UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES

ECONOMETRÍA I

Ayudantía 6

Profesor: *Víctor Macías E.*
Ayudante: *Juan Felipe Ly*
30 de Septiembre del 2021

Ejercicio 1

Considere el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_i + u_i$$

donde u se distribuye independiente e idénticamente con media condicional nula y varianza σ^2. Un econometrista ha estimado este modelo con una muestra de datos X e Y, y tiene lo siguiente:

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 120 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 40 \\ 230 \end{pmatrix}$$

Por otro lado usted sabe que:

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = 124$$

En base a esta información, conteste lo siguiente:

a) ¿Cuál es el tamaño de la muestra con que se llevó a cabo esta estimación?

Respuesta. Para el modelo simple, la matriz $X'X$ tiene la siguiente forma:

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, la matriz $X'Y$ tiene la siguiente forma:

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el tamaño de la muestra es $n = 5$.

b) Encuentre $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

Respuesta. Los promedios de X e Y vienen dados por:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

c) Encuentre $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$

Respuesta. El estimador de MCO viene dado por:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 120 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 40 \\ 230 \end{pmatrix}$$

Recordar la inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (adj(A))^T$$

El cálculo del determinante es:

$$|X'X| = 5 \cdot 120 - 20 \cdot 20 = 200$$

La matriz adjunta de $X'X$ es:

$$adj(X'X) = \begin{pmatrix} 120 & -20 \\ -20 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora, la inversa de $X'X$ es:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{200} \cdot \begin{pmatrix} 120 & -20 \\ -20 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & 0.025 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto para calcular $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & 0.025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.75 \end{pmatrix}$$

d) Sabiendo que $\sum \hat{u_i}^2 = 1,5$, calcule la matriz de covarianzas para $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$. Utilice el estimador insesgado de σ^2.

Respuesta. La matriz de varianzas y covarianzas viene dada por:

$$var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$$var(\hat{\beta}) = \frac{\sum \hat{u_i}^2}{n-k-1} (X'X)^{-1}$$

$$var(\hat{\beta}) = \frac{1,5}{3} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & 0.025 \end{pmatrix}$$

$$var(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.05 \\ -0.05 & 0.0125 \end{pmatrix}$$

e) Calcule el R^2 y el R^2 ajustado ($\overline{R}^2$).

Respuesta. El R^2 viene dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u_i}^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{1,5}{124}$$

$$R^2 = 0.9879$$

Ejercicio 2

Suponga un modelo dado por:

$$y_t = \alpha + \beta \cdot x_t + u$$

Determine si los siguientes estimadores de la pendiente son sesgados:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(y_t - \overline{y})}{\sum(x_t - \overline{x})}$$

Respuesta:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(y_t - \overline{y})}{\sum(x_t - \overline{x})}$$

$$E(\hat{\beta}_1) = E(\frac{\sum(y_t - \overline{y})}{\sum(x_t - \overline{x})})$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{\sum(x_t - \overline{x})} E(\sum(y_t - \overline{y}))$$

Considerando que:

$$(y_t - \overline{y}) = \beta(x_t - \overline{x}) + u_t$$

Reemplazando:

$$E(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{\sum(x_t - \overline{x})} E(\sum(\beta(x_t - \overline{x}) + u_t))$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{\sum(x_t - \overline{x})} \sum(\beta(x_t - \overline{x}) + E(u_t))$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{\sum(x_t - \overline{x})} \sum(\beta(x_t - \overline{x}))$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta \frac{\sum(x_t - \overline{x})}{\sum(x_t - \overline{x})}$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta$$

Por lo tanto, es insesgado.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum y_t}{\sum x_t}$$

Respuesta:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum y_t}{\sum x_t}$$
$$E(\hat{\beta}_2) = E(\frac{\sum y_t}{\sum x_t})$$
$$= \frac{\sum E(y_t)}{\sum x_t}$$

Reemplazando el modelo:

$$= \frac{\sum E(\alpha + \beta x_1 + u)}{\sum x_t}$$
$$= \frac{\sum(\alpha + \beta x_t)}{\sum x_t}$$
$$= \frac{n\alpha + \beta \sum x_t}{\sum x_t}$$
$$E(\hat{\beta}_2) = \frac{n\alpha}{\sum x_t} + \beta$$

Por lo tanto, es sesgado.

Analítico

Miguel le comenta a su amigo Pedro que incluir una gran cantidad de variables a un modelo de regresión lineal, no tiene mayor incidencia sobre el R^2 del modelo. Pedro le refuta que inevitablemente el R^2 tenderá a aumentar. Explique el razonamiento de Pedro para realizar este postulado. Demuestre que en el caso extremo en que $n = k$ el R^2 del modelo es igual a uno.

Respuesta: Pedro está en lo correcto puesto que al agregar variables al modelo, independiente de si estas son significativas o no, el R^2 se mantendrá igual o aumentará de valor pero nunca disminuirá. Esto dado que los cuadrados de los residuos nunca aumentan cuando se añaden variables.

En el caso que $n = k$ se tiene que la matriz X se vuelve cuadrada, y al ser de rango completo será invertible. Luego podemos redefinir nuestro estimador MCO de la siguiente forma:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y'$$
$$\hat{\beta} = X^{-1}(X')^{-1}X'Y$$
$$\hat{\beta} = X^{-1}Y$$

Luego, los residuos del modelo quedan de la siguiente manera:

$$\hat{u} = Y - X\hat{\beta}$$

$$\hat{u} = Y - XX^{-1}Y$$

$$\hat{u} = 0$$

Luego:

$$SRC = \sum \hat{u_i}^2 = 0$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u_i}^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2}$$

$$R^2 = 1$$