

1.4.1 – Medidas de Localización

Del mismo modo que las gráficas pueden mejorar la presentación de los datos, las descripciones numéricas también tienen gran valor. Se presentan varias medidas numéricas importantes para describir las características de los datos.
Una característica importante de un conjunto de números es su ***localización*** o ***tendencia central***.

Media

La medida más común de localización o centro de un grupo de datos es el promedio aritmético ordinario o media. Ya que casi siempre se considera a los datos como una muestra, la media aritmética se conoce como ***media muestral.***

Si las observaciones de una muestra de tamaño n son $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entonces la ***media muestral*** es

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Ejemplo:
La media muestral de la vida útil en años de una batería de las 40 observaciones dadas en ejemplos anteriores es

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{40} x_i}{40} = \frac{2.2 + 4.1 + 3.5 + 4.5 + 3.2 + \ldots + 3.5}{40} = 3.4125$$

La media tiene como ventaja su fácil cálculo e interpretación, pero tiene como desventaja el hecho de distorsionarse con facilidad ante la presencia de ***valores atípicos*** en los datos. Si en el ejemplo anterior tenemos $x_{40} = 350$ en lugar de 3.5 entonces $\bar{x} = 12.075$ dando así la idea errónea que los datos en su mayor parte se concentran alrededor de 12.075

Mediana

Otra medida de tendencia central es la ***mediana***, o punto donde la muestra se divide en dos partes iguales.

Sean $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, …, $x_{(n)}$ una muestra escrita en orden creciente de magnitud; esto es $x_{(1)}$ denota la observación más pequeña, $x_{(2)}$ la segunda observación más pequeña, ……, y $x_{(n)}$ la observación más grande. Entonces la ***mediana*** $\tilde{x}$ se define como la observación del lugar $\frac{n+1}{2}$ si n es impar, o el promedio de las observaciones de los lugares $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}+1$ si n es par. En términos matemáticos

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{((n+1)/2)} & n \quad \text{impar} \\ \dfrac{x_{(n/2)} + x_{((n/2)+1)}}{2} & n \quad \text{par} \end{cases}$$

La ventaja de la mediana es que los valores extremos no tienen mucha influencia sobre ella.

Ejemplo:

Supóngase que los valores de una muestra son

1, 3, 4, 2, 7, 6, 8

Ordenamos los valores de menor a mayor: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

Como son $n = 7$ valores y 7 es impar entonces la mediana es el valor del lugar $\frac{7+1}{2} = 4$, es decir $x_{(4)} = 4$

La media muestral es $\bar{x} = 4.4$. Ambas cantidades proporcionan una medida razonable de la tendencia central de los datos.

Si ahora tenemos la muestra 1, 2, 3, 4, 2450, 7, 8, entonces la media muestral es $\bar{x} = 353.6$

En este caso la media no dice mucho con respecto a la tendencia central de la mayor parte de los datos. Sin embargo la mediana sigue siendo $x_{(4)} = 4$, y ésta es una medida de tendencia central más significativa para la mayor parte de las observaciones.

Moda

La ***moda*** es la observación que se presenta con mayor frecuencia en la muestra

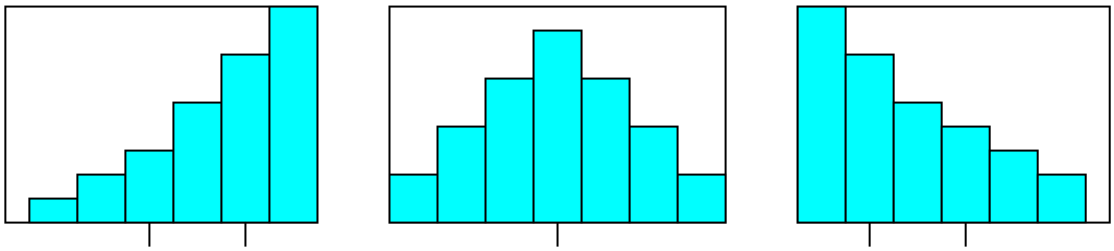
Por ejemplo la moda de los siguientes datos 3, 6, 9, 3, 5, 8, 3, 10, 4, 6, 3, 1
Es 3, porque este valor ocurre 4 veces y ningún otro lo hace con mayor frecuencia.

Puede existir más de una moda. Por ejemplo considérense las observaciones

3, 6, 9, 3, 5, 8, 3, 10, 4, 6, 3, 1, 6, 2, 5, 6

La moda son 3 y 6, ya que ambos valores se presentan cuatro veces., y ningún otro lo hace con mayor frecuencia. Se dice en este caso que los datos son *bimodales*.

Si los datos son simétricos entonces la media y la mediana coinciden. Si además los datos tienen una sola moda entonces la media, la mediana y la moda coinciden.
Si los datos están *sesgados* (esto es, son asimétricos, con una larga cola en uno de los extremos), entonces la media, la mediana y la moda no coinciden. Generalmente se encuentra que moda < mediana < media si la distribución está sesgada a la derecha, mientras que moda > mediana > media si la distribución está sesgada hacia la izquierda.
Eso se representa en la siguiente figura



$\bar{x}$ $\tilde{x}$ $\bar{x}$ $\tilde{x}$ $\bar{x}$

Sesgo a la izquierda $\tilde{x}$ Sesgo a derecha

Simétrica

<u>Percentiles y cuartiles</u>

La mediana divide los datos de una muestra en dos partes iguales. También es posible dividir los datos en más de dos partes. Cuando se divide un conjunto ordenado de datos en cuatro partes iguales, los puntos de división se conocen como ***cuartiles***. El *primer cuartil* o *cuartil inferior*, q_1, es un valor que tiene aproximadamente la cuarta parte (25%) de las observaciones por debajo de él, y el 75% restante, por encima de él. El *segundo cuartil* , q_2, tiene aproximadamente la mitad (50%) de las observaciones por debajo de él. El segundo cuartil coincide con la mediana. El *tercer cuartil* o *cuartil superior*, q_3, tiene aproximadamente las tres cuartas partes (75%) de las observaciones por debajo de él. Como en el caso de la mediana, es posible que los cuartiles no sean únicos. Por simplicidad en este caso, si más de una observación cumple con la definición se utiliza el promedio de ellas como cuartil.
<u>Ejemplo</u>:
En 20 automóviles elegidos aleatoriamente se tomaron las emisiones de hidrocarburos en velocidad al vacío, en partes por millón (ppm)

141 359 247 940 882 494 306 210 105 880 200 223 188 940 241 190
300 435 241 380

Primero ordenamos los datos de menor a mayor:

105, 141, 188, 190, 200, 210, 223, 241, 241, 247, 300, 306, 359, 380, 435, 494, 880, 882, 940, 940

Buscamos la mediana o segundo cuartil, como $n = 20$ y es número par entonces la mediana es el promedio de la observaciones que se encuentran en los lugares $\frac{n}{2} = 10$ y $\frac{n}{2} + 1 = 11$, es decir $\tilde{x} = q_2 = \frac{247 + 300}{2} = 273.5$

Ahora buscamos el primer cuartil, para esto tomamos las primeras 10 observaciones

105, 141, 188, 190, 200, 210, 223, 241, 241, 247

y de éstas calculamos la mediana, por lo tanto $q_1 = \frac{200 + 210}{2} = 205$

Análogamente, para calcular el tercer cuartil, tomamos las últimas 10 observaciones y calculamos la mediana de éstas

300, 306, 359, 380, 435, 494, 880, 882, 940, 940

$$q_3 = \frac{435 + 494}{2} = 464.5$$

Cuando un conjunto ordenado de datos se divide en cien partes iguales, los puntos de división reciben el nombre de ***percentiles***. En términos matemáticos el 100k – ésimo percentil p_k se define:

> El 100k – ésimo percentil p_k es un valor tal que al menos el 100k% de las observaciones son menores o iguales a él, y 100(1-k)% son mayores o iguales a él.

Notar que $p_{0.25} = q_1$, $p_{0.5} = q_2$, $p_{0.75} = q_3$

Una regla práctica para calcular los percentiles de un conjunto de ***n*** datos es la siguiente:
para calcular p_k hacemos el producto nk

si nk es un número entero i entonces $p_k = \frac{x_{(i)} + x_{(i+1)}}{2}$

si nk no es un número entero entonces tomamos la parte entera de nk : $\lfloor nk \rfloor = i$ y entonces $p_k = x_{(i+1)}$

Con los datos anteriores calculamos $p_{0.88}$

$n = 20$ $k = 0.88$ $nk = 20 \times 0.88 = 17.6$ la parte entera es $\lfloor 17.6 \rfloor = 17$ entonces $p_{0.88} = x_{18} = 882$

Calculamos $p_{0.10}$:

$n = 20 \quad k = 0.10 \quad nk = 20 \times 0.10 = 2$ entonces

$$p_{0.10} = \frac{x_{(2)} + x_{(3)}}{2} = \frac{141+188}{2} = 164.5$$

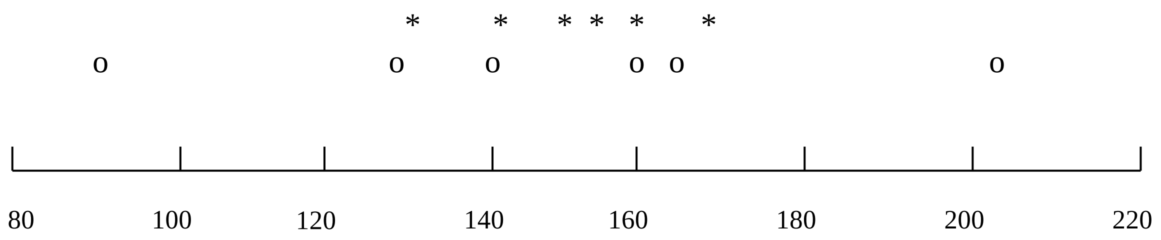
1.4.2 - <u>Medidas de variabilidad</u>

La localización o tendencia central no necesariamente proporciona información suficiente para describir datos de manera adecuada. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos muestras de resistencia a la tensión (en psi) de aleación de aluminio-litio:

Muestra 1: 130, 150, 145, 158, 165, 140
Muestra 2: 90, 128, 205, 140, 165, 160

La media en ambas muestras es 148 psi. Sin embargo la dispersión o variabilidad de la muestra 2 es mucho mayor que la de la muestra 1. Para ilustrar esto hacemos para cada muestra un ***diagrama de puntos***:

Muestra 1 = * Muestra 2 = o



<u>Rango de la muestra y rango intercuartílico</u>

Una medida muy sencilla de variabilidad es el ***rango de la muestra***, definido como la diferencia entre las observaciones más grande y más pequeña. Es decir

$$\boxed{rango = \max(x_i) - \min(x_i)}$$

Para las muestras anteriores
Muestra 1 ⟶ *rango* = 165-130 = 35

Muestra 2 ⟶ *rango* = 205-90 = 115

Está claro que a mayor rango, mayor variabilidad en los datos.

El rango ignora toda la información que hay en la muestra entre las observaciones más chica y más grande. Por ejemplo las muestras 1, 4, 6, 7, 9 y 1, 5, 5, 5, 9 tienen el mismo rango (rango = 8), Sin embargo en la segunda muestra sólo existe variabilidad en

los valores de los extremos, mientras que en la primera los tres valores intermedios cambian de manera considerable.
Al igual que las observaciones máxima y mínima de una muestra llevan información sobre la variabilidad, el ***rango intercuartílico*** definido como $q_3 - q_1$ puede emplearse como medida de variabilidad.

$$\boxed{RIC = q_3 - q_1}$$

Para los datos de las emisiones de hidrocarburos en velocidad al vacío, el rango intercuartílico es $q_3 - q_1 = 464.5 - 205 = 259.5$.
El rango intercuartílico es menos sensible a los valores extremos de la muestra que el rango muestral.

Varianza muestral y desviación estándar muestral

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una muestra de n observaciones, entonces la ***varianza muestral*** es

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

La ***desviación estándar muestral***, s, es la raíz cuadrada positiva de la varianza muestral

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

Por ejemplo, para los datos de las emisiones de hidrocarburos en velocidad al vacío

141 359 247 940 882 494 306 210 105 880 200 223 188 940 241 190
300 435 241 380

la media muestral es $\bar{x} = 395.1$ ppm y la varianza muestral es

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} =$$

$$= \frac{\left(141 - 395.1\right)^2 + \left(359 - 395.1\right)^2 + \left(247 - 395.1\right)^2 + \ldots\ldots + \left(380 - 395.1\right)^2}{19} = 78998.5 \ \text{ppm}^2$$

y la desviación estándar es $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{78998.5} = 281.067$ ppm

Observaciones:

1) La varianza muestral está en las unidades de medida de la variable al cuadrado. Por ejemplo si los datos están medidos en metros, las unidades de la varianza son metros al cuadrado. La desviación estándar tiene la propiedad de estar expresada en las mismas unidades de medida de las observaciones.

2) Se puede expresar la varianza muestral como

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

pues:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2}{n-1} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}n\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2}{n-1} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

En el ejemplo anterior volvemos a calcular la varianza muestral pero con esta última expresión

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{4623052 - (20)(395.1)^2}{19} = 78998.5 \text{ ppm}^2$$

Coeficiente de variación

El ***coeficiente de variación muestral*** es

$$cv = \frac{s}{\bar{x}}$$

El coeficiente de variación muestral es útil cuando se compara la variabilidad de dos o más conjuntos de datos que difieren de manera considerable en la magnitud de las observaciones.

Ejemplo: con un micrómetro se realizan mediciones del diámetro de un balero, que tienen una media de 4.03 mm y una desviación estándar de 0.012 mm; con otro micróme-

tro se toman mediciones de la longitud de un tornillo, que tienen una media de 1.76 pulgadas y una desviación estándar de 0.0075 pulgadas.
Los coeficientes de variación son

balero $\longrightarrow$ $cv = \dfrac{0.012}{4.03} = 0.003$

tornillo $\longrightarrow$ $cv = \dfrac{0.0075}{1.76} = 0.004$

en consecuencia, las mediciones hechas con el primer micrómetro tienen una variabilidad relativamente menor que las efectuadas con el otro micrómetro.

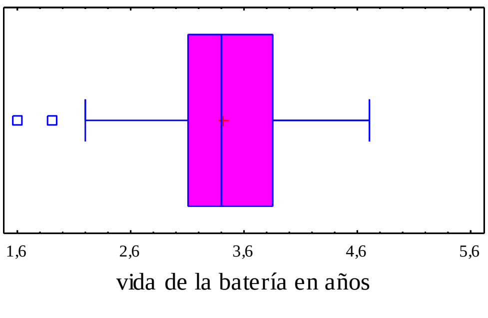
1.5 – Diagramas de caja

El ***diagrama de caja*** es una presentación visual que describe al mismo tiempo varias características importantes de un conjunto de datos, tales como el centro, la dispersión, la desviación de la simetría y la presencia de valores atípicos.
El diagrama de caja presenta los tres cuartiles, y los valores mínimo y máximo de los datos sobre un rectángulo en posición horizontal o vertical. El rectángulo delimita el rango intercuartílico con la arista izquierda ubicada en el primer cuartil, y la arista derecha ubicada en el tercer cuartil. Se dibuja una línea a través del rectángulo en la posición que corresponde al segundo cuartil. De cualquiera de las aristas del rectángulo se extiende una línea, o ***bigote***, que va hacia los valores extremos. Éstas son observaciones que se encuentran entre cero y 1.5 veces el rango intercuartílico a partir de las aristas del rectángulo. Las observaciones que están entre 1.5 y 3 veces el rango untercuartílico a partir de las aristas del rectángulo reciben el nombre de ***valores atípicos***. Las observaciones que están más allá de tres veces el rango intercuartílico a partir de las aristas del rectángulo se conocen como ***valores atípicos extremos***. En ocasiones se emplean diferentes símbolos para identificar los dos tipos de valores atípicos. A veces los diagramas de caja reciben el nombre de ***diagramas de caja y bigotes***.
Ejemplo: volvemos a los datos que representan la vida de 40 baterías para automóvil similares, registradas al décimo de año más cercano.

2.2	4.1	3.5	4.5	3.2	3.7	3.0	2.6	3.4	1.6	3.1	3.3	3.8	3.1	4.7	3.7
2.5	4.3	3.4	3.6	2.9	3.3	3.9	3.1	3.3	3.1	3.7	4.4	3.2	4.1	1.9	3.4
4.7	3.8	3.2	2.6	3.9	3.0	4.2	3.5								

La figura siguiente presenta un diagrama de caja obtenido con el paquete Statgraphics

tamaño de muestra = 40
Media = 3.4125
Mediana = 3.4
Mínimo = 1.6
Máximo = 4.7
Rango = 3.1
1º cuartil = 3.1
3º cuartil = 3.85
rango untercuartílico (*RIC*) = 0.75
1.5 *RIC* = 1.125
3 *RIC* = 2.25



El diagrama indica que la distribución de la vida en años de una batería de automóvil es bastante simétrica con respecto al valor central ya que los bigotes izquierdo y derecho, así como la longitud de los rectángulos izquierdo y derecho alrededor de la mediana, son casi los mismos. También se observa la existencia de dos valores atípicos de rango medio en el extremo izquierdo de los datos.

Los diagramas de caja son muy útiles para hacer comparaciones gráficas entre conjuntos de datos, ya que tienen un gran impacto visual y son fáciles de comprender.

Ejemplo: En 20 automóviles elegidos aleatoriamente, se tomaron las emisiones de hidrocarburos en velocidad al vacío, en partes por millón, para modelos de 1985 y 1995.

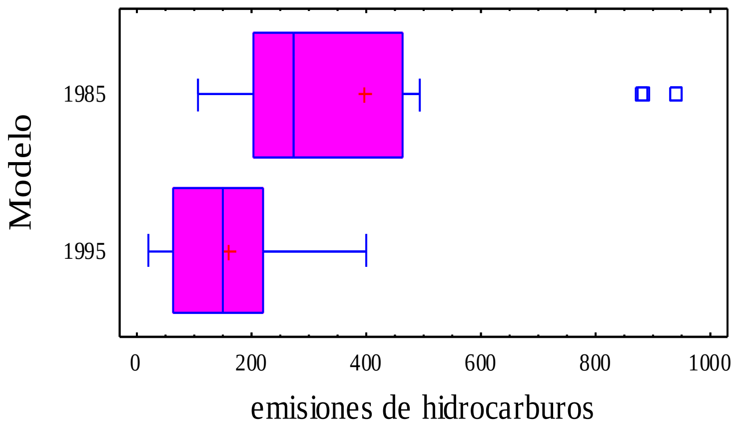
Modelos 1985:

141 359 247 940 882 494 306 210 105 880 200 223 188 940 241 190
300 435 241 380

Modelos 1995:

140 160 20 20 223 60 20 95 360 70 220 400 217 58 235
380 200 175 85 65

La figura siguiente presenta los diagramas de caja comparativos generados por el paquete Statgraphics



Modelo 1985
Media = 395.1
Mediana = 273.5
Mínimo = 105
Máximo = 940
Rango = 835
1º cuartil = 205
3º cuartil = 464.5
rango untercuartílico (*RIC*) = 259.5

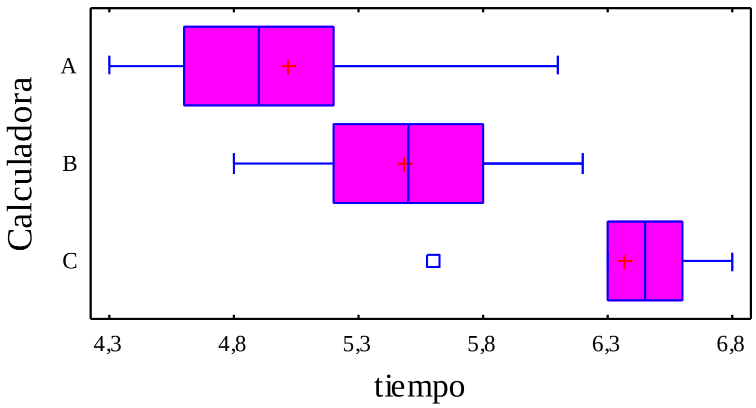
Modelo 1995
Media = 160.15
Mediana = 150
Mínimo = 20
Máximo = 400
Rango = 380
1º cuartil = 62.5
3º cuartil = 221.5
rango untercuartílico (*RIC*) = 159

Se observa que han disminuido las emisiones de hidrocarburos del modelo 1985 al 1995. Además los datos correspondientes al modelo 1985 tienen mayor variabilidad que los del modelo 1995. Para el modelo 1985 hay dos autos con emisiones muy altas.

Ejemplo:
Los siguientes datos representan los tiempos de operación, en horas, para tres tipos de calculadoras científicas de bolsillo, antes de que requieran recarga

Calculadora A:	4.9	6.1	4.3	4.6	5.2		
Calculadora B:	5.5	5.4	6.2	5.8	5.5	5.2	4.8
Calculadora C:	6.4	6.8	5.6	6.5	6.3	6.6	

La figura siguiente presenta los diagramas de caja comparativos generados por el paquete Statgraphics. Queda a cargo del lector comentar las diferencias entre las calculadoras A, B y C.



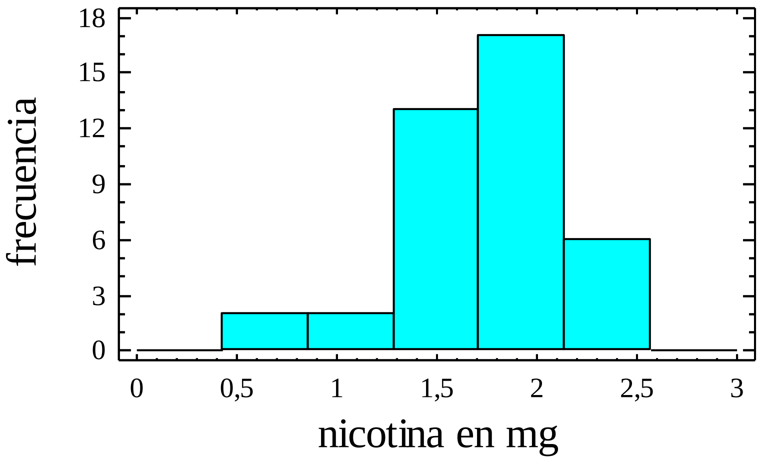
Calculadora	tamaño de muestra	Media	Mediana	Mínimo	Máximo	q1	q3	RIC
A	5	5,02	4,9	4,3	6,1	4,6	5,2	0,6
B	7	5,48571	5,5	4,8	6,2	5,2	5,8	0,6
C	6	6,36667	6,45	5,6	6,8	6,3	6,6	0,3

Ejemplo:
El contenido de nicotina, en miligramos, en 40 cigarrillos de cierta marca se registraron como sigue:

1.09	1.92	2.31	1.79	2.28	1.74	1.47	1.97	0.85	1.24	1.58	2.03
1.70	2.17	2.55	2.11	1.86	1.90	1.68	1.51	1.64	0.72	1.69	1.85
1.82	1.79	2.46	1.88	2.08	1.67	1.37	1.93	1.40	1.64	2.09	1.75
1.63	2.37	1.75	1.69								

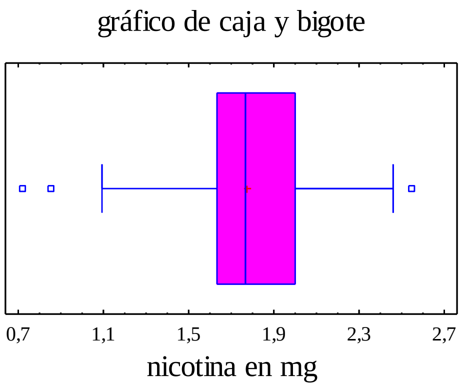
Se muestra la tabla de frecuencias y el histograma de los datos según Statgraphics.
Se tomaron 7 clases, donde el límite inferior de la primera clase es 0 y el límite superior de la última clase es 3.

Clase	limite inferior	limite superior	Marca de clase	frecuencia	frecuencia relativa	frec. acum..	frec.. ac. relativa
1	0,0	0,428571	0,214286	0	0,0000	0	0,0000
2	0,428571	0,857143	0,642857	2	0,0500	2	0,0500
3	0,857143	1,28571	1,07143	2	0,0500	4	0,1000
4	1,28571	1,71429	1,5	13	0,3250	17	0,4250
5	1,71429	2,14286	1,92857	17	0,4250	34	0,8500
6	2,14286	2,57143	2,35714	6	0,1500	40	1,0000
7	2,57143	3,0	2,78571	0	0,0000	40	1,0000



A continuación se dan las medidas descriptivas y el gráfico de caja y bigote:

Tamaño de muestra = 40
Media = 1,77425
Mediana = 1,77
Moda =
Varianza = 0,152456
Desviación estándar = 0,390456
Mínimo = 0,72
Máximo = 2,55
Rango = 1,83
1º cuartil = 1,635
3º cuartil = 2
Rango untercuartílico = 0,365
Coef. de variación = 22,0068%



Practica Nº 1

Estadística Descriptiva

1) Un artículo publicado en *Technometrics* (Vol. 19,1977, pag.425) presenta los datos siguientes sobre el octanaje de varias mezclas de gasolina:

88.5	87.7	83.4	86.7	87.5	91.5	88.6	100.3	96.5	93.3
94.7	91.1	91.0	94.2	87.8	89.9	88.3	87.6	84.3	86.7
84.3	86.7	88.2	90.8	88.3	98.8	94.2	92.7	93.2	91.0
90.1	93.4	88.5	90.1	89.2	88.3	85.3	87.9	88.6	90.9
89.0	96.1	93.3	91.8	92.3	90.4	90.1	93.0	88.7	89.9
89.8	89.6	87.4	88.4	88.9	91.2	89.3	94.4	92.7	91.8
91.6	90.4	91.1	92.6	89.8	90.6	91.1	90.4	89.3	89.7
90.3	91.6	90.5	93.7	92.7	92.2	92.2	91.2	91.0	92.2
90.0	90.7								

a) Construya una tabla de frecuencias (absoluta y relativa) y un histograma utilizando ocho clases.
b) Construya una tabla de frecuencias (absoluta y relativa) y un histograma con 16 clases. Compare la forma del histograma con la que tiene el histograma de la parte a). ¿Los dos histogramas presentan información similar?.

2) Los datos siguientes representan el número de ciclos transcurridos hasta que se presenta una falla en una prueba de piezas de aluminio sujetas a un esfuerzo alternante repetido de 21000 psi, a 18 ciclos por segundo:

1115	1567	1223	1782	1055	798	1016	2100	910	1501
1310	1883	375	1522	1764	1020	1102	1594	1730	1238
1540	1203	2265	1792	1330	865	1605	2023	1102	990
1502	1270	1910	1000	1608	2130	706	1315	1578	1468
1258	1015	1018	1820	1535	1421	2215	1269	758	1512
1315	845	1452	1940	1781	1109	785	1260	1416	1750
1085	1674	1890	1120	1750	1481	885	1888	1560	1642

a) Construya una tabla de frecuencias (absoluta y relativa) y un histograma.
b) Construya un polígono de frecuencias.
c) ¿Existe evidencia de que una pieza "sobrevivirá" más allá de los 2000 ciclos?. Justifique su respuesta.

3) Las siguientes mediciones corresponden a las temperaturas de un horno registradas en lotes sucesivos de un proceso de fabricación de semiconductores (las unidades son ºF): 953, 950, 948, 955, 951, 949, 957, 954, 955.
Calcule:
a) La media muestral de estos datos.
b) La mediana muestral de estos datos
c) ¿En cuánto puede incrementarse la mayor medición de temperatura sin que cambie la mediana muestral?.

4) Se toman ocho mediciones del diámetro interno de los anillos para los pistones del motor de un automóvil. Los datos (en mm) son: 74.001, 74.003, 74.015, 74.000, 74.005, 74.002, 74.005, 74.004.
   a) Encuentre la media y la mediana de estos datos.
   b) Suponga que se elimina la observación más grande (74.015 mm). Calcule la media y la mediana muestrales para los datos restantes. Compare sus resultados con los obtenidos en la parte a).

5) Hallar la media y mediana para los datos de los ejercicios 1) y 2).

6) Los siguientes datos son las temperaturas de unión de los *O-rings* (en grados F), en cada prueba de lanzamiento o de un lanzamiento real, del motor del cohete del transbordador espacial (tomados de *Presidential Commission on the Space Shuttle Challenger Accident*, Vol.1, pags. 129-131): 84, 49, 61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.
   a) Calcule la media y la mediana muestrales.
   b) Encuentre los cuartiles inferior y superior de la temperatura.
   c) Encuentre los percentiles quinto y noveno de la temperatura.
   d) Elimine la observación más pequeña (31ºF) y vuelva a calcular lo que se pide en los incisos a), b) y c). ¿Qué efecto tiene la eliminación de este punto?.

7) La contaminación de una pastilla de silicio puede afectar de manera importante la calidad de la producción de circuitos integrados. De una muestra de 10 pastillas se obtienen las siguientes concentraciones de oxígeno:
   3.15, 2.68, 4.31, 2.09, 3.82, 2.94, 3.47, 3.39, 2.81, 3.61. Calcule:
   a) La varianza muestral.
   b) La desviación estándar muestral.
   c) El rango de la muestra.

8) Considere los datos para anillos de pistón, del ejercicio 4). Calcule:
   a) La varianza muestral.
   b) La desviación estándar muestral.
   c)El rango de la muestra.
   d)Suponga que se elimina la observación más grande (74.015). Calcule la varianza muestral, la desviación estándar muestral, el rango de la muestra. Compare los resultados con los obtenidos en los incisos anteriores. Para esta medición en particular, ¿ cuán sensibles son la varianza muestral, la desviación muestral y el rango de la muestra?

9) Considere los datos del ejercicio 5).
   a) La varianza muestral.
   b) La desviación estándar muestral.
   c) El rango de la muestra y rango intercuartílico.
   d) Construya un diagrama de caja y discuta sobre la forma de la distribución y la posible presencia de valores atípicos.

10) Se tienen las millas por galón de 154 autos, los que se clasifican según su origen. Se obtienen así las siguientes tres muestras:

Muestra 1, consiste en las millas por galón de 85 autos de origen americano:
36.1, 19.9, 19.4, 20.2, 19.2, 20.5, 20.2, 25.1, 20.5, 19.4, 20.6,
20.8, 18.6, 18.1, 19.2, 17.7, 18.1, 17.5, 30, 30.9, 23.2, 23.8, 21.5,
19.8, 22.3, 20.2, 20.6, 17, 17.6, 16.5, 18.2, 16.9, 15.5, 19.2, 18.5,
35.7 , 27.4 , 23 , 23.9, 34.2, 34.5, 28.4, 28.8, 26.8, 33.5, 32.1, 28,
26.4 , 24.3 ,19.1 , 27.9, 23.6, 27.2, 26.6, 25.8, 23.5, 30, 39, 34.7,
34.4, 29.9, 22.4, 26.6, 20.2, 17.6, 28, 27, 34, 31, 29, 27, 24, 23,
38, 36, 25, 38, 26, 22, 36, 27, 27, 32, 28, 31 .

Muestra 2, consiste en las millas por galón de 25 autos de origen europeo:
43.1, 20.3, 17, 21.6, 16.2, 31.5, 31.9, 25.4, 27.2, 37.3, 41.5, 34.3,
44.3, 43.4, 36.4, 30.4, 40.9, 29.8, 35, 33, 34.5, 28.1, 30.7, 36, 44.

Muestra 3, consiste en las millas por galón de 44 autos de origen japonés:
32.8, 39.4, 36.1, 27.5, 27.2, 21.1, 23.9, 29.5, 34.1, 31.8, 38.1,
37.2, 29.8, 31.3, 37, 32.2, 46.6, 40.8, 44.6, 33.8, 32.7, 23.7, 32.4,
39.1, 35.1, 32.3, 37, 37.7, 34.1, 33.7, 32.4, 32.9, 31.6, 25.4, 24.2,
37, 31, 36, 36, 34, 38, 32, 38, 32

a) Hallar media, mediana y moda de cada muestra.
b) Hallar rango, rango intercuartílico, desviación estándar de cada muestra.
c) Hallar el coeficiente de variación para cada muestra.
d) Haga un gráfico de cajas simultáneas.
e) ¿Qué pude concluir sobre el consumo de los autos europeos y japoneses con respecto al de los autos americanos?.

11) Los precios de 155 autos se clasifican según el origen de los mismos, obteniéndose las siguientes tres muestras:

Muestra 1, consiste en el precio de 85 autos de origen americano:
1900, 3300, 3125, 2850, 2800, 3275, 2375, 2275, 2700, 2300,
3300, 2425, 2700, 2425, 3900, 4400, 2525, 3000, 2100, 2250,
3200, 2400, 3925, 3200, 2975, 3150, 3325, 4650, 4850, 5725,
4025, 5225, 4825, 4100, 4725, 2700, 2725, 9900, 4050, 2625,
2775, 3525, 3625, 3525, 3325, 2900, 3625, 3525, 3625, 3770,
3200, 4250, 5100, 5175, 4950, 4550, 4900, 3600, 3450, 3850,
4100, 6675, 6875, 5450, 5625, 5275, 5500, 5175, 5650, 6250,
5650, 5225, 5150, 4350, 4550, 7300, 7450, 6000, 6100, 5475,
8400, 5975, 5650, 4925, 6050.

Muestra 2, consiste en el precio de 26 autos de origen europeo:
4475, 5875, 4200, 5450, 3675, 3100, 4675, 2275, 7000, 5900,
3900, 3825, 7975, 14275, 2575, 7000, 5000, 5650, 4600, 8500,
8225, 8550, 5200, 5075, 2400, 15475.

Muestra 3, consiste en el precio de 44 autos de origen japonés:
2200, 2725, 2250, 2975, 2775, 3700, 2975, 3425, 2750, 2750,
3850, 3525, 5500, 4675, 4050, 3975, 3350, 3300, 3925, 3625,
8150, 7250, 4700, 4400, 4000, 3950, 3775, 4475, 3975, 5550,
4650, 5825, 5650, 9475, 8375, 4900, 5100, 6350, 6500, 5425,
4625, 4875, 5075, 7700.

a)Hallar media, mediana y moda de cada muestra.
b)Hallar rango, rango intercuartílico, desviación estándar de cada muestra.
c)Hallar el coeficiente de variación para cada muestra.
d)Haga un gráfico de cajas simultáneas.
e)¿Hay diferencias de precio entre los diferentes orígenes?.

12) En relación al ejercicio 11), ahora se clasifica el precio de los 155 autos anteriores según el año del modelo, obteniéndose las siguientes cinco muestras:

Muestra 1, precios de 36 ***autos modelo año 78:***
2400, 1900, 2200, 2725, 2250, 3300, 3125, 2850, 2800, 3275, 2375, 2275, 2700, 2300, 3300, 2425, 2700, 2425, 3900, 4400, 2525, 3000, 2100, 2975, 2775, 2250, 3700, 3200, 2400, 2975, 4475, 5875, 4200, 5450, 3675, 3425.

Muestra 2, precios de 29 autos modelo año 79:
3925, 3200, 2975, 3150, 3325, 4650, 4850, 5725, 4025, 5225, 4825, 4100, 4725, 3100, 2750, 2700, 2725, 15475, 9900, 4675, 4050, 2625, 2775, 2750, 2275, 3525, 3625, 3525, 3325.

Muestra 3, precios de 29 autos modelo año 80:
7000, 3850, 2900, 3525, 3625, 3525, 3625, 3700, 5900, 5500, 4675, 4050, 3975, 3350, 3200, 3300, 3900, 3825, 7975, 14275, 3925, 2575, 3625, 7000, 8150, 7250, 5000, 4250, 4700.

Muestra 4, precios de 30 autos modelo año 81:
5100, 5175, 4950, 4550, 4900, 4400, 3600, 4000, 3950, 3775, 4475, 3975, 3450, 3850, 4100, 5650, 4600, 5550, 4650, 5825, 5650, 8500, 8225, 8550, 9475, 8375, 6675, 6875, 5450, 5625.

Muestra 5, precios de 31 autos modelo año 82:
5275, 5500, 5175, 5650, 6250, 5650, 5225, 5150, 5200, 4900, 5100, 4350, 4550, 6350, 6500, 5425, 4625, 4875, 5075, 7300, 7450, 6000, 6100, 7700, 5475, 8400, 5975, 5075, 5650, 4925, 6050.

a)Hallar media, mediana y moda de cada muestra.
b)Hallar rango, rango intercuartílico, desviación estándar de cada muestra.
c)Hallar el coeficiente de variación para cada muestra.
d)Haga un gráfico de cajas simultáneas.
e)¿Ha variado el precio de los autos durante los años considerados?.

2- Estimación puntual

2. 1 – Introducción

Supongamos la siguiente situación: en una fábrica se producen artículos, el interés está en la producción de un día, específicamente, de todos los artículos producidos en un día nos interesa una característica determinada, si el artículo es o no defectuoso. Sea p la proporción de artículos defectuosos en la ***población***, es decir en la producción de un día.
Tomamos una ***muestra*** de 25 artículos, podemos definir la v.a. X: "número de artículos defectuosos en la muestra", y podemos asumir que $X \sim B(25, p)$.
En ***Probabilidades*** se ***conocían todos los datos sobre la v.a. X***, es decir conocíamos p. De esa forma podíamos responder preguntas como: ¿cuál es la probabilidad que entre los 25 artículos halla 5 defectuosos?. Si, por ejemplo, $p = 0.1$ entonces calculábamos $P(X = 5)$ donde $X \sim B(25,\ 0.1)$.
En ***Estadística desconocemos las características de X*** total o parcialmente, y a partir de la muestra de 25 artículos tratamos de ***inferir*** información sobre la distribución de X, o dicho de otra forma tratamos de inferir información sobre la ***población***.
Por ejemplo, en estadística sabremos que X tiene distribución binomial pero ***desconocemos p***, y a partir de la muestra de 25 artículos trataremos de hallar información sobre p.
En Estadística nos haremos preguntas tales como: si en la muestra de 25 artículos se encontraron 5 defectuosos, ¿ese hecho me permite inferir que el verdadero p es 0.1?.
El campo de la ***inferencia estadística*** está formado por los métodos utilizados para tomar decisiones o para obtener conclusiones sobre el o los parámetros de una población. Estos métodos utilizan la información contenida en una ***muestra*** de la población para obtener conclusiones.
La inferencia estadística puede dividirse en dos grandes áreas: ***estimación de parámetros*** y ***pruebas de hipótesis***.

2.2 – Muestreo aleatorio

En muchos problemas estadísticos es necesario utilizar una muestra de observaciones tomadas de la población de interés con objeto de obtener conclusiones sobre ella. A continuación se presenta la definición de algunos términos

Una ***población*** está formada por la totalidad de las observaciones en las cuales se tiene cierto interés

En muchos problemas de inferencia estadística es poco práctico o imposible, observar toda la población, en ese caso se toma una parte o subconjunto de la población

Una ***muestra*** es un subconjunto de observaciones seleccionada de una población

Para que las inferencias sean válidas, la muestra debe ser representativa de la población. Se selecciona una muestra aleatoria como el resultado de un mecanismo aleatorio. En consecuencia, la selección de una muestra es un experimento aleatorio, y cada observación de la muestra es el valor observado de una variable aleatoria. Las observaciones en la población determinan la distribución de probabilidad de la variable aleatoria.
Para definir muestra aleatoria, sea X la v.a. que representa el resultado de tomar una observación de la población. Sea $f(x)$ la *f.d.p.* de la v.a. X. supongamos que cada observación en la muestra se obtiene de manera independiente, bajo las mismas condiciones. Es decir, las observaciones de la mues-

tra se obtienen al observar X de manera independiente bajo condiciones que no cambian, digamos n veces.
Sea X_i la variable aleatoria que representa la *i*-ésima observación. Entonces $X_1, X_2, ..., X_n$ constituyen una muestra aleatoria, donde los valores numéricos obtenidos son $x_1, x_2, ..., x_n$. Las variables aleatorias en una muestra aleatoria son independientes, con la misma distribución de probabilidad *f(x)* debido a que cada observación se obtiene bajo las mismas condiciones. Es decir las funciones de densidad marginales de $X_1, X_2, ..., X_n$ son todas iguales a *f(x)* y por independencia, la distribución de probabilidad conjunta de la muestra aleatoria es el producto de las marginales $f(x_1)f(x_2)...f(x_n)$

Las variables aleatorias $(X_1, X_2, ..., X_n)$ constituyen una ***muestra aleatoria*** de tamaño n de una v.a. X si $X_1, X_2, ..., X_n$ son independientes idénticamente distribuidas

El propósito de tomar una muestra aleatoria es obtener información sobre los parámetros desconocidos de la población. Por ejemplo, se desea alcanzar una conclusión acerca de la proporción de artículos defectuosos en la producción diaria de una fábrica. Sea p la proporción de artículos defectuosos en la población, para hacer una inferencia con respecto a p, se selecciona una muestra aleatoria (de un tamaño apropiado) y se utiliza la proporción observada de artículos defectuosos en la muestra para estimar p.
La proporción de la muestra $\hat{p}$ se calcula dividiendo el número de artículos defectuosos en la muestra por el número total de artículos de la muestra. Entonces $\hat{p}$ es una función de los valores observados en la muestra aleatoria. Como es posible obtener muchas muestras aleatorias de una población, el valor de $\hat{p}$ cambiará de una a otra. Es decir $\hat{p}$ ***es una variable aleatoria***. Esta variable aleatoria se conoce como ***estadístico.***

Un ***estadístico*** es cualquier función de la muestra aleatoria

<u>Estadísticos usuales</u>

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. X donde $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$
Si desconocemos μ un estadístico que se utiliza para estimar ese parámetro es la ***media o promedio muestral*** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Análogamente si se desconoce σ^2 un estadístico usado para tener alguna información sobre ese parámetro es la ***varianza muestral*** que se define como $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

Otro estadístico es la ***desviación estándar muestral*** $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$

Como un estadístico es una variable aleatoria, éste tiene una distribución de probabilidad, esperanza y varianza.
Una aplicación de los estadísticos es obtener ***estimaciones puntuales*** de los parámetros desconocidos de una distribución. Por ejemplo como se dijo antes se suelen estimar la media y la varianza de una población.

Cuando un estadístico se utiliza para estimar un parámetro desconocido se lo llama ***estimador puntual***. Es habitual simbolizar en forma genérica a un parámetro con la letra θ y al estadístico que se utiliza como estimador puntual de θ, simbolizarlo con $\hat{\Theta}$.
Por lo tanto $\hat{\Theta}$ es una función de la muestra aleatoria: $\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, ..., X_n)$
Al medir la muestra aleatoria se obtienen $x_1, x_2, ..., x_n$, y entonces ***el valor que toma*** $\hat{\Theta}$ es $\hat{\theta} = h(x_1, x_2, ..., x_n)$ y se denomina ***estimación puntual de*** θ
El objetivo de la estimación puntual es seleccionar un número, a partir de los valores de la muestra, que sea el valor más probable de θ.
Por ejemplo, supongamos que X_1, X_2, X_3, X_4 es una muestra aleatoria de una v.a. *X*. Sabemos que *X* tiene distribución normal pero desconocemos μ.
Tomamos como ***estimador*** de μ al promedio muestral $\overline{X}$, es decir $\hat{\mu} = \overline{X}$
Tomamos la muestra (medimos X_1, X_2, X_3, X_4) y obtenemos $x_1 = 24,\ x_2 = 30,\ x_3 = 27,\ x_4 = 32$
Entonces la ***estimación puntual*** de μ es $\bar{x} = \dfrac{24+30+27+32}{4} = 28.25$
Si la varianza σ^2 de X también es desconocida, un estimador puntual usual de σ^2 es la varianza muestral, es decir $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, para la muestra dada la estimación de σ^2 es 12.25.
Otro parámetro que a menudo es necesario estimar es la proporción *p* de objetos de una población que cumplen una determinada característica.
En este caso el estimador puntual de *p* sería $\hat{p} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ donde

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la í-ésima observación tiene la característica de interés} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1,2,...,n$$

Por lo tanto $\hat{p} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ es la ***proporción de objetos en la muestra*** cumplen la característica de interés

Puede ocurrir que se tenga más de un estimador para un parámetro, por ejemplo para estimar la media muestral se pueden considerar el promedio muestral, o también la semisuma entre X_1 y X_n, es decir $\hat{\mu} = \dfrac{X_1 + X_n}{2}$. En estos casos necesitamos de algún ***criterio para decidir cuál es mejor estimador*** de μ.

2.3 – Criterios para evaluar estimadores puntuales

Lo que se desea de un estimador puntual es ***que tome valores "próximos" al verdadero parámetro.***

Se dice que el estimador puntual $\hat{\Theta}$ es un ***estimador insesgado*** del parámetro θ si $E(\hat{\Theta}) = \theta$ cualquiera sea el valor verdadero de θ

Podemos exigir que el estimador $\hat{\Theta}$ tenga una distribución cuya media sea θ.

La diferencia $E(\hat{\Theta}) - \theta$ se conoce como ***sesgo de estimador*** $\hat{\Theta}$**.** Anotamos $b(\hat{\Theta}) = E(\hat{\Theta}) - \theta$

Notar que si un estimador es insesgado entonces su sesgo es cero

Ejemplos:

1- Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. X donde $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$

Si desconocemos μ un estadístico que se utiliza usualmente para estimar este parámetro es la ***media o promedio muestral*** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Veamos si es un estimador insesgado de μ. Debemos ver si $E(\overline{X}) = \mu$.

Usamos las propiedades de la esperanza, particularmente la propiedad de linealidad.

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Pero, tratándose de las componentes de una muestra aleatoria es:

$E(X_i) = E(X) = \mu \quad \forall i = 1,2,...,n$. Luego:

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

2- Sea X una variable aleatoria asociada con alguna característica de los individuos de una población y sean $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Sea $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ la varianza muestral (con $\overline{X} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / n$ la esperanza muestral) para una muestra aleatoria de tamaño n, $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Entonces $E(S^2) = \sigma^2$ es decir $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ es un estimador insesgado de $V(X) = \sigma^2$ pues:

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right).$$

Reescribiremos la suma de una forma más conveniente. Sumamos y restamos μ y desarrollamos el cuadrado:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu + \mu - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left([X_i - \mu] + [\mu - \overline{X}]\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{ [X_i - \mu]^2 + 2[X_i - \mu][\mu - \overline{X}] + [\mu - \overline{X}]^2 \right\} = \sum_{i=1}^{n}[X_i - \mu]^2 + 2[\mu - \overline{X}] \sum_{i=1}^{n}[X_i - \mu] + n[\mu - \overline{X}]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[X_i - \mu]^2 + 2[\mu - \overline{X}]n[\overline{X} - \mu] + n[\mu - \overline{X}]^2 = \sum_{i=1}^{n}[X_i - \mu]^2 - 2n[\mu - \overline{X}]^2 + n[\mu - \overline{X}]^2.$$

Esto es:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[X_i-\mu\right]^2-n\left[\mu-\overline{X}\right]^2$$

Entonces:

$$E\left(S^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left[X_i-\mu\right]^2-n\left[\mu-\overline{X}\right]^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i-\mu\right]^2-nE\left[\overline{X}-\mu\right]^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}V\left(X_i\right)-nE\left[\overline{X}-E\left(\overline{X}\right)\right]^2\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}V\left(X_i\right)-nV\left(\overline{X}\right)\right)=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\right),$$

donde en la última igualdad tuvimos en cuenta que $V\left(X_i\right)=V\left(X\right)=\sigma^2 \quad \forall i=1,2,...,n$ y que $V\left(\overline{X}\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}$. Luego llegamos a lo que se deseaba demostrar: $E\left(S^2\right)=\sigma^2$.

3- Supongamos que tomamos como estimador de σ^2 a $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

Entonces notar que podemos escribir $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\dfrac{n-1}{n}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}=\dfrac{n-1}{n}S^2$

Por lo tanto $E\left(\hat{\sigma}^2\right)=E\left(\dfrac{n-1}{n}S^2\right)=\dfrac{n-1}{n}E\left(S^2\right)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$

Es decir $\hat{\sigma}^2$ no es un estimador insesgado de σ^2, ***es sesgado***, y su sesgo es

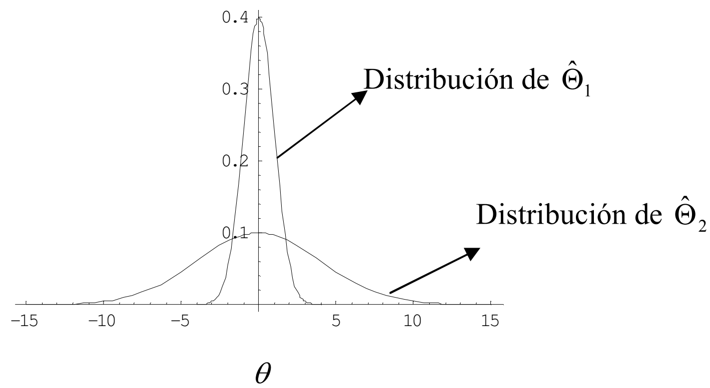
$$b\left(\hat{\sigma}^2\right)=E\left(\hat{\sigma}^2\right)-\sigma^2=\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2-\sigma^2=-\frac{1}{n}\sigma^2$$

Como el sesgo es negativo el estimador tiende a subestimar el valor de verdadero parámetro

En ocasiones hay más de un estimador insesgado de un parámetro θ
Por lo tanto necesitamos un método para seleccionar un estimador entre varios estimadores insesgados.

Varianza y error cuadrático medio de un estimador puntual

Supongamos que $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son dos estimadores insegados de un parámetro θ. Esto indica que la distribución de cada estimador está centrada en el verdadero parámetro θ. Sin embargo las varianzas de estas distribuciones pueden ser diferentes. La figura siguiente ilustra este hecho.



Como $\hat{\Theta}_1$ tiene menor varianza que $\hat{\Theta}_2$, entonces es más probable que el estimador $\hat{\Theta}_1$ produzca una estimación más cercana al verdadero valor de θ. Por lo tanto si tenemos dos estimadores insesgados se seleccionará aquel que tenga menor varianza.

Ejemplo: Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. X donde $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$
Suponemos μ desconocido.

Estimamos al parámetro μ con la ***media o promedio muestral*** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Sabemos que es un estimador insesgado de μ. Anotamos $\hat{\mu}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Supongamos que tomamos otro estimador para μ, lo anotamos $\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}$

Entonces como

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(X_1) + E(X_2)\right) = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \frac{1}{2}2\mu = \mu \ ,$$

$\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}$ es también un estimador insesgado de μ

¿Cuál de los dos estimadores es mejor?
Calculamos la varianza de cada uno utilizando las propiedades de la varianza.

Ya sabemos cuál es la varianza de $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (se la halló para T.C.L.):

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i),$$

donde en la última igualdad hemos tenido en cuenta que, por tratarse de una muestra aleatoria, las X_i con i=1,2,…,n son variables aleatorias independientes y, en consecuencia, la varianza de la suma de ellas es la suma de las varianzas. Si tenemos en cuenta que además todas tienen la misma distribución que X y por lo tanto la misma varianza:

$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 \quad \forall i = 1,2,...,n$, tenemos

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Análogamente calculamos la varianza de $\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}$:

$$V(\hat{\mu}_2) = V\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(V(X_1) + V(X_2)\right) = \frac{1}{4}\left(\sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{2}$$

Vemos que si $n > 2$ entonces $V(\hat{\mu}_1) < V(\hat{\mu}_2)$. Por lo tanto si $n > 2$ es mejor estimador $\hat{\mu}_1$

Supongamos ahora que $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son dos estimadores de un parámetro θ y ***alguno de ellos no es insesgado***.

A veces es necesario utilizar un estimador sesgado. En esos casos puede ser importante el ***error cuadrático medio*** del estimador.

El ***error cuadrático medio*** de un estimador $\hat{\Theta}$ de un parámetro θ está definido como

$$ECM\left(\hat{\Theta}\right) = E\left[\left(\hat{\Theta} - \theta\right)^2\right]$$

El error cuadrático medio puede escribirse de la siguiente forma:

$$ECM\left(\hat{\Theta}\right) = V\left(\hat{\Theta}\right) + \left(b\left(\hat{\Theta}\right)\right)^2$$

Dem.) Por definición $ECM\left(\hat{\Theta}\right) = E\left[\left(\hat{\Theta} - \theta\right)^2\right]$. Sumamos y restamos el número $E\left(\hat{\Theta}\right)$:

$ECM\left(\hat{\Theta}\right) = E\left[\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right) + E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right)^2\right]$, y desarrollamos el cuadrado:

$$ECM\left(\hat{\Theta}\right) = E\left[\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right) + E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right)^2\right] = E\left[\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right)^2 + \left(E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right)^2 + 2\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right)\left(E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right)\right] =$$

Aplicamos propiedades de la esperanza:

$$= \underbrace{E\left[\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right)^2\right]}_{V\left(\hat{\Theta}\right)} + \underbrace{\left(E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right)^2}_{b\left(\hat{\Theta}\right)^2} + 2\left(E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right)\underbrace{E\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right)}_{0} = V\left(\hat{\Theta}\right) + \left(b\left(\hat{\Theta}\right)\right)^2$$

El error cuadrático medio es un criterio importante para comparar estimadores.

Si $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son dos estimadores de un parámetro θ.

La eficiencia relativa de $\hat{\Theta}_2$ con respecto a $\hat{\Theta}_1$ se define como $\dfrac{ECM\left(\hat{\Theta}_1\right)}{ECM\left(\hat{\Theta}_2\right)}$

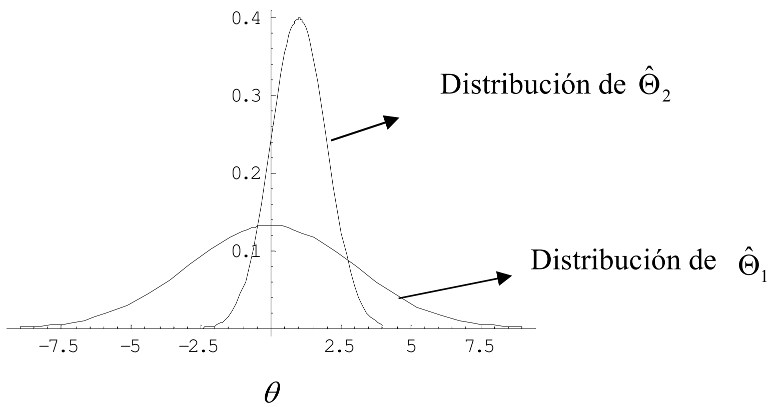
Si la eficiencia relativa es menor que 1 entonces $\hat{\Theta}_1$ tiene menor error cuadrático medio que $\hat{\Theta}_2$

Por lo tanto $\hat{\Theta}_1$ ***es más eficiente que*** $\hat{\Theta}_2$

Observaciones:

1- Si $\hat{\Theta}$ es un estimador insesgado de θ, entonces $ECM\left(\hat{\Theta}\right) = V\left(\hat{\Theta}\right)$

2- A veces es preferible utilizar estimadores sesgados que estimadores insesgados, si es que tienen un error cuadrático medio menor.
En el error cuadrático medio se consideran tanto la varianza como el sesgo del estimador.
Si $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son dos estimadores de un parámetro θ, tales que $E(\hat{\Theta}_1)=\theta$; $E(\hat{\Theta}_2)\neq\theta$ y $V(\hat{\Theta}_2)<V(\hat{\Theta}_1)$, habría que calcular el error cuadrático medio de cada uno, y tomar el que tenga menor error cuadrático medio. Pues puede ocurrir que $\hat{\Theta}_2$, aunque sea sesgado, al tener menor varianza tome valores más cercanos al verdadero parámetro que $\hat{\Theta}_1$



Ejemplo:
Supóngase que $\hat{\Theta}_1$,$\hat{\Theta}_2$ y $\hat{\Theta}_3$ son dos estimadores de un parámetro θ, y que $E(\hat{\Theta}_1)=E(\hat{\Theta}_2)=\theta$; $E(\hat{\Theta}_3)\neq\theta$, $V(\hat{\theta}_1)=10$, $V(\hat{\Theta}_2)=6$ y $E\left[\left(\hat{\Theta}_3-\theta\right)^2\right]=4$. Haga una comparación de estos estimadores. ¿Cuál prefiere y por qué?

Solución: Calculamos el error cuadrático medio de cada estimador
$ECM(\hat{\Theta}_1)=V(\hat{\Theta}_1)=10$ pues $\hat{\Theta}_1$ es insesgado
$ECM(\hat{\Theta}_2)=V(\hat{\Theta}_2)=6$ pues $\hat{\Theta}_2$ es insesgado
$ECM(\hat{\Theta}_3)=E\left[\left(\hat{\Theta}_3-\theta\right)^2\right]=4$ es dato

En consecuencia $\hat{\Theta}_3$ es el mejor estimador de los tres dados porque tiene menor error cuadrático medio.

Consistencia de estimadores puntuales

Sea $\hat{\Theta}_n$ un estimador del parámetro θ, basado en una muestra aleatoria $(X_1, X_2,..., X_n)$ de tamaño *n*. Se dice que $\hat{\Theta}_n$ es un estimador consistente de θ si

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\Theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\right)=0 \quad \text{para todo } \varepsilon>0$$

Observación:

Este tipo de convergencia, que involucra a una sucesión de variables aleatorias, se llama ***convergencia en probabilidad*** y es la misma que consideramos en relación a la ***ley de los grandes números***

Suele escribirse también $\hat{\Theta}_n \xrightarrow{P} \theta$.

Este tipo de convergencia debe distinguirse de la considerada en relación al teorema central del límite. En este último caso teníamos una sucesión de distribuciones: $F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z)$ y se considera el límite $\lim\limits_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$.

Se habla, entonces, de ***convergencia en distribución*** y suele indicarse $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$.

<u>Teorema</u>. Sea $\hat{\Theta}_n$ un estimador del parámetro θ basado en una muestra aleatoria $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\Theta}_n) = \theta$ y $\lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\Theta}_n) = 0$, entonces $\hat{\Theta}_n$ es un estimador consistente de θ.

Dem.)

Utilizamos la desigualdad de Chebyshev $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(\hat{\Theta}_n - \theta\right)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} ECM\left(\hat{\Theta}_n\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[V\left(\hat{\Theta}_n\right) + b\left(\hat{\Theta}_n\right)^2\right]$$

Entonces, al tomar el límite $\lim\limits_{n\to\infty}$ y teniendo presente que $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\Theta}_n) = \theta$ y $\lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\Theta}_n) = 0$, vemos que $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\Theta}_n - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$, es decir $\hat{\Theta}_n$ es un estimador convergente de θ.

<u>Ejemplo</u>:

Sea X una variable aleatoria que describe alguna característica numérica de los individuos de una población y sean $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = V(X)$ la esperanza poblacional y la varianza poblacional, respectivamente. Sea $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la esperanza muestral basada en una muestra aleatoria $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Entonces $\overline{X}$ es un estimador consistente de la esperanza poblacional $\mu = E(X)$.

Sabemos que

a) $E(\overline{X}) = \mu = E(X) \qquad \forall n$

b) $V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{V(X)}{n} \qquad \forall n$

La propiedad a) ya me dice que $\overline{X}$ es un estimador insesgado de $\mu = E(X)$.

Por otra parte si a) vale para todo *n*, también vale en particular en el límite $n \to \infty$:

$\lim\limits_{n\to\infty} E(\overline{X}) = \mu = E(X)$.

Además, de b) deducimos inmediatamente que

$\lim\limits_{n\to\infty} V(\overline{X}) = 0$.

Por lo tanto vemos que $\overline{X}$ es un estimador consistente de $\mu = E(X)$.

2.4 – Métodos de estimación puntual

Los criterios anteriores establecen propiedades que es deseable que sean verificadas por los estimadores. Entre dos estimadores posibles para un dado parámetro poblacional es razonable elegir aquél que cumple la mayor cantidad de criterios o alguno en particular que se considera importante para el problema que se esté analizando. Sin embargo estos criterios no nos enseñan por sí mismos a construir los estimadores. Existen una serie de métodos para construir estimadores los cuales en general se basan en principios básicos de razonabilidad. Entre éstos podemos mencionar:

- ***Método de los momentos***

- ***Método de máxima verosimilitud***

Método de los momentos

Se puede probar usando la desigualdad de Chebyshev el siguiente resultado:

> Ley débil de los grandes números:
> Sean $(X_1, X_2, ..., X_n)$ n variables aleatorias independientes todas las cuales tienen la misma esperanza $\mu = E(X)$ y varianza $\sigma^2 = V(X)$. Sea $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces
> $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$
> Decimos que $\overline{X}$ converge a μ en probabilidad y lo indicamos: $\overline{X} \xrightarrow{p} \mu$.

Definimos los ***momentos de orden k de una variable aleatoria*** como:

$$\mu_k = E\left(X^k\right) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^k p(x_i) \qquad (k = 0,1,2,...) \qquad \text{Si } X \text{ es discreta}$$

$$\mu_k = E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx \qquad (k = 0,1,2,...) \qquad \text{Si } X \text{ es continua,}$$

y definimos los correspondientes momentos ***muestrales de orden k*** como:

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \qquad (k = 0,1,2,...),$$

Entonces la ley débil de los grandes números se puede generalizar:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|M_k - \mu_k\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \qquad (k = 0,1,2,...).$$

De acuerdo con esto parece razonable estimar los momentos poblacionales de orden k mediante los momentos muestrales de orden k: $\mu_k \sim M_k \quad (k = 0,1,2,...)$.

Supongamos, entonces, una variable aleatoria *X* y supongamos que la distribución de *X* depende de *r* parámetros $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$, esto es la *fdp* poblacional es $p(x_i, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)$ si *X* es discreta o $f(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)$ si es continua. Sean $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ los primeros *r* momentos poblacionales:

$$\mu_k = E(X^k) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^{\,k}\, p(x_i, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r) \qquad (k = 1,2,...,r) \qquad \text{Si } X \text{ es discreta}$$

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r) dx \qquad (k = 1,2,...,r) \qquad \text{Si } X \text{ es continua,}$$

y sean

$M_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad (k = 1,2,...,r)$ los *r* primeros momentos muestrales para una muestra de tamaño *n* $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Entonces ***el método de los momentos consiste en plantear el sistema de ecuaciones***:

$$\begin{cases} \mu_1 = M_1 \\ \mu_2 = M_2 \\ \vdots \quad \vdots \, \vdots \\ \\ \mu_r = M_r \end{cases}$$

Es decir

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in R_X} x_i\, p(x_i, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^1 \\ \displaystyle\sum_{x_i \in R_X} x_i^{\,2}\, p(x_i, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \\ \displaystyle\sum_{x_i \in R_X} x_i^{\,r}\, p(x_i, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \end{cases} \qquad \text{Si } X \text{ es discreta,}$$

o

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r) dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r) dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r) dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \end{cases} \qquad \text{Si } X \text{ es continua.}$$

Resolviendo estos sistema de ecuaciones para los parámetros desconocidos $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ en función de la muestra aleatoria $(X_1, X_2, ..., X_n)$ obtenemos los estimadores:

$$\begin{cases} \hat{\Theta}_1 = H_1(X_1, X_2, ..., X_n) \\ \hat{\Theta}_2 = H_2(X_1, X_2, ..., X_n) \\ \qquad \vdots \\ \hat{\Theta}_r = H_r(X_1, X_2, ..., X_n) \end{cases}$$

Observación:
En la forma que presentamos aquí el método necesitamos conocer la forma de la *fdp* poblacional, por lo tanto estamos frente a un caso de estimación puntual ***paramétrica***.

Ejemplos:
1- Sea X una variable aleatoria. Supongamos que X tiene ***distribución gama con parámetros*** σ ***y*** λ: $X \sim \Gamma(\sigma, \lambda)$, es decir su *fdp* está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\Gamma(\lambda)} \left(\dfrac{x}{\sigma}\right)^{\lambda-1} e^{-\frac{x}{\sigma}} & x > 0 \\ 0 & \text{demás valores} \end{cases}$$

con $\sigma > 0$; $\lambda > 0$ y $\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx$.

Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño *n*. Deseamos calcular los estimadores de σ y λ dados por el método de los momentos.

Solución:
Como tenemos dos parámetros desconocidos a estimar, planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mu_1 = M_1 \\ \mu_2 = M_2 \end{cases}$$

Se puede probar que

$$\mu_1 = \lambda.\sigma$$
$$\mu_2 = \lambda^2.\sigma^2 + \lambda.\sigma^2$$

Tenemos, entonces, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda.\sigma = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \lambda^2.\sigma^2 + \lambda.\sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda.\sigma = \overline{X} \\ \lambda^2.\sigma^2 + \lambda.\sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

Reemplazando en la segunda ecuación: $\overline{X}^2 + \sigma\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2}{\overline{X}}$

Y despejando λ de la primera ecuación y reemplazando la expresión hallada para σ

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \dfrac{n\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \\ \hat{\sigma} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n\overline{X}} \end{cases}$$

2- Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño *n* de una v.a. *X* donde $X \sim U[0,\theta]$, θ desconocido. Hallar el estimador de θ por el método de los momentos.

<u>Solución:</u>
Planteamos la ecuación: $\mu_1 = M_1$

Sabemos que $\mu_1 = E(X) = \frac{0+\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$. Entonces $\frac{\theta}{2} = \overline{X} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta} = 2\overline{X}$

<u>Observación</u>: notar que el estimador $\hat{\Theta} = 2\overline{X}$ es un estimador consistente de θ, pues

$E\left(\hat{\Theta}\right) = E\left(2\overline{X}\right) = 2E\left(\overline{X}\right) = 2\frac{\theta}{2} = \theta$ y $V\left(\hat{\Theta}\right) = V\left(2\overline{X}\right) = 4V\left(\overline{X}\right) = 4\frac{(\theta - 0)^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3- Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Encuentra los estimadores de μ y σ por el método de momentos.

<u>Solución:</u>
Planteamos las ecuaciones

$$\begin{cases} \mu_1 = M_1 \\ \mu_2 = M_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \overline{X} \\ E\left(X^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

pero en general es válido que $V(X) = E(X^2) - \mu^2 \quad \Rightarrow \quad E(X^2) = V(X) + \mu$

Entonces las ecuaciones quedan

$$\begin{cases} \mu = \overline{X} \\ \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 \end{cases}$$

4- Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim N(0, \sigma^2)$.
Hallar un estimador por el método de los momentos de σ^2

<u>Solución:</u> en este caso no es conveniente plantear $\mu_1 = M_1$ pues quedaría

la ecuación $0 = \overline{X}$ que no conduce a nada.
Entonces podemos plantear $\mu_2 = M_2$ es decir

$$E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 + 0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Observación: si $\hat{\Theta}$ es un estimador por el método de los momentos de un parámetro θ, el estimador de los momentos de $g(\theta)$ es $g(\hat{\Theta})$, si $g(x)$ es una función inyectiva.
Por ejemplo, en el ejemplo anterior un estimador de σ por el método de los momentos sería $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$. Notar que $g(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva para los reales positivos.

Método de máxima verosimilitud

Uno de los mejores métodos para obtener un estimador puntual de un parámetro es el método de máxima verosimilitud.

Supongamos que X es una v.a. discreta con función de distribución de probabilidad $p(x,\theta)$, donde θ es un parámetro desconocido. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ los valores observados de una muestra aleatoria de tamaño *n*.
Se define la ***función de verosimilitud*** como la función de distribución conjunta de las observaciones:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)...P(X_n = x_n) = p(x_1,\theta).p(x_2,\theta).....p(x_n,\theta)$$

Notar que la función de verosimilitud es una función de θ.
El estimador de máxima verosimilitud de θ es aquel valor de θ que maximiza la función de verosimilitud

<u>La interpretación del método sería</u>: el estimador de máxima verosimilitud es aquel valor del parámetro que maximiza la probabilidad de ocurrencia de los valores muestrales

La adaptación para el caso en que X es una v.a. continua sería la siguiente

Supongamos que X es una v.a. continua con función de densidad de probabilidad $f(x,\theta)$, donde θ es un parámetro desconocido. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ los valores observados de una muestra aleatoria de tamaño *n*.
Se define la ***función de verosimilitud*** como la función de distribución conjunta de las observaciones:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = f(x_1,\theta).f(x_2,\theta).....f(x_n,\theta)$$

La función de verosimilitud es una función de θ.
El estimador de máxima verosimilitud de θ es aquel valor de θ que maximiza la función de verosimilitud

Notación: abreviamos estimador de máxima verosimilitud con EMV

Ejemplos:

1- Sea $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim B\ (1,\ p\ )$

Por ejemplo, se eligen al azar n objetos de una línea de producción, y cada uno se clasifica como defectuoso (en cuyo caso $x_i = 1$) o no defectuoso (en cuyo caso $x_i = 0$).

Entonces $p = P(X_i = 1)$, es decir es la verdadera proporción de objetos defectuosos en la producción total.

Queremos hallar el EMV de p

Solución:

Si $X \sim B\ (1,\ p\ )$ entonces $P(X = k) = \binom{1}{k} p^k (1-p)^{1-k} \quad k = 0,1$

Planteamos la función de verosimilitud

$$L\left(x_1, x_2, ..., x_n; p\right) = p\left(x_1; p\right) p\left(x_2; p\right) ... p\left(x_n; p\right) = \left[p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\right]\left[p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}\right] ... \left[p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}\right]$$

Esto puede escribirse:

$$L\left(x_1, x_2, ..., x_n; p\right) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Para maximizar la función de verosimilitud y ***facilitar los cálculos*** tomamos el logaritmo natural de *L*
Pues maximizar *L* es equivalente a maximizar *ln(L)* y al tomar logaritmos transformamos productos en sumas.

Entonces

$$\ln\left(L\left(x_1, x_2, ..., x_n; p\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

Y ahora podemos maximizar la función derivando e igualando a cero

$$\frac{\partial \ln L\left(x_1, x_2, ..., x_n; p\right)}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$$

de donde despejando p

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x} \qquad \text{la proporción de defectuosos en la muestra}$$

Por lo tanto se toma como estimador a $\hat{p} = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

2- El tiempo de fallar *T* de una componente tiene una distribución exponencial con parámetro λ: $T \sim Exp(\lambda)$, es decir la *fdp* es

$$f(t; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & 0 \le t < \infty \\ 0 & \textit{demás valores} \end{cases}$$

Recordemos que la esperanza y varianza son:

$E(T) = 1/\lambda$ y $V(T) = 1/\lambda^2$, respectivamente.

Se desea calcular el estimador de máxima verosimilitud del parámetro λ para una muestra de tamaño n.

Solución:
La función de probabilidad es:
$L(t_1, t_2, ..., t_n; \lambda) = f(t_1; \lambda) f(t_2; \lambda) ... f(t_n; \lambda) = \left[\lambda e^{-\lambda t_1}\right] \times \left[\lambda e^{-\lambda t_2}\right] \times ... \times \left[\lambda e^{-\lambda t_n}\right]$,

que puede escribirse:

$$L(t_1, t_2, ..., t_n; \lambda) = (\lambda)^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i}$$

Nuevamente tomamos logaritmo natural

$$\ln L(t_1, t_2, ..., t_n; \sigma) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\frac{\partial \ln L(t_1, t_2, ..., t_n; \lambda)}{\partial \lambda} = n \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} T_i = 0$$

de donde podemos despejar λ:

$\lambda = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \bar{t}$, entonces el estimador de λ es $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} T_i}$

El método de máxima verosimilitud presenta, algunas veces, dificultades para maximizar la función de verosimilitud debido a que la ecuación obtenida a partir de $\frac{d}{d\theta} L(\theta) = 0$ no resulta fácil de resolver. O también puede ocurrir que los métodos de cálculo para maximizar $L(\theta)$ no son aplicables.

Por ejemplo:
Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño *n* de una v.a. *X* donde $X \sim U[0, \theta]$, θ desconocido. Hallar el estimador de θ por el método máxima verosimilitud.
Solución:
La *f.d.p.* de *X* es

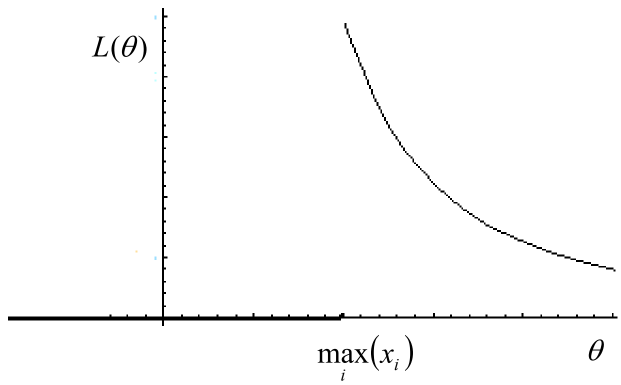
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & si \quad 0 < x < \theta \\ 0 & caso \quad contrario \end{cases}$$

Planteamos la función de verosimilitud

$$L(x_1, x_2, ... x_n, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n} & si \quad 0 < x_i < \theta \quad \forall i \\ 0 & caso \quad contrario \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n} & si \quad \max_i (x_i) < \theta \\ 0 & caso \quad contrario \end{cases}$$

Si derivamos con respecto a θ obtenemos $\frac{d}{d\theta}\theta^{-n} = -\frac{n}{\theta^{n+1}}$ que es siempre menor que cero. Por lo tanto la función de verosimilitud es una función decreciente para todos los $\theta > \max_i(x_i)$

Si hacemos un gráfico de la función de verosimilitud



Vemos que donde la función tiene el máximo hay una discontinuidad no evitable.

Por lo tanto $\hat{\Theta} = \max_i(x_i)$

El método de máxima verosimilitud puede emplearse en el caso donde hay más de un parámetro desconocido para estimar. En ese caso la función de verosimilitud es una función de varias variables. Específicamente si tenemos para estimar *k* parámetros $\theta_1, \theta_2, ...\theta_k$, entonces la función de verosimilitud es una función de *k* variables $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_1, \theta_2, ...\theta_k)$ y los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, ...\hat{\Theta}_k$ se obtienen al plantear (si existen las derivadas parciales) y resolver el sistema de *k* ecuaciones con *k* incógnitas $\theta_1, \theta_2, ...\theta_k$

$$\frac{d}{d\theta_i} L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_1, \theta_2, ...\theta_k) = 0 \qquad i = 1,2,..k$$

Ejemplo:

La variable aleatoria *X* tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con μ y σ^2 ambos parámetros desconocidos para los cuales se desea encontrar los estimadores máxima verosimilitud. La *fdp* es

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty,$$

La función de verosimilitud para una muestra aleatoria de tamaño *n* es

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2} ... \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2} =$$

$$= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Luego

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$

y el sistema de ecuaciones de verosimilitud queda:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^4} = 0 \end{cases}$$

Resolvemos con respecto a μ y σ^2 :

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \end{cases}$$

Entonces los estimadores máxima verosimilitud de μ y σ^2 son

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \end{cases}$$

<u>Propiedades de los estimadores máxima verosimilitud</u>

1- Los EMV pueden ser ***sesgados***, pero en general si $\hat{\Theta}$ es el EMV de un parámetro θ basado en una muestra de tamaño *n*, entonces $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\Theta}) = \theta$, es decir son ***asintóticamente insesgados***

2- Bajo condiciones bastantes generales se puede probar que los EMV son ***asintóticamente consistentes***

3- Bajo condiciones bastantes generales se puede probar que los EMV ***asintóticamente tienen varianza mínima***

4-Los EMV cumplen la ***propiedad de invarianza*** es decir:

si $\hat{\Theta}$ es un EMV de un parámetro θ, el EMV de $g(\theta)$ es $g(\hat{\Theta})$, si $g(x)$ es una función inyectiva.

<u>Ejemplos</u>:

1- Si consideramos nuevamente la situación considerada en el Ejemplo 2, donde teníamos una v.a. *T* cuya distribución es una exponencial: $T \sim Exp(\lambda)$, entonces, si queremos el EMV de la varianza poblacional, podemos calcularlo recordando que $V(T) = 1/\lambda^2$, es decir, $V(T) = g(\lambda) = 1/\lambda^2$. Vimos que $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} T_i} = \dfrac{1}{\overline{T}}$. Por lo tanto el EMV de la varianza es $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{\hat{\lambda}^2}$.

2- Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $B(1, p)$. Un EMV de p es $\hat{p} = \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Se selecciona una muestra aleatoria de *n* cascos para ciclistas fabricados por cierta compañía.
Sea X : " el número entre los *n* que tienen defectos" , y p = P(el casco tiene defecto).
Supongamos que solo se observa X (el número de cascos con defectos).
Si n = 20 y x = 3, es la estimación de p es $\hat{p} = \dfrac{3}{20}$
El E.M.V. de la probabilidad $(1\text{-}p)^5$, de que ninguno de los siguientes cinco cascos que se examinen tenga defectos será $(1-\hat{p})^5$ y su estimación en este caso $\left(1-\dfrac{3}{20}\right)^5$

Práctica

Estimación puntual

Método de máxima verosimilitud - Método de momentos

1) Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño 2n tomada de una población X, que $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$. Sean

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i \qquad \text{y} \qquad \overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dos estimadores de μ. ¿Cuál es el mejor estimador de μ?. Explique su elección.

2) Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_7$ una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considere los siguientes estimadores de μ:

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_7}{7} \qquad \text{y} \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

a) ¿Alguno de estos estimadores es insesgado?
b) ¿Cuál estimador es el "mejor"?. ¿En qué sentido es mejor?

3) Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño *n.*

a) Demuestre que $\overline{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.
b) Determine la magnitud del sesgo de este estimador.
c) ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño *n* de la muestra?.

4) El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días se observan: 2 , 5 , 3 , 3 , 7 desconexiones accidentales.

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ. Obtenga la estimación de λ a partir de la muestra dada.

b) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales y encuentre la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.

4) a) Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $B(1, p)$. Hallar un estimador de máxima verosimilitud (E.M.V.) de *p.*

b) Se selecciona una muestra aleatoria de *n* cascos para ciclistas fabricados por cierta compañía. Sea *X* = el número entre los *n* que tienen defectos y *p* = P(el casco tiene defecto). Supongamos que solo se observa *X* (el número de cascos con defectos).

b_1) Si *n* = 20 y *x* = 3, ¿cuál es la estimación de *p*?

b_2) Si *n* = 20 y *x* = 3, ¿cuál es el E.M.V. de la probabilidad $(1-p)^5$, de que ninguno de los siguientes cinco cascos que se examinen tenga defectos?

5) Denotemos por *X* la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y supongamos que la f.d.p. de *X* es:

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & c.c \end{cases} \qquad \text{donde } \theta > -1$$

Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información:
0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77.

a) Utilice el método de los momentos para obtener un estimador de θ y luego calcule la estimación para esta información.

b) Obtenga el E.M.V. de θ y luego calcule la estimación para la información dada.

6) Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Hallar los estimadores de μ y σ por el método de momentos.

b) Hallar los estimadores de μ y σ por el método de máxima verosimilitud.

c) Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg^2):
392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375.
Si se supone que la resistencia al corte esta normalmente distribuida , estime el verdadero promedio de resistencia al corte y desviación estándar de resistencia al corte usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.

8) En una prueba 294 de 300 aisladores cerámicos soportaron cierto choque térmico.

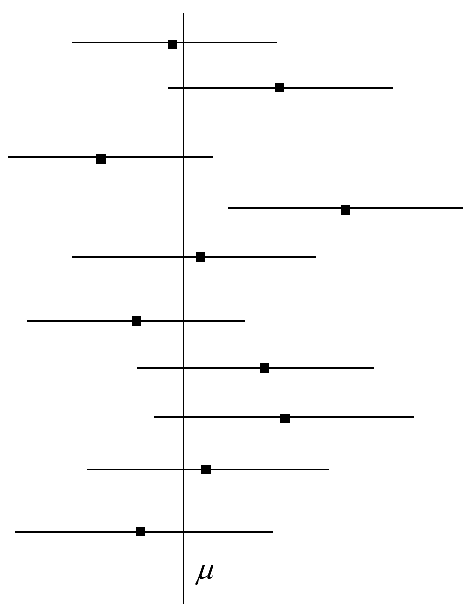
a) Obtenga el estimador y la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de que un aislante cerámico sobrevivirá a un choque térmico.

b) Suponga que un dispositivo contiene tres aislantes cerámicos y todos deben sobrevivir al choque, con la finalidad de que el dispositivo funcione. Encuentre el estimador y la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de que los tres sobrevivirán a un choque térmico.

9- Intervalos de confianza

9.1 – Introducción

Se ha visto como construir a partir de una muestra aleatoria un estimador puntual de un parámetro desconocido. En esos casos necesitábamos dar algunas características del estimador, como por ejemplo si era insesgado o su varianza.
A veces resulta más conveniente dar un ***intervalo de valores posibles*** del parámetro desconocido, de manera tal que dicho intervalo contenga al verdadero parámetro con determinada probabilidad.
Específicamente, a partir de una muestra aleatoria se construye un intervalo $\left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)$ donde los extremos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son dos estadísticos, tal que $P\left(\theta \in \left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)\right) = 1-\alpha$ donde θ es el parámetro desconocido a estimar y α es un valor real entre cero y uno dado de antemano. Por ejemplo si $\alpha = 0.05$, se quiere construir un intervalo $\left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)$ tal que $P\left(\theta \in \left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)\right) = 0.95$, o escrito de otra forma $P\left(\hat{\Theta}_1 \le \theta \le \hat{\Theta}_2\right) = 0.95$
Esta probabilidad tiene el siguiente significado: como $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son estadísticos, los valores que ellos toman varían con los valores de la muestra, es decir si $x_1, x_2, ..., x_n$ son los valores medidos de la muestra entonces el estadístico $\hat{\Theta}_1$ tomará el valor θ_1 y el estadístico $\hat{\Theta}_2$ tomará el valor θ_2. Si medimos nuevamente la muestra obtendremos ahora valores $x_1', x_2', ..., x_n'$ y por lo tanto $\hat{\Theta}_1$ tomará el valor θ_1' y el estadístico $\hat{\Theta}_2$ tomará el valor θ_2', diferentes en general de los anteriores. Esto significa que si medimos la muestra 100 veces obtendremos 100 valores diferentes para $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ y por lo tanto obtendremos 100 intervalos distintos, de los cuales aproximadamente 5 de ellos no contendrán al verdadero parámetro.
Al valor $1-\alpha$ se lo llama ***nivel de confianza*** del intervalo. También se suele definir como nivel de confianza al $(1-\alpha)100\%$
La construcción repetida de un intervalo de confianza para μ se ilustra en la siguiente figura



9.2 – Intervalo de confianza para la media de una distribución normal, varianza conocida.

El método general para construir intervalos de confianza es el siguiente llamado ***método del pivote:***

Supongamos el siguiente caso particular, sea $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ una muestra aleatoria de tamaño *n* de una v.a. *X* donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conocido, se quiere construir un intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$. Supongamos $\alpha = 0.05$.

1- tomamos un estimador puntual de μ, sabemos que $\hat{\mu} = \overline{X}$ es un estimador con buenas propiedades.

2- a partir de $\hat{\mu} = \overline{X}$ construimos el estadístico $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. Notar que *Z* ***(pivote)*** contiene al verdadero parámetro μ y que bajo las condiciones dadas $Z \sim N(0,1)$

3- como conocemos la distribución de *Z*, podemos plantear: hallar un número z tal que $P\left(-z \le Z \le z\right) = 0.95$

Por la simetría de la distribución normal estándar podemos escribir

$P\left(-z \le Z \le z\right) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z) = 0.975 \quad \Rightarrow \quad z = 1.96$

Por lo tanto $P\left(-1.96 \le Z \le 1.96\right) = P\left(-1.96 \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le 1.96\right) = 0.95$

Despejamos μ:

$$P\left(-1.96 \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le 1.96\right) = P\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{X} - \mu \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} \le -\mu \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X}\right) = P\left(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Entonces

$$P\left(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\mu \in \left(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) = 0.95$$

Es decir el intervalo de confianza para μ es $\left(\overline{X} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ y tiene nivel de confianza 0.95 o 95%.

Aquí $\hat{\Theta}_1 = \overline{X} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\hat{\Theta}_2 = \overline{X} + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Repetimos el procedimiento anterior y construimos un intervalo de confianza para μ con nivel de confianza $1-\alpha$

1-Partimos de la esperanza muestral $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n} X_i$ para una muestra aleatoria $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de tamaño *n*. Sabemos que es un estimador insesgado y consistente de μ.

2-Construimos el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

La variable aleatoria *Z* cumple las condiciones necesarias de un pivote

Para construir un intervalo de confianza al nivel de confianza 1-α partiendo del pivote *Z*, comenzamos por plantear la ecuación

$$P(-z \le Z \le z) = 1\text{-}\alpha,$$

donde la incógnita es el número real *z*.

Si reemplazamos la v.a. *Z* por su expresión tenemos:

$$P\left(-z \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le z\right) = P\left(-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{X} - \mu \le z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le -\mu \le -\overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1\text{-}\alpha$$

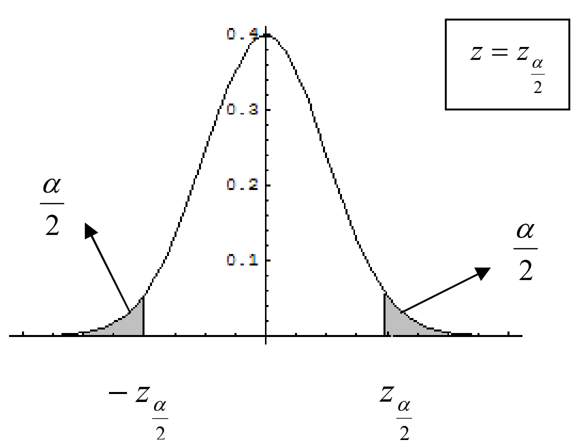
Multiplicando todos los miembros de la desigualdad por -1 (el orden de los miembros se invierte) llegamos a:

$$P\left(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1\text{-}\alpha$$

Evidentemente, si definimos

$\begin{cases} \hat{\Theta}_1 = \overline{X} - z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \hat{\Theta}_2 = \overline{X} + z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$, hemos construido dos estadísticos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ tales que $P(\hat{\Theta}_1 \le \mu \le \hat{\Theta}_2) = 1\text{-}\alpha$,

es decir hemos construido el intervalo de confianza bilateral deseado $[\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2]$. Todos los elementos que forman los estadísticos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son conocidos ya que el número *z* verifica la ecuación anterior, es decir (ver figura):



$P(-z \le Z \le z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 1\text{-}\alpha$ donde $\Phi(z)$ es la *Fda* para la v.a. $Z \sim N(0,1)$

Recordando que $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, esta ecuación queda:
$\Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 1\text{-}\alpha$, o bien (ver figura anterior),
$\Phi(z) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ o de otra forma $P(Z > z) = \dfrac{\alpha}{2}$.
Al valor de z que verifica esta ecuación se lo suele indicar $z_{\frac{\alpha}{2}}$. En consecuencia, el intervalo de confianza bilateral al nivel de significación $1\text{-}\alpha$ queda:

$$\left[\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right] = \left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

En consecuencia:

> Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n de una v.a. X donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conocido, un intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$ es
>
> $$\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \qquad (8.1)$$

Ejemplo:
Un ingeniero civil analiza la resistencia a la compresión del concreto. La resistencia está distribuida aproximadamente de manera normal, con varianza 1000 $(\text{psi})^2$. Al tomar una muestra aleatoria de 12 especímenes, se tiene que $\overline{x} = 3250$ psi.

a) Construya un intervalo de confianza del 95% para la resistencia a la compresión promedio.
b) Construya un intervalo de confianza del 99% para la resistencia a la compresión promedio. Compare el ancho de este intervalo de confianza con el ancho encontrado en el inciso a).

Solución:
La v. a. de interés es X_i: "resistencia a la compresión del concreto en un espécimen i"
Tenemos una muestra de $n = 12$ especímenes.
Asumimos que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1,2,3,...,12$ con $\sigma^2 = 1000$
a) Queremos un intervalo de confianza para μ de nivel 95%. Por lo tanto $\alpha = 0.05$
El intervalo a utilizar es $\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.
Buscamos en la tabla de la normal estándar el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

Reemplazando:

$$\left[3250 - 1.96 \times \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}}, 3250 + 1.96 \times \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}}\right] = \left[3232.10773,\ \ 3267.89227\right]$$

b) repetimos lo anterior pero ahora $\alpha = 0.01$

El intervalo a utilizar es $\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$.

Buscamos en la tabla de la normal estándar el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58$

Reemplazando:

$$\left[3250 - 2.58 \times \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}}, 3250 + 2.58 \times \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} \right] = \left[3226.44793, \quad 3273.55207 \right]$$

La longitud del intervalo encontrado en a) es: 35.78454
La longitud del intervalo encontrado en b) es: 47.10414
Notar que la seguridad de que el verdadero parámetro se encuentre en el intervalo hallado es mayor en el intervalo b) que en el a), pero la longitud del intervalo b) es mayor que la del intervalo a). Al aumentar el nivel de confianza se perdió ***precisión en la estimación***, ya que a menor longitud hay mayor precisión en la estimación.

En general la longitud del intervalo es $L = 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Notar que:

a) si n y σ están fijos, a medida que α disminuye tenemos que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ aumenta, por lo tanto L aumenta.
b) si α y σ están fijos, entonces a medida que n aumenta tenemos que L disminuye.

Podemos plantearnos la siguiente pregunta relacionada con el ejemplo anterior: ¿qué tamaño n de muestra se necesita para que el intervalo tenga nivel de confianza 99% y longitud la mitad de la longitud del intervalo hallado en a)?
Solución: el intervalo hallado en a) tiene longitud 35.78454, y queremos que el nuevo intervalo tenga longitud 17.89227 aproximadamente. Planteamos:

$$L = 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 17.89227 \qquad \Rightarrow \qquad 2 \times 2.58 \times \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{n}} \leq 17.89227$$

Despejando n :

$$\left(2 \times 2.58 \times \frac{\sqrt{1000}}{17.89227} \right)^2 \leq n \qquad \Rightarrow \qquad n \geq 83.170$$

O sea, hay que tomar por lo menos 84 especímenes para que el intervalo tenga la longitud pedida.

En general, si queremos hallar n tal que $L = 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq l$, donde l es un valor dado, entonces despejando n

$$n \geq \left(\frac{2 z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{l} \right)^2$$

Si estimamos puntualmente al parámetro μ con $\overline{X}$ estamos cometiendo un error en la estimación menor o igual a $\frac{L}{2} = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, que se conoce como ***precisión del estimador***

Ejemplo: Se estima que el tiempo de reacción a un estímulo de cierto dispositivo electrónico está distribuido normalmente con desviación estándar de 0.05 segundos. ¿Cuál es el número de mediciones temporales que deberá hacerse para que la confianza de que el error de la estimación de la esperanza no exceda de 0.01 sea del 95%?

Nos piden calcular n tal que $\frac{L}{2} = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.01$ con $\alpha = 0.05$.

Por lo tanto $n \geq \left(z_{0.025} \frac{0.05}{0.01} \right)^2$.

Además $z_{0,025}$=1.96. Entonces $n \geq \left(z_{0.975} \frac{0.05}{0.01} \right)^2 = (1.96 \times 5)^2 = 96.04$.

O sea hay que tomar por lo menos 97 mediciones temporales.

Para muestras tomadas de una población normal, o para muestras de tamaño $n \geq 30$, de una población cualquiera, el intervalo de confianza dado anteriormente en (8.1), proporciona buenos resultados. En el caso de que la población de la que se extrae la muestra no sea normal pero $n \geq 30$, el nivel de confianza del intervalo (8.1) es ***aproximadamente*** $1-\alpha$. Pero para muestras pequeñas tomadas de poblaciones que no son normales no se puede garantizar que el nivel de confianza sea $1-\alpha$ si se utiliza (8.1).

Ejemplo:

Supongamos que X representa la duración de una pieza de equipo y que se probaron 100 de esas piezas dando una duración promedio de 501.2 horas. Se sabe que la desviación estándar poblacional es σ=4 horas. Se desea tener un intervalo del 95% de confianza para la esperanza poblacional $E(X) = \mu$.

Solución:

En este caso, si bien no conocemos cuál es la distribución de X tenemos que el tamaño de la muestra es $n = 100 > 30$ (muestra grande) por lo tanto el intervalo buscado es

$$\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Puesto que 1-α=0.95 $\rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

De la tabla de la normal estandarizada obtenemos $z_{0,025}$=1.96. Entonces reemplazando:

$$\left[\overline{X} - 1.96 \frac{4}{\sqrt{100}}, \overline{X} + 1.96 \frac{4}{\sqrt{100}} \right]$$

Para el valor particular $\overline{x}$ =501.2 tenemos el intervalo

$$\left[\overline{x}-1.96\frac{4}{\sqrt{100}},\overline{x}+1.96\frac{4}{\sqrt{n}}\right]=\left[501.2-1.96\frac{4}{10},501.2+1.96\frac{4}{10}\right]=\left[500.4,\ \ 502.0\right].$$

Al establecer que $\left[500.4,\ \ 502.0\right]$ es un intervalo al 95% de confianza de μ estamos diciendo que la probabilidad de que el intervalo $\left[500.4,\ \ 502.0\right]$ contenga a μ es 0.95. O, en otras palabras, la probabilidad de que la muestra aleatoria $\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ tome valores tales que el intervalo aleatorio $\left[\overline{X}-1.96\frac{4}{\sqrt{100}},\overline{X}+1.96\frac{4}{\sqrt{100}}\right]$ defina un intervalo numérico que contenga al parámetro fijo desconocido μ es 0.95.

9.2 - Intervalo de confianza para la media de una distribución normal, varianza desconocida

Nuevamente como se trata de encontrar un intervalo de confianza para μ nos basamos en la esperanza muestral $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n}X_i$ que sabemos es un buen estimador de μ. Pero ahora no podemos usar como pivote a

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

porque desconocemos σ y una condición para ser pivote es que, excepto por el parámetro a estimar (en este caso μ), todos los parámetros que aparecen en él deben ser conocidos. Entonces proponemos como pivote una variable aleatoria definida en forma parecida a Z pero reemplazando σ por un estimador adecuado.
Ya vimos que la varianza muestral definida

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,$$

donde $\overline{X}$ es la esperanza muestral, es un estimador insesgado de la varianza poblacional $V\left(X\right)$, es decir, $E\left(S^2\right)=V\left(X\right)=\sigma^2\ \ \forall n$. Entonces estimamos σ con S y proponemos como pivote a la variable aleatoria

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}.$$

Pero para poder usar a T como pivote debemos conocer su distribución.
Se puede probar que la distribución de T es una distribución llamada ***Student con parámetro n-1***.

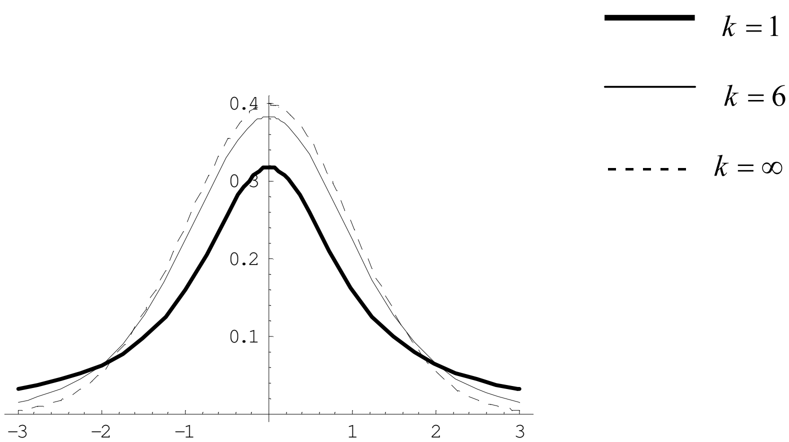
Nota: Una v.a. continua tiene distribución ***Student con k grados de libertad***, si su *f.d.p.* es de la forma

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{(k+1)}{2}\right]}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\left[\left(\frac{x^2}{k}\right)+1\right]^{\frac{k+1}{2}}} \qquad -\infty < x < \infty$$

Notación: $T \sim t_k$

La gráfica de la *f.d.p.* de la distribución Student tiene forma de campana como la normal, pero tiende a cero más lentamente. Se puede probar que cuando $k \to \infty$ la *fdp* de la Student tiende a la *fdp* de la $N(0, 1)$.

En la figura siguiente se grafica *f(x)* para diferentes valores de *k*



Anotaremos $t_{\alpha,k}$ al cuantil de la Student con *k* grados de libertad que deja bajo la *fdp* a derecha un área de α, y a su izquierda un área de $1-\alpha$.

Luego, para construir el intervalo de confianza buscado a partir del pivote *T* procedemos como en los casos anteriores:

Comenzamos por plantear la ecuación

$$P(-t \le T \le t) = 1\text{-}\alpha,$$

donde la incógnita es el número real *t*.

Si reemplazamos la v.a. *T* por su expresión, tenemos sucesivamente (multiplicando por $S/\sqrt{n}$ y restando $\overline{X}$):

$$P\left(-t \le \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t\right) = P\left(-t\frac{S}{\sqrt{n}} \le \overline{X}-\mu \le t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-\overline{X}-t\frac{S}{\sqrt{n}} \le -\mu \le -\overline{X}+t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1\text{-}\alpha$$

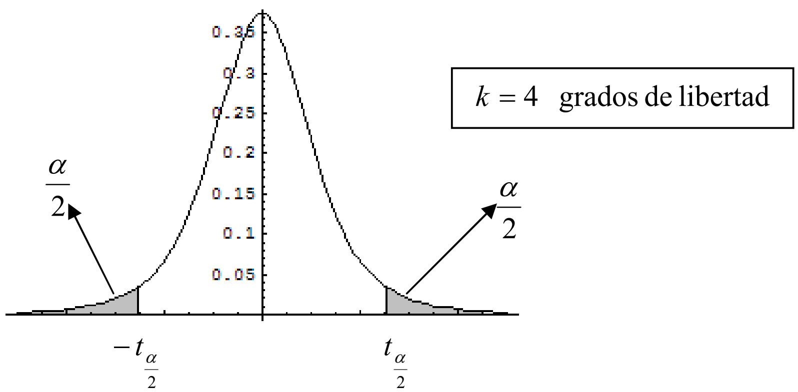
Multiplicando todos los miembros de la desigualdad por -1 (el orden de los miembros se invierte) llegamos a:

$$P\left(\overline{X}-t\frac{S}{\sqrt{n}}\le \mu \le \overline{X}+t\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1\text{-}\alpha$$

Evidentemente, si definimos

$\begin{cases}\hat{\Theta}_1=\overline{X}-t\dfrac{S}{\sqrt{n}}\\ \hat{\Theta}_2=\overline{X}+t\dfrac{S}{\sqrt{n}}\end{cases}$, hemos construido dos estadísticos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ tales que $P\left(\hat{\Theta}_1\le\mu\le\hat{\Theta}_2\right)=1\text{-}\alpha$,

veamos quien es el número *t* que verifica la ecuación, es decir (ver figura):



$P(-t\le T\le t)=F(t)-F(-t)=1\text{-}\alpha$ donde $F(t)$ es la *Fda* para la v.a. $T\sim t_{n-1}$.

Por la simetría de la distribución t de Student se deduce fácilmente de la figura anterior que $F(-t)=1-F(t)$, entonces:

$F(t)-F(-t)=2F(t)-1=1\text{-}\alpha$, o bien (ver figura anterior),

$F(t)=1-\dfrac{\alpha}{2}$.

Al valor de *t* que verifica esta ecuación se lo suele indicar $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$. En consecuencia, el intervalo de confianza bilateral al nivel de significación $1\text{-}\alpha$ queda:

$$\left[\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \quad \text{con} \quad F\left(t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right)=1-\frac{\alpha}{2}.$$

En consecuencia:

Si $(X_1,X_2,...,X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño *n* de una v.a. *X* donde $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 desconocido, un intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$ es

$$\left[\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \qquad (8.2)$$

Ejemplo:
Se hicieron 10 mediciones sobre la resistencia de cierto tipo de alambre que dieron valores $x_1, x_2, ..., x_{10}$ tales que $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 10.48$ ohms y $S = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=!}^{10}(x_i - \bar{x})^2}$ = 1.36 ohms. Supóngase que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Se desea obtener un intervalo de confianza para la esperanza poblacional μ al 90 %.

Tenemos que $1-\alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05$
De la Tabla de la t de Student tenemos que $t_{0.05,9} = 1.8331$. Entonces el intervalo de confianza buscado es:

$$\left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \left[10.48 - 1.8331\frac{1.36}{\sqrt{10}}, 10.48 + 1.8331\frac{1.36}{\sqrt{10}}\right]$$

Esto es: $[9.69,\ 11.27]$.

Si la muestra aleatoria se toma de una distribución normal, σ^2 es desconocido y el tamaño de la muestra grande, entonces se puede probar que al reemplazar σ por S, el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad \textbf{\textit{aproximadamente}}$$

y puedo construir el intervalo para μ como antes:

$$\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$, pero su nivel es aproximadamente $1-\alpha$

9.3 – Intervalo de confianza para la varianza de una distribución normal

Supongamos que se quiere hallar un intervalo de confianza para la varianza σ^2 de una distribución normal.
Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de una v.a. X, donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Tomamos como estimador puntual de σ^2 a $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

Luego a partir de este estimador puntual construimos el estadístico $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

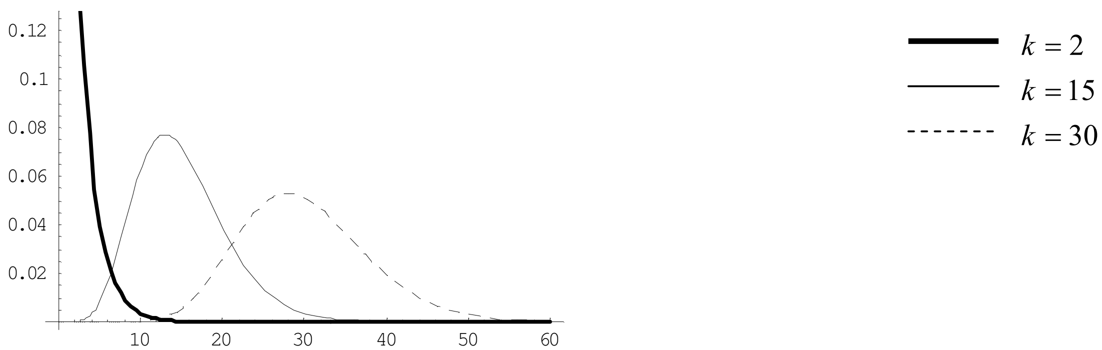
Este estadístico contiene al parámetro desconocido a estimar σ^2 y tiene una distribución conocida, se puede probar que X tiene una distribución llamada ***ji-cuadrado con n-1 grados de libertad***

Observación: Si X es una v.a. continua se dice que tiene distribución ***ji-cuadrado con k grados de libertad*** si su f.d.p. es

$$f(x)=\frac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{(k/2)-1}e^{-x/2} \qquad x>0$$

Notación: X~ $\chi_k^{\ 2}$

La distribución ji-cuadrdo es asimétrica. En la figura siguiente se grafica la densidad para diferentes valores de k



Anotaremos $\chi^2{}_{\alpha,k}$ al cuantil de la ji-cuadrado con k grados de libertad que deja bajo la *fdp* a derecha un área de α , y a su izquierda un área de $1-\alpha$.

Propiedades:

1- Se puede probar que si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes con distribución $N(0,1)$ entonces $Z = X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + ... + X_n^{\ 2}$ tiene distribución ji-cuadrado con n grados de libertad.

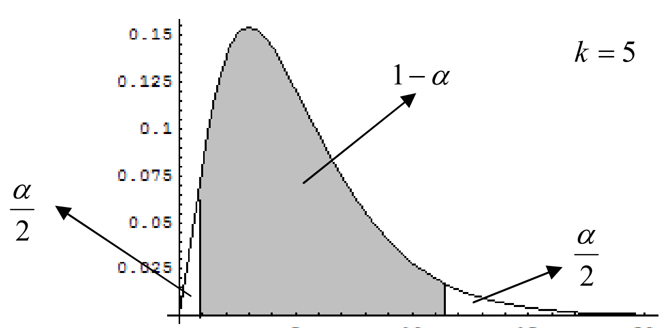
2- Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes tal que X_i tiene distribución ji-cuadrado con k_i grados de libertad, entonces $Z = X_1 + X_2 + ... + X_n$ tiene distribución ji-cuadrado con k grados de libertad donde $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$

3- Si $X \sim \chi_k^2$ entonces ***para k grande*** $\sqrt{2X} \sim N\left(\sqrt{2k-1},\ 1\right)$ aproximadamente.

Para desarrollar el intervalo de confianza planteamos hallar dos números a y b tales que

$$P(a \le X \le b) = 1-\alpha \qquad \text{es decir} \qquad P\left(a \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le b\right) = 1-\alpha$$

Se puede probar que la mejor elección de a y b es: $a=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ y $b=\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$



$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $\qquad\qquad$ $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

Por lo tanto

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \right) = 1-\alpha$$

y despejando σ^2 se llega a

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right) = 1-\alpha$$

Entonces

Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ es una muestra aleatoria de una v.a. *X*, donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, un intervalo de confianza para σ^2 de nivel $1-\alpha$ es

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right) \qquad (8.8)$$

<u>Observación</u>: un intervalo de confianza para σ de nivel $1-\alpha$, es $\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}} ; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}} \right)$

<u>Ejemplo</u>:
Un fabricante de detergente líquido está interesado en la uniformidad de la máquina utilizada para llenar las botellas. De manera específica, es deseable que la desviación estándar σ del proceso de llenado sea menor que 0.15 onzas de líquido; de otro modo, existe un porcentaje mayor del deseable de botellas con un contenido menor de detergente. Supongamos que la distribución del volumen de llenado es aproximadamente normal. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas, se obtiene una varianza muestral $S^2 = 0.0153$. Hallar un intervalo de confianza de nivel 0.95 para la verdadera varianza del volumen de llenado.

<u>Solución</u>:
La v.a. de interés es *X*: " volumen de llenado de una botella"
Se asume que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con σ desconocido.
Estamos en las condiciones para aplicar (8.8)

Tenemos que $1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.975,19} = 8.91$ y $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.025,19} = 32.85$

Además $S^2 = 0.0153$

Por lo tanto el intervalo es

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}};\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right) = \left(\frac{(20-1)\times 0.0153}{32.85};\ \frac{(20-1)\times 0.0153}{8.91} \right) = (0.00884;\ 0.0326)$$

Y un intervalo para σ es $\left(\sqrt{0.00884};\ \sqrt{0.0326}\right) = (0.09;\ 0.1805)$

Por lo tanto con un nivel de 0.95 los datos ***no apoyan la afirmación que*** $\sigma < 0.15$

9.4 – Intervalo de confianza para una proporción

Sea una población de tamaño *N* (eventualmente puede ser infinito) de cuyos individuos nos interesa cierta propiedad *A*. Supongamos que la probabilidad de que un individuo de la población verifique *A* es $p = P(A)$ .El significado del parámetro *p* es, en consecuencia, el de proporción de individuos de la población que verifican la propiedad *A*. Podemos definir una variable aleatoria X_i que mide a los individuos de la población la ocurrencia o no de la propiedad A.
La variable aleatoria tendrá la distribución:

$$p(x) = \begin{cases} p(1) = P(X_i = 1) = p \\ p(0) = P(X_i = 0) = 1-p, \end{cases}$$

es decir, X_i es una v.a. que toma sólo dos valores: 1 (si el individuo verifica *A*) con probabilidad *p* y 0 (cuando no verifica *A*) con probabilidad 1-*p*. Esto es equivalente a decir que X_i tiene una distribución binomial con parámetros 1 y *p*: $X_i \sim B(1,p)$.

Supongamos que consideramos una muestra aleatoria $(X_1, X_2 ..., X_n)$ de tamaño n. Si formamos el estadístico $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, es evidente que esta v.a. mide el número de individuos de la muestra de tamaño *n* que verifican la propiedad *A*. Por lo tanto por su significado *X* es una v.a. cuya distribución es binomial con parámetros *n* y *p*: $X \sim B(n,p)$. De acuerdo con esto, la variable aleatoria $\hat{P}$ definida: $\hat{P} = \frac{X}{n}$ representa la proporción de individuos de la muestra que verifican la propiedad *A*.
Observemos que siendo $X_i \sim B(1,p)$ es $E(X_i) = p$. Y, dado que $X \sim B(n,p)$, también es $E(\hat{P}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p$, es decir $\hat{P}$ es un estimador insesgado de p. Esto es de esperar pues $\hat{P} = \frac{X}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Pero además, es fácil ver que $\hat{P}$ es estimador consistente de p . En efecto, tenemos que $E(\hat{P}) = p$, pero también es
$V(\hat{P}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$.

Deseamos construir un intervalo de confianza de p. Es razonable basarnos en el estimador insegado $\hat{P}$. Consideramos como pivote a la variable aleatoria

$Z = \dfrac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$ cuya distribución es, para n suficientemente grande, aproximadamente $N(0,1)$. En efecto:

Siendo $\hat{P} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + ... + \frac{X_n}{n}$, es $E(\hat{P}) = \sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{X_i}{n}\right) = p$ y $V(\hat{P}) = \sum_{i=1}^{n} V\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$

Por lo tanto:

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \underset{n\ grande}{\sim} N(0,1),$$

El pivote puede ponerse en una forma más conveniente si tenemos en cuenta que, según vimos recién, $\hat{P}$ es estimador consistente de p y en consecuencia, en el denominador reemplazamos el parámetro desconocido p por su estimador $\hat{P}$, y se puede probar que :

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \approx N(0,1). \quad \text{aproximadamente si } n \text{ es grande}$$

Partiendo de este pivote podemos seguir los mismos pasos de los casos anteriores para llegar al siguiente intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$ de p:

$$\left[\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}, \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right] \quad \text{con} \quad \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Entonces

Si $\hat{P}$ es la proporción de observaciones de una muestra aleatoria de tamaño n que verifican una propiedad de interés, entonces un intervalo de confianza para la proporción p de la población que cumple dicha propiedad de nivel aproximadamente $1-\alpha$ es

$$\left[\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}},\ \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right] \qquad (8.10)$$

<u>Observaciones</u>:

1- Este procedimiento depende de la aproximación normal a la distribución binomial. Por lo tanto el intervalo (8.10) se puede utilizar si $n\hat{P} > 10$ y $n(1-\hat{P}) > 10$, es decir, ***la muestra debe contener un mínimo de diez éxitos y diez fracasos.***

2- La longitud del intervalo es $L = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$, pero esta expresión está en función de $\hat{P}$

Si nos interesa hallar un valor de *n* de manera tal que la longitud *L* sea menor que un valor determinado, podemos hacer dos cosas:

a) tomar una muestra preliminar, con ella estimar *p* con $\hat{P}$ y de la expresión anterior despejar *n*, lo que lleva a

$$L = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \le l \quad \Rightarrow \quad n \ge \left(\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{l}\right)^2 \hat{P}(1-\hat{P})$$

b) si no tomamos una muestra preliminar, entonces acotamos $\hat{P}(1-\hat{P}) \le 0.5 \times (1-0.5)$, entonces

$$L = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \le 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{n}} \le l \quad \Rightarrow \quad n \ge \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{l}\right)^2$$

<u>Ejemplo:</u>

Un fabricante de componentes compra un lote de dispositivos de segunda mano y desea saber la proporción de la población que están fallados. Con ese fin experimenta con 140 dispositivos elegidos al azar y encuentra que 35 de ellos están fallados.

a) Calcular un intervalo de confianza del 99% para la proporción poblacional *p*.

b) ¿De qué tamaño deberá extraerse la muestra a fin de que la proporción muestral no difiera de la proporción poblacional en más de 0.03 con un 95% de confianza?

<u>Solución</u>:

a) El tamaño de la muestra es $n = 140$ (muestra grande)

La proporción muestral es $\hat{P} = \dfrac{35}{140} = 0.25$

El nivel de confianza es $1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0.005$.

De la tabla de la normal estandarizada vemos que $z_{0.005} = 2.58$. Entonces el intervalo buscado es:

$$\left[0.25 - 2.58\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{140}},\ 0.25 + 2.58\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{140}}\right] = [0.15558,\ 0.34441]$$

b) Buscamos el tamaño *n* de la muestra tal que con un 95% de confianza la proporción muestral $\hat{P}$ esté a una distancia 0.03 de la proporción poblacional *p*, es decir buscamos *n* tal que

$\dfrac{L}{2} \leq 0.03$, por lo tanto como $\alpha = 0.05 \;\rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2} = 0.025$ ***si tomamos la muestra anterior como preliminar*** :

$$n \geq \left(\frac{2 z_{\frac{\alpha}{2}}}{l} \right)^2 \hat{P}\left(1-\hat{P}\right) = \left(\frac{2 \times 1.96}{2 \times 0.03} \right)^2 0.25\left(1-0.25\right) = 800.3333$$

Por lo tanto hay que tomar una muestra de tamaño por lo menos 801. como ya se tomó una muestra de tamaño 140, hay que tomar otra adicional de tamaño $801 - 140 = 661$
Supongamos que no tomamos una muestra inicial, entonces directamente planteamos

$$n \geq \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{l} \right)^2 = \left(\frac{1.96}{2 \times 0.03} \right)^2 = 1067.1111$$

Entonces hay que tomar una muestra de tamaño 1068 por lo menos.

Practica Nº 14

Intervalos de confianza

1) Se sabe que la duración en horas, de un foco de 75 watts tiene una distribución aproximadamente normal, con una desviación estándar de 25 horas. Se toma una muestra aleatoria de 20 focos, la cual resulta tener una duración promedio de $\bar{x} = 1014$ horas.
   a) Construya un intervalo de confianza del 95% para la duración media.
   b) Supóngase que se desea una confianza del 95% en que el error en la estimación de la duración media sea menor que 5 horas. ¿Qué tamaño de muestra debe utilizarse?
   c) Supóngase que se desea que el ancho total del intervalo de confianza sea de 6 horas, con una confianza del 95%. ¿Qué tamaño de muestra debe utilizarse para este fin?

2) Un ingeniero civil analiza la resistencia a la compresión del concreto. La resistencia está distribuida aproximadamente de manera normal, con varianza 1000 $(psi)^2$. Al tomar una muestra aleatoria de 12 especímenes, se tiene que $\bar{x} = 3250$ psi.
   c) Construya un intervalo de confianza del 95% para la resistencia a la compresión media.
   d) Construya un intervalo de confianza del 99% para la resistencia a la compresión media. Compare el ancho de este intervalo de confianza con el ancho encontrado en el inciso a).

3) a) Con base en pruebas de comportamiento de una gran muestra de uniones soldadas, se calculó un intervalo de confianza de 90% para la media de la dureza Rockwell B de cierto tipo de soldadura de (83.2 , 84.1). Determine un intervalo de confianza de 95% para la media de la dureza Rockwell B de este tipo de soldadura.
   b) Un intervalo de confianza de 95% para una media poblacional se calcula de una muestra de tamaño 50. Se calculará otro intervalo de confianza de 95% para una muestra de tamaño 200 extraída de la misma población. Justificando su elección, elija la mejor respuesta que complete el espacio en blanco:
   El intervalo de una muestra de tamaño 50 será aproximadamente ………………. del intervalo de la muestra de tamaño 200.
   b1) un octavo de ancho
   b2) un cuarto de ancho
   b3) la mitad de ancho
   b4) del mismo ancho
   b5) dos veces el ancho
   b6) cuatro veces el ancho
   b7) ocho veces el ancho

4) Un artículo publicado en *Nuclear Engineering International* (febrero de 1998, pag.33) describe varias características de las varillas de combustible utilizadas en un reactor propiedad de una empresa noruega de electricidad. Las mediciones notificadas sobre el porcentaje de enriquecimiento de 12 varillas son las siguientes:
   2.94 2.75 2.75 2.81 2.90 2.90 2.82 2.95 3.00 2.95 3.00 3.05
   a) Encuentre un intervalo de confianza del 99% para el porcentaje medio de enriquecimiento. Asuma que los datos provienen de una población normal. ¿Está de acuerdo con la afirmación de que el porcentaje medio de enriquecimiento es del 2.95%?. ¿Por qué?.
   b) Encuentre un intervalo de confianza del 99% para la varianza del porcentaje de enriquecimiento.

5) Una máquina de bebidas con mezclado posterior se ajusta de modo que libere cierta cantidad de jarabe en una cámara donde será mezclado con agua carbonatada. De una muestra aleatoria de 25 bebidas se tiene que el contenido medio de jarabe es $\bar{x} = 1.10$ onzas de líquido, con una desviación estándar $s = 0.015$ onzas de líquido.
   a) Encuentre un intervalo de confianza del 90% para la cantidad media de jarabe mezclado en cada bebida. Asuma distribución normal.
   b) Encuentre un intervalo de confianza del 90% para la varianza de la cantidad de jarabe mezclado en cada bebida. Asuma distribución normal.

6) Un fabricante de calculadoras electrónicas está interesado en estimar la fracción de unidades defectuosas producidas. Se toma una muestra aleatoria de 800 calculadoras, de las cuales 10 resultan defectuosas. Calcule un intervalo de confianza del 99% para la fracción de calculadoras defectuosas.

7) En una muestra aleatoria de 85 soportes para el cigüeñal de un motor de automóvil, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo que las especificaciones permiten.
   a) Calcular un intervalo de confianza del 95% para la verdadera proporción de soportes en la población que exceden las especificaciones.
   b) ¿Cuán grande debe ser la muestra si se desea tener una confianza del 95% de que el error de estimación sea menor que 0.05?.

8) Una muestra aleatoria de 110 relámpagos en cierta región resultaron en una duración de eco de radar promedio muestral de 0.81 s y una desviación estándar muestral de 0.34 s ("Lightning Strikes to an Airplane in a Thunderstorm", *J. Aircraft*, 1994, pp.607-611). Calcule un intervalo de confianza de 99% para la verdadera duración media del eco.

10- Test o prueba de hipótesis

10.1 – Introducción

Hasta ahora hemos estudiado el problema de estimar un parámetro desconocido a partir de una muestra aleatoria.
En muchos problemas se requiere tomar una decisión entre aceptar o rechazar una proposición sobre algún parámetro. Esta proposición recibe el nombre de ***hipótesis estadística***, y el procedimiento de toma de decisión sobre la hipótesis se conoce como ***prueba o test de hipótesis***.
Como se emplean distribuciones de probabilidad para representar poblaciones, también podemos decir que una hipótesis estadística es una proposición sobre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, donde la hipótesis involucra a uno más parámetros de esta distribución.
Por ejemplo, supongamos que cierto tipo de motor de automóvil emite una media de 100 mg de óxidos de nitrógeno (NO_x) por segundo con 100 caballos de fuerza. Se ha propuesto una modificación al diseño del motor para reducir las emisiones de NO_x. El nuevo diseño se producirá si se demuestra que la media de su tasa de emisiones es menor de 100 mg/s. Se construye y se prueba una muestra de 50 motores modificados. La media muestral de emisiones de NO_x es de 92 mg/s, y supongamos que se puede asumir que σ es 21 mg/s.
La variable aleatoria de interés en este caso es X: “tasa de emisión de un motor modificado tomado al azar”.
La preocupación de los fabricantes consiste en que los motores modificados no puedan reducir todas la emisiones; es decir que la media poblacional pudiera ser 100 o mayor que 100.
Entonces, la pregunta es: ¿es factible que esta muestra pueda provenir de una v.a. con media 100 o mayor?
Éste es el tipo de preguntas que las pruebas de hipótesis están diseñadas para responder. Veremos cómo construir una prueba de hipótesis, pero podemos decir que en general se basa en construir a partir de la muestra aleatoria un ***estadístico***, y según el valor que tome este ***estadístico de prueba*** se aceptará o se rechazará la hipótesis.
Se ha observado una muestra con media $\overline{X} = 92$.
Hay dos interpretaciones posibles de esta observación:

1- La media poblacional es realmente mayor o igual que 100, y la media muestral es menor que 100 debido a la ***variabilidad*** propia de la variable aleatoria $\overline{X}$
2- La media poblacional es en realidad menor que 100, y la media muestral refleja este hecho.

Estas dos explicaciones tienen nombres: la primera se llama ***hipótesis nula***; la segunda es la ***hipótesis alternativa***.
En la mayoría de las situaciones la hipótesis nula dice que el efecto que indica la muestra es atribuible solamente a la variación aleatoria del estadístico de prueba.
La hipótesis alternativa establece que el efecto que indica la muestra es verdadero.
Para hacer las cosas más precisas, todo se expresa mediante símbolos. La hipótesis nula se denota por H_0, la hipótesis alternativa se denota con H_1. Como es usual la media poblacional se anota μ. Por lo tanto se tiene

$$H_0 : \mu \geq 100 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu < 100 \quad \text{(hipótesis alternativa unilateral)}$$

Esencialmente, para realizar una prueba de hipótesis se pone la hipótesis nula en juicio. Se asume que H_0 es verdadera, de la misma manera como se empieza en un juicio bajo el supuesto de que un acusado es inocente. La muestra aleatoria proporciona la evidencia.

Las hipótesis son siempre proposiciones ***sobre los parámetros de la población o distribución bajo estudio***, no proposiciones sobre la muestra.
Otros tipos de hipótesis que podrían formularse son

$$H_0: \mu \leq 100 \quad \text{contra} \quad H_1: \mu > 100 \qquad \text{(hipótesis alternativa unilateral)}$$

o

$$H_0: \mu = 100 \quad \text{contra} \quad H_1: \mu \neq 100 \qquad \text{(hipótesis alternativa bilateral)}$$

En el ejemplo tenemos $X_1, X_2, ..., X_{50}$ muestra aleatoria de la v.a. X definida anteriormente.
Como estamos haciendo una hipótesis sobre la media poblacional es razonable tomar como estadístico de prueba a $\overline{X}$. El valor observado de la media muestral es $\overline{X} = 92$.
Si el valor de $\overline{X}$ es muy "menor" que 100 entonces se considera que hay evidencia en contra H_0 y se la rechaza, aceptando la hipótesis alternativa.
Si el valor de $\overline{X}$ no es "muy menor" que 100 entonces se considera que no hay evidencia en contra H_0 y se rechaza la hipótesis alternativa.
Ya veremos como construir una ***regla de decisión***, supongamos ahora que tenemos la siguiente regla:

$$\begin{cases} se \;\; rechaza \;\; H_0 \;\; si \;\; \overline{X} < 95 \\ se \;\; acepta \;\; H_0 \;\; si \;\; \overline{X} \geq 95 \end{cases}$$

El intervalo $\left(95, \;\infty\right)$ es la ***zona de aceptación.***

La región $\left(-\infty; \;95\right)$ es la ***zona de rechazo o región crítica.***

Mientras que 95 es el ***punto crítico***.

Como estamos tomando una decisión basados en el valor de un estadístico podemos cometer dos tipos de errores: rechazar H_0 cuando ésta es verdadera, es decir el estadístico toma valores en la zona de rechazo cuando H_0 es verdadera; o aceptar H_0 cuando ésta es falsa, es decir que el estadístico tome valores en la zona de aceptación cuando H_0 es falsa.
El primero se conoce como ***error de tipo I***, y el segundo como ***error de tipo II***.
Debido a que la decisión se basa en variables aleatorias es posible asociar probabilidades a los errores de tipo I y II, específicamente anotamos

$$\alpha = P(error \;\; de \;\; tipo \;\; I)$$

$$\beta = P(error \;\; de \;\; tipo \;\; II)$$

A $\alpha = P(error \;\; de \;\; tipo \;\; I)$ se lo conoce como ***nivel de significancia del test***.

Para calcular estas probabilidades debemos conocer la distribución del estadístico de prueba en el caso de ser H_0 verdadera, es decir debemos conocer la distribución del estadístico de prueba "bajo H_0".

En el ejemplo anterior la muestra es grande, ya sabemos que por T.C.L. el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - 100}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0,1) \quad \textbf{\textit{si}} \;\; H_0 \;\; \textbf{\textit{es verdadera,}} \;\; \text{o sea} \quad Z = \frac{\overline{X} - 100}{21 / \sqrt{50}} \approx N(0,1)$$

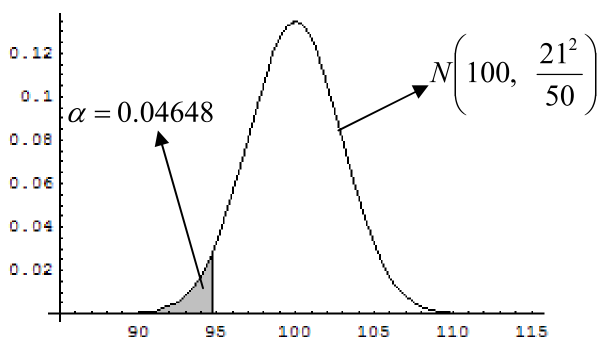
Entonces para calcular α planteamos:

$$\alpha = P(error \;\; de \;\; tipo \;\; I) = P\left(rechazar \;\; H_0 / H_0 \;\; es \;\; V \right) = P\left(\overline{X} < 95 / \mu = 100 \right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - 100}{21/\sqrt{50}} < \frac{95 - 100}{21/\sqrt{50}} \right) \approx \Phi\left(\frac{95 - 100}{21/\sqrt{50}} \right) = \Phi(-1.6835) = 1 - 0.95352 = 0.04648$$

Esto significa que el 4.64% de las muestras aleatorias conducirán al rechazo de la hipótesis $H_0 : \mu \geq 100$ cuando el verdadero μ sea mayor o igual que 100.

En este caso el gráfico de la zona de rechazo es



Del gráfico anterior vemos que podemos reducir α al aumentar la zona de aceptación. Por ejemplo supongamos que ahora la regla de decisión es

$$\begin{cases} se \;\; rechaza \;\; H_0 \;\; si \quad \overline{X} < 93 \\ se \;\; acepta \;\; H_0 \;\; si \;\; \overline{X} \geq 93 \end{cases}$$

Entonces $\alpha = P(error \;\; de \;\; tipo \;\; I) = P\left(rechazar \;\; H_0 / H_0 \;\; es \;\; V \right) = P\left(\overline{X} < 93 / \mu = 100 \right) =$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - 100}{21/\sqrt{50}} < \frac{93 - 100}{21/\sqrt{50}} \right) \approx \Phi\left(\frac{93 - 100}{21/\sqrt{50}} \right) = \Phi(-2.357) = 1 - 0.99061 = 0.00939$$

También se puede reducir α aumentando el tamaño de la muestra. Supongamos que $n=85$, entonces

$$\alpha = P(error\ \ de\ \ tipo\ \ I) = P\left(rechazar\ \ H_0 / H_0\ \ es\ \ V \right) = P\left(\overline{X} < 95 / \mu = 100\right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X}-100}{21/\sqrt{85}} < \frac{95-100}{21/\sqrt{85}} \right) \approx \Phi\left(\frac{95-100}{21/\sqrt{85}} \right) = \Phi(-2.195) = 1-0.98574 = 0.01426$$

También es importante examinar la probabilidad de cometer error de tipo II, esto es

$$\beta = P(error\ \ de\ \ tipo\ \ II) = P(aceptar\ H_0 / H_0\ es\ falsa)$$

Pero en este caso para llegar a un valor numérico necesitamos tener una alternativa específica pues en nuestro ejemplo:

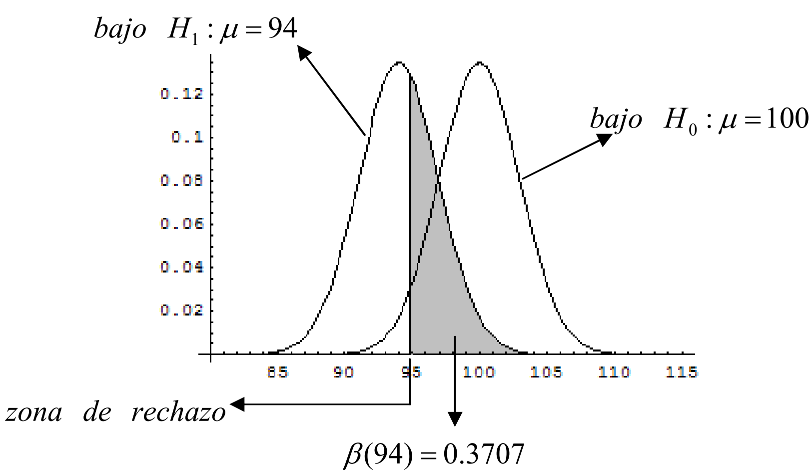
$$\beta = P(error\ \ de\ \ tipo\ \ II) = P(aceptar\ H_0 / H_0\ es\ falsa) = P\left(\overline{X} \geq 95 / \mu \neq 100\right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{21/\sqrt{50}} \geq \frac{95-\mu}{21/\sqrt{50}} \right) = 1-\Phi\left(\frac{95-\mu}{21/\sqrt{50}} \right) = \beta(\mu)$$

Donde anotamos con μ a la verdadera media poblacional ***desconocida***.
Podemos entonces calcular β para un valor particular de μ, por ejemplo nos puede interesar como se comporta el test cuando la verdadera media es $\mu = 94$, entonces

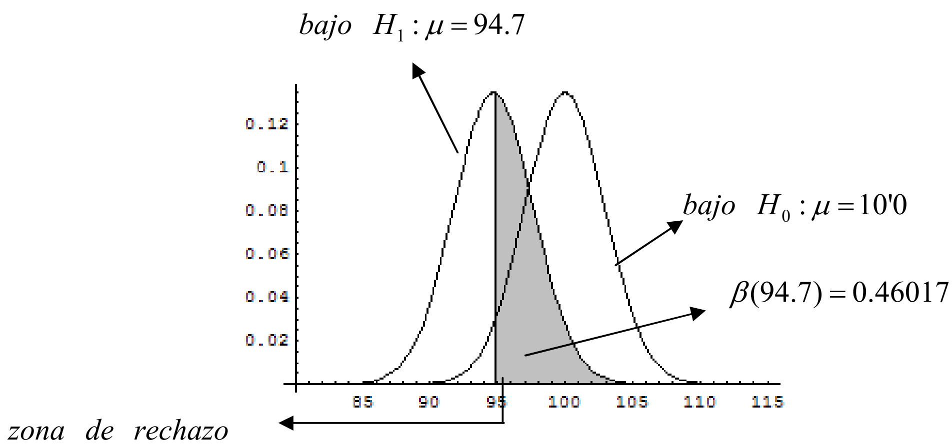
$$\beta(94) = P\left(\frac{\overline{X}-94}{21/\sqrt{50}} \geq \frac{95-94}{21/\sqrt{50}} \right) = 1-\Phi\left(\frac{95-94}{21/\sqrt{50}} \right) = 1-\Phi(0.3367) = 1-0.62930 = 0.3707$$

Gráficamente:



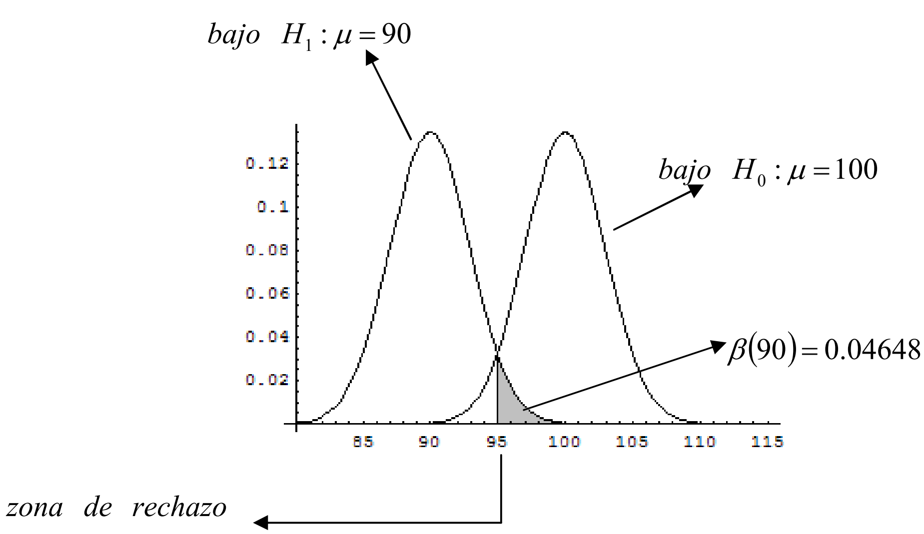
La probabilidad β de cometer error de tipo II ***crece*** a medida que el valor verdadero de μ se acerca al valor hipotético. Por ejemplo si el verdadero valor de μ fuera 94.7 entonces

$$\beta(94.7) = P\left(\frac{\overline{X} - 94.7}{21/\sqrt{50}} \geq \frac{95 - 94.7}{21/\sqrt{50}} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{95 - 94.7}{21/\sqrt{50}} \right) = 1 - \Phi(0.101015) = 1 - 0.53983 = 0.46017$$



Además, la probabilidad β de cometer error de tipo II ***disminuye*** a medida que el valor verdadero de μ se aleja del valor hipotético. Por ejemplo si el verdadero valor de μ fuera 90 entonces

$$\beta(90) = P\left(\frac{\overline{X} - 90}{21/\sqrt{50}} \geq \frac{95 - 90}{21/\sqrt{50}} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{95 - 90}{21/\sqrt{50}} \right) = 1 - \Phi(1.6835) = 1 - 0.95352 = 0.04648$$



También se puede reducir la probabilidad de cometer error de tipo II con el tamaño de la muestra. Por ejemplo si $n = 85$ entonces y $\mu = 94$

$$\beta(94) = P\left(\frac{\overline{X} - 94}{21/\sqrt{85}} \geq \frac{95-94}{21/\sqrt{85}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{95-94}{21/\sqrt{85}}\right) = 1 - \Phi(0.4390) = 1 - 0.67003 = 0.32997$$

Lo que se ha visto en los ejemplos anteriores se puede generalizar. Podemos recalcar los siguientes puntos importantes:

1- El tamaño de la región crítica, y en consecuencia la probabilidad α de cometer error de tipo I, siempre pueden reducirse mediante una selección apropiada de los valores críticos.
2- Los errores tipo I y II están relacionados. Una disminución en la probabilidad en un tipo de error siempre da como resultado un aumento en la probabilidad del otro, siempre que el tamaño de la muestra no cambie.
3- En general, un aumento en el tamaño de la muestra reduce tanto a α como a β, siempre que los valores críticos se mantengan constantes.
4- Cuando la hipótesis nula es falsa, β aumenta a medida que el valor verdadero del parámetro tiende al valor hipotético propuesto por la hipótesis nula. El valor de β disminuye a medida que aumenta la deferencia entre el verdadero valor medio y el propuesto.

En general el investigador controla la probabilidad α del error de tipo I cuando selecciona los valores críticos. Por lo tanto el rechazo de la hipótesis nula de manera errónea se puede fijar de antemano. Eso hace que rechazar la hipótesis nula sea una ***conclusión fuerte***.
La probabilidad β de error de tipo II no es constante, sino que depende del valor verdadero del parámetro. También depende β del tamaño de la muestra que se haya seleccionado. Como β está en función del tamaño de la muestra y del valor verdadero del parámetro, la decisión de aceptar la hipótesis nula se la considera una ***conclusión débil***, a menos que se sepa que β es aceptablemente pequeño. Por lo tanto ***cuando se acepta*** H_0 ***en realidad se es incapaz de rechazar*** H_0. ***No se puede rechazar*** H_0 ***pues no hay evidencia en contra*** H_0.
Un concepto importante es el siguiente:
La ***potencia*** de un test es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula. La simbolizamos $\pi(\mu)$. Para los ***valores de*** μ ***tal que la alternativa es verdadera*** se tiene

$$\pi(\mu) = P\left(rechazar \quad H_0 / H_0 \quad es \quad falsa\right) = 1 - \beta(\mu)$$

Las pruebas estadísticas se comparan mediante la comparación de sus propiedades de potencia.
La potencia es una medida de la ***sensibilidad*** del test, donde por sensibilidad se entiende la capacidad de una prueba para detectar diferencias.
En el ejemplo anterior, la sensibilidad de la prueba para detectar la diferencia entre una tasa de emisión media de 100 y otra de 94 es $\pi(94) = 1 - \beta(94) = 1 - 0.3707 = 0.6293$. Es decir si el valor verdadero de la tasa de emisión media es 94, la prueba rechazará de manera correcta H_0 y detectará esta diferencia el 62.93% de las veces. Si el investigador piensa que este valor es bajo entonces el investigador puede aumentar α o el tamaño de la muestra.

10.2 – Prueba de hipótesis sobre la media, varianza conocida

Veamos ahora cómo construir una regla de decisión sobre la media de una población.
Supongamos que la variable aleatoria de interés X tiene una media μ y una varianza σ^2 conocida. Asumimos que X tiene distribución normal, es decir $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Nuevamente, como en el ejemplo introductorio, es razonable tomar como estadístico de prueba al promedio muestral $\overline{X}$. Bajo las suposiciones hechas tenemos que $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Supongamos que tenemos las hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

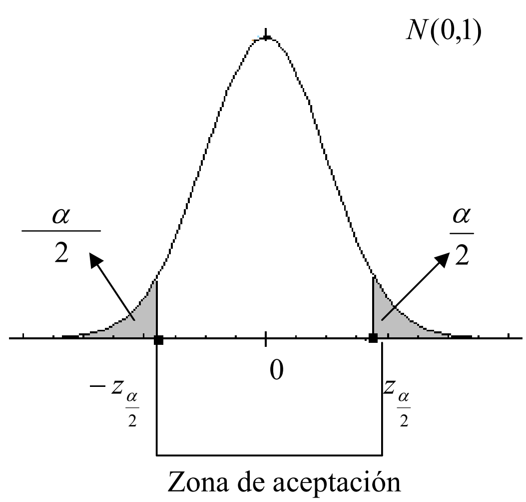
Donde μ_0 es una constante específica. Se toma una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ de la población.

Si $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera, entonces $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, por lo tanto el estadístico

$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ tiene distribución $N(0,1)$ si $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera

Tomamos a *Z* como ***estadístico de prueba***

Si $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera entonces $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$



Es evidente que una muestra que produce un valor del estadístico de prueba que cae en las colas de la distribución de *Z* será inusual si $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera, por lo tanto esto es un indicador que H_0 es falsa.
Entonces la regla de decisión es:

$$\begin{cases} rechazar \;\; H_0 \;\; si \;\; |Z| > z_{\frac{\alpha}{2}} \\ aceptar \;\; H_0 \;\; si \;\; |Z| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Notar que la probabilidad que la estadística de prueba tome un valor que caiga en la zona de rechazo si H_0 es verdadera es igual a α , es decir la probabilidad de cometer error de tipo I es α pues

$$P(error \;\; de \;\; tipo \;\; I) = P\left(rechazar \;\; H_0 / H_0 \;\; es \;\; V \right) = P\left(\left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \Big/ \mu = \mu_0 \right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{\frac{\alpha}{2}} \right) + P\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

Ejemplo:
El porcentaje deseado de SiO_2 en cierto tipo de cemento aluminoso es 5.5. Para probar si el verdadero promedio de porcentaje es 5.5 para una planta de producción en particular, se analizaron 16 muestras obtenidas de manera independiente. Supongamos que el porcentaje de SiO_2 en una muestra está normalmente distribuido con $\sigma = 3$, y que $\overline{x} = 5.25$.
¿Indica esto de manera concluyente que el verdadero promedio de porcentaje difiere de 5.5?. Utilice $\alpha = 0.01$

Solución:
La v.a. de interés es *X*: “porcentaje de SiO_2 en cierto tipo de cemento aluminoso”
Asumimos que $X \sim N(\mu, 3^2)$
Podemos plantear las hipótesis

$$H_0 : \mu = 5.5 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu \neq 5.5$$

Tenemos una muestra de tamaño $n = 16$ que dio un promedio muestral $\overline{x} = 5.25$
Como $\alpha = 0.01$ entonces $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.575$

Por lo tanto la regla de decisión es
$$\begin{cases} rechazar \;\; H_0 \;\; si \;\; \left| \dfrac{\overline{X} - 5.5}{3 / \sqrt{16}} \right| > 2.575 \\ \\ aceptar \;\; H_0 \;\; si \;\; \left| \dfrac{\overline{X} - 5.5}{3 / \sqrt{16}} \right| \leq 2.575 \end{cases}$$

El estadístico $\left| \dfrac{\overline{X} - 5.5}{3 / \sqrt{16}} \right|$ toma el valor $z_0 = \left| \dfrac{5.25 - 5.5}{3 / \sqrt{16}} \right| = 0.333333$

Como $z_0 = 0.333333 < 2.575 = z_{\frac{0.01}{2}}$ se acepta H_0

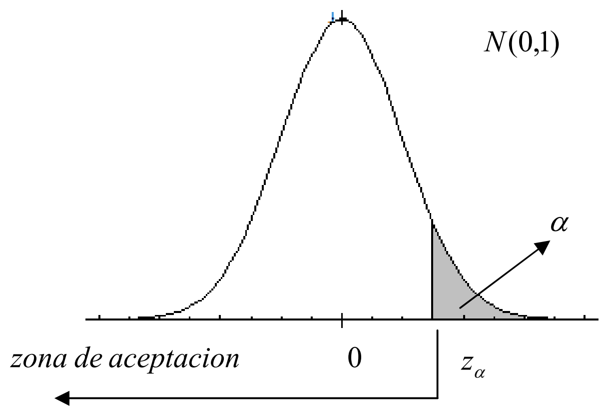
También podemos desarrollar tests o pruebas de hipótesis para el caso de que la hipótesis alternativa es unilateral.

Supongamos las hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

En este caso la región crítica debe colocarse en la cola superior de la distribución normal estándar y el rechazo de H_0 se hará cuando el valor calculado de z_0 sea muy grande, esto es la regla de decisión será

$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_\alpha \end{cases}$$

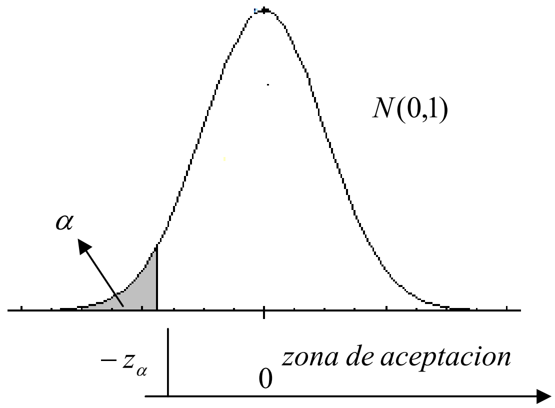


De manera similar para las hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

se calcula el valor del estadístico de prueba z_0 y se rechaza H_0 si el valor de z_0 es muy pequeño, es decir la regla de decisión será

$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq -z_\alpha \end{cases}$$



Ejemplo:
Se sabe que la duración, en horas, de un foco de 75 watts tiene una distribución aproximadamente normal, con una desviación estándar de $\sigma = 25$ horas. Se toma una muestra aleatoria de 20 focos, la cual resulta tener una duración promedio de $\bar{x} = 1040$ horas
¿Existe evidencia que apoye la afirmación de que la duración promedio del foco es mayor que 1000 horas?. Utilice $\alpha = 0.05$.

Solución:
La v.a. de interés es X: "duración en horas de un foco tomado al azar"
Asumimos $X \sim N(\mu, 25^2)$
Podemos plantear las hipótesis

$$H_0 : \mu = 1000 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu > 1000$$

Tenemos una muestra de tamaño $n = 20$ que dio un promedio muestral $\bar{x} = 1040$
Como $\alpha = 0.05$ entonces $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

Por lo tanto la regla de decisión es $\begin{cases} \textit{rechazar} \ H_0 \ \textit{si} \ \dfrac{\bar{X} - 1000}{25/\sqrt{20}} > 1.645 \\ \textit{aceptar} \ H_0 \ \textit{si} \ \dfrac{\bar{X} - 1000}{25/\sqrt{20}} \leq 1.645 \end{cases}$

El estadístico toma el valor $Z = \dfrac{\bar{X} - 1000}{25/\sqrt{20}}$ toma el valor $z_0 = \dfrac{1040 - 1000}{25/\sqrt{20}} = 7.1554$

Como $z_0 = 7.1554 > 1.645 = z_{0.05}$ se rechaza H_0

P- valor

Hasta ahora se dieron los resultados de una prueba de hipótesis estableciendo si la hipótesis nula fue o no rechazada con un valor especificado de α o nivel de significancia.
A menudo este planteamiento resulta inadecuado, ya que no proporciona ninguna idea sobre si el valor calculado del estadístico está apenas en la región de rechazo o bien ubicado dentro de ella. Además, esta forma de establecer los resultados impone a otros usuarios el nivel de significancia predeterminado.

Para evitar estas dificultades, se adopta el enfoque del ***p-valor***. El ***valor p*** o ***p-valor*** es la probabilidad de que el estadístico de prueba tome un valor que sea al menos tan extremo como el valor observado del estadístico de prueba cuando la hipótesis nula es verdadera. Es así como el p-valor da mucha información sobre el peso de la evidencia contra H_0, de modo que el investigador pueda llegar a una conclusión para cualquier nivel de significancia especificado.
La definición formal del p-valor es la siguiente:

El ***valor p*** es el nivel de significancia más pequeño que conduce al rechazo de la hipótesis nula H_0

Para las pruebas de distribuciones normales presentadas hasta el momento, es sencillo calcular el p-valor.
Si z_0 es el valor calculado del estadístico de prueba *Z*, entonces el p-valor es

a) si las hipótesis son $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu \neq \mu_0$

$$p-valor = P(|Z| > |z_0|) = 1 - P(|Z| < |z_0|) = 1 - [\Phi(|z_0|) - \Phi(-|z_0|)] = 1 - [2\Phi(|z_0|) - 1] = 2[1 - \Phi(|z_0|)]$$

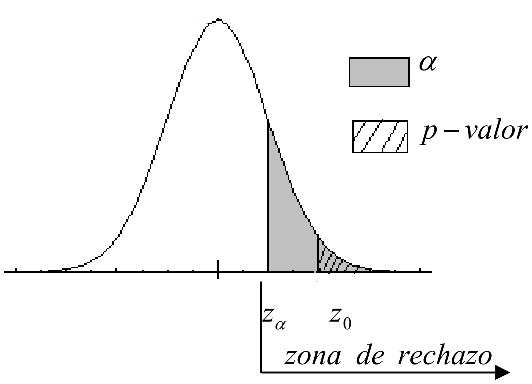
b) si las hipótesis son $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu > \mu_0$

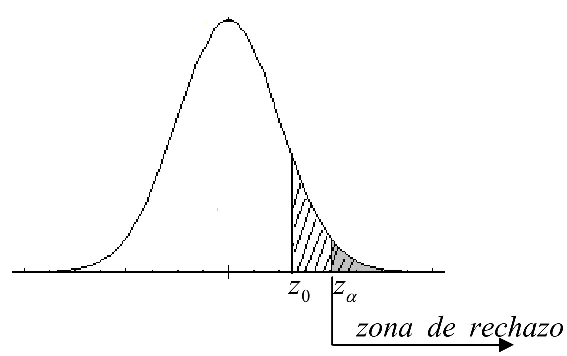
$$p-valor = P(Z > z_0) = 1 - P(Z \leq z_0) = 1 - \Phi(z_0)$$

c) si las hipótesis son $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu < \mu_0$

$$p-valor = P(Z < z_0) = \Phi(z_0)$$

Un p-valor muy chico significa mucha evidencia en contra de H_0***;*** un p-valor alto significa que no hay evidencia en contra H_0
Notar que:
Si $\alpha < p-valor$ entonces se acepta H_0 con nivel de significancia α
Si $\alpha > p-valor$ entonces se rechaza H_0 con nivel de significancia α
Esto se ilustra en las siguientes figuras:





Ejemplos:
1- En el ejemplo anteúltimo referido al porcentaje deseado de SiO_2 en cierto tipo de cemento aluminoso las hipótesis eran: $H_0: \mu = 5.5$ contra $H_1: \mu \neq 5.5$; y el estadístico de prueba tomó el valor $z_0 = 0.333333 < 2.575 = z_{\frac{0.01}{2}}$; por lo tanto se aceptaba H_0.

En esta caso $p-valor = P(|Z| > |z_0|) = 2[1-\Phi(|z_0|)] = 2[1-\Phi(0.33333)] = 2[1-0.62930] = 0.7414$

Como el p-valor es muy alto no hay evidencia en contra H_0**.** Se necesitaría tomar un valor de α mayor a 0.7414 para rechazar H_0.

2- En el último ejemplo, sobre la duración, en horas, de un foco de 75 watts, las hipótesis eran $H_0: \mu = 1000$ contra $H_1: \mu > 1000$; y el estadístico Z tomó el valor $z_0 = 7.1554 > 1.645 = z_{0.05}$; por lo tanto se rechazaba H_0**.**

En este caso

$p-valor = P(Z > z_0) = 1-\Phi(z_0) = 1-\Phi(7.1554) \approx 0$

Como el p-valor es casi cero hay mucha evidencia en contra de H_0. Prácticamente para ningún valor de α se acepta H_0

Error de tipo II y selección del tamaño de la muestra

En la prueba de hipótesis el investigador selecciona directamente la probabilidad del error de tipo I. Sin embargo, la probabilidad β de cometer error de tipo II depende del tamaño de la muestra y del valor verdadero del parámetro desconocido.

Supongamos las hipótesis

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{contra} \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

Entonces si anotamos con μ al valor verdadero del parámetro

$$\beta = P(aceptar \ \ H_0 / H_0 \ \ es \ \ falsa) = P\left(\left| \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \Big/ \mu \neq \mu_0 \right)$$

Como la hipótesis nula es falsa, entonces $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ***no tiene distribución*** $N(0,1)$

Por lo tanto hacemos lo siguiente:

$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\overline{X}-\mu+\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \dfrac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$; y ahora como $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ pues se estandarizó a $\overline{X}$ con el verdadero μ, entonces

$$\beta = P\left(\left| \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \Big/ \mu \neq \mu_0 \right) = P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \Big/ \mu \neq \mu_0 \right) =$$

$$= P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \Big/ \mu \neq \mu_0 \right) = P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - \Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right) - \Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right)$$

En consecuencia

> Si las hipótesis son $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu \neq \mu_0$, entonces
> $$\beta(\mu) = \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right) - \Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right)$$

Para un valor específico de μ y un valor de α dado, podemos preguntarnos qué tamaño de muestra se necesita para que β sea menor que un valor dado en particular β_0.

Por ejemplo si $\mu - \mu_0 > 0$ entonces podemos aproximar $\Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right) \approx 0$, y planteamos que

$\beta(\mu) = \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right) < \beta_0$. Buscamos en la tabla de la $N(0,1)$ para qué z se cumple que $\Phi(z) = \beta_0$, lo anotamos $-z_{\beta_0}$, y entonces podemos escribir

$$z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} < -z_{\beta_0} \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} + z_{\beta_0} < \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_{\beta_0} \right)^2 \sigma^2}{(\mu - \mu_0)^2}$$

En el caso de ser $\mu - \mu_0 < 0$ entonces podemos aproximar $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right) \approx 1$, y planteamos que

$\beta(\mu) = 1 - \Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right) < \beta_0$. Es decir $1 - \beta_0 < \Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right)$

Buscamos en la tabla de la $N(0,1)$ para qué z se cumple que $\Phi(z) = 1 - \beta_0$, lo anotamos z_{β_0} , y entonces podemos escribir

$$-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} > z_{\beta_0} \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} + z_{\beta_0} < -\frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\mu-\mu_0<0} \quad n > \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_{\beta_0} \right)^2 \sigma^2}{(\mu - \mu_0)^2}$$

En consecuencia queda la misma fórmula que la anterior
Por lo tanto

> Si las hipótesis son $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu \neq \mu_0$, entonces
> $$n > \frac{\left(z_{\alpha/2} + z_{\beta_0} \right)^2 \sigma^2}{(\mu - \mu_0)^2}$$

En forma análoga se pude probar que si las hipótesis son

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{contra} \quad H_1: \mu > \mu_0$$

Entonces

$$\beta = P(aceptar\ \ H_0/H_0\ \ es\ \ falsa) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_\alpha \Big/ \mu \ne \mu_0 \right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_\alpha \Big/ \mu \ne \mu_0 \right) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_\alpha - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right)$$

Entonces

Si las hipótesis son : $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu > \mu_0$ entonces

$$\beta(\mu) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right)$$

Y si tenemos las hipótesis $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu < \mu_0$

$$\beta = P(aceptar\ \ H_0/H_0\ \ es\ \ falsa) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -z_\alpha \Big/ \mu \ne \mu_0 \right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -z_\alpha \Big/ \mu \ne \mu_0 \right) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -z_\alpha - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = 1 - \Phi\left(-z_\alpha - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right)$$

Entonces

Si las hipótesis son : $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu < \mu_0$ entonces

$$\beta(\mu) = 1 - \Phi\left(-z_\alpha - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n} \right)$$

Y además con una deducción análoga al caso de alternativa bilateral:

Si las hipótesis son $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu > \mu_0$, (o $H_1: \mu > \mu_0$) entonces

$$n > \frac{\left(z_\alpha + z_{\beta_0}\right)^2 \sigma^2}{(\mu - \mu_0)^2}$$

Ejemplos:

1- En el ejemplo referido al porcentaje deseado de SiO_2 en cierto tipo de cemento aluminoso las hipótesis eran: $H_0: \mu = 5.5$ contra $H_1: \mu \neq 5.5$; y el estadístico de prueba tomó el valor $z_0 = 0.333333 < 2.575 = z_{\frac{0.01}{2}}$; por lo tanto se aceptaba H_0. Teníamos $n = 16$ y $\sigma = 3$

Si el verdadero promedio de porcentaje es $\mu = 5.6$ y se realiza una prueba de nivel $\alpha = 0.01$ con base en n = 16, ¿cuál es la probabilidad de detectar esta desviación?

¿Qué valor de n se requiere para satisfacer $\alpha = 0.01$ y $\beta(5.6) = 0.01$?

Solución:

La probabilidad de detectar la desviación es la potencia del test cuando $\mu = 5.6$, es decir

$$\pi(5.6) = P\left(rechazar \quad H_0 / H_0 \quad es \quad falsa\right) = 1 - \beta(5.6)$$

Como estamos con hipótesis alternativa bilateral, calculamos

$$\beta(5.6) = \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(5.6-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(5.6-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n}\right) =$$

$$= \Phi\left(2.575 - \frac{(5.6-5.5)}{3}\sqrt{16}\right) - \Phi\left(-2.575 - \frac{(5.6-5.5)}{3}\sqrt{16}\right) = \Phi(2.441) - \Phi(-2.708) =$$

$$= 0.99266 - (1 - 0.99664) = 0.9893 \qquad \Rightarrow \qquad \pi(5.6) = 0.0107$$

Ahora se quiere hallar n tal que $\beta(5.6) = 0.01$, como el test es bilateral podemos usar directamente la fórmula con $z_{\beta_0} = z_{0.01} = 2.33$

$$n > \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_{\beta_0}\right)^2 \sigma^2}{(\mu - \mu_0)^2} = \frac{(2.575 + 2.33)^2 3^2}{(5.6 - 5.5)^2} = 21653.1225 \qquad \Rightarrow \qquad n \geq 21654$$

2- En el último ejemplo, sobre la duración, en horas, de un foco de 75 watts, las hipótesis eran $H_0: \mu = 1000$ contra $H_1: \mu > 1000$; y el estadístico Z tomó el valor $z_0 = 7.1554 > 1.645 = z_{0.05}$; por lo tanto se rechazaba H_0.

En este caso $\sigma = 25$ y $n = 20$

Si la verdadera duración promedio del foco es 1050 horas, ¿cuál es la probabilidad de error de tipo II para la prueba?

¿Qué tamaño de muestra es necesario para asegurar que el error de tipo II no es mayor que 0.10 si la duración promedio verdadera del foco es 1025 hs. ?

Solución:

Como las hipótesis son $H_0: \mu = 1000$ contra $H_1: \mu > 1000$ entonces

$$\beta(\mu) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{(\mu - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(1.645 - \frac{(1050-1000)}{25}\sqrt{20}\right) = \Phi(-7.29927) \neq 0$$

Para hallar n tal que $\beta(1025) \leq 0.1$ aplicamos la fórmula con $z_{\beta_0} = z_{0.1} = 1.285$

$$n > \frac{\left(z_{\alpha} + z_{\beta_0}\right)^2 \sigma^2}{\left(\mu - \mu_0\right)^2} = \frac{\left(1.645 + 1.285\right)^2 25^2}{\left(1025 - 1000\right)^2} = 8.584 \quad \Rightarrow \quad n \geq 9$$

Relación entre test de hipótesis e intervalos de confianza

Existe una estrecha relación entre la prueba de hipótesis bilateral sobre un parámetro μ y el intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para μ.
Específicamente supongamos que tenemos las hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

La regla de decisión es

$$\begin{cases} rechazar \;\; H_0 \;\; si \;\; \left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \\ aceptar \;\; H_0 \;\; si \;\; \left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Aceptar H_0 si $\left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$ es equivalente a: aceptar H_0 si $-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$; y esto es a su vez equivalente, despejando μ_0, a:

aceptar H_0 si $\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n} \leq \mu_0 \leq \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n}$; es decir si

$$\mu_0 \in \left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n} ; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n} \right]$$

aceptar H_0 si $\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n} \leq \mu_0 \leq \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n}$; es decir si

$$\mu_0 \in \left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n} ; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n} \right]$$

Pero resulta que $\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n} ; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n} \right]$ es el intervalo de confianza que se construiría para el verdadero parámetro μ de nivel $1-\alpha$.

Por lo tanto la regla de decisión queda:

$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad \mu_0 \notin \left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} ; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} \right] \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad \mu_0 \in \left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} ; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} \right] \end{cases}$$

Ejemplo:
En el ejemplo referido al porcentaje deseado de SiO_2 en cierto tipo de cemento aluminoso las hipótesis eran: $H_0 : \mu = 5.5$ contra $H_1 : \mu \neq 5.5$;
y teníamos $n = 16$; $\sigma = 3$; un promedio muestral $\overline{x} = 5.25$
Como $\alpha = 0.01$ entonces $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.575$
Construimos un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.99$

$$\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} ; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} \right] = \left[5.25 - 2.575 \frac{3}{\sqrt{16}} ; 5.25 + 2.575 \frac{3}{\sqrt{16}} \right] = [3.31875;\ 7.18125]$$

Entonces la regla de decisión es:

$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad 5.5 \notin [3.31875;\ 7.18125] \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad 5.5 \in [3.31875;\ 7.18125] \end{cases}$$

Como $5.5 \in [3.31875;\ 7.18125]$, entonces se acepta H_0.

10.3 – Prueba de hipótesis sobre la media, varianza desconocida para muestras grandes

Hasta ahora se ha desarrollado el procedimiento de test de hipótesis para la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ suponiendo que σ^2 es conocida, pero en la mayoría de las situaciones prácticas σ^2 es desconocida. En general si $n \geq 30$, entonces la varianza muestral S^2 está próxima a σ^2 en la mayor parte de las muestras, de modo que es posible sustituir S^2 por σ^2. Es decir el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \approx N(0,1) \quad \text{aproximadamente, si } n \geq 30 \quad \text{si} \quad H_0 : \mu = \mu_0$$

Además, si no podemos decir que la muestra aleatoria proviene de una población normal, sea σ^2 conocida o no, por T.C.L. los estadísticos

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \approx N(0,1) \quad \text{aproximadamente, si } n \geq 30 \quad \text{si} \quad H_0 : \mu = \mu_0$$

Y

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0,1) \text{ aproximadamente, si } n \geq 30 \quad \text{si} \quad H_0 : \mu = \mu_0$$

Las pruebas de hipótesis tendrán entonces un nivel de significancia ***aproximadamente de*** α

Ejemplo:
Un inspector midió el volumen de llenado de una muestra aleatoria de 100 latas de jugo cuya etiqueta afirmaba que contenían 12 oz. La muestra tenía una media de volumen de 11.98 oz y desviación estándar de 0.19 oz. Sea μ la verdadera media del volumen de llenado para todas las latas de jugo recientemente llenadas con esta máquina. El inspector probará $H_0 : \mu = 12$ contra $H_1 : \mu \neq 12$

a) Determinar el p-valor
b) ¿Piensa que es factible que la media del volumen de llenado es de 12 oz?

Solución:
La v.a. de interés sería X: "volumen de llenado de una lata tomada al azar"
No se especifica ninguna distribución para X. Anotamos $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, ambas desconocidas.
Se toma una muestra de $n = 100$ latas y se obtiene $\overline{x} = 11.98$ y $s = 0.19$
Las hipótesis son $H_0 : \mu = 12$ contra $H_1 : \mu \neq 12$
El estadístico de prueba es

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 12}{S / \sqrt{100}} \quad \text{y} \quad \text{si } H_0 : \mu = 12 \text{ es verdadera entonces } Z \approx N(0,1)$$

El estadístico Z toma el valor $z_0 = \dfrac{11.98 - 12}{0.19 / \sqrt{100}} = -1.0526$

Como la hipótesis alternativa es bilateral entonces

$$p - valor = P(|Z| > |z_0|) \approx 2[1 - \Phi(1.0526)] = 2[1 - 0.85314] = 0.29372$$

Como el p-valor es mayor que 0.05 se considera que ***no hay evidencia en contra de*** $H_0 : \mu = 12$
Por lo tanto ***es factible que la media del volumen de llenado sea de 12 oz***

10.4 – Prueba de hipótesis sobre la media de una distribución normal, varianza desconocida

Cuando se prueban hipótesis sobre la media μ de una población cuando σ^2 es desconocida es posible utilizar los procedimientos de prueba dados anteriormente siempre y cuando el tamaño de la muestra sea grande ($n \geq 30$). Estos procedimientos son aproximadamente válidos sin importar si la población de interés es normal o no. Pero si la muestra es pequeña y σ^2 es desconocida debe suponerse que la distribución de la variable de interés es normal.
Específicamente, supongamos que la v.a. de interés tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ donde μ y σ^2 son desconocidas.
Supongamos las hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu \neq \mu_0$
Sea $X_1; X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la v.a. X y sean $\overline{X}$ y S^2 la media y la varianza muestrales respectivamente.
El procedimiento se basa en el estadístico

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

El cual, ***si la hipótesis nula es verdadera***, tiene distribución ***Student con n-1 grados de libertad***.
Entonces, para un nivel α prefijado, la regla de decisión es

$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad |T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad |T| \le t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \end{cases} \qquad \text{es decir} \qquad \begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad \left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad \left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \le t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \end{cases}$$

La lógica sigue siendo la misma, si el estadístico de prueba toma un valor inusual, entonces se considera que hay evidencia en contra H_0 y se rechaza la hipótesis nula. Como ahora la distribución del estadístico es Student, nos fijamos si *T* toma un valor t_0 en las colas de la distribución Student con *n-1* grados de libertad.

Si la alternativa es $H_1: \mu > \mu_0$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad T > t_{\alpha,n-1} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad T \le t_{\alpha,n-1} \end{cases}$

Si la alternativa es $H_1: \mu < \mu_0$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad T < -t_{\alpha,n-1} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad T \ge -t_{\alpha,n-1} \end{cases}$

<u>Ejemplo</u>:
Antes de que una sustancia se pueda considerar segura para enterrarse como residuo se deben caracterizar sus propiedades químicas. Se toman 6 muestras de lodo de una planta de tratamiento de agua residual en una región y se les mide el pH obteniéndose una media muestral de 6.68 y una desviación estándar muestral de 0.20. ¿Se puede concluir que la media del pH es menor que 7.0? Utilizar $\alpha = 0.05$ y suponer que la muestra fue tomada de una población normal.

<u>Solución</u>:
La v.a. de interés es *X*: "pH de una muestra de lodo tomada al azar"
Asumimos que *X* tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$
Las hipótesis serían $H_0: \mu = 7.0$ contra $H_1: \mu < 7.0$
El estadístico de prueba es $T = \dfrac{\overline{X} - 7.0}{S/\sqrt{6}}$ y toma el valor $t_0 = \dfrac{6.68 - 7.0}{0.20/\sqrt{6}} = -3.919$
Buscamos en la tabla de la distribución Student $t_{\alpha,n-1} = t_{0.05,5} = 2.015$
Entonces como $t_0 = -3.919 < -t_{\alpha,n-1} = -t_{0.05,5} = -2.015$ se rechaza H_0, por lo tanto hay evidencia que $\mu < 7.0$

<u>P-valor de un test *t*</u>

En este caso el cálculo del p- valor se realiza considerando:
Si t_0 es el valor calculado del estadístico de prueba *T*, entonces el p-valor es

a) las hipótesis son $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu \neq \mu_0$

$p-valor = P(|T| > |t_0|) = 1 - P(|T| \leq |t_0|) = 2(1 - P(T \leq t_0))$

b) las hipótesis son $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu > \mu_0$

$p-valor = P(T > t_0) = 1 - P(T \leq t_0)$

c) las hipótesis son $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu < \mu_0$

$p-valor = P(T \leq t_0)$

Para calcular el p-valor en una prueba t nos encontramos con la dificultad que las tablas de la Student no son completas, por lo tanto en algunas ocasiones se deberá ***acotar*** el p-valor
En el ejemplo anterior para calcular el p-valor de la prueba como es un test con alternativa unilateral
$p-valor = P(T \leq t_0) = P(T \leq -3.919)$
Buscamos en la tabla de la distribución Student la fila donde figuran $\nu = 5$ grados de libertad y vemos que el valor 3.919 no está tabulado.
Pero $3.365 < 3.919 < 4.032$, y $P(T_5 > 3.365) = 0.01$ y $P(T_5 > 4.032) = 0.005$
Por lo tanto $0.005 < P(T_5 > 3.919) < 0.01$, es decir
$0.005 < p-valor = P(T_5 < -3.919) < 0.01$
Podemos deducir que existe evidencia de que la media del pH es menor que 0.7

10.5 – <u>Tests de hipótesis sobre la varianza</u>

Supongamos que se desea probar la hipótesis de que la varianza de una población normal es igual a un valor específico, por ejemplo $\sigma_0^{\,2}$.
Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n de una v.a. X, donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Tomamos como estimador puntual de σ^2 a $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

Luego a partir de este estimador puntual construimos el estadístico $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

Este estadístico contiene al parámetro desconocido a estimar σ^2 y ya sabemos que tiene una distribución llamada ***ji-cuadrado con n-1 grados de libertad***
Supongamos las hipótesis

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{contra} \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Tomamos como estadístico de prueba a

$$X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\,2}} \quad \text{y} \quad \text{si} \quad H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ es verdadera , entonces } X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\,2}} \sim \chi_{n-1}^2$$

Nuevamente, el razonamiento es: si el estadístico X que bajo $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ tiene distribución χ_{n-1}^2 toma un valor "inusual", se considera que hay evidencia en contra H_0

Recordar que la distribución χ^2_{n-1} es asimétrica. Entonces la regla de decisión es

$$\begin{cases} recahzar \;\; H_0 \;\; si \;\; X > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \;\; ó \;\; X < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \\ aceptar \;\; H_0 \;\; si \;\; \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le X \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \end{cases} \quad \text{donde} \quad X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\,2}}$$

Si $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} recahzar \;\; H_0 \;\; si \;\; X > \chi^2_{\alpha,n-1} \\ aceptar \;\; H_0 \;\; si \;\; X \le \chi^2_{\alpha,n-1} \end{cases}$

Si $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} recahzar \;\; H_0 \;\; si \;\; X < \chi^2_{1-\alpha,n-1} \\ aceptar \;\; H_0 \;\; si \;\; X \ge \chi^2_{1-\alpha,n-1} \end{cases}$

Para calcular el p-valor, si el estadístico X tomó el valor x_0, y teniendo en cuenta que no hay simetría en la distribución ji-cuadrado, hacemos:

Si $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ entonces $p-valor = P(X > x_0)$
Si $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ entonces $p-valor = P(X < x_0)$
Si $H_1 : \sigma^2 \ne \sigma_0^2$ entonces $p-valor = 2\min\left(P(X < x_0) \;\; , P(X > x_0) \right)$

Ejemplo:
Consideremos nuevamente el ejemplo visto en la sección de intervalos de confianza para la varianza sobre la máquina de llenado de botellas. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas se obtiene una varianza muestral para el volumen de llenado de $s^2 = 0.0153$ oz^2.
Si la varianza del volumen de llenado es mayor que 0.01 oz^2, entonces existe una proporción inaceptable de botellas que serán llenadas con una cantidad menor de líquido. ¿Existe evidencia en los datos muestrales que sugiera que el fabricante tiene un problema con el llenado de las botellas? Utilice $\alpha = 0.05$

Solución:
La variable de interés es X: “volumen de llenado de una botella tomada al azar”
Asumimos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Los datos son $s^2 = 0.0153$ de una muestra de tamaño $n = 20$

Las hipótesis son $H_0 : \sigma^2 = 0.01$ contra $H_1 : \sigma^2 > 0.01$

$\alpha = 0.05 \quad \rightarrow \quad \chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0.05,19} = 30.14$

El estadístico de prueba es $X = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\,2}} = \dfrac{19 \times S^2}{0.01}$ y toma el valor

$$x_0 = \frac{19 \times S^2}{0.01} = \frac{19 \times 0.0153}{0.01} = 29.07$$

Como $x_0 = 29.07 < \chi^2_{0.05,19} = 30.14$ entonces no hay evidencia fuerte de que la varianza del volumen de llenado sea menor que 0.01

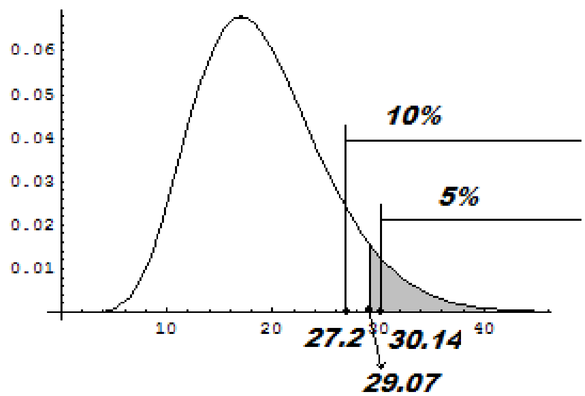
Para calcular el p-valor

$p-valor = P(X > x_0) = P(X > 29.07)$

Buscamos en la tabla de la distribución ji-cuadrado y vemos que en la fila con $\nu = 19$ no figura 29.07, pero 27.20 < 29.07 < 30.14, y además

$$\begin{cases} P(X > 27.20) = 0.10 \\ P(X > 30.14) = 0.05 \end{cases} \Rightarrow \quad 0.05 < p-valor < 0.10$$

En la figura siguiente se ilustra la situación



10.6 – Tests de hipótesis sobre una proporción

En muchos problemas se tiene interés en una variable aleatoria que sigue una distribución binomial. Por ejemplo, un proceso de producción que fabrica artículos que son clasificados como aceptables o defectuosos. Lo más usual es modelar la ocurrencia de artículos defectuosos con la distribución binomial, donde el parámetro binomial p representa la proporción de artículos defectuosos producidos.
En consecuencia, muchos problemas de decisión incluyen una prueba de hipótesis con respecto a p.
Consideremos las hipótesis

$$H_0: p = p_0 \quad \text{contra} \quad H_1: p \neq p_0$$

Supongamos que consideramos una muestra aleatoria $(X_1, X_2 ..., X_n)$ de tamaño n, donde X_i tiene una distribución binomial con parámetros 1 y p: $X_i \sim B(1,p)$.

Ya sabemos que $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, es una v.a. cuya distribución es binomial con parámetros n y p: $X \sim B(n,p)$. De acuerdo con esto, la variable aleatoria $\hat{P}$ definida: $\hat{P} = \frac{X}{n}$ representa la proporción de individuos de la muestra que verifican la propiedad de interés.
Además

$E(\hat{P}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p$, y $V(\hat{P}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$

Consideramos el estadístico de prueba

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Si $H_0 : p = p_0$ es verdadera entonces $Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx N(0,1)$ aproximadamente por T.C.L.

Por lo tanto la regla de decisión es

$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad |Z| > z_{\frac{\alpha}{2}} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad |Z| \le z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases} \qquad \text{donde} \quad Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Si $H_1 : p > p_0$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad Z > z_\alpha \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad Z \le z_\alpha \end{cases}$

Si $H_1 : p < p_0$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad Z < -z_\alpha \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad Z \ge -z_\alpha \end{cases}$

Observaciones:

1- La prueba descrita anteriormente requiere que la proporción muestral esté normalmente distribuida. Esta suposición estará justificada siempre que $np_0 > 10$ y $n(1-p_0) > 10$, donde p_0 es la proporción poblacional que se especificó en la hipótesis nula.

2- También se podía haber tomado como estadístico de prueba a $Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$ donde $X \sim B(n,p)$

Ejemplo:

Un fabricante de semiconductores produce controladores que se emplean en aplicaciones de motores automovilísticos. El cliente requiere que la fracción de controladores defectuosos en uno de los pasos de manufactura críticos no sea mayor que 0.05, y que el fabricante demuestre esta característica del proceso de fabricación con este nivel de calidad, utilizando $\alpha = 0.05$. E fabricante de semiconductores toma una muestra aleatoria de 200 dispositivos y encuentra que 4 de ellos son defectuosos. ¿El fabricante puede demostrar al cliente la calidad del proceso?

Solución:

Sea la v.a. X: "número de controladores defectuosos en la muestra"

Entonces $X \sim B(200, p)$ donde p es la proporción de controladores defectuosos en el proceso

Las hipótesis son $H_0 : p = 0.05$ contra $H_1 : p < 0.05$

Como $\alpha = 0.05$ entonces $-z_{\alpha} = -z_{0.05} = -1.645$

El estadístico de prueba es $Z = \dfrac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{\hat{P} - 0.05}{\sqrt{\dfrac{0.05(1-0.05)}{200}}}$ y toma el valor $z_0 = -1.95$

Como $z_0 = -1.95 < -z_{\alpha} = -z_{0.05} = -1.645$ entonces se rechaza H_0, y se concluye que la fracción de controladores defectuosos es menor que 0.05.
Calculamos el p-valor
$p-valor = P(Z < z_0) = P(Z < -1.95) \approx \Phi(-1.95) = 0.0256$

Valor de β y selección del tamaño de la muestra

Podemos obtener expresiones aproximadas para la probabilidad de cometer error de tipo II de manera análoga a las obtenidas para los test para la media

Si $H_1 : p \neq p_0$ entonces

$$\beta(p) = P\left(aceptar \quad H_0 \big/ H_0 \quad es \quad falsa \right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \right) - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \right)$$

Si $H_1 : p < p_0$ entonces

$$\beta(p) = P\left(aceptar \quad H_0 \big/ H_0 \quad es \quad falsa \right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\alpha} \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \right)$$

Si $H_1 : p > p_0$ entonces

$$\beta(p) = P\left(aceptar \quad H_0 \big/ H_0 \quad es \quad falsa \right) \approx \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\alpha} \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \right)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para encontrar el tamaño aproximado de la muestra *n* para que con un nivel de significancia de α la probabilidad de cometer error de tipo II sea menor o igual que un valor específico β_0. Las ecuaciones se deducen como en casos anteriores y son

Si $H_1: p \neq p_0$ entonces $n \geq \left(\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{\beta_0} \sqrt{p(1-p)}}{p-p_0} \right)^2$

Si $H_1: p < p_0$ ó $H_1: p > p_0$ entonces $n \geq \left(\dfrac{z_{\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{\beta_0} \sqrt{p(1-p)}}{p-p_0} \right)^2$

Ejemplo:
Volviendo al ejemplo anterior, supongamos que la verdadera proporción de componentes defectuosos en el proceso es $p = 0.03$, ¿cuál es el valor de β si $n = 200$ y $\alpha = 0.05$?

Solución:
Ya que la alternativa es $H_1: p < p_0$ aplicamos la fórmula

$$\beta(p) = P\left(aceptar \quad H_0 \big/ H_0 \quad es \quad falsa \right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0.05 - 0.03 - 1.645\sqrt{\dfrac{0.05(1-0.05)}{n}}}{\sqrt{\dfrac{0.03(1-0.03)}{200}}} \right) = 1 - \Phi(-0.44) = 0.67$$

Como la probabilidad de aceptar que el proceso tiene la calidad deseada cuando en realidad $p = 0.03$ es bastante alta, podemos preguntar qué tamaño de muestra se necesita para que en el test anterior sea $\beta < 0.1$ si la verdadera proporción de defectuosos es $p = 0.03$. En este caso aplicamos la fórmula donde $z_{\beta_0} = z_{0.1} = 1.28$

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{\beta_0} \sqrt{p(1-p)}}{p-p_0} \right)^2 = \left(\frac{1.645\sqrt{0.05(1-0.05)} + 1.28\sqrt{0.03(1-0.03)}}{0.03-0.05} \right)^2 \approx 832$$

La muestra requerida es muy grande, pero la diferencia a detectar $p - p_0 = 0.03 - 0.05$ es bastante pequeña.

Practica

Test de Hipótesis

1) Se hace una prueba de la hipótesis $H_0 : \mu \leq 10$ contra $H_1 : \mu > 10$. Para cada una de las situacio nes siguientes, determine si la decisión fue correcta u ocurrieron errores de tipo I o II:

a) siendo el verdadero $\mu = 8$, H_0 es rechazada ; **b)** siendo el verdadero $\mu = 10$, H_0 no es rechazada

c) siendo el verdadero $\mu = 14$, H_0 no es rechazada ; **d)** siendo el verdadero $\mu = 12$, H_0 es rechazada

2) **a)** Se realiza una prueba de hipótesis y el P-valor es 0.03. Justificando su respuesta, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a1) H_0 se rechaza a un nivel de 5%

a2) H_0 se rechaza a un nivel de 2%

a3) H_0 no se rechaza a un nivel de 10%

b) Se diseña un programa de tratamiento de aguas residuales para producir agua tratada con pH de 7. Sea μ la media del pH del agua tratada mediante dicho proceso. Se medirá el pH de 20 muestras de agua y se realizará una prueba de hipótesis $H_0 : \mu = 7$ contra $H_1 : \mu \neq 7$. Suponga que se sabe por experimentos previos que el pH del agua es normal con desviación estándar 0.5.

b1) Si la prueba se hace a un nivel de 5%, ¿cuál es la región de rechazo?

b2) Si la media muestral del pH es 6.77, ¿se rechaza H_0 a un nivel de 10%?

b3) Si la media muestral del pH es 6.77, ¿se rechaza H_0 a un nivel de 1%?

b4) Si el valor 1.79 representa un punto crítico, ¿cuál es el nivel de la prueba?

3) Un ingeniero está probando la resistencia a la compresión del concreto. Prueba 12 muestras de concreto y obtiene un promedio de 2.259 psi y un desvío estándar de 0.035 psi. Suponga que la resitencia a la compresión sigue una distribución normal.

a) Construya un intervalo de confianza al 95% para la resistencia media.

b) Utilizando el intervalo del inciso **a)** pruebe la hipótesis H_0: $\mu = 2.250$ contra H_1 : $\mu \neq 2.250$ con nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

4) Se publica un informe sobre las cifras del número anual de kilowatts-hora que gastan varios aparatos electrodomésticos. Se afirma que una aspiradora gasta un promedio de 46 kilowatts-hora por año. Si una muestra aleatoria de 12 hogares que se incluye en un estudio planeado indica que las aspiradoras gasta un promedio de 42 kilowatts-hora con una desviación estándar de 11.9 kilowatts-hora por año, en un nivel de significancia de 0.05, ¿esto sugiere que las aspiradoras gastan, en promedio, menos de 46 kilowatts- hora anualmente?.

Suponga que la población de kilowatts-hora es normal.

5) Suponga que ha comprado una máquina de llenado para bolsas de dulces que contendrá 16 onzas de éstos. Suponga que los pesos de las bolsas llenas están distribuidos en forma normal.

Una muestra aleatoria de diez bolsas produce los siguientes datos (en onzas):

15.87, 16.02, 15.78, 15.83, 15.69, 15.81, 16.04, 15.81, 15.92, 16.10.

Con base en estos datos, ¿puede concluir que la media del peso de llenado es, en realidad, menor que 16 onzas con un nivel de significancia de 0.05?

6) Un fabricante de baterías para automóvil afirma que sus baterías durarán, en promedio, 3 años con una varianza de 1 año. Si 5 de estas baterías tienen duraciones de 1.9, 2.4, 3.0, 3.5 y 4.2 años,

construya un intervalo de confianza de 95% para la varianza. Suponga que la población de duraciones de las baterías se distribuye de forma aproximadamente normal. ¿Se puede concluir que la afirmación del fabricante de que la varianza es 1 es válida? Justifique su respuesta.

7) Una muestra aleatoria de 6 vigas de acero tiene una resistencia a la compresión promedio de 58392 psi (libras por pulgada cuadrada) con una desviación estándar de 648 psi. Suponiendo normalidad
   a) Use esta información y el nivel de significancia $\alpha = 0.05$ para probar si la verdadera resistencia a la compresión media del acero del que provino la muestra es de 58000 psi.
   b) Pruebe la hipótesis nula $\sigma = 600$ psi contra la alternativa $\sigma > 600$ psi. Utilice $\alpha = 0.05$.

8) Use el nivel de significancia $\alpha = 0.01$ para probar la hipótesis nula de que $\sigma = 0.015$ pulgadas, para los diámetros de ciertos tornillos, contra la alternativa de que $\sigma \neq 0.015$ pulgadas, puesto que una muestra aleatoria de tamaño 15 dio como resultado $s^2 = 0.00011$. Suponga normalidad.

9) Un fabricante de estaciones de trabajo de computadora está probando un nuevo proceso de ensamble automatizado. El proceso actual tiene una tasa de defectos de 5%. En una muestra de 400 estaciones de trabajo ensambladas con el nuevo proceso, 15 tenían defecto. ¿Se puede concluir que el nuevo proceso tiene una tasa menor de defectos?. Calcule el p-valor.

5 – REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

5.1 – Introducción

En muchos problemas existe una relación entre dos o más variables, y resulta de interés estudiar la naturaleza de esa relación. El ***análisis de regresión*** es la técnica estadística para el modelado y la investigación de la relación entre dos o más variables. Veamos un ejemplo.

Los resortes se usan en aplicaciones por su capacidad para alargarse (contraerse) bajo carga. La rigidez de un resorte se mide con la *constante del resorte*, que es la longitud del resorte que se alargará por unidad de la fuerza o de la carga. Para asegurarse de que un resorte dado funciona adecuadamente es necesario calcular la constante de resorte con exactitud y precisión.

En este experimento hipotético un resorte se cuelga verticalmente con un extremo fijo, y los pesos se cuelgan uno tras otro del otro extremo. Después de colgar cada peso se mide la longitud del resorte. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ los pesos, y sea l_i la longitud del resorte bajo la carga x_i.

La ley de Hooke establece que

$$l_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

donde β_0 representa la longitud del resorte cuando no tiene carga y β_1 es la constante del resorte.

Sea y_i la longitud ***medida*** del resorte bajo la carga x_i. Debido al error de medición y_i será diferente de la longitud verdadera l_i. Se escribe como

$$y_i = l_i + \varepsilon_i$$

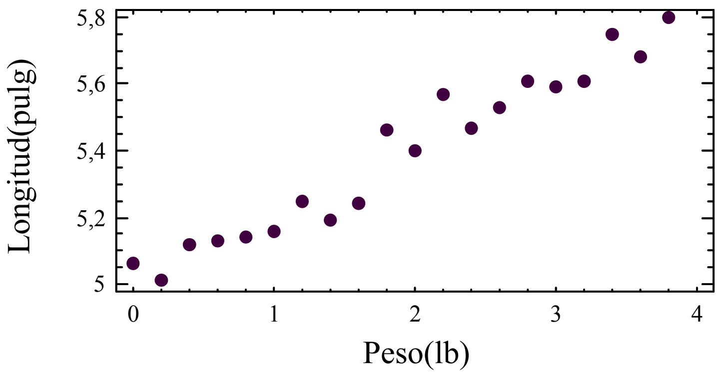
donde ε_i es el error en la *i*-ésima medición. Al combinar ambas ecuaciones se obtiene

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad (10.1)$$

En la ecuación (10.1), y_i es la ***variable dependiente***, x_i es la ***variable independiente***, β_0 y β_1 son los ***coeficientes de regresión***, y ε_i se denomina ***error.*** A la ecuación (10.1) se la llama ***modelo de regresión lineal simple***.

La tabla siguiente presenta los resultados del experimento y la figura el ***diagrama de dispersión*** de *y* contra *x*.

Peso (lb)	***Longitud medida (pulg)***	***Peso (lb)***	***Longitud medida (pulg)***
x	***y***	***x***	***y***
0,0	5,06	2,0	5,40
0,2	5,01	2,2	5,57
0,4	5,12	2,4	5,47
0,6	5,13	2,6	5,53
0,8	5,14	2,8	5,61
1,0	5,16	3,0	5,59
1,2	5,25	3,2	5,61
1,4	5,19	3,4	5,75
1,6	5,24	3,6	5,68
1,8	5,46	3,8	5,80



La idea es utilizar estos datos para ***estimar*** los coeficientes de regresión. Si no hubiese error en la medición, los puntos se encontrarían en una línea recta con pendiente β_1 y ordenada al origen β_0, y estas cantidades serían fáciles de determinar. La idea es entonces que los puntos están dispersos de manera aleatoria alrededor de una recta que es la recta de regresión lineal $l = \beta_0 + \beta_1 x$.

En general podemos decir que al fijar el valor de *x* observamos el valor de la variable *Y*. Si bien *x* es fijo, el valor de Y está afectado por el ***error aleatorio*** ε. Por lo tanto ε ***determina las propiedades de Y***. Escribimos en general

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

donde *x* es, por ahora, una variable no aleatoria, ε ***es la v.a. del error*** y ***asumimos que***

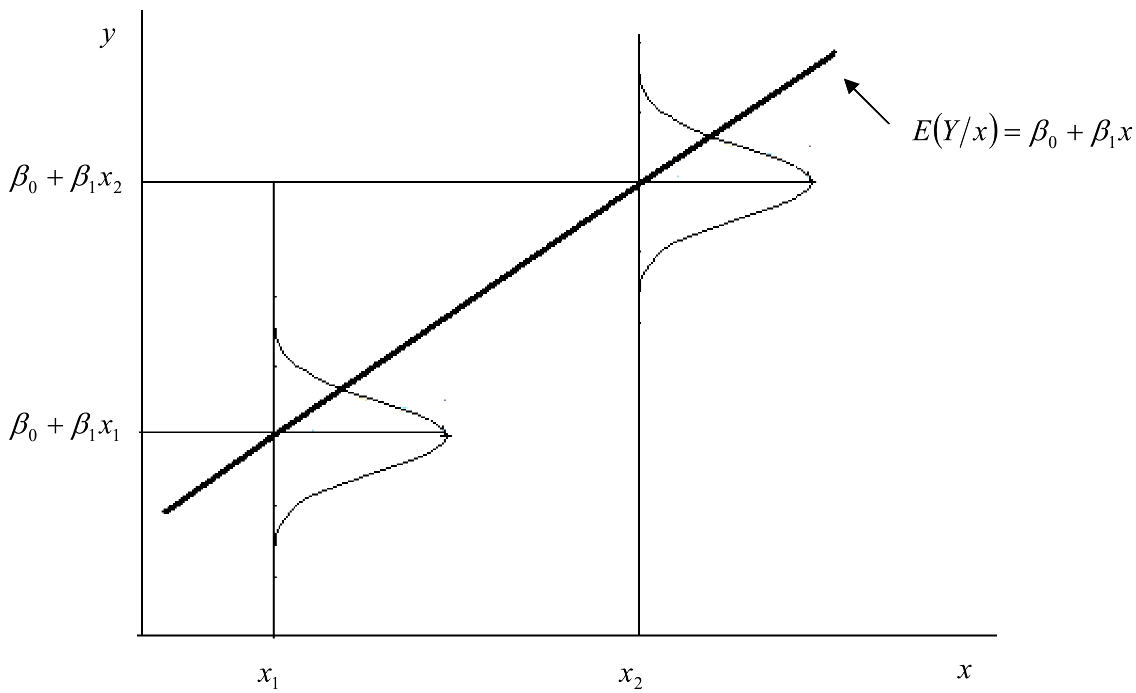
$$E(\varepsilon) = 0 \qquad \text{y} \qquad V(\varepsilon) = \sigma^2$$

Entonces Y es una variable aleatoria tal que

$$E(Y/x) = E(\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 x + E(\varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 x$$

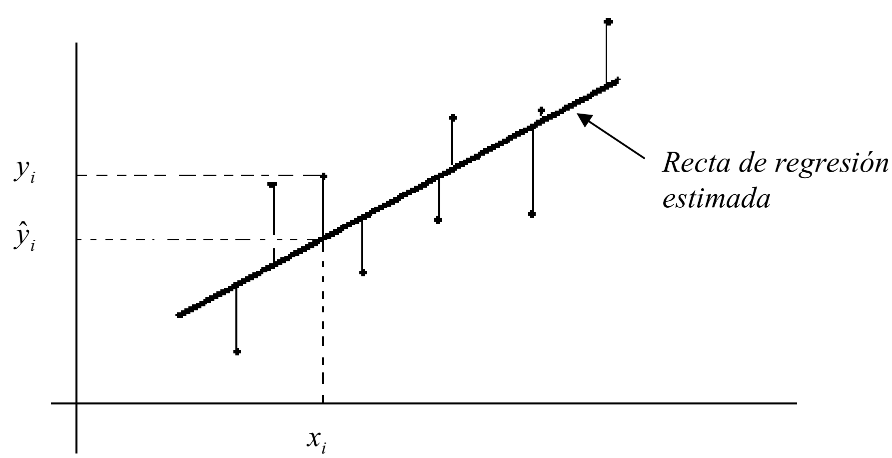
$$V(Y/x) = V(\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon) = V(\varepsilon) = \sigma^2$$

En consecuencia, el modelo de regresión verdadero $E(Y/x) = \beta_0 + \beta_1 x$ es una recta de valores promedio.
Notar que lo anterior implica que existe una distribución de valores de *Y* para cada *x*, y que la varianza de esta distribución es la misma para cada *x*. La siguiente figura ilustra esta situación
Notar que se utilizó una distribución normal para describir la variación aleatoria en ε. Por lo tanto la distribución de *Y* también será normal. La varianza σ^2 determina la variabilidad en las observaciones *Y*. por lo tanto, cuando σ^2 es pequeño, los valores observados de *Y* caen cerca de la línea, y cuando σ^2 es grande, los valores observados de *Y* pueden desviarse considerablemente de la línea. Dado que σ^2 es constante, la variabilidad en *Y* para cualquier valor de *x* es la misma.



5.2 – <u>Regresión lineal simple- Estimación de parámetros</u>

Para estimar los coeficientes de regresión se utiliza el ***método de mínimos cuadrados.*** Supongamos que se tienen n pares de observaciones $(x_1, y_1);(x_2, y_2);....;(x_n, y_n)$. Realizamos una gráfica representativa de los datos y una recta como posible recta de regresión Anotamos a la ***recta de regresión estimada*** con $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$



Las estimaciones de β_0 y β_1 deben dar como resultado una línea que en algún sentido se "ajuste mejor" a los datos. El método de mínimos cuadrados consiste en estimar β_0 y β_1 de manera tal que se minimice la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales mostradas en la figura anterior.
La suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones con respecto a la recta de regresión es

$$L = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2$$

Los estimadores de mínimos cuadrados de β_0 y β_1, que anotamos $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$, deben satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \beta_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \beta_1} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)x_i = 0 \end{cases} \qquad (10.2)$$

Después de simplificar las expresiones anteriores, se llega a

$$\begin{cases} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad (10.3)$$

Las ecuaciones (10.3) reciben el nombre de ***ecuaciones normales de mínimos cuadrados***.
La solución de estas ecuaciones dan como resultado las ***estimaciones de mínimos cuadrados*** $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} \qquad (10.4)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}} \qquad (10.5)$$

donde $\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ y $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Las diferencias $e_i = y_i - \hat{y}_i$ con $i = 1,\dots,n$ se llaman ***residuos***. El residuo e_i describe el error en el ajuste del modelo en la *i*-ésima observación y_i.
Para agilizar la notación son útiles los siguientes símbolos

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} \qquad (10.6)$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n} \qquad (10.7)$$

Entonces con esta notación podemos escribir $\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$

Ejemplo:
Ajustamos un modelo de regresión lineal a los datos del ejemplo anterior. La estimación de la constante del resorte es $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_0$ la estimación de la longitud sin carga.
De la tabla obtenemos

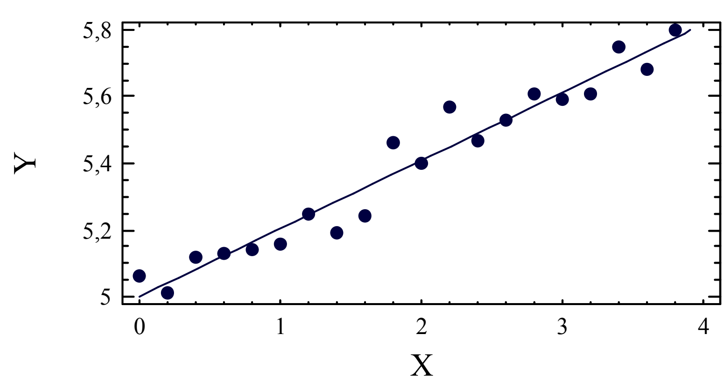
$\bar{x} = 1.9 \quad \bar{y} = 5.3885$
$S_{xx} = 26.6 \quad S_{xy} = 5.4430$

Entonces $\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} = \dfrac{5.4430}{26.6} = 0.2046$ y $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} = 5.3885 - 0.2046 \times 1.9 = 4.9997$

La ecuación de la recta estimada es

$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = 4.9997 - 0.2046x$

La figura siguiente muestra el gráfico de dispersión con la recta de regresión estimada



Podemos utilizar la recta de regresión estimada para predecir la longitud del resorte bajo una carga determinada, por ejemplo con una carga de 1.3 lb:

$\hat{y} = 4.9997 - 0.2046(1.3) = 5.27$pulg.

Podemos también estimar la longitud del resorte bajo una carga de 1.4 lb:

$\hat{y} = 4.9997 - 0.2046(1.4) = 5.29$pulg.
Notar que la longitud medida para una carga de 1.4 lb es 5.19 pulg., pero la estimación de mínimos cuadrados de 5.29 pulg. Está basada en todos los datos y es más precisa (tiene menor incertidumbre). Más adelante calcularemos la varianza de estos estimadores.

Observaciones:
1- Las estimaciones de mínimos cuadrados $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_0$ son valores de variables aleatorias y dicho valor varía con las muestras. Los coeficientes de regresión β_0 y β_1 son constantes desconocidas que estimamos con $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_0$.
2- Los residuos e_i no son lo mismo que los errores ε_i . Cada residuo es la diferencia $e_i = y_i - \hat{y}_i$ entre el valor observado y el valor ajustado, y se pueden calcular a partir de los datos. Los errores ε_i representan la diferencia entre los valores medidos y_i y los valores $\beta_0 + \beta_1 x_i$. Como los valores verdaderos de β_0 y β_1 no se conocen entonces, los errores no se pueden calcular.
3- ¿Qué sucede si se quisiera estimar la longitud del resorte bajo una carga de 100 lb? La estimación de mínimos cuadrados es $\hat{y} = 4.9997 - 0.2046(100) = 25.46$pulg. Pero esta estimación no es confiable, pues ninguno de los pesos en el conjunto de datos es tan grande. Es probable que el resorte se deformara, por lo que la ley de Hooke no valdría. Para muchas variables las relaciones lineales valen dentro de cierto rango, pero no fuera de él. Si se quiere saber cómo respondería el resorte a una carga de 100 lb se deben incluir pesos de 100 lb o mayores en el conjunto de datos. Por lo tanto ***no hay que extrapolar una recta ajustada fuera del rango de los datos***. La relación lineal puede no ser válida ahí.

5.3 – Propiedades de los estimadores de mínimos cuadrados y estimación de σ^2

Los ***estimadores*** de β_1 y β_0 los anotamos

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} \qquad \hat{\beta}_1 = \frac{S_{xY}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i (x_i - \overline{x})}{S_{xx}} \qquad (10.8)$$

Como $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_0$ son estimadores de β_1 y β_0 respectivamente, son variables aleatorias, por lo tanto podemos calcular su esperanza y varianza. Como estamos asumiendo que *x* no es v.a. entonces $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_0$ son funciones de la v.a. *Y*.
Recordemos que el modelo es $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, si medimos *n* veces la variable *Y* tenemos

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

donde ***asumimos*** $E(\varepsilon_i) = 0$; $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ $i = 1,2,\ldots,n$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ***independientes***

Por lo tanto

$$E(Y/x_i)=E(\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon)=\beta_0+\beta_1 x_i+E(\varepsilon)=\beta_0+\beta_1 x_i$$

$$V(Y/x_i)=V(\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i)=V(\varepsilon_i)=\sigma^2$$

Consideramos $\hat{\beta}_1=\dfrac{S_{xY}}{S_{xx}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_i-\overline{x})}{S_{xx}}$. Podemos ver a $\hat{\beta}_1$ como una combinación lineal de las variables Y_i, entonces

$$E(\hat{\beta}_1)=E\left(\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_i-\overline{x})}{S_{xx}}\right)=\frac{1}{S_{xx}}E\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_i-\overline{x})\right)=\frac{1}{S_{xx}}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i)(x_i-\overline{x})=$$

$$=\frac{1}{S_{xx}}\sum_{i=1}^{n}(\beta_0+\beta_1 x_i)(x_i-\overline{x})=\frac{1}{S_{xx}}\left\{\beta_0\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})+\beta_1\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-\overline{x})\right\}=\frac{1}{S_{xx}}\beta_1 S_{xx}=\beta_1$$

Notar que $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)=0$

y $\quad \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(x_i-\overline{x})=S_{xx}$

Por lo tanto $\hat{\beta}_1=\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_i-\overline{x})}{S_{xx}}$ es un estimador insesgados de β_1

Veamos ahora la varianza de $\hat{\beta}_1$

$$V(\hat{\beta}_1)=V\left(\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right)=V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_i-\overline{x})}{S_{xx}}\right)=\frac{1}{S_{xx}^2}V\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_i-\overline{x})\right)=\frac{1}{S_{xx}^2}\sum_{i=1}^{n}V(Y_i)(x_i-\overline{x})^2=$$

$$=\frac{1}{S_{xx}^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{S_{xx}^2}\sigma^2 S_{xx}=\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{E(\hat{\beta}_1)=\beta_1 \quad \text{y} \quad V(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma^2}{S_{xx}}} \qquad (10.9)$$

Con un enfoque similar calculamos la esperanza y la varianza de $\hat{\beta}_0$

$$E(\hat{\beta}_0)=E(\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{x})=E(\overline{y})-E(\hat{\beta}_1)\overline{x}=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}\right)-\beta_1\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i)-\beta_1\overline{x}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=}^{n}(\beta_0+\beta_1 x_i)-\beta_1\overline{x}=\beta_0+\beta_1\overline{x}-\beta_1\overline{x}=\beta_0$$

Calculamos la varianza de $\hat{\beta}_0$, para esto planteamos:

$$V(\hat{\beta}_0)=V(\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{x})=V(\overline{Y})+V(\hat{\beta}_1)(\overline{x})-2Cov(\overline{Y},\hat{\beta}_1\overline{x})$$

Tenemos que

$$V(\overline{Y})=V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(Y_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

Y

$Cov(Y_i,Y_j)=0$ por indep.

$$Cov(\overline{Y},\hat{\beta}_1\overline{x})=\overline{x}Cov(\overline{Y},\hat{\beta}_1)=\overline{x}Cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\frac{(x_i-\overline{x})}{S_{xx}}\right)=\overline{x}\frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}Cov(Y_i,Y_i(x_i-\overline{x}))=$$

$$=\overline{x}\frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})Cov(Y_i,Y_i)=\overline{x}\frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\sigma^2=\overline{x}\frac{\sigma^2}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=0$$

Por lo tanto

$$V(\hat{\beta}_0)=V(\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{x})=V(\overline{Y})+V(\hat{\beta}_1)(\overline{x})^2-2Cov(\overline{Y},\hat{\beta}_1\overline{x})=\frac{\sigma^2}{n}+\overline{x}^2\frac{\sigma^2}{S_{xx}}-0=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)$$

Entonces

$$\boxed{E(\hat{\beta}_0)=\beta_0 \qquad \text{y} \qquad V(\hat{\beta}_0)=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)} \qquad (10.10)$$

Necesitamos estimar la varianza desconocida σ^2 que aparece en las expresiones de $V(\hat{\beta}_0)$ y $V(\hat{\beta}_1)$.

Los residuos $e_i=y_i-\hat{y}_i$ se emplean para estimar σ^2. La suma de los cuadrados de los residuos es

$$SS_R=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 \qquad (10.11)$$

Puede demostrarse que $E\left(\dfrac{SS_R}{\sigma^2}\right)=n-2$, en consecuencia $E\left(\dfrac{SS_R}{n-2}\right)=\sigma^2$.

Entonces se toma como estimador de σ^2 a

$$\hat{\sigma}^2=\frac{SS_R}{n-2} \qquad (10.12)$$

Puede obtenerse una fórmula más conveniente para el cálculo de SS_R, para esto primero notar que las ecuaciones normales (10.2) se pueden escribir como

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i\right)=0\\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i\right)x_i=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\sum_{i=1}^{n}e_i=0\\ \sum_{i=1}^{n}e_ix_i=0\end{cases}$$

Entonces

$$SS_R=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)\left(y_i-\hat{y}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}e_i\left(y_i-\hat{y}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}e_i\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}e_i\left(y_i-\hat{\beta}_0\right)-\sum\hat{\beta}_1e_ix_i=\sum_{i=1}^{n}e_i\left(y_i-\hat{\beta}_0\right)=\sum_{i=1}^{n}e_i\left(y_i-\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}e_i\left(y_i-\bar{y}\right)$$

Por lo tanto

$$SS_R=\sum_{i=1}^{n}e_i\left(y_i-\bar{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i\right)\left(y_i-\bar{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}+\hat{\beta}_1\bar{x}-\hat{\beta}_1x_i\right)\left(y_i-\bar{y}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)-\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)=S_{yy}-\hat{\beta}_1S_{xy}$$

También se puede escribir

$$SS_R=S_{yy}-\hat{\beta}_1S_{xy}=S_{yy}-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}S_{xy}=S_{yy}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$$

En resumen $SS_R=S_{yy}-\hat{\beta}_1S_{xy}$ ó $SS_R=S_{yy}-\dfrac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$ (10.13)

Por lo tanto $\hat{\sigma}^2=\dfrac{S_{yy}-\dfrac{S_{xy}^2}{S_{xx}}}{n-2}$

Y si anotamos a la ***desviación estándar estimada de*** $\hat{\beta}_0$ ***y*** $\hat{\beta}_1$ ***con*** $s_{\hat{\beta}_0}$ ***y*** $s_{\hat{\beta}1}$ respectivamente entonces

$$s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \quad \text{y} \quad s_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)} \qquad (10.14)$$

Ejemplo:
En el ejemplo anterior se calculó, $\bar{x} = 1.9$, $\bar{y} = 5.3885$, $S_{xx} = 26.6$, $S_{xy} = 5.4430$.

Calculamos ahora $S_{yy} = \sum_{i=1}^{20}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = 1.1733$ y entonces

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{yy} - \dfrac{S_{xy}^2}{S_{xx}}}{n-2} = \frac{1.1733 - \dfrac{5.4430^2}{26.6}}{18} = 0.003307$$

$$s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} = \sqrt{\frac{0.003307}{26.6}} = \sqrt{0.000124} = 0.0111$$

$$s_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)} = \sqrt{0.003307\left(\frac{1}{20} + \frac{1.9^2}{26.6}\right)} = 0.02478219$$

Observación:
La varianza de $\hat{\beta}_0$ ***y*** $\hat{\beta}_1$ ***se puede disminuir*** tomando valores x_i muy dispersos con respecto a $\bar{x}$ pues de esta forma aumenta S_{xx}

Para construir intervalos de confianza para los coeficientes de regresión o para construir pruebas de hipótesis con respecto a β_0 o β_1 necesitamos asumir que ***los errores*** ε_i ***tienen distribución normal.*** Entonces $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Observación:
Si $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ entonces, como $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, resulta que $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$. ***Se pueden calcular entonces los EMV de los parámetros y llegaríamos a que son los mismos que los encontrados usando mínimos cuadrados. De modo que la función que cumple la suposición de normalidad de los*** ε_i ***no es otra que la de justificar el uso del método de mínimos cuadrados, que es el más sencillo de calcular.***

Ya vimos que $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ pueden considerarse combinaciones lineales de las Y_i, por lo tanto $\hat{\beta}_0$ ***y*** $\hat{\beta}_1$ son combinación lineal de variables aleatorias independientes con distribución normal y eso implica que

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)\right) \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right) \qquad (10.15)$$

Y entonces

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}} \sim N(0,1) \qquad \text{y} \qquad \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{S_{xx}}}} \sim N(0,1) \qquad (10.16)$$

Bajo la suposición que los errores tienen distribución normal, se puede probar que

$$\frac{SS_R}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\text{n-2}} \qquad (10.17)$$

Y también se puede probar que

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}} \sim t_{\text{n-2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \sim t_{\text{n-2}} \qquad (10.18)$$

5.4 – Inferencias estadísticas sobre los parámetros de regresión

Suponemos que los errores tiene distribución normal, con media cero, varianza σ^2 y son independientes.

Inferencias sobre β_1

Tests de hipótesis sobre β_1

Se desea probar la hipótesis de que la pendiente β_1 es igual a una constante, por ejemplo β_{10}. Supongamos las hipótesis

$$H_0: \beta_1 = \beta_{10} \qquad \text{contra} \qquad H_0: \beta_1 \neq \beta_{10}$$

El estadístico de prueba es $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}}$ que bajo H_0 tiene distribución Student con *n-2* grados de libertad.

Por lo tanto la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar\ H_0 \ \ si \ \ |T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \\ aceptar\ H_0 \ \ si \ \ |T| \le t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \end{cases}$

Si $H_1: \beta_1 > \beta_{10}$ se rechaza $H_0: \beta_1 = \beta_{10}$ si $T > t_{\alpha,n-2}$

Si $H_1: \beta_1 < \beta_{10}$ se rechaza $H_0: \beta_1 = \beta_{10}$ si $T < -t_{\alpha,n-2}$

Un caso especial importante es cuando $H_0 : \beta_1 = 0$ contra $H_0 : \beta_1 \neq 0$
Estas hipótesis están relacionadas con la ***significancia de la regresión***.
Aceptar $H_0 : \beta_1 = 0$ es equivalente a concluir que no hay ninguna relación lineal entre *x* e *Y*.
Si $H_0 : \beta_1 = 0$ se rechaza implica que *x* tiene importancia al explicar la variabilidad en *Y*. También puede significar que el modelo lineal es adecuado, o que aunque existe efecto lineal pueden obtenerse mejores resultados agregando términos polinomiales de mayor grado en *x*.

Ejemplos:
1- El fabricante del resorte de los datos de la ley de Hooke afirma que la constante del resorte β_1 es al menos 0.23 pulg/lb. Se ha calculado que la constante del resorte es $\hat{\beta}_1 = 0.2046$ pulg/lb. ¿Se puede concluir que la afirmación del fabricante es falsa?

Solución:
Se requiere una prueba de hipótesis para contestar la pregunta. Las hipótesis serían

$$H_0 : \beta_1 = 0.23 \qquad \text{contra} \qquad H_0 : \beta_1 < 0.23$$

El estadístico de prueba es $T = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} = \dfrac{\hat{\beta}_1 - 0.23}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}}$

Se calculó anteriormente $\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} = 0.0111$, entonces el valor t_0 que toma el estadístico es

$$t_0 = \frac{0.2046 - 0.23}{0.0111} = -2.28$$

Calculamos el p-valor recordando que bajo $H_0 : \beta_1 = 0.23$, $T \sim t_{n-2}$:

$$p - valor = P(T < -2.28)$$

Vemos en la tabla de la distribución Student que en la fila $\nu = 18$ grados de libertad

$$\begin{cases} P(T > 2.101) = 0.025 \\ P(T > 2.552) = 0.01 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0.01 < p - valor < 0.025$$

Por lo tanto se rechaza $H_0 : \beta_1 = 0.23$

2- La capacidad de una unión soldada de elongarse bajo tensión está afectada por el compuesto químico del metal de soldadura. En un experimento para determinar el efecto del contenido de carbono (*x*) sobre la elongación (*y*) se alongaron 39 soldaduras hasta la fractura, y se midió tanto el contenido de carbono (en partes por mil) como la elongación (en %). Se calcularon los siguientes resúmenes estadísticos:

$$S_{xx} = 0.6561 \;;\quad S_{xy} = -3.9097 \;;\quad \hat{\sigma} = 4.3319$$

Suponiendo que x e y siguen un modelo lineal, calcular el cambio estimado en la elongación debido a un aumento de una parte por mil en el contenido de carbono. ¿Se debe utilizar el modelo lineal para pronosticar la elongación del contenido de carbono?

Solución:
El modelo lineal es $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, y el cambio de elongación debido a un aumento de una parte por mil en el contenido de carbono es β_1.
Las hipótesis serían $H_0 : \beta_1 = 0$ contra $H_0 : \beta_1 \neq 0$

La hipótesis nula establece que incrementar el contenido de carbono no afecta la elongación, mientras que la hipótesis alternativa establece que sí afecta la elongación.

El estadístico de prueba $|T| = \left| \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \right| = \left| \dfrac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \right|$ si $H_0 : \beta_1 = 0$ es verdadera tiene distribución Student con $n-2$ gados de libertad.

Calculamos $\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i - \bar{x})}{S_{xx}} = \dfrac{-3.9097}{0.6561} = -5.959$

$$\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{S_{xx}}} = \frac{4.3319}{\sqrt{0.6561}} = 5.348$$

El valor que toma el estadístico de prueba es $t_0 = \left| \dfrac{-5.959}{5.348} \right| = 1.114$

Y $p - valor = P(|T| > 1.114) > 2 \times 0.10 = 0.20$

Por lo tanto no hay evidencia en contra de la hipótesis nula. No se puede concluir que el modelo lineal sea útil para pronosticar la elongación a partir del contenido de carbono.

Intervalos de confianza para β_1

Podemos construir intervalos de confianza para β_1 de nivel $1-\alpha$ utilizando el hecho que el estadístico $\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$. El intervalo sería

$$\left[\hat{\beta}_1 - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}};\ \hat{\beta}_1 + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \right] \qquad (10.19)$$

Ejemplo:
Determinar un intervalo de confianza de nivel 0.95 para la constante del resorte de los datos de la ley de Hooke.

Solución:

Se calculó antes $\hat{\beta}_1 = 0.2046$ y $\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} = 0.0111$

El número de grados de libertad es $20-2=18$, y $\alpha = 0.05$ por lo tanto
$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = t_{0.025,18} = 2.101$

Por lo tanto el intervalo es

$$\left[0.2046 - 2.101(0.0111);\ 0.2046 + 2.101(0.0111)\right] = \left[0.181;\ 0.228\right]$$

Inferencias sobre β_0

De manera similar a lo visto sobre β_1, se pueden deducir intervalos de confianza y tests de hipótesis para β_0

Específicamente, si tenemos las hipótesis

$$H_0: \beta_0 = \beta_{00} \qquad \text{contra} \qquad H_0: \beta_0 \neq \beta_{00}$$

El estadístico de prueba es $T\ \dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_{00}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}}$ y bajo $H_0: \beta_0 = \beta_{00}$ tenemos que $T \sim t_{n-2}$

Por lo tanto la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar\ H_0 & si\ |T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \\ aceptar\ H_0 & si\ |T| \le t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \end{cases}$

Si $H_1: \beta_0 > \beta_{00}$ se rechaza $H_0: \beta_0 = \beta_{00}$ si $T > t_{\alpha,n-2}$

Si $H_1: \beta_0 < \beta_{00}$ se rechaza $H_0: \beta_0 = \beta_{00}$ si $T < -t_{\alpha,n-2}$

Intervalos de confianza de nivel $1-\alpha$ se deducen de manera análoga a lo visto anteriormente, donde usamos el hecho que el estadístico $T\ \dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}} \sim t_{n-2}$

El intervalo es $$\left[\hat{\beta}_0 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)};\ \hat{\beta}_0 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}\right] \qquad (10.20)$$

Ejemplo:
En los datos de la ley de Hooke determine un intervalo de confianza de nivel 0.99 para la longitud del resorte no cargado.
Solución:
La longitud del resorte no cargado es β_0. Se ha calculado anteriormente $\hat{\beta}_0 = 4.9997$ y

$$s_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)} = 0.02478219$$

El número de gados de libertad es $20-2=18$ y como $\alpha = 0.01$ entonces
$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = t_{0.005,18} = 2.878$

Por lo tanto el intervalo es

$$\left[4.9997 - 2.878(0.024782193);\ \ 4.9997 + 2.878(0.02478219)\ \right] = \left[4.9283;\ 5.071023\right]$$

5.5 – Intervalo de confianza para la respuesta media

A menudo es de interés ***estimar*** mediante un intervalo de confianza $\beta_0 + \beta_1 x_0$, es decir estimar la media $E(Y/x_0)$ para un valor específico x_0.

Un estimador puntual razonable para $\beta_0 + \beta_1 x_0$ es $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$.

Sabemos que $E\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0\right) = \beta_0 + \beta_1 x_0$.

Como de costumbre necesitamos construir un estadístico a partir de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$ que contenga al parámetro de interés, (en este caso $\beta_0 + \beta_1 x_0$) y del cual conozcamos la distribución de probabilidad.

Pensamos en el estadístico $\dfrac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 - E\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0\right)}{\sqrt{V\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0\right)}}$

Nos falta calcular $V\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0\right)$. Para esto nuevamente observamos que $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$ es una combinación lineal de las variables Y_i

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} + \hat{\beta}_1 x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i + \hat{\beta}_1 (x_0 - \overline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i + \frac{S_{xY}}{S_{xx}}(x_0 - \overline{x}) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i (x_i - \overline{x})}{S_{xx}}(x_0 - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})}{S_{xx}}(x_0 - \overline{x})\right]$$

Por lo tanto:

$$V\left(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_0\right)=V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_i-\bar{x})}{S_{xx}}(x_0-\bar{x})\right]\right)=\sum_{i=1}^{n} V(Y_i)\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_i-\bar{x})}{S_{xx}}(x_0-\bar{x})\right]^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_i-\bar{x})}{S_{xx}}(x_0-\bar{x})\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left[\frac{1}{n^2}+\frac{(x_i-\bar{x})^2}{S_{xx}^2}(x_0-\bar{x})^2+2\frac{(x_i-\bar{x})}{nS_{xx}}(x_0-\bar{x})\right]=$$

$$=\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+2\frac{(x_0-\bar{x})}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\right]=$$

Notar que $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$ y $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=S_{xx}$ entonces

$$=\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]$$

Por lo tanto

$$\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_0 \sim N\left(\beta_0+\beta_1 x_0;\ \sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\right) \qquad (10.21)$$

Como σ^2 es desconocido lo reemplazamos por $\hat{\sigma}^2=\frac{SS_R}{n-2}$, y puede probarse que

$\dfrac{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_0-(\beta_0+\beta_1 x_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}}$ tiene distribución Student con $n-2$ grados de libertad

Razonando como en casos anteriores, el intervalo de confianza para $\beta_0+\beta_1 x_0$ de nivel $1-\alpha$ es

$$\left[\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_0-t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\hat{\sigma}^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]};\ \hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_0+t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\hat{\sigma}^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}\right] \qquad (10.22)$$

Ejemplo:
Mediante los datos de la ley de Hooke calcular un intervalo de confianza de nivel 0.95 para la longitud media de un resorte bajo una carga de 1.4 lb

Solución:
Para aplicar (10.22) necesitamos calcular $\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_0$; $\hat{\sigma}^2$; $\bar{x}$; S_{xx}.
En este caso $x_0=1.4$ y $\alpha=0.05$, por lo tanto $t_{\frac{\alpha}{2},n-2}=t_{0.025,18}=2.101$

Ya tenemos calculado de ejemplos anteriores:
$\hat{\sigma}=0.0575$
$\bar{x}=1.9$

$S_{xx} = 26.6$

$\hat{\beta}_0 = 4.9997$ y $\hat{\beta}_1 = 0.2046$

De aquí ya calculamos $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 = 4.9997 + 0.2046 \times 1.4 = 5.286$

Entonces el intervalo es:

$$\left[5.286 - 2.101\sqrt{0.0575^2\left[\frac{1}{20} + \frac{(1.4-1.9)^2}{26.6}\right]};\ 5.286 + 2.101\sqrt{0.0575^2\left[\frac{1}{20} + \frac{(1.4-1.9)^2}{26.6}\right]} \right] =$$

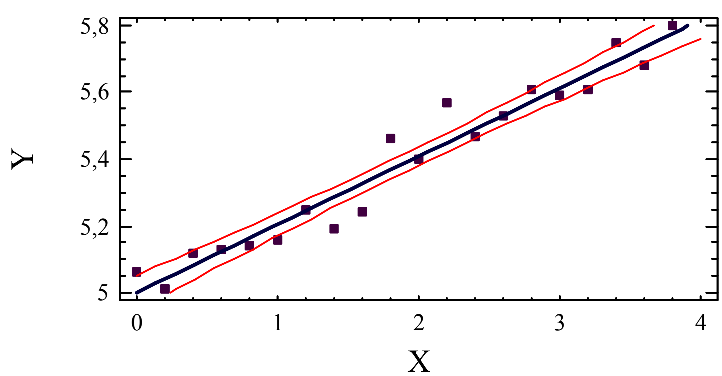
$$= [5.26;\ \ 5.32]$$

<u>Observaciones</u>:

1- Notar que el ancho del intervalo de confianza para $E(Y/x_0)$ depende del valor de x_0. El ancho del intervalo es mínimo cuando $x_0 = \bar{x}$ y crece a medida que $|x_0 - \bar{x}|$ aumenta.

2- Al repetir los cálculos anteriores para varios valores diferentes de x_0 pueden obtenerse intervalos de confianza para cada valor correspondiente de $E(Y/x_0)$.

En la figura siguiente se presenta el diagrama de dispersión con la recta estimada y los correspondientes intervalos de confianza de nivel 0.95 graficados con las líneas inferior y superior referidos al ejemplo anterior. Se origina entonces una ***banda de confianza*** que envuelve a la recta estimada.



5.6 – <u>Intervalos de predicción para futuras observaciones</u>

Una aplicación importante de un modelo de regresión es la predicción de observaciones nuevas o futuras de *Y,* correspondientes a un nivel especificado de la variable *x.*

Si x_0 es el valor de x de interés, entonces una ***estimación puntual*** de la observación $Y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0$ es $\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$.

Para hallar un intervalo de predicción para $Y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0$ de nivel $1-\alpha$ debemos construir un estadístico a partir de $\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$.
Primero notamos que si Y_0 es una nueva observación, entonces Y_0 ***es independiente de las observaciones utilizadas para desarrollar el modelo de regresión***.
Consideramos $Y_0 - \hat{Y}_0$. Calculamos su esperanza y varianza:

$$E\left(Y_0 - \hat{Y}_0\right) = E\left(\beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0 - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0\right)\right) = \beta_0 + \beta_1 x_0 + E(\varepsilon_0) - (\beta_0 + \beta_1 x_0) = 0$$

$$V\left(Y_0 - \hat{Y}_0\right) = V(Y_0) + V\left(\hat{Y}_0\right) = V(\beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0) + V\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0\right) = \sigma^2 + \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right] =$$

$$= \sigma^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]$$

Por lo tanto

$$Y_0 - \hat{Y}_0 \sim N\left(0;\ \sigma^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\right) \qquad (10.23)$$

En consecuencia

$$\frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\sqrt{\sigma^2\left[1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}} \sim N(0;\ 1) \qquad (10.24)$$

Si reemplazamos σ^2 por su estimación $\hat{\sigma}^2$ se puede probar que

$$\frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left[1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}} \sim t_{n-2} \qquad (10.25)$$

Por el argumento usual llegamos al siguiente ***intervalo de predicción de nivel*** $1-\alpha$ ***para*** Y_0***:***

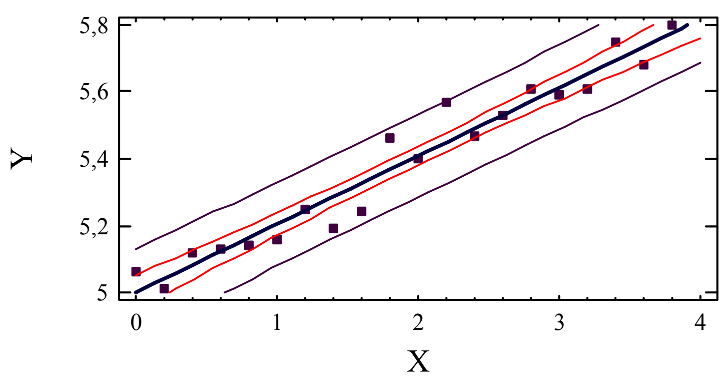
$$\left[\hat{Y}_0 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right];\ \hat{Y}_0 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\right] \qquad (10.26)$$

Ejemplo:
Calcular el intervalo de predicción con nivel 0.95 para la elongación de un resorte bajo una carga de 1.4 lb.

Solución:
El intervalo es

$$\left[5.286-2.101\sqrt{0.0575^2\left[1+\frac{1}{20}+\frac{(1.4-1.9)^2}{26.6}\right]};\ 5.286+2.101\sqrt{0.0575^2\left[1+\frac{1}{20}+\frac{(1.4-1.9)^2}{26.6}\right]}\ \right]=$$
$$=[5.16165;\ \ 5.41034]$$

Observaciones:
1- Un ***intervalo de confianza*** es un intervalo que contiene, con un nivel de confianza fijado, un parámetro determinado de interés. Un ***intervalo de predicción*** es un intervalo que contiene, con un nivel de confianza fijado, una variable aleatoria de interés.
2- El ancho del intervalo de predicción es mínimo cuando $x_0=\bar{x}$ y crece a medida que $|x_0-\bar{x}|$ aumenta.
Al comparar (10.26) con (10.22) se observa que el intervalo de predicción en el punto x_0 siempre es más grande que el intervalo de confianza en x_0. Esto se debe a que el intervalo de predicción depende tanto del error del modelo ajustado como del error asociado con las observaciones futuras.
3- Al repetir los cálculos anteriores para varios valores diferentes de x_0 pueden obtenerse los intervalos de predicción. En la figura siguiente se presenta el diagrama de dispersión con la recta estimada y los correspondientes intervalos de confianza y de predicción de nivel 0.95 graficados con las líneas inferior y superior referidos al ejemplo anterior. Se originan entonces una ***banda de confianza*** (línea continua) y otra ***banda de predicción*** (línea entrecortada) que envuelven a la recta estimada. Esto ilustra que los intervalos de confianza son menos amplios que los intervalos de predicción.



5.7 – Índice de ajuste

Si consideramos el ajuste por mínimos cuadrados de los pares de datos (x_i,Y_i) al modelo

$$Y = \beta_0 + \varepsilon$$

Entonces es fácil verificar que el estimador de mínimos cuadrados de β_0 es $\overline{Y}$, y la suma de residuos al cuadrado es $S_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$. Por otro lado si consideramos el modelo lineal

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Entonces tenemos un valor de $SS_R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$ que será menor o igual a $S_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$.

La cantidad R^2 se define como

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{SS_R}{S_{YY}}} \qquad (10.27)$$

y es llamado ***coeficiente de determinación***. Vemos que R^2 será cero si $\beta_1 = 0$ y será uno si $SS_R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0$, lo que significa ajuste lineal perfecto.

En general $0 \le R^2 \le 1$. El valor de R^2 se interpreta como la proporción de variación de la respuesta Y que es explicada por el modelo. La cantidad $\sqrt{R^2}$ es llamada ***índice de ajuste***, y es a menudo usada como un indicador de qué tan bien el modelo de regresión ajusta los datos. Pero un valor alto de R no significa necesariamente que el modelo de regresión sea correcto.

Ejemplo:

En el ejemplo de la ley de Hooke, tenemos $S_{yy} = \sum_{i=1}^{20} (y_i - \overline{y})^2 = 1.1733$, y

$$SS_R = 1.1733 - \frac{5.4430^2}{26.6} = 0.059526$$

Por lo tanto $R^2 = 1 - \frac{SS_R}{S_{YY}} = 1 - \frac{0.059526}{1.1733} = 0.949266$

El índice de ajuste R es a menudo llamado ***coeficiente de correlación muestral***. Si la variable fijada x es una ***variable aleatoria,*** entonces tendríamos una v.a. bidimensional (X, Y) con una distribución de probabilidad conjunta, y tenemos una muestra de pares (X_i, Y_i) $i = 1,..., n$. Supongamos que estamos interesados en estimar ρ el coeficiente de correlación entre X e Y. Es decir

$$\rho = \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Es razonable estimar

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \qquad \text{con} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

$V(X)$ con $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ y $V(Y)$ con $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)$

Por lo tanto un estimador natural de ρ es

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}}=\frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}S_{YY}}}=R \qquad (10.28)$$

Es decir ***el índice de ajuste estima la correlación entre X e Y***

Si X es una variable aleatoria, entonces se observan pares independientes $\left(X_i, Y_i\right)$ con $i=1,\dots,n$ que cumplen el modelo

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_i+\varepsilon_i$$

Si asumimos que X_i y ε_i ***son independientes y que las*** ε_i ***tienen todas la misma distribución con*** $E(\varepsilon_i)=0$***, entonces*** $E(Y_i/X_i)=\beta_0+\beta_1 X_i$
Si además suponemos que $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ ***entonces se puede probar que los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros*** β_0 ***y*** β_1 son

$$\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{X}$$

y

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i\left(X_i-\overline{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$

Es decir son los mismos estimadores a los dados por el método de mínimos cuadrados en el caso de suponer que *X* es una variable matemática.

También se puede probar que bajo las suposiciones hechas (10.17) y (10.18) ***siguen siendo válidas***.
Las distribuciones de los estimadores dependen ahora de las distribuciones de las X_i. Puede probarse que siguen siendo insesgados, y que su distribución condicional en las X_i es normal, pero en general su distribución no será normal.

5.8 – Análisis de residuos

El ajuste de un modelo de regresión requiere varias suposiciones. La estimación de los parámetros del modelo requiere la suposición de que los errores son variables aleatorias independientes

con media cero y varianza constante. Las pruebas de hipótesis y la estimación de intervalos requieren que los errores estén distribuidos de manera normal. Además se supone que el grado del modelo es correcto, es decir, si se ajusta un modelo de regresión lineal simple, entonces se supone que el fenómeno en realidad se comporta de una manera lineal.
Se debe considerar la validez de estas suposiciones como dudosas y examinar cuán adecuado es el modelo que se propone. A continuación se estudian métodos que son útiles para este propósito.

Los residuos de un modelo de regresión son $e_i = y_i - \hat{y}_i \quad i = 1,2,...,n$. A menudo el análisis de los residuos es útil para verificar la hipótesis de que los errores tienen una distribución que es aproximadamente normal con varianza constante, y también para determinar la utilidad que tiene la adición de más términos al modelo.

Es posible ***estandarizar*** los residuos mediante el cálculo de $\dfrac{e_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \quad i = 1,2,...,n$.

También se puede probar que la varianza del *i*-ésimo residuo e_i es igual a

$$V(e_i) = \sigma^2 \left[1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right) \right]$$

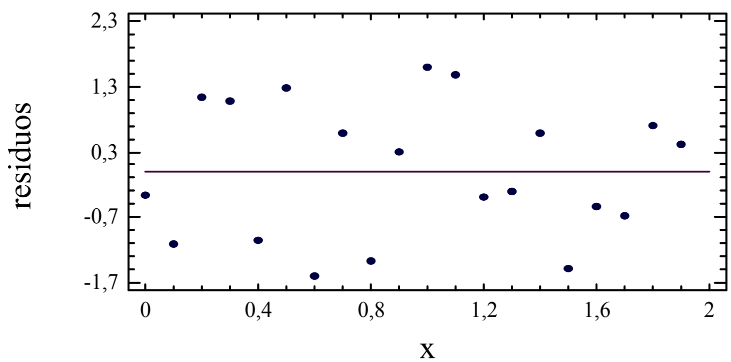
Y entonces podemos considerar al *i*-ésimo ***residuo estudentizado*** que se define como

$$r_i = \frac{e_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right) \right]}}$$

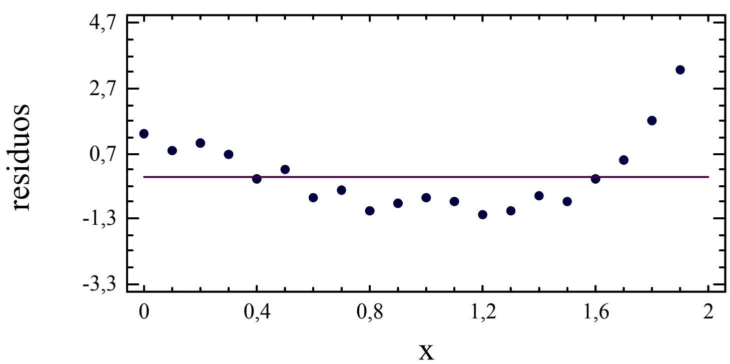
y tiene desviación estándar unitaria.

Si los errores tienen una distribución normal, entonces aproximadamente el 95% de los residuos estandarizados deben caer en el intervalo $(-2;\ 2)$. Los residuos que se alejan mucho de este intervalo pueden indicar la presencia de un ***valor atípico***, es decir, una observación que no es común con respecto a los demás datos.
A menudo es útil hacer una gráfica de residuos contra la variable independiente *x*. En este caso la gráfica tendría que ser una nube de puntos sin ningún patrón en el intervalo $(-2;\ 2)$; pues $e_i = y_i - \hat{y}_i$ sería lo que queda de y_i al quitarle la influencia de x_i . Si en la gráfica aparece algún patrón quiere decir que no estamos quitando de las *y* toda la influencia de las *x*.
Patrones usuales para las gráficas de residuos suelen ser los de las siguientes figuras: en la figura a) se representa la situación ideal, una nube de puntos sin ningún patrón en el intervalo $(-2;\ 2)$. Las figuras b) , c) y d) representan anomalías. Si los residuos aparecen como en b) o c) indican que el modelo es inadecuado. La figura d) muestra residuos que indican que la varianza de las observaciones varía con la magnitud de *x*. Comúnmente se utiliza una transformación de datos sobre la respuesta *y* para eliminar este problema. Las transformaciones más utilizadas para estabilizar la varianza son $\sqrt{y}$, $\ln(y)$ o $1/y$.

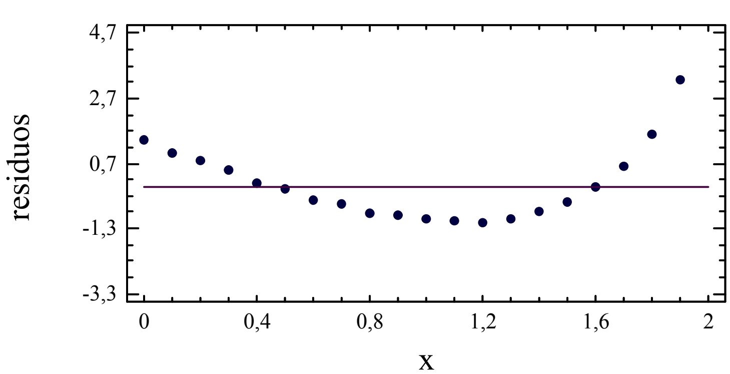
En la figura d) la varianza de las observaciones disminuye con el aumento de *x* a)


2,3
1,3
0,3
-0,7
-1,7
residuos
0
0,4
0,8
1,2
1,6
2
x

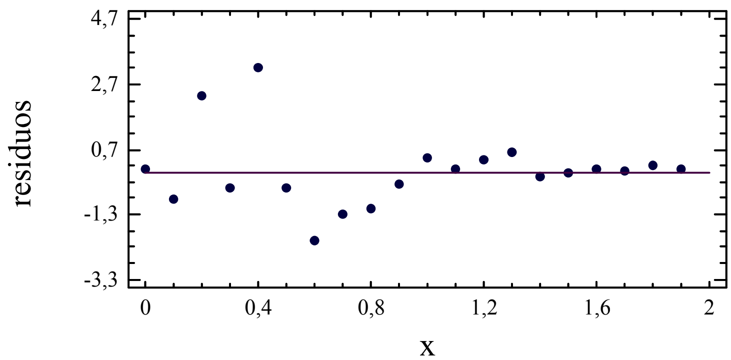
b)


4,7
2,7
0,7
-1,3
-3,3
residuos
0
0,4
0,8
1,2
1,6
2
x

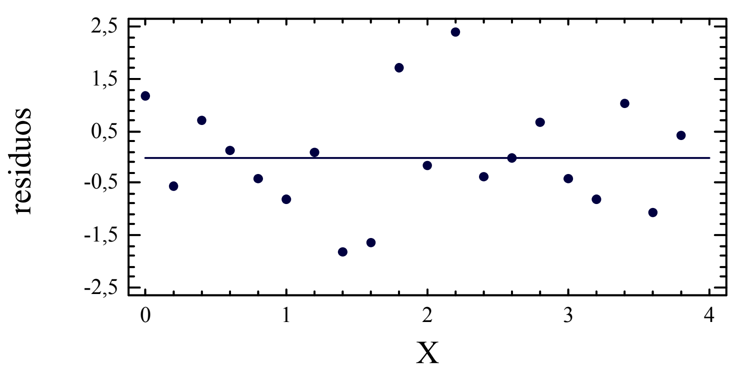
c)


4,7
2,7
0,7
-1,3
-3,3
residuos
0
0,4
0,8
1,2
1,6
2
x

d)



Ejemplo:
Para los datos sobre la ley de Hooke la gráfica de residuos es



Para el caso en que (X,Y) es una v.a. bidimensional, no siempre se está interesado en la relación lineal que defina $E(Y/X)$. Si no, únicamente saber si X e Y son variables aleatorias independientes. Si asumimos que la distribución conjunta de (X,Y) es una distribución llamada ***normal bivariada***, entonces ***probar que*** $\rho = 0$ ***es equivalente a probar que X e Y son independientes***.
Se puede probar que si la distribución conjunta de (X,Y) es ***normal bivariada***, entonces R es el estimador de máxima verosimilitud de ρ. Pero es difícil obtener la distribución de probabilidad para R. Se puede superar esta dificultad en muestras bastante grandes al utilizar el hecho que el

estadístico $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right)$ tiene aproximadamente una distribución normal con media $\mu=\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)$ y varianza $\sigma^2=\frac{1}{n-3}$.

Por lo tanto para probar la hipótesis $H_0:\rho=\rho_0$ podemos utilizar el estadístico de prueba

$$Z=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} \qquad (10.29)$$

Para construir intervalos de confianza de nivel $1-\alpha$ para ρ, se despeja en $\mu=\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)$ el coeficiente ρ y se llega a

$$\rho=\frac{e^{2\mu}-1}{e^{2\mu}+1} \qquad (10.30)$$

<u>Ejemplo</u>:
En un estudio de los tiempos de reacción, el tiempo de respuesta a un estímulo visual (x) y el tiempo de respuesta a un estímulo auditivo (y) se registraron para cada una de 10 personas.
Los tiempos se midieron en minutos. Se presentan en la siguiente tabla.

x	161	203	235	176	201	188	228	211	191	178
y	159	206	241	163	197	193	209	189	169	201

a) Determinar un intervalo de confianza de nivel 0.95 para la correlación entre los tiempos de reacción.
b) Determinar el p-valor para $H_0:\rho=0.3$ contra $H_1:\rho>0.3$

<u>Solución</u>:

a) Se calcula $R=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}}=\dfrac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}S_{YY}}}=0.8159$

Luego calcula $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+0.8159}{1-0.8159}\right)=1.1444$

Como $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right)$ está distribuido normalmente con varianza $\sigma^2=\frac{1}{n-3}$, el intervalo para $\mu=\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)$ es

$$\left[1.1444 - 1.96\left(\frac{1}{\sqrt{10-3}}\right);\quad 1.1444 + 1.96\left(\frac{1}{\sqrt{10-3}}\right)\right] = [0.4036;\ \ 1.8852]$$

Para hallar el intervalo para ρ aplicamos la transformación (10.30) y se obtiene

$$\frac{e^{2(0.4036)}-1}{e^{2(0.4036)}+1} < \rho < \frac{e^{2(1.8852)}-1}{e^{2(1.8852)}+1} \quad \Rightarrow \quad 0.383 < \rho < 0.955$$

b) Si $H_0 : \rho = 0.3$ es verdadera entonces el estadístico

$$Z = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+0.3}{1-0.3}\right)}{\frac{1}{\sqrt{10-3}}}$$ tiene aproximadamente distribución $N(0,1)$

El valor observado de $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right)$ es 1.1444, por lo tanto el estadístico toma el valor $z_0 = 2.2088$

Entonces $p - valor = P(Z > 2.2088) \approx 0.0136$. Entonces se rechaza $H_0 : \rho = 0.3$ y se concluye que $\rho > 0.3$

Práctica

Regresión lineal simple

1) Se utiliza regresión lineal para analizar los datos de un estudio donde se investigó la relación que existe entre la temperatura de la superficie de una carretera (x) y la deformación del pavimento (y). El resumen de cantidades es el siguiente:

$$n = 20,\ \sum y_i = 12.75,\ \sum y_i^2 = 8.86,\ \sum x_i = 1478,\ \sum x_i^2 = 143215.8,\ \sum x_i y_i = 1083.67$$

a) Calcular las estimaciones de mínimos cuadrados de la pendiente y la ordenada al origen. Hacer un gráfico de la recta de regresión, y estimar σ^2.

b) Utilice la ecuación de la recta ajustada para predecir la deformación del pavimento observada cuando la temperatura de la superficie sea 85ºF .

2) Se tiene la siguiente información sobre la relación entre una medida de la corrosión del hierro (Y) y la concentración de $NaPO_4$ (X, en ppm)

x	2.50	5.03	7.60	11.60	13.00	19.60	26.20	33.00	40.00	50.00	55.00
Y	7.68	6.95	6.30	5.75	5.01	1.43	0.93	0.72	0.68	0.65	0.56

a) Construya un gráfico de dispersión de los datos. ¿Parece ser razonable el modelo de regresión lineal?

b) Calcule la ecuación de la recta de regresión estimada, utilícela para pronosticar el valor de la rapidez de corrosión que se observaría para una concentración de 33 ppm, y calcule el residuo correspondiente.

c) Estime la desviación estándar de observaciones alrededor de la recta de regresión verdadera.

d) ¿Se puede concluir que el modelo de regresión lineal simple especifica una relación útil entre las dos variables?. Establezca y pruebe las hipótesis adecuadas al nivel de significación de 0.05.

3) En pruebas diseñadas para medir el efecto de cierto aditivo en el tiempo de secado de pintura se obtuvieron los siguientes datos

Concentración de aditivo (%)	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8
Tiempo de secado (horas)	8.7	8.8	8.3	8.7	8.1	8.0	8.1	7.7	7.5	7.2

Se tiene el siguiente resumen estadístico:

$$\bar{x} = 4.9 \quad \bar{y} = 8.11 \quad S_{xx} = 3.29967 \quad S_{xy} = -2.75 \quad S_{yy} = 2.58894$$

a) Realizar un gráfico de dispersión y estimar la recta de regresión lineal

b) Estimar la varianza

c) Pronostique el tiempo de secado para una concentración de 4.4%

d) ¿Puede utilizarse la recta de mínimos cuadrados para pronosticar el tiempo de secado respecto a una concentración de 7%?

e) ¿Para qué concentración pronosticaría un tiempo de secado de 8.2 horas?

4) Un químico está calibrando un espectrómetro que se utilizará para medir la concentración de monóxido de carbono en muestras atmosféricas. Para comprobar la calibración, se miden muestras de concentración conocida.
Las concentraciones verdaderas (x) y las medidas (y) están dadas en la tabla siguiente:

x (ppm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Y (ppm)	1	11	21	28	37	48	56	68	75	86	96

Para comprobar la calibración se ajusta un modelo lineal $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$. Idealmente, el valor de β_0 debe ser 0 y el valor de β_1 debe ser 1.

a) Calcule los estimadores de mínimos cuadrados $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$
b) ¿Se puede rechazar la hipótesis nula $H_0 : \beta_0 = 0$?. Utilice $\alpha = 0.05$
c) ¿Se puede rechazar la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = 1$? .Utilice $\alpha = 0.05$
d) ¿Los datos proporcionan suficiente evidencia para concluir que la máquina está fuera de calibración?

5) En un experimento para investigar la relación entre el diámetro de un clavo (x) y su fuerza retirada final (y), se colocaron clavos de forma anular enhebrados en madera de abeto de Douglas, y después se midieron sus fuerzas de retirada en N/mm. Se obtuvieron los resultados si guientes para 10 diámetros diferentes (en mm):

x	2.52	2.87	3.05	3.43	3.68	3.76	3.76	4.50	4.50	5.26
y	54.74	59.01	72.92	50.85	54.99	60.56	69.08	77.03	69.97	90.70

a) Calcule la recta de mínimos cuadrados para predecir la fuerza a partir del diámetro
b) Determine el intervalo de confianza de nivel 0.95 para la media de la fuerza de retirada de clavos de 4 mm de diámetro
c) Determine el intervalo de predicción de nivel 0.95 para la media de la fuerza de retirada de clavos de 4 mm de diámetro
d) ¿Puede concluir que la media de la fuerza de retirada de clavos de 4 mm de diámetro es 60 N/mm con un nivel de significancia de 0.05?

6) Un comerciante realizó un estudio para determinar la relación que hay entre los gastos de la publicidad semanal y las ventas. Registró los datos siguientes:
Costos de publicidad (en $): 40, 20, 25, 20, 30, 50, 40, 20, 50, 40, 25, 50.
Ventas (en $): 385, 400, 395, 365, 475, 440, 490, 420, 560, 525, 480, 510.

a) Haga un gráfico de dispersión
b) Encuentre la recta de regresión estimada para pronosticar las ventas semanales, a partir de los gastos de publicidad.
c) Estime las ventas semanales cuando los costos de la publicidad sean 35$. ¿Es válido estimar las ventas semanales cuando los costos de la publicidad sean 75$?.
d) Pruebe la hipótesis de que $\beta_1 = 6$ contra la alternativa de que $\beta_1 < 6$, utilice $\alpha = 0.025$.
e) Construya un intervalo de confianza de 95% para la media de las ventas semanales cuando se gastan 45$ en publicidad.
f) Construya un intervalo de predicción de 95% para la media de las ventas semanales cuan do se gastan 45$ en publicidad.
g) ¿Qué proporción de la variabilidad total en las ventas está explicada por el costo en publicidad?

7) Considere los siguientes datos sobre el número de millas para ciertos automóviles, en millas por galón (mpg) y su peso en libras (wt)

Modelo	GMC	Geo	Honda	Hyundai	Infiniti	Isuzu	Jeep	Land	Lexus	Linclon
Wt (x)	4520	2065	2440	2290	3195	3480	4090	4535	3390	3930
Mpg (y)	15	29	31	28	23	21	15	13	22	18

a) Estime la recta de regresión lineal.

b) Estime las millas para un vehículo que pesa 4000 libras.

c) Suponga que los ingenieros de Honda afirman que, en promedio, el Civic (o cualquier otro modelo de vehículo que pese 2440 libras) recorre mas de 30 mpg. Con base en los resultados del análisis de regresión, ¿es esta afirmación creíble?, ¿por qué?.
Sugerencia: calcule el intervalo de confianza para la media mpg cuando el peso es de 2440 libras, con $\alpha = 0.05$

d) Los ingenieros de diseño para el Lexus ES300 tienen por objetivo lograr 18 mpg como ideal para dicho modelo (o cualquier otro que pese 3390 libras), aunque se espera que haya cierta variación. ¿Es probable que sea realista ese objetivo?. Comente al respecto.

e) ¿Qué proporción de la variabilidad total en el millaje está explicada por el peso del motor?

8) Los valores siguientes son 26 lecturas sobre la congestión del transito y la concentración de monóxido de carbono efectuadas en un sitio de muestreo para determinar la calidad del aire de cierta ciudad. Enunciando las suposiciones necesarias , resolver los siguientes incisos :

a) Prepare un diagrama de dispersión.

b) Calcule el coeficiente de correlación de la muestra.

c) Pruebe que $H_0: \rho=0$ al nivel de significación de 0.05 y saque sus conclusiones.

d) Construya el intervalo de confianza del 95% para ρ.

e) ¿Hay suficiente evidencia de una correlación mayor que 0.95 ?.Utilice α=0.05.

congestion de transito (automoviles por hora), X	CO (ppm), Y	congestion de transito (automoviles por hora), X	CO (ppm), Y
100	8.8	375	13.2
110	9.0	400	14.5
125	9.5	425	14.7
150	10.0	450	14.9
175	10.5	460	15.1
190	10.5	475	15.5
200	10.5	500	16.0
225	10.6	525	16.3
250	11.0	550	16.8
275	12.1	575	17.3
300	12.1	595	18.0
325	12.5	600	18.4

Tabla III. Valores críticos de la distribución Normal estándar
$$P[Z > Z_\alpha] = \int_{Z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-z^2/2} dz = \alpha$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2910	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1597	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0995
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0394	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00103	0.00100
3.1	0.00097	0.00094	0.00091	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.0006	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00041	0.00032	0.00038	0.00036	0.00035
3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.0003	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008
3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003

Tabla IV. Valores críticos de la distribución t de Student:

Abcisas $t_{\alpha;\nu}$ que dejan a su derecha un área α en una t con ν grados de libertad.

ν	0.4	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.326	31.598
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Tabla V. Valores críticos de la distribución χ^2 de Pearson:

Abcisas $\chi^2_{\alpha;\nu}$ que dejan a su derecha un área α bajo la χ^2 con ν grados de libertad.

ν	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	-	-	-	-	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	21.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7

Tabla VI. Valores críticos de la distribución F de Snedecor:

Abcisas $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ que dejan a su derecha un área α bajo la F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

$\alpha = 0{,}25$

	ν_1																		
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1 2	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2,46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.09	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
7	1.57	1,70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1,62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53
l0	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1,51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.42
13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1,39	1.38
15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	l.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
17	1.42	1.51	1,50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33
18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32
19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	l.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.38	1,37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.30
20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29
21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28
22	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27
24	1,39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26
25	1,39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25
26	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1,26	1.25
27	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27	1.26	1.24
28	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24
29	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.26	1.25	1.23
30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.23
40	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19
60	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19	1.17	1.15
120	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.16	1.13	1.10
∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.12	1.08	1.00

Tabla VI. Valores críticos de la distribución F de Snedecor:

Abcisas $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ que dejan a su derecha un área α bajo la F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

$\alpha = 0{,}10$

	ν_1																		
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1 2	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
l0	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1,90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1,67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

Tabla VI. Valores críticos de la distribución F de Snedecor:

Abcisas $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ que dejan a su derecha un área α bajo la F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

$\alpha = 0{,}05$

	ν_1																		
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1 2	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8,64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2 79	2.75	2.71
l0	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	1.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2,49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2,12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabla VI. Valores críticos de la distribución F de Snedecor:

Abcisas $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ que dejan a su derecha un área α bajo la F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

$\alpha = 0{,}025$

	ν_1																		
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1 2	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.00	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
l0	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3 06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2,76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.63	3.31	3.06	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

Tabla VI. Valores críticos de la distribución F de Snedecor:

Abcisas $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ que dejan a su derecha un área α bajo la F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

$\alpha = 0{,}01$

	ν_1																		
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1 2	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.50	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18,00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
l0	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3,56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3,21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2,81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Tabla VI. Valores críticos de la distribución F de Snedecor:

Abcisas $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ que dejan a su derecha un área α bajo la F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

$\alpha = 0{,}005$

	ν_1																		
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1 2	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	19.49	19.50
3	55.55	49.80	47.46	46.17	45.42	44.85	44.40	44.11	43.84	43.73	43.38	43.13	42.87	42.65	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83
4	31.33	26.28	24.25	23.15	22.46	21.98	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.43	20.17	20.04	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.39	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14
6	18.64	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.48	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	6.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.64	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.02	6.82	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.89	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.45	4.34	4.23
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.34	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.02	3.90
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.86	3.55	3.44
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98
18	10.22	7.21	6.06	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.53	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	8.83	6.07	4.94	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

Tabla VI. Valores críticos de la distribución F de Snedecor:

Abcisas $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ que dejan a su derecha un área α bajo la F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

$\alpha = 0{,}001$

	ν_1																		
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1 2	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5929*	5981*	6023*	6056*	6107*	6158*	6209*	6235*	6261*	6287*	6313*	6340*	6366*
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.0	124.5	124.0	123.5
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05	47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40	44.05
5	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.84	28.16	27.64	27.24	26.92	26.42	25.91	25.39	25.14	24.87	24.60	24.33	24.06	23.79
6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.81	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16.89	16.67	16.44	16.21	15.99	15.75
7	29.25	21.69	18.77	17.19	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91	11.70
8	25.42	18.49	15.83	14.39	13.49	12.86	12.40	12.04	11.77	11.54	11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53	9.33
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00	7.81
l0	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.92	9.52	9.20	8.96	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94	6.76
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.63	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.17	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59	5.42
13	17.81	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	6.80	6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	7.08	6.80	6.58	6.40	6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47	4.31
16	16.12	10.97	9.00	7.94	7.27	6.81	6.46	6.19	5.98	5.81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.23	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5.32	5.05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02	3.85
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68	3.51
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54	3.38
21	14.59	9.77	7,94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95	4.70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3.58	3.42	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.83	4.58	4.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89	4.73	4.48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64	4.48	4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2.99	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57	4.41	4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50	4.35	4.11	3.86	3.60	3.46	3.32	3.18	3.02	2.86	2.69
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45	4.29	4.05	3.80	3.54	3.41	3.27	3.12	2.97	2,81	2.64
30	13.29	8.77	7,05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	3.07	2.92	2.76	2.59
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.64	3.40	3.15	3.01	2.87	2.73	2.57	2.41	2.23
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.87	3.69	3.54	3.31	3,08	2.83	2.69	2.55	2.41	2.25	2.08	1.89
120	11.38	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1.76	1.54
∞	10.83	6.91	5.42	4.621	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1.45	1.00

* Multiplicar estas celdas por 100