Punto 20. Tecnicas de Conteo

Expresamos primeramente como una formula

$$C_r^n = \binom{n+r-1}{r} = \underbrace{\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}}$$

→ Para representar esta distribución se necesitan r elementos y n-1 separadores

La selección por tanto de estas posiciones describe todas las formas de seleccionar r de la forma $r+(n-1) = r+n-1$

Como el numerador $(n+r-1)$ corresponde al número de maneras de elegir tales r posiciones, describiendo por tanto todas las formas posibles de seleccionar r repetidamente en un conjunto cerrado:

$$\rightarrow C_r^n = \binom{n+r-1}{r}$$

Puntos 1, 2, 3 Axiomas de Probabilidad

Para comprobar la medida de probabilidad, se comprueba:

1) No negatividad

$P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$, Queda: $P_1(A) \geq 0$ ^ $P_2(A) \geq 0$, $\forall A \in F$

Como $a_1, a_2 \in R^+$, se tiene:

$$P(A) = a_1 P_1(A) + a_2 P_2(A) \geq 0$$

"De cualquier forma se cumple el axioma de no negatividad"

2) Normalización

$P(\Omega) = 1$, Sabiendo esto: $P(\Omega) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = a_1 + a_2 = 1$ //

3) Aditividad finita

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos disjuntos, se cumple:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

La aditividad sería:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = a_1 P_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + a_2 P_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Por esta propiedad aditiva sería:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = a_1 \sum_{i=1}^{n} P_1(A_i) + a_2 \sum_{i=1}^{n} (a_1 P_1(A_i) + a_2 P_2(A_i))$$

Por esto, $\mathbb{P}$ cumple la aditividad finita.

Finalmente $\mathbb{P}$ cumple los axiomas de Kolmogorov y es una medida de probabilidad.

Subpunto 2

Dado $\Omega = \{1,2\}$ $\quad \mathcal{F} = \sigma(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Revisamos intervalo por intervalo y tenemos:

Con el subconjunto $(A \in F)$

$P(A) \geq \emptyset$, Revisamos: $P(\emptyset) = \emptyset$, $P(\{1\}) = 1/3$, $P(\{2\}) = 2/3$, $P(\{1,2\}) = 1$

→ Todos los valores cumplen la desigualdad ya que son positivos, por tanto este axioma se cumple

Demostración Axioma 2:

Normalizar

Para este espacio muestral $\Omega = \{1,2\}$ $\quad P(\Omega) = \underbrace{P(\{1,2\}) = 1}_{\text{Esto comprueba la normalización}}$

Axioma 3:

Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ son disjuntos queda:

$$P(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

Revisando los casos:

$A_1 = \{1\}$ y $A_2 = \{2\}$ entonces $A_1 \cup A_2 = \{1,2\}$ y:

$$P(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(\{1,2\}) = 1$$

y:

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} = \underbrace{1}_{\text{se cumple el axioma}}$$

La función $\mathbb{P}$ cumple los axiomas, por tanto es una medida de probabilidad válida.

Punto 12. Generalidades de probabilidad

Parte a) El número de obligaciones posibles $\Omega(N, n_0)$ está caracterizado por:

$$\Omega(N, n_0) = \frac{N!}{n_0!\,n_1!}$$

1. Teniendo N partículas y con posibilidad de niveles de energía n_0 y n_1 (donde $n_1 = N - n_0$)

Usando E_0 como identificador del estado de energía n_0 llegando a las N lo induce los coeficientes binomiales.

Parte b) Entropía relacionada con el numero de microestados

$S(N, n_0) = K_B \ln(\Omega) \Rightarrow$ Con aproximación Stirling $\Rightarrow \ln(N!) = N\ln(N) - N$

Para nuestra expresión:

$\Omega(N, n_0)$: $\ln(\Omega) = \ln(N!) - \ln(n_0!) - \ln(n_1!)$, sustituyendo:

$$\ln(\Omega) \approx [N\ln(N) - N] - [n_0\ln(n_0) - n_0] - [n_1\ln(n_1) - n_1]$$

Agrupando $\ln(\Omega) \simeq N\ln(N) - n_0\ln(n_0) - n_1\ln(n_1)$

$$S(N, n_0, n_1) = K_B\left[N\ln(N) - \sum_{i=0}^{1} n_i\ln(n_i)\right]$$

Parte c)

Implicaciones de $x = \frac{n_1}{N}$; $n_1 = xN$ y $n_0 = N - n_1 = N(1-x)$

A la ecuación de entropía sustituimos:

$n_0 = N(1-x)$ y $n_1 = Nx$

$$S(N, x) = K_B\left[N\ln(N) - N(1-x)\ln(N(1-x)) - Nx\ln(Nx)\right]$$

Agrupando términos:

$$S(N, n_0, n_1) = k_B N \left[\ln(N) - (1-x)\ln(N) - (1-x)\ln(1-x) - x\ln(N) - x\ln(x) \right]$$

Simplificando:

$$S(N, n_0, n_1) = k_B N \left[-(1-x)\ln(1-x) - x\ln(x) \right]$$

Por lo tanto, finalmente:

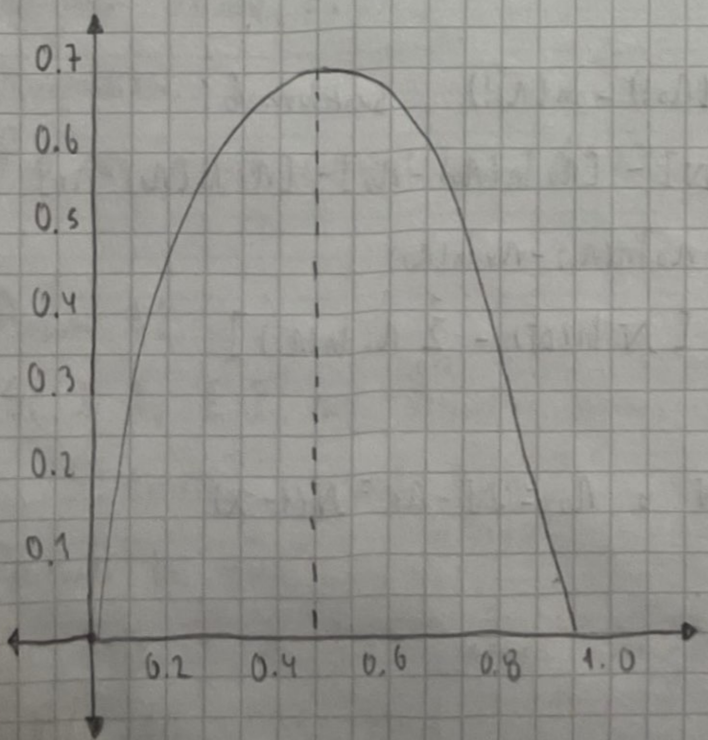
$$S(N, x) = -k_B N \left[x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \right]$$

Parte d)

Para graficar $$\frac{S(N,x)}{k_B N} = \underbrace{-\left[x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \right]}$$

- Esta es una función estándar para la entropía de mezcla. El rango de x está entre $[0,1]$
- La entropía se maximiza en $x = 0.5$, donde la distribución de partículas entre los dos niveles es más uniforme.

Gráfica:



$(- - -) = x = 0.5$ (máxima S)

$(——) = -[x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)]$

Punto E)

Por parte de la primera ley de la termodinámica:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N$$

Expresando $E = n_0 \varepsilon_0 + n_1 \varepsilon_1 = N(1-x)\varepsilon_0 + N x \varepsilon_1$

Queda $E = N\varepsilon_0 + N x(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)$

De acá:

$$x = \frac{E - N\varepsilon_0}{N(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}$$

La derivada $\frac{\partial x}{\partial E}$ es:

$$\frac{\partial x}{\partial E} = \frac{1}{N(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}$$

Con base en el anterior literal (C):

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -k_B N\left[\ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1\right]$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -k_B N\left[\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]$$

Finalmente:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial E}$$; Sustituyendo: $$\frac{1}{T} = -k_B N \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \cdot \frac{1}{N(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}$$

$$\frac{1}{T} = -\frac{k_B \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}$$ $\Rightarrow$ Ya queda igual y se comprueba.

Ejercicios técnica de muestreo (7, 10, 11)

10. Partimos de la ecuación general de velocidad media, que es:

$$V_{med} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}}$$ $\rightarrow$ 1. Distancia total $= d_1 + d_2 + d_3$

Ahora el tiempo es = tramo 1: $\frac{d_1}{v_1}$

tramo 2: $\frac{d_2}{v_2}$

tramo 3: $\frac{d_3}{v_3}$

$\rightarrow$ Ahora queda el tiempo total: $\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3}$

Sustituyendo el tiempo, nos queda como:

$$V = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3}}$$

Con esta ponderación modificada ya queda finalmente.

11. $x = x_1 + 2x_2 - x_3$

$x_1 \sim \Gamma(2,3)$ Distribución gamma con forma $k=2$ y $\theta = 3$
$x_2 \sim N(5,2)$ Distribución normal con media 5 y desviación estándar 2
$x_3 \sim U(0,10)$ Distribución uniforme en el intervalo $[0:10]$

Número de eventos $N = 10^4$

Siguiente en python.

D. Varianza de la media

$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$ Pero bastamente para $N=2$ la media es:

$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ → Acá debido a la expansión de la suma de la varianza

Expandiendo la varianza de la suma:

$Var(x_1 + x_2) = Var(x_1) + Var(x_2) + 2\,Cov(x_1, x_2)$

Reorganizando tenemos:

$Var(\bar{x}) = \frac{1}{4} Var(x_1) + \frac{1}{4} Var(x_2) + Cov(x_1, x_2)$ → y con esto ya concuerda en $N=2$