Así: ψ' es discontinua

$V_0 = 0 \rightarrow V_0 \to \infty$

Ejm

Para una caja con paredes de altura finita:

Una exigencia es: $\psi|_{x\to 0^+} = \psi|_{x\to 0^-}$ $\quad \psi'|_{x\to 0^-} = \psi'|_{x\to 0^+}$

$\psi|_{x\to a^+} = \psi|_{x\to a^-}$ $\quad \psi'|_{x\to a^-} = \psi'|_{x\to a^+}$

Cuando la energía potencial $V_0 > E$: $\psi(x \to \infty \text{ o } x \to -\infty) = 0$

$\downarrow$

Los estados son enlazantes

Cuando la energía potencila $V_0 < E$: $\psi(x \to \infty \text{ o } x \to -\infty) \to \infty$

$\downarrow$

Los estados son no enlazantes

4.2 EL OSCILADOR ARMÓNICO UNIDIMENSIONAL

Tratamiento mecano clásico.

Una partícula puntual de masa m atraída hacia el origen por una fuerza proporcional al desplazamiento:

$$F_x = -Kx$$

Segunda ley de Newton:

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

La solución es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$r^2 + \frac{K}{m} = 0$$

$$r = 0 \pm i\sqrt{\frac{K}{m}} = 0 \pm \omega i$$

$\rightarrow x = (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)e^{0t}$

$$x = \frac{C_1 \cos b \sin \omega t}{\cos b} + \frac{C_2 \sin b \cos \omega t}{\sin b}$$

Si: $A = \dfrac{C_1}{\cos b} = \dfrac{C_2}{\sin b}$

$x = A\sin(\omega t + b)$

La frecuencia de vibración:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\Rightarrow x = A\sin(\nu 2\pi t + b)$

En el tiempo $t + \frac{1}{\nu} = t + \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\rightarrow x = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + b\right]$$

$$x = A\sin(\omega t + 2\pi + b) = A\sin(\omega t + b)$$

Entonces $\frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ es el periodo.

Para el caso tridimensional, la energía potencial: V:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Para el problema unidimensional:

$$F_x = -\frac{dV}{dx} = -kx$$

$$\int dV = \int kx\,dx$$

$V = \frac{kx^2}{2} + C$ → La energía potencial siempre contiene una cte arbitraria aditiva

↓

Energía potencial: $V(x=0) = C$

Si $C = 0$:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \rightarrow \nu^2 = \frac{4\pi^2}{4\pi^2}\frac{k}{m}$$

$$V = \frac{1}{2}(\nu^2 4\pi^2 m)x^2$$

$$V = \underbrace{2\pi^2\nu^2 m x^2}_{V(x) \rightarrow \text{Parábola}} = 2\pi^2\nu^2 m A^2\sin^2(\omega t + b)$$

Energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \sin(2\pi\nu t + b)\right)$$

$$T = \frac{1}{2} m \, 4\pi^2 \nu^2 A^2 \cos^2(\omega t + b) \qquad \frac{dx}{dt} = 2\pi\nu A \cos(2\pi\nu t + b)$$

$$T = 2m\pi^2\nu^2 A^2 \cos^2(\omega t + b)$$

La energía total:

$$E = T + V$$

$$E = 2m\pi^2\nu^2 A^2 \left[\sin^2(\omega t + b) + \cos^2(\omega t + b)\right]$$

$$E = 2m\pi^2\nu^2 A^2$$

Tratamiento mecanocuántico:

Operador Hamiltoniano mecanocuántico:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + 2\pi^2\nu^2 m x^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2\pi^2\nu^2 m \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) x^2\right]$$

$$\rightarrow \alpha^2 = \frac{4\pi^2\nu^2 m^2}{\hbar^2} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi\nu m}{\hbar}$$

$$\rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 x^2\right)$$

Ec. de Schrödinger: $\hat{H}\psi = E\psi$:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2 x^2 \psi = -\frac{2m}{\hbar^2} E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (2mE\hbar^{-2} - \alpha^2 x^2)\psi = 0$$

Función desconocida a obtener

Se utiliza $\psi = e^{-\alpha x^2/2} F(x) \longrightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

para obtener una relación de recurrencia de dos términos:

$$\rightarrow \psi' = e^{-\alpha x^2/2} F'(x) - \alpha x e^{-\alpha x^2/2} F(x)$$

$$\rightarrow \psi'' = e^{-\alpha x^2/2} \left(F'' - 2\alpha x F' - \alpha F + \alpha^2 x^2 F \right)$$

Sustituyendo en $\psi'' + (2mE\hbar^{-2} - \alpha^2 x^2)\psi = 0$

$$F'' - 2\alpha x F' + (2mE\hbar^{-2} - \alpha) F = 0$$

Probando $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$\rightarrow F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} =$$

$$\rightarrow F''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$\rightarrow j = n-2 \leftarrow$ para tener x^j ← variable muda, como $F = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$n = j+2$

$$F''(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) c_{j+2} x^j = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

Sustituyendo en la ec de Schrödinger:

$$F'' - 2\alpha x F' + (2mE\hbar^{-2} - \alpha) F = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - 2\alpha x \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + (2mE\hbar^{-2} - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + (2mE\hbar^{-2} - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} - 2\alpha n c_n + (2mE\hbar^{-2} - \alpha) c_n \right] x^n = 0$$

Haciendo el coeficiente de x^n igual a cero:

$$c_{n+2} = \frac{\alpha + 2\alpha n - 2mE\hbar^{-2}}{(n+1)(n+2)} c_n \quad \leftarrow \text{Relación de recurrencia}$$

Entonces se tienen dos constantes arbitrarias, c_0 para n pares y c_1 para n impares.

Si $c_1 = 0$:

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} F(x) = e^{-\alpha x^2/2} \sum_{n=0,2,4\ldots}^{\infty} c_n x^n = e^{-\alpha x^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l} x^{2l}$$

Si $c_0 = 0$

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} c_n x^n = e^{-\alpha x^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l+1} x^{2l+1}$$

La solución general de la ec. de schrödinger es una combinación lineal de estas dos soluciones linealmente independientes:

$$\psi = A e^{-\alpha x^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l+1} x^{2l+1} + B e^{-\alpha x^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l} x^{2l}$$

Cociente entre dos coeficientes consecutivos de potencias pares

$$c_{n+2} = \frac{\alpha + 2\alpha n - 2mE\hbar^{-2}}{(n+1)(n+2)} c_n$$

$$c_{2l+2} = \frac{\alpha + 2\alpha(2l) - 2mE\hbar^{-2}}{(2l+1)(2l+2)} c_{2l} \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\frac{c_{2l+2}}{c_{2l}} = \frac{\alpha + 4\alpha l - 2mE\hbar^{-2}}{(2l+1)(2l+2)} \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Para valores grandes de x, los términos más dominantes de la serie $\sum_{l=0}^{\infty} c_{2l} x^{2l}$ son los últimos. Para valores grandes de l:

$$\frac{c_{2l+2}}{c_{2l}} \approx \frac{4\alpha l}{(2l)^2} = \frac{\alpha}{l} \quad \text{si } l \text{ es grande}$$

Cociente entre dos coeficientes consecutivos de potencias impares

$$c_{n+2} = \frac{\alpha + 2\alpha n - 2mE\hbar^{-2}}{(n+1)(n+2)} c_n$$

$$\frac{c_{(2l+1)+2}}{c_{2l+1}} = \frac{3\alpha + 4\alpha l - 2mE\hbar^{-2}}{(2l+2)(2l+3)} \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Para valores grandes de x, los términos más dominantes de la serie $\sum_{l=0}^{\infty} c_{2l+1} x^{2l+1}$ son los últimos. Para valores grandes de l:

$$\frac{C_{(2\ell+1)+2}}{C_{2\ell+1}} = \frac{4\alpha\ell}{(2\ell)^2} = \frac{\alpha}{\ell} \quad \text{si } \ell \text{ es grande}$$

Usando $e^{\alpha x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x^2)^n}{(n!)} = 1 + \alpha x^2 + \dots + \frac{\alpha^\ell x^{2\ell}}{\ell!} + \frac{\alpha^{\ell+1} x^{2(\ell+1)}}{(\ell+1)!} + \dots$

El cociente entre los coeficientes consecutivos de $x^{2(\ell+1)}$ y $x^{2\ell}$ es:

$$\frac{\left(\frac{\alpha^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\right)}{\left(\frac{\alpha^\ell}{\ell!}\right)} = \frac{\alpha^{\ell+1}\,\ell!}{\alpha^\ell\,(\ell+1)!} = \frac{\alpha}{\ell+1}$$

Si ℓ es grande:

$$\frac{\alpha}{\ell+1} \approx \frac{\alpha}{\ell} \quad \text{si } \ell \text{ es grande}$$

Como el cociente entre los coeficientes de potencias grandes de las series $\sum_{\ell=0}^{\infty} C_{2\ell} x^{2\ell}$, $\sum_{\ell=0}^{\infty} C_{2\ell+1} x^{2\ell+1}$ y $e^{\alpha x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x^2)^n}{n!}$

es $\frac{\alpha}{\ell}$: $\underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} C_{2\ell} x^{2\ell}, \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{2\ell+1} x^{2\ell+2}}_{\text{se comportan como } e^{\alpha x^2}}$ } La demostración NO es rigurosa

Cuando x es grande:
$x \to \infty$

de: $\psi = e^{-\alpha x^2/2} F(x) = e^{-\alpha x^2/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right)$

$\Downarrow$

$F(x) \to \infty$

$\Downarrow$

$F(x)$ no es cuadraticamente integrable:

$\int |F(x)|^2 dx \to$ No es finita

Se puede truncar las series $f(x)$ haciendo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ sea finita, además el producto $x^p e^{-\alpha x^2/2}$, con p finita:

$$\lim_{x\to\infty} x^p e^{-\alpha x^2/2} \to \frac{x^p}{e^{+\alpha x^2/2}} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Para aplicar regla de l'Hôpital:

$$\to \frac{g'}{h'} = \frac{(p)x^{p-1}}{(\alpha x)e^{\alpha x^2/2}} = \frac{p! \cdot x^{p-1}}{(p-1)!\, e^{\alpha x^2/2}(\alpha x)}$$

$$\to \frac{g''}{h''} = \frac{p(p-1)x^{p-2}}{\alpha e^{\alpha x^2/2} + (\alpha x)^2 e^{\alpha x^2/2}} = \frac{p! \quad x^{p-2}}{(p-2)!\, e^{\alpha x^2/2}[\alpha + (\alpha x)^2]}$$

$$\to \frac{g'''}{h'''} = \frac{p(p-1)(p-2)x^{p-3}}{\alpha(\alpha x)e^{\alpha x^2/2} + 2(\alpha x)\alpha e^{\alpha x^2/2} + (\alpha x)^3 e^{\alpha x^2/2}}$$

$$= \frac{p! \quad x^{p-3}}{(p-3)!\, e^{\alpha x^2/2}[\alpha(\alpha x) + 2(\alpha x)\alpha + (\alpha x)^3]}$$

Después de aplicar las p derivadas a g y h:

$$\to \frac{g^{(p)}}{h^{(p)}} = \frac{p! \quad x^{p-p}}{(p-p)!\, e^{\alpha x^2/2}\, \underbrace{K(x)}_{\to \text{Polinomio de grado } p.}} = \frac{p!}{1\, e^{\alpha x^2/2} K(x)}$$

Así, por regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} x^p e^{-\alpha x^2/2} = \lim_{x\to\infty} \frac{p!}{e^{\alpha x^2/2} K(x)} = 0$$

Si se hace que $c_{v+2} = 0$ se logra truncar $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ya que de: $c_{n+2} = \dfrac{\alpha + 2\alpha n - 2mE\hbar^{-2}}{(n+1)(n+2)} c_n$, se eliminan $c_{v+4}, c_{v+6}, \dots$ también

haciendo de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{v} c_n x^n$

Haciendo el coeficiente $c_{v+2} = 0 \rightarrow$ el último término es $c_v \neq 0$

$$c_{n+2} = \frac{\alpha + 2\alpha n - 2mE\hbar^{-2}}{(n+1)(n+2)} c_n$$

$$c_{v+2} = \frac{\alpha + 2\alpha v - 2mE\hbar^{-2}}{(v+1)(v+2)} c_v = 0$$

$\rightarrow \hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\alpha + 2\alpha v - 2mE\hbar^{-2} = 0$$

$\rightarrow \alpha = \frac{2\pi F m}{\hbar}$

$$E = hF\left(\frac{1}{2} + v\right) \qquad v = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$\Downarrow$

Niveles de energía estacionarios son equiespaciados por hF

Así sustituyendo los valores propios de energía:

$$c_{n+2} = \frac{\alpha + 2\alpha n - 2m\left[hF\left(\frac{1}{2} + v\right)\right]\hbar^{-2}}{(n+1)(n+2)} c_n$$

$\rightarrow \alpha = \frac{4\pi^2 F M}{h}$

$$c_{n+2} = \frac{2\alpha(n-v)}{(n+1)(n+2)} c_n ,$$

Para eliminar una de las dos series infinitas de:

$$\psi = Ae^{-\alpha x^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l+1} x^{2l+1} + Be^{-\alpha x^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l} x^{2l}$$

A o B debe ser cero dejando solo una función de onda

La potencia más elevada en esta serie es x^v

$$\psi_v = \begin{cases} e^{-\alpha x^2/2}(c_0 + c_2x^2 + \ldots + c_v x^v) & \text{si } v \text{ es par} \\ e^{-\alpha x^2/2}(c_1 x + c_3 x^3 + \ldots + c_v x^v) & \text{si } v \text{ es impar} \end{cases}$$

A y B se incluyen en $c_0 \rightarrow c_2 \rightarrow \ldots \rightarrow c_v$ y en $c_1 \rightarrow c_3 \rightarrow \rightarrow c_v$

* Para valores diferentes a $E = hf\left(\frac{1}{2} + v\right)$, $\psi = e^{-\alpha x^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l} x^{2l}$

$v = 0, 2, 4, \ldots$
$v = 1, 3, 5, \ldots$

usando: $$c_{n+2} = \frac{\alpha + 2\alpha n - 2mE\hbar^{-2}}{(n+1)(n+2)} c_n$$, ψ no es cuadráticamente integrable.

por ejemplo $\frac{E}{hf} \neq \left(\frac{1}{2} + 0\right) \rightarrow$ par $\rightarrow \psi = e^{-\alpha x^2/2} c_0$

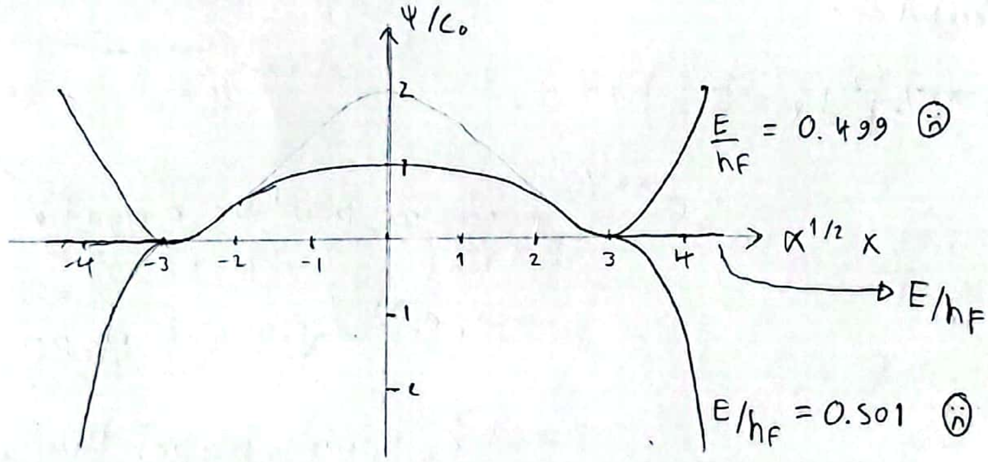
$\downarrow$

$\frac{E}{hf} \neq 0.5 \rightarrow$ Diverge $\rightarrow \psi = e^{-\alpha x^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l} x^{2l}$

$$\rightarrow \psi = e^{-\alpha x^2/2}\left(c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \ldots\right)$$

$$\frac{\psi}{c_0} = e^{-\alpha x^2/2}\left(1 + \frac{c_2}{c_0} x^2 + \frac{c_4}{c_0} x^4 + \ldots\right) = e^{-(\alpha^{1/2} x)^2}\left(1 + \frac{c_2}{c_0} x^2 + \frac{c_4}{c_0} x^4 + \ldots\right)$$

$$\rightarrow \frac{\psi}{c_0}(x=0) = 1$$



$\rightarrow E/hf = 0.5 \rightarrow$ ☺ $\rightarrow v = 0$

$\psi = e^{-\alpha x^2/2} c_0$

$\downarrow$

$\frac{\psi}{c_0} = e^{-\alpha x^2/2}$

* Energía del estado fundamental del oscilador armónico = energía del punto cero: $v = 0$

$E = \frac{hf}{2} \rightarrow$ Energía vibracional de cada oscilador armónico a $T = 0°K$

Si el estado más bajo fuera $E = 0 \rightarrow$ momento $= p = 0$

energía potencial $= 0$

$\downarrow$

$\Delta p_x = 0$

$\rightarrow$ No elongación o contracción $\rightarrow x = 0 \rightarrow \Delta x = 0$

$\rightarrow$ NO cumple el principio de incertidumbre

Las funciones de onda del oscilador armónico:

$$\psi_v = \begin{cases} e^{-\alpha x^2/2}\left(c_0 + c_2 x^2 + \ldots + c_v x^v\right) & \text{si } v \text{ es par} \\ e^{-\alpha x^2/2}\left(c_1 x + c_3 x^3 + \ldots + c_v x^v\right) & \text{si } v \text{ es impar} \end{cases} \qquad \alpha = \frac{2\pi F m}{\hbar}$$

$$\to \left.\begin{array}{l} e^{-\alpha x^2/2} \to \text{Función par.} \\ c_0 + c_2 x^2 + \ldots + c_v x^v \text{ si } v \text{ es par} \to \text{Función par.} \end{array}\right\} \psi_v: \text{Función par.}$$

$$\to \left.\begin{array}{l} e^{-\alpha x^2/2} \to \text{Función par.} \\ c_1 x + c_3 x^3 + \ldots + c_v x^v \text{ si } v \text{ es impar} \to \text{Función impar} \end{array}\right\} \psi_v: \text{Fución impar.}$$

*Estado fundamental. $v=0$:

$$\psi_0 = c_0 e^{-\alpha x^2/2} \qquad E_0 = \frac{hF}{2}$$

$\uparrow v = 0$

c_0 por normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\psi_0^* \psi_0}_{\text{densidad de probabilidad}} dx = 1$$

Integral de Gauss

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c_0 e^{-\alpha x^2/2}|^2 dx = 1$$

$c_0 e^{-\alpha x^2/2}$ puede ser positivo o negativo

$\downarrow$

$e^{-\alpha x^2/2}$ siempre es positivo

$\downarrow$

c_0 puede ser positivo o negativo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c_0|^2 e^{-\alpha x^2} dx = 1$$

$$|c_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 1$$

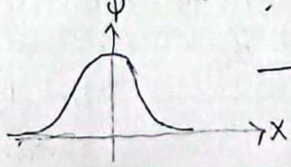
$$|c_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\sqrt{\alpha} x)^2} d(\sqrt{\alpha} x)}{\sqrt{\alpha}} = 1$$

$$\frac{|c_0|^2 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} = 1$$

$$|c_0|^2 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}$$

$$c_0 = \pm \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}} \to \psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2}$$

$\uparrow$ Escogiendo en caso la Fase de la constante de normalización??



$\to$ Función gaussiana

$\downarrow$

cero nodos

* Para el estado $v=1$:

$$\psi_1 = C_1 x e^{-\alpha x^2/2} \qquad E_1 = h\nu\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3h\nu}{2}$$

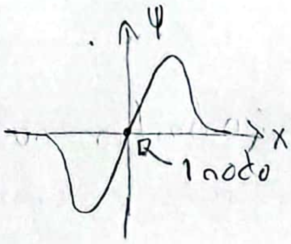
Normalizando: Función par: $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} F(x)\,dx$

$$|C_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,dx = 1$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-bx^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\left(\frac{\pi}{b^{2n+1}}\right)^{1/2} \qquad n=1,2,3 \quad b>0$$

$$C_1 = \pm\left(\frac{4\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4}$$

$$\psi_1 = \left(\frac{4\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2/2}$$



* Para el estado $v=2$

$$\psi_2 = (C_0 + C_2 x^2)e^{-\alpha x^2/2} \qquad E_2 = h\nu\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{5h\nu}{2}$$

Normalizando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(C_0 + C_2 x^2)e^{-\alpha x^2/2}|^2\,dx = 1$$

$$\to C_{n+2} = \frac{2\alpha(n-v)}{(n+1)(n+2)} C_n$$

$$\to \psi_2 = C_0(1-2\alpha x^2)e^{-\alpha x^2/2}$$

$$C_2 = \frac{2\alpha(-2)}{2} C_0$$

$$\to |C_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1-2\alpha x^2)^2 e^{-\alpha x^2}\,dx = 1$$

$$C_2 = -2\alpha C_0$$

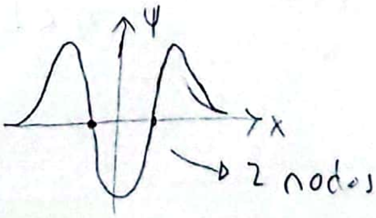
$$|C_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1-4\alpha x^2+4\alpha^2 x^4)e^{-\alpha x^2}\,dx = 1$$

$$C_0 = \pm\sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\pi}}$$

$$\to \psi_2 = \pm\sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\pi}}(1-2\alpha x^2)e^{-\alpha x^2/2}$$

si es $-$:

$$\psi_2 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\pi}}(2\alpha x^2-1)e^{-\alpha x^2/2}$$

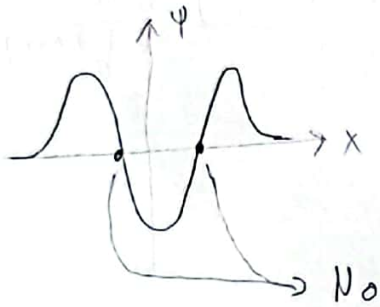


de nodos interiores, dentro de los $\underbrace{\text{puntos límite}}_{\pm\infty}$: V

$$\psi_0 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_1 = \sqrt[4]{\frac{4\alpha^3}{\pi}}\, x\, e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_2 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{4\pi}}\, \underbrace{(2\alpha x^2 - 1)}_{\text{Polinomios de Hermite}} e^{-\alpha x^2/2}$$



→ No hay probabilidad de encontrar la partícula en esas posiciones

*Clásicamente:

$\rightarrow E = T + V$ $\rightarrow T \geq 0$

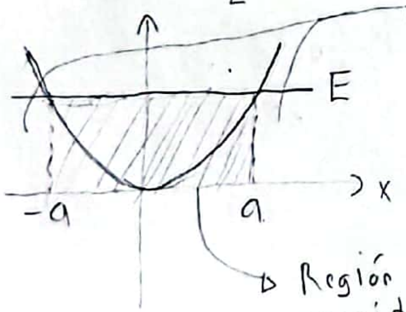
$\Downarrow$

$E - V \geq 0$

$\Downarrow$

$E \geq V$ → La partícula está confinada en la región donde $V(x) \leq E$

$$V(x) = \frac{kx^2}{2}$$



→ Región clásicamente prohibida → $V > E$

→ Región clásicamente permitida → $V \leq E$

Escaneado con CamScanner

* En mecánica cuántica:

Funciones de onda estacionarias ψ no son funciones propias de $\hat{T}$ o $\hat{V}$.

$\to \hat{T}\psi \neq T\psi$ $\qquad$ $\to \hat{V}\psi \neq V\psi$

$\downarrow$

T o V no tiene valores definidos

En lugar de $E = T + V$ y $T \geq 0$:

$\to E = \langle T \rangle + \langle V \rangle$ $\qquad$ $\to \langle T \rangle \geq 0$

$\downarrow$

$E - \langle V \rangle \geq 0$

$\downarrow$

$E \geq \langle V \rangle$

$\downarrow$

Existe cierta probabilidad de encontrar la partícula en las regiones clásicamente prohibidas

Para un estado estacionario:

$V \leq E \leftarrow$ Región permitida clásicamente

$$2\pi^2 F^2 m x^2 \leq hF\left(v + \frac{1}{2}\right)$$

$\to \alpha = \dfrac{4\pi^2 F m}{h}$

$$x^2 \leq \left(v + \frac{1}{2}\right)\frac{hF}{2\pi^2 F^2 m}$$

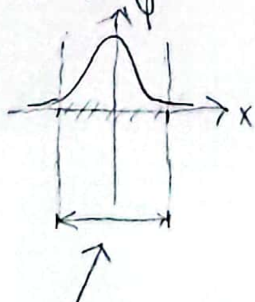
$$x^2 \leq \frac{(2v+1)}{\alpha}$$

$$-\sqrt{\left(\frac{2v+1}{\alpha}\right)} \leq x \leq \sqrt{\left(\frac{2v+1}{\alpha}\right)}$$

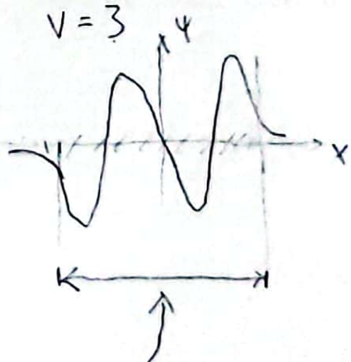
$$-\sqrt{2v+1} \leq \sqrt{\alpha}\, x \leq \sqrt{2v+1}$$

Ejms:

$v = 0$



$v = 3$

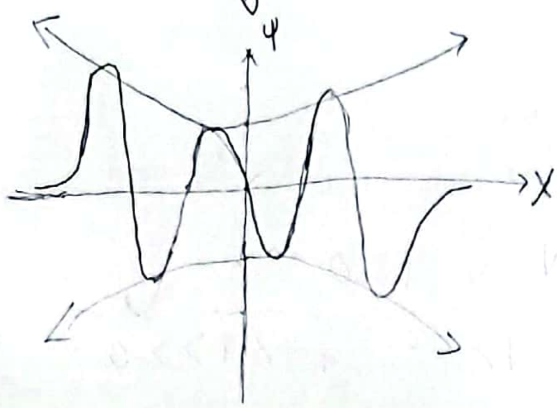


$$x\nearrow \to V\nearrow = \frac{1}{2}Kx^2 \to \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 V\,dx = \langle V\rangle\nearrow$$

$\downarrow$

Número cuántico $\nu\nearrow \to \langle V\rangle\nearrow$

$\downarrow$



$$\to \langle V\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{V}\psi\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 V(x)\,dx$$

$$\to \langle T\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{T}\psi\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\,dx$$

Para el oscilador

$\to \psi^* = \psi$

$\to \hat{V} = V(x)$.

$$\langle T\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \psi\,\psi''\,dx$$

Integrando por partes: $u = \psi$ $\quad dv = \psi''\,dx$

$du = \psi'\,dx \quad v = \psi'$

$$\langle T\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi\psi' - \int|\psi'|^2 dx\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\int\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 dx - \psi\psi'\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\langle T\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 dx - \frac{\hbar^2}{2m}\psi\psi'\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$\nu\nearrow \to$ más nodos $\to \left|\frac{d\psi}{dx}\right|\nearrow \to \langle T\rangle\nearrow$