lista01

Juan Fernando Ramírez, 20666; Jonathan Espinoza 20022

6 de agosto de 2023

1. Determinar si las siguientes matrices admiten una descomposición espectral $Q\Lambda Q^{-1}$. En caso afirmativo, hallar su descomposición. En caso negarivo, proporcionar un argumento para mostrar que no es posible

1.1. $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ (A - \lambda I)v &= 0 \\ A - \lambda I &= \begin{bmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 7-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &\rightarrow (7-\lambda)^2(5-\lambda) = 0 \\ &\rightarrow \lambda_{1,2} = 7, mult.alg. = 2 \\ &\lambda_3 = 5, mult.alg = 1 \end{aligned}$$

$\lambda = 5$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7-5 & 0 & 0 \\ 2 & 7-5 & 2 \\ -2 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{A_1 \Leftrightarrow A_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{A/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ x + y + z = 0 \rightarrow x &= 0 \\ y &= -z \\ z &= t \\ y &= -t \\ \rightarrow q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \rightarrow q_3 &= t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ E_{\lambda=5} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ mult.alg &= 1 \\ mult.geom &= 1 \end{aligned}$$

$\lambda = 7$

$$\begin{bmatrix} 7-7 & 0 & 0 \\ 2 & 7-7 & 2 \\ -2 & 0 & 5-7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_1 \Leftrightarrow A_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_2 \Leftrightarrow A_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A/2, A_2 + A_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + z = 0 \rightarrow x = -z$$

$$z = t$$

$$y = 0$$

$$\rightarrow q_1 = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \rightarrow q_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = s$$

$$x = 0$$

$$z = 0$$

$$\rightarrow q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow q_2 = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow q_2 = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda=7} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$mult.alg = 2$$

$$mult.geom = 2$$

Se comprueba directamente que estos tres vectores son linealmente independientes. Por tanto, si se tiene:

$$Q = [q_1, q_2, q_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar la matriz admite una descomposición espectral entonces $Q\Lambda Q^{-1} = A$ se cumple.

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} Adj(Q^T)$$

$$|Q| = -1(1) = -1$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} Adj(P^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} Adj(Q^T) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q\Lambda Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = A$$

1.2. $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ (A - \lambda I)v &= 0 \\ A - \lambda I &= \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &\to -(2+\lambda)(2-\lambda) = 0 \\ &\to -(4-\lambda^2) = 0 \\ &\to -4+\lambda^2 = 0 \\ &\to \lambda_1 = 2, mult.alg. = 1 \\ \lambda_2 &= -2, mult.alg = 1 \end{aligned}$$

$\lambda = 2$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} &\to \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ -4x + y = 0 &\to x = \frac{y}{4} \\ y &= t \\ x &= \frac{t}{4} \\ \to q_1 = \begin{pmatrix} \frac{t}{4} \\ t \end{pmatrix} \to q_1 = t \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} &\to q_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ E_{\lambda=2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ mult.alg &= 1 \\ mult.geom &= 1 \end{aligned}$$

$\lambda = -2$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2+2 & 1 \\ 0 & 2+2 \end{bmatrix} &\to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ x = t \to q_2 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} &\to q_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ E_{\lambda=-2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ mult.alg &= 1 \\ mult.geom &= 1 \end{aligned}$$

Se comprueba directamente que estos tres vectores son linealmente independientes. Por tanto, si se tiene:

$$Q = [q_1, q_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar la matriz admite una descomposición espectral entonces $Q\Lambda Q^{-1} = A$ se cumple.

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} Adj(Q^T)$$

$$|Q| = -4(1) = -4$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Adj(P^T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} Adj(Q^T) = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}}{-4} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$Q\Lambda Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = B$$

1.3. $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$Av = \lambda v$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\to (3-\lambda)^4 = 0 \to \lambda = 3$$

$$\to \lambda_1 = 3, mult.alg. = 4$$

$\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = t$$

$$z = t \rightarrow q_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow q_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow q_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda=3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$mult.alg = 4$$

$$mult.geom = 2$$

Se comprueba que el autovalor es defectuoso debido a que su multiplicidad algebraica excede su multiplicidad geométrica por lo que no es diagonalizable.

2.

2.1. Mostrar que si A es una matriz de rango 1, de la forma $A = uv^T$, entonces $\|A\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$.

La norma 2 de una matriz está dada por la raíz cuadrada del valor absoluto del autovalor máximo de la matriz A^TA. Dado que $A = uv^T$, entonces A^TA:

$$A^TA = (uv^T)^T(uv^T) = (vu^T)(uv^T) = v(u^Tu)v^T$$

Dado u^Tu un escalar, se puede reescribir como α:

$$A^TA = \alpha vv^T$$

Dado A^TA es una matriz de rango 1, entonces solo posee un autovalor no nulo, que es igual a $\alpha\|v\|_2^2$.

Por lo tanto, el autovalor máximo de A^TA es $\alpha\|v\|_2^2$, y la norma 2 de A es la raíz cuadrada de este autovalor:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\alpha\|v\|_2^2} = \sqrt{\alpha}\|v\|_2$$

Finalmente obtenemos:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\|u\|_2^2}\|v\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$$

Por lo tanto, sea A una matriz de rango 1, de la forma $A = uv^T$, entonces $\|A\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$.$\square$

2.2. ¿Vale lo mismo para la norma de Frobenius? Muestre o de un contraejemplo

La norma de Frobenius de una matriz A se define como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todos sus elementos. Para una matriz A de tamaño $m \times n$, se puede expresar como:

$$||A||_{frobenius} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Si A es una matriz de rango 1 de la forma $A = uv^T$, donde u es un vector columna de tamaño $m \times 1$ y v es un vector fila de tamaño $1 \times n$, entonces cada elemento de A se puede expresar como $a_{ij} = u_i v_j$.

Por lo tanto, la norma de Frobenius de A se puede expresar como:

$$||A||_{frobenius} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (u_i v_j)^2}$$

Dado que u_i y v_j son escalares, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$||A||_{frobenius} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i^2 v_j^2}$$

Podemos separar la suma en dos sumas separadas:

$$||A||_{frobenius} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{m} u_i^2)(\sum_{j=1}^{n} v_j^2)}$$

Lo que es igual a:

$$||A||_{frobenius} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}$$

Que es igual a:

$$||A||_{frobenius} = ||u||_{frobenius}||v^T||_{frobenius}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que si A es una matriz de rango 1, de la forma $A = uv^T$, entonces $||A||_{frobenius} = ||u||_{frobenius}||v^T||_{frobenius}$.

3. Calcular (a mano) la descomposición SVD de las siguientes matrices:

3.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

Primero, se calcula AA^T:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego, encontramos los valores propios $(AA^T - \lambda I)$.

Para $AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, se obtiene:

$$\det(AA^T - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1.$$

Igualando a cero y resolviendo para λ:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Los vectores propios se encuentran resolviendo las ecuaciones $(AA^T - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(A^T A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Para $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, los vectores propios son:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (-1-\sqrt{5})^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, los vectores propios son:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (-1+\sqrt{5})^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, las matrices U y V son:

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \\ \frac{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{1+\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}} & \frac{1+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{1+\left(1+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(-1-\sqrt{5})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(-1+\sqrt{5})^2}} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{1+(-1-\sqrt{5})^2}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{1+(-1+\sqrt{5})^2}} \end{bmatrix}.$$

Los valores singulares en la matriz diagonal S son las raíces cuadradas de los valores propios:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la descomposición SVD de A es $A = U\Sigma V^T$.

3.2. $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

Primero, se calcula BB^T y $B^T B$ para la matriz B:

$$B^T B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

Luego, encontramos los valores propios de BB^T y $B^T B$, que son los mismos:

$$\lambda = 9, 2, 0$$

Los vectores propios se encuentra resolviendo las ecuaciones $(BB^T - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(B^T B - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Para $\lambda_1 = 9$, los vectores propios son:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 2$, los vectores propios son:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_3 = 0$, los vectores propios son:

$$\mathbf{u}_3 = \emptyset, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, las matrices U y V son:

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}.$$

Los valores singulares en la matriz diagonal Σ son las raíces cuadradas de los valores propios:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la descomposición SVD de B es $B = U\Sigma V^T$.

3.3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$:

Primero, se calcula CC^T y C^TC para la matriz C :

$$C^TC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, encontramos los autovalores de C^TC resolviendo para $\det(C^TC - \lambda I) = 0$.

$$\lambda_1 = 15 + \sqrt{221} \quad \text{y}$$
$$\lambda_2 = 15 - \sqrt{221}.$$

Para cada autovalor, los vectores propios son :

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{-10+\sqrt{221}}{11\sqrt{1+(-10+\sqrt{221})^2/121}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+(-10+\sqrt{221})^2/121}} \end{bmatrix}$$

y

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-10-\sqrt{221}}{11\sqrt{1+(-10-\sqrt{221})^2/121}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+(-10-\sqrt{221})^2/121}} \end{bmatrix}$$

Encontramos los autovalores de CC^T resolviendo la ecuación característica $\det(CC^T - \lambda I) = 0$. Para cada autovalor, encontramos el vector propio resolviendo $(CC^T - \lambda I)u = 0$:

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{(4+(2(-10+\sqrt{221}))/11)}{\sqrt{(3+(-10+\sqrt{221})/11)^2+(4+(2(-10+\sqrt{221}))/11)^2}} \\ \frac{(3+(-10+\sqrt{221})/11)}{\sqrt{(3+(-10+\sqrt{221})/11)^2+(4+(2(-10+\sqrt{221}))/11)^2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \frac{(4+(2(-10-\sqrt{221}))/11)}{\sqrt{(3+(-10-\sqrt{221})/11)^2+(4+(2(-10-\sqrt{221}))/11)^2}} \\ \frac{(3+(-10-\sqrt{221})/11)}{\sqrt{(3+(-10-\sqrt{221})/11)^2+(4+(2(-10-\sqrt{221}))/11)^2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y dos vectores propios correspondientes a los autovalores cero, que pueden ser cualquier par de vectores ortogonales al espacio generado por u_1 y u_2:

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estos vectores propios son las columnas de la matriz U.
Finalmente:
U:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{(4+\frac{2}{11}(\sqrt{221}-10))}{\sqrt{(\frac{3}{11}(\sqrt{221}-10)+3)^2+(\frac{2}{11}(\sqrt{221}-10)+4)^2}} & \frac{(4+\frac{2}{11}(-10-\sqrt{221}))}{\sqrt{(\frac{3}{11}(-10-\sqrt{221})+3)^2+(\frac{2}{11}(-10-\sqrt{221})+4)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{(\frac{3}{11}(\sqrt{221}-10)+3)}{\sqrt{(\frac{3}{11}(\sqrt{221}-10)+3)^2+(\frac{2}{11}(\sqrt{221}-10)+4)^2}} & \frac{(\frac{3}{11}(-10-\sqrt{221})+3)}{\sqrt{(\frac{3}{11}(-10-\sqrt{221})+3)^2+(\frac{2}{11}(-10-\sqrt{221})+4)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Σ:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{15+\sqrt{221}} & 0 \\ 0 & \sqrt{15-\sqrt{221}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{(\sqrt{221}-10)}{11\sqrt{1+\frac{1}{121}(\sqrt{221}-10)^2}} & \frac{(-10-\sqrt{221})}{11\sqrt{1+\frac{1}{121}(-10-\sqrt{221})^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{121}(\sqrt{221}-10)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{121}(-10-\sqrt{221})^2}} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la descomposición en valores singulares de la matriz C es $C = U\Sigma V^T$.

4. Utilice la descomposición SVD de la matriz B en el ejercicio anterior, para calcular los siguientes:

4.1. rank(B)

Para encontar el rango de B, podemos reducir la matriz a su forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Dado en esta forma ambas filas son linealmente independientes, el rango de la matriz es 2.

4.2. Ker(B)

Dada la matriz $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, el sistema de ecuaciones lineales es:

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

En este caso, de la segunda ecuación se deduce $y = -x$. Sustituyendo, en la primera ecuación obtenemos:

$$-2x + 2(-x) + z = 0 \implies z = 4x$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son de la forma $(x, -x, 4x)$ para cualquier $x \in R$. Tal que,

$$\ker(B) = \{(x, -x, 4x) : x \in R\}. \tag{1}$$

4.3. Im(B)

Dada la matriz $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, su forma escalonada es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Por lo que su base es: $\{(2, 1), (-2, 1)\}$.

Por lo tanto, cualquier vector en la imagen de B puede escribirse como una combinación lineal. Por lo tanto

$$\mathrm{Im(B)} = \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

4.4. $\|B\|_2$ y $\|B\|_F$.

$$\|B\|_2 = 3 \tag{3}$$

$$B^T B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, calculamos la traza de $B^T B$:

$$\mathrm{tr}(B^T B) = 5 + 5 + 1 = 11$$

Finalmente, tomamos la raíz cuadrada de la traza para obtener la norma de Frobenius de B:

$$\|B\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(B^T B)} = \sqrt{11}$$

Métodos Numéricos II

lista01

Juan Fernando Ramírez 20666 ¶

Inciso 1

In [ ]:
```
import numpy as np
from scipy import linalg as lg
```

In [2]:
```
A = np.array([[7.,0,0], [2,7,2], [-2,0,5]])
B = np.array([[-2.,1], [0,2]])
C = np.array([[3.,1,0,0], [0,3,0, 0], [0,0,3,1], [0,0,0,3]])

print(A, end='\n\n')
print(B, end='\n\n')
print(C)
```

```
[[ 7.  0.  0.]
 [ 2.  7.  2.]
 [-2.  0.  5.]]

[[-2.  1.]
 [ 0.  2.]]

[[3. 1. 0. 0.]
 [0. 3. 0. 0.]
 [0. 0. 3. 1.]
 [0. 0. 0. 3.]]
```

1.A

In [3]:
```
print(A)
```

```
[[ 7.  0.  0.]
 [ 2.  7.  2.]
 [-2.  0.  5.]]
```

In [4]:
```
# descomposición espectral
SA, XA = lg.eig(A)

print(SA, end='\n\n')
print(XA)
```

```
[7.+0.j 5.+0.j 7.+0.j]

[[ 0.          0.          0.70710678]
 [ 1.         -0.70710678  0.        ]
 [ 0.          0.70710678 -0.70710678]]
```

In [5]:
```
np.diag(np.real(SA))
```

Out[5]:
```
array([[7., 0., 0.],
       [0., 5., 0.],
       [0., 0., 7.]])
```

In [6]:
```
# SA es un vector complejo, np.real calcula la parte real a cada componente
np.real(SA)
```

Out[6]:
```
array([7., 5., 7.])
```

In [7]:
```
# reconstruimos la matrix A como A = XSX^{-1}
# como no es defectuosa, resulta en la A original

recA = XA @ np.diag(np.real(SA)) @ np.linalg.inv(XA)
recA
```

Out[7]:
```
array([[ 7.,  0.,  0.],
       [ 2.,  7.,  2.],
       [-2.,  0.,  5.]])
```

1.B

In [8]:
```
print(B)
```

```
[[-2.  1.]
 [ 0.  2.]]
```

In [9]:
```
SB, XB = lg.eig(B)

print(SB, end='\n\n')
print(XB)
```

```
[-2.+0.j  2.+0.j]

[[1.         0.24253563]
 [0.         0.9701425 ]]
```

In [10]:
```
recB = (XB) @ np.diag(np.real(SB)) @ np.linalg.inv(XB)
recB
```

Out[10]:
```
array([[-2.,  1.],
       [ 0.,  2.]])
```

1.C

In [11]:
```
print(C)
```

```
[[3. 1. 0. 0.]
 [0. 3. 0. 0.]
 [0. 0. 3. 1.]
 [0. 0. 0. 3.]]
```

In [12]:
```
SC, XC = lg.eig(C)

print(SC, end='\n\n')
print(XC)
```

```
[3.+0.j 3.+0.j 3.+0.j 3.+0.j]

[[ 1.00000000e+00 -1.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  6.66133815e-16  0.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  1.00000000e+00 -1.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00  6.66133815e-16]]
```

In [13]:
```
# reconstruimos la matrix C como C = XSX^{-1}
# como es defectuosa, resulta diferente de la C original

recC = XC @ np.diag(np.real(SC)) @ np.linalg.inv(XC)
recC
```

Out[13]:
```
array([[3.  , 0.25, 0.  , 0.  ],
       [0.  , 3.  , 0.  , 0.  ],
       [0.  , 0.  , 3.  , 0.25],
       [0.  , 0.  , 0.  , 3.  ]])
```