CAPÍTULO 5

Momento angular

5.1 MEDIDA SIMULTÁNEA DE VARIAS PROPIEDADES

Si Ψ es simultaneamente función propia de $\hat{A}$ y $\hat{B}$:

$$\hat{A}\Psi = s\Psi \qquad \hat{B}\Psi = t\Psi$$

Valores definidos simultaneamente

*Algunos teoremas de mec. cuántica:

Teorema: Conjunto completo de funciones propias simults. ⟵ Operadores conmutan entre sí.

Teorema: Si $\hat{A}, \hat{B} \longrightarrow$ Magnitudes físicas
$\longrightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = 0 \longleftarrow$ conmutan

$\Downarrow$

Existe un conjunto completo Ψ_K que son func. propias de $\hat{A}$ y $\hat{B}$

* Identidades del conmutador $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ siendo $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ lineales:

$\rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$

$\rightarrow [\hat{A}, \hat{A}^n] = 0 \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$

$\rightarrow [k\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, k\hat{B}] = k[\hat{A}, \hat{B}]$

$\rightarrow [\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}] \quad \rightarrow [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$

$\rightarrow [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \quad \rightarrow [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]$

EJEMPLO

* $[\partial/\partial x, \hat{x}] = \partial \hat{x}/\partial x - \hat{x}\,\partial/\partial x \quad \rightarrow \partial/\partial x(\hat{x} F) = x\dfrac{\partial F}{\partial x} + F$

$[\partial/\partial x, \hat{x}] = 1$

$\partial/\partial x(\hat{x}) = \hat{x}\,\partial/\partial x + 1$

$\partial \hat{x}/\partial x - \hat{x}\,\partial/\partial x = 1$

* $[\hat{x}, \hat{p}_x] = \left[\hat{x}, \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\right] = \dfrac{\hbar}{i}[\hat{x}, \partial/\partial x] = -\dfrac{\hbar}{i}[\partial/\partial x, \hat{x}] = -\dfrac{\hbar}{i}$

$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$

$$\boxed{\frac{1}{i}\frac{i}{i} = -\frac{i}{-1} = -i}$$

* $[\hat{x}, \hat{p}_x^2] = [\hat{x}, \hat{p}_x \hat{p}_x] = [\hat{x}, \hat{p}_x]\hat{p}_x + \hat{p}_x[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \hat{p}_x + \hat{p}_x i\hbar$

$= i\hbar \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} i\hbar = \hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} + \hbar^2 \frac{\partial}{\partial x}$

$[\hat{x}, p_x^2] = 2\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} = 2\hbar^2 \hat{D}_x$

* Para una partícula en un sistema 3D:

$\to \hat{H} = \hat{T} + \hat{V}(x, y, z)$

$\to [\hat{x}, \hat{H}] = [\hat{x}, \hat{T} + \hat{V}] = [\hat{x}, \hat{T}] + [\hat{x}, V] = [\hat{x}, \hat{T}] + \cancel{\hat{x}\hat{V} - \hat{V}\hat{x}} \to \emptyset$

$= [\hat{x}, (1/2m)(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2)]$

$= (1/2m)\{[\hat{x}, \hat{p}_x^2] + [\hat{x}, \hat{p}_y^2] + [\hat{x}, \hat{p}_z^2]\}$

$\to [\hat{x}, \hat{p}_y^2] = [\hat{x}, \hat{p}_y]\hat{p}_y + \hat{p}_y[\hat{x}, \hat{p}_y]$

$\to [\hat{x}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}] = [\hat{x}, \hat{p}_y] = \frac{\hbar}{i}[\hat{x}, \frac{\partial}{\partial y}] = \frac{\hbar}{i}\hat{x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\hat{x}$

$= \emptyset$

$\to [\hat{x}, p_y^2] = \emptyset\,\hat{p}_y + \hat{p}_y\,\emptyset = \emptyset$

$\to [\hat{x}, \hat{p}_z^2] = \emptyset$

$\to [\hat{x}, \hat{H}] = (1/2m)[\hat{x}, \hat{p}_x^2] = (1/2m)\,2\hbar^2\,\partial/\partial x$

$[\hat{x}, \hat{H}] = \frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{i\hbar}{m}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

$[\hat{x}, \hat{H}] = \frac{i\hbar}{m}\hat{p}_x$

No conmuta $\hat{x}$ y $\hat{p}_x$

* Como: $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \neq \emptyset$

No existe Ψ que $\left.\begin{array}{l}\hat{x}\Psi = x\Psi \\ \hat{p}_x\Psi = p_x\Psi\end{array}\right\}$ No se puede asignar valores simultáneos a x y p_x

Principio de incertidumbre

No conmuta $\hat{x}$ y $\hat{H}$

Igual sucede con: $[\hat{x}, \hat{H}] = \frac{i\hbar}{m}\hat{p}_x \neq \emptyset$

$\hat{H}\Psi = E\Psi$

Con una E definida

Estado estacionario

Variedad de valores posibles de x

Probabilidad de observar valores posibles de x

$\hookrightarrow$ Postulado de Born

Para una función de estado Ψ que no es función propia de $\hat{A}$

↓

Varios posibles valores resultados cuando se mide A en sistemas idénticos no interactuantes?

Desviación de cada medida respecto a la media:

$$\Delta A = A_i - \langle A \rangle$$

Desviaciones positivas y negativas se cancelan:

↓

Promedio de todas las desviaciones $= 0 \neq$

Varianza de A: Todas las desviaciones se hacen positivas

$$\underbrace{(\Delta A)^2}_{\text{notación mec. cuántica}} = \underbrace{\sigma_A^2}_{\text{estadística}} = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \int \Psi^* (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \Psi \, d\tau$$

Postulado de Born:

→ n sistemas idénticos no interactuantes en el mismo estado Ψ

→ dn_x: numero de sistemas en los que la partícula está entre x y x+dx

Probabilidad de encontrar la partícula entre x y x+dx en el instante t_0:

$$\frac{dn_x}{n} = \overbrace{|\Psi(x,t_0)|^2}^{\text{Densidad de probabilidad}} dx$$

Valor promedio de $\hat{B}$:

$$\langle B \rangle = \int \Psi^* B \Psi \, d\tau$$

Además: $\boxed{(\Delta A)^2 = \sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$

$\sqrt{\sigma_A^2}$: Desviación estándar : $\sigma_A = \Delta A$: Incertidumbre en la propiedad A

Producto de las desviaciones estándar: ← Hacer problema 7.58

$$\boxed{\Delta A \Delta B \geq 1/2 \left| \int \Psi^* [\hat{A}, \hat{B}] \Psi \, d\tau \right|}$$

Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan: $\Delta A \Delta B \geq 0$ → Ambas pueden ser cero

Por definición, para un complejo $z = x+iy$:

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \bar{z}}$$

c. conjugado

* Principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \left| \int \Psi^* [\hat{x}, \hat{p}_x] \Psi \, d\tau \right| = \frac{1}{2} \left| \int \Psi^* i\hbar \Psi \, d\tau \right| = \left| \frac{i\hbar}{2} \right| \left| \int \Psi^* \Psi \, d\tau \right|$$

$\sqrt{(i)(-i)} = 1$

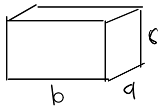
$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Para números complejos

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

EJEMPLO:

Para el estado fundamental de partícula en una caja:



$\rightarrow \psi = f(x)\, g(y)\, h(z)$

$\rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$

$\rightarrow h(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\left(\frac{\pi x}{c}\right)$

$\rightarrow g(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$

en std. fundamental

$\rightarrow \langle x^2 \rangle = \int_0^a x^2 f^2\, dx$

Falta

$$\rightarrow \langle x \rangle = \int_0^a\int_0^b\int_0^c f^* g^* h^* \, x\, f g h \, dx\, dy\, dz$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_0^b g^2 dy}}_{1} \; \underbrace{\cancel{\int_0^c h^2 dz}}_{1} \int_0^a x f^2 dx$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2} \quad (3.91)$$

$$\rightarrow \langle p_x \rangle = \int_0^a f^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} f\, dx = 0 \quad (3.92)$$

Falta

$$\langle x^2 \rangle = a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right)$$

$$\rightarrow \langle p_x^2 \rangle = \int_0^a f^* \frac{\hbar^2}{i^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f\, dx$$

Falta.

$$\langle p_x^2 \rangle = h^2/4a^2$$

$$\rightarrow (\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\boxed{(\Delta A)^2 = \sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

$$= a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right) - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{4}\right) = a^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\right)$$

$$= a^2\left(\frac{\pi^2 - 6}{12\pi^2}\right)$$

$$\Delta x = \frac{a}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}}$$

$$\rightarrow (\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4a^2} - 0$$

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2a}$$

$$\rightarrow \Delta x \Delta p_x = \frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}} = \hbar\sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}} = 0.568\,\hbar > \frac{1}{2}\hbar$$

Si cumple el principio de incertidumbre

* Incertidumbre que relaciona la energía y el tiempo:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar$$

Propiedad física medible del sistema

t: no es un observable, es un parámetro

$\downarrow$

No hay un operador mecano cuántico para el t.

Δt: Tiempo de vida media del estado cuya incertidumbre en la energía es ΔE

* Posibilidad de asignar simultáneamente valores concretos a tres magnitudes físicas A, B y C:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \qquad [\hat{A}, \hat{C}] = 0$$

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \qquad \hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A} = 0$$

$$\hat{A}\, b\,\Psi_1 = \hat{B}\, a\,\Psi_1 \qquad \hat{A}\, c\,\Psi_2 = \hat{C}\, a\,\Psi_2$$

$$\underbrace{ab\Psi_1 = ab\Psi_1}_{\text{Conjunto común de funciones propias para } \hat{A} \text{ y } \hat{B}} \qquad \underbrace{ac\Psi_2 = ac\Psi_2}_{\text{Conjunto común de funciones propias para } \hat{A} \text{ y } \hat{C}}$$

Si hay degeneración para $\hat{A}$:

$$\hat{A}\Psi_1 = a\Psi_1 \qquad \hat{A}\Psi_2 = a\Psi_2 \qquad \Psi_1 \text{ y } \Psi_2 \text{ independientes}$$

Cualquier combinación lineal de Ψ_k es función propia de $\hat{A}$:

$$\hat{A}\sum_k a_k\Psi_k = a_1\hat{A}\Psi_1 + a_2\hat{A}\Psi_2 + \dots$$

$$= a_1 a\Psi_1 + a_2 a\Psi_2 + \dots$$

$$\hat{A}\sum_k a_k\Psi_k = a\sum_k a_k\Psi_k$$

Como $[\hat{A},\hat{B}]=0$ y $[\hat{A},\hat{C}]=0$:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \qquad\qquad \hat{A}\hat{C} = \hat{C}\hat{A}$$

$$\hat{A}\hat{B}\sum_k a_k\Psi_k = \hat{B}\hat{A}\sum_k a_k\Psi_k \qquad\qquad \hat{A}\hat{C}\sum_k a_k\Psi_k = \hat{C}\hat{A}\sum_k a_k\Psi_k$$

$$\hat{A}\sum_k a_k\hat{B}\Psi_k = \hat{B}\, a\sum_k a_k\Psi_k \qquad\qquad \hat{A}\sum_k a_k\hat{C}\Psi_k = \hat{C}\, a\sum_k a_k\Psi_k$$

$$\underbrace{\hat{A}\underbrace{\sum_k a_k\hat{B}\Psi_k} = a\underbrace{\sum_k a_k\hat{B}\Psi_k}}_{\text{Función propia de } \hat{A}} \checkmark \qquad\qquad \underbrace{\hat{A}\underbrace{\sum_k a_k\hat{C}\Psi_k} = a\underbrace{\sum_k a_k\hat{C}\Psi_k}}_{\text{Función propia de } \hat{A}} \checkmark$$

Pero entre $\hat{B}$ y $\hat{C}$ como no se ha establecido que $[\hat{B},\hat{C}]=0$, es decir que puede

$$[\hat{B},\hat{C}] \neq 0$$

$$\hat{B}\hat{C} \neq \hat{C}\hat{B}$$

$$\hat{B}\hat{C}\sum_k a_k\Psi_k \neq \hat{C}\hat{B}\sum_k a_k\Psi_k$$

$$\hat{B}\sum_k a_k\hat{C}\Psi_k \neq \hat{C}\sum_k a_k\hat{B}\Psi_k$$

$$\sum_k a_k\underbrace{\hat{B}\hat{C}\Psi_k} \neq \sum_k a_k\underbrace{\hat{C}\hat{B}\Psi_k}$$

Aún no se ha establecido

Pero si: $[\hat{B},\hat{C}] = \hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B} = 0$, $\hat{B}\hat{C} = \hat{C}\hat{B}$:

$$\sum_k a_k\hat{B}\hat{C}\Psi_k = \sum_k a_k\hat{B}\hat{C}\Psi_k \checkmark$$

Entonces para tener un conjunto completo de func. propias de 3 operadores o más debe:

$$[\hat{A},\hat{B}]=0, \quad [\hat{A},\hat{C}]=0, \quad [\hat{B},\hat{C}]=0, \dots,$$