1

Solución:
Demostraremos cada caso utilizando **inducción matemática** e **identidades trigonométricas**.

Primera relación recursiva

Dado:

- Relación recursiva:

$$x_{n+1} = 4x_n - x_n^2$$

- Valor inicial:

$$x_0 = 4\sin^2\theta$$

Objetivo:

Demostrar que:

$$x_{n+1} = 4\sin^2\left(2^{n+1}\theta\right)$$

Paso base ($n = 0$):

Calculamos x_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4x_0 - x_0^2 \\ &= 4\left(4\sin^2\theta\right) - \left(4\sin^2\theta\right)^2 \\ &= 16\sin^2\theta - 16\sin^4\theta \\ &= 16\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) \\ &= 16\sin^2\theta\cos^2\theta \end{aligned}$$

Aplicamos la identidad trigonométrica:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x_1 &= 16(\sin\theta\cos\theta)^2 \\ &= 16\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 \\ &= 16 \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{4} \\ &= 4\sin^2 2\theta \\ &= 4\sin^2\left(2^1\theta\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula se cumple para $n = 0$.

Paso inductivo:

Hipótesis de inducción: Supongamos que para algún $n \geq 0$ se cumple:

$$x_n = 4\sin^2\left(2^n\theta\right)$$

Demostrar que:

$$x_{n+1} = 4\sin^2\left(2^{n+1}\theta\right)$$

Desarrollo:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 4x_n - x_n^2 \\
&= 4\left(4\sin^2\left(2^n\theta\right)\right) - \left(4\sin^2\left(2^n\theta\right)\right)^2 \\
&= 16\sin^2\left(2^n\theta\right) - 16\sin^4\left(2^n\theta\right) \\
&= 16\sin^2\left(2^n\theta\right)\left(1-\sin^2\left(2^n\theta\right)\right) \\
&= 16\sin^2\left(2^n\theta\right)\cos^2\left(2^n\theta\right)
\end{aligned}
$$

Usando la identidad:

$$\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$$

Tenemos:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 16(\sin\left(2^n\theta\right)\cos\left(2^n\theta\right))^2 \\
&= 16\left(\frac{\sin\left(2^{n+1}\theta\right)}{2}\right)^2 \\
&= 16\cdot\frac{\sin^2\left(2^{n+1}\theta\right)}{4} \\
&= 4\sin^2\left(2^{n+1}\theta\right)
\end{aligned}
$$

Conclusión: Por inducción, la fórmula se cumple para todo $n \geq 0$.

Segunda relación recursiva

Dado:

- Relación recursiva:

$$x_{n+1} = 4x_n - 4x_n^2$$

- Valor inicial:

$$x_0 = \sin^2\theta$$

Objetivo:

Demostrar que:

$$x_{n+1} = \sin^2\left(2^{n+1}\theta\right)$$

Paso base ($n = 0$):

Calculamos x_1:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4x_0 - 4x_0^2 \\
&= 4\sin^2\theta - 4\sin^4\theta \\
&= 4\sin^2\theta\left(1-\sin^2\theta\right) \\
&= 4\sin^2\theta\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

Aplicamos la identidad:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4(\sin\theta\cos\theta)^2 \\
&= 4\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 \\
&= 4\cdot\frac{\sin^2 2\theta}{4} \\
&= \sin^2 2\theta \\
&= \sin^2\left(2^1\theta\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la fórmula se cumple para $n = 0$.

Paso inductivo:

Hipótesis de inducción: Supongamos que para algún $n \geq 0$ se cumple:

$$x_n = \sin^2\left(2^n \theta\right)$$

Demostrar que:

$$x_{n+1} = \sin^2\left(2^{n+1} \theta\right)$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4x_n - 4x_n^2 \\ &= 4\sin^2\left(2^n\theta\right) - 4\sin^4\left(2^n\theta\right) \\ &= 4\sin^2\left(2^n\theta\right)\left(1 - \sin^2\left(2^n\theta\right)\right) \\ &= 4\sin^2\left(2^n\theta\right)\cos^2\left(2^n\theta\right) \end{aligned}$$

Utilizamos la identidad:

$$\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4(\sin\left(2^n\theta\right)\cos\left(2^n\theta\right))^2 \\ &= 4\left(\frac{\sin\left(2^{n+1}\theta\right)}{2}\right)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{\sin^2\left(2^{n+1}\theta\right)}{4} \\ &= \sin^2\left(2^{n+1}\theta\right) \end{aligned}$$

Conclusión: Por inducción, la fórmula se cumple para todo $n \geq 0$.