3

Encontrar una fórmula para aproximar la integral de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ usando la **regla de Simpson simple**.

- Solución:
  - Dividiendo el intervalo $[a, b]$ en dos subintervalos iguales donde se cumple:

$$h = \frac{b-a}{2}$$

  - Los puntos serán equidistantes entre sí de la forma:
    $x_0 = a$
    $x_1 = a + h$
    $x_2 = a + 2h$
  - Construyendo el polinomio interpolador de Lagrange de grado dos que pasa por los puntos (x_0, f_0), (x_1, f_1) y (x_2, f_2):

$$P(x) = f_0\, L_0(x) + f_1\, L_1(x) + f_2\, L_2(x)$$

  - Donde los polinomios base de Lagrange son:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

  - Reemplazando x_0, x_1 y x_2:

$$L_0(x) = \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{2h^2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-a)(x-a-2h)}{-h^2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h^2}$$

  - Haciendo el siguiente cambio de variable dónde:

$$\xi = \frac{x-a}{h} \quad \Longrightarrow \quad x = a + h\xi$$

  - Reescribiendo el polinomio $L_0(x)$ en términos de ξ :

$$L_0(\xi) = \frac{(h\,\xi - h)(h\,\xi - 2h)}{2h^2} \quad \Longrightarrow \quad L_0(\xi) = \frac{h^2\xi^2 - 2h^2\xi - h\xi^2 + 2h^2}{2h^2}$$

$$L_0(\xi) = \frac{\xi^2 - 3\xi + 2}{2} \quad \Longrightarrow \quad L_0(\xi) = \frac{(\xi-1)(\xi+2)}{2}$$

  - Reescribiendo $L_1(x)$ en términos de ξ:

$$L_1(\xi) = \frac{(h\xi)(h\xi - 2h)}{-h^2} \quad \Longrightarrow \quad L_1(\xi) = \frac{(h^2\xi^2 - 2h^2\xi)}{-h^2}$$

$$L_1(\xi) = \frac{-h^2(-\xi^2 + 2\xi)}{-h^2} \quad \Longrightarrow \quad L_1(\xi) = -\xi^2 + 2\xi$$

$$L_1(\xi) = -\xi(\xi - 2)$$

- Reescribiendo $L_2(x)$ en términos de ξ:

$$L_2(\xi) = \frac{h^2\xi^2 - h^2\xi}{2h^2} \implies L_2(\xi) = \frac{h^2(\xi^2 - \xi)}{2h^2}$$

$$L_2(\xi) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

- Teniendo en cuenta que $dx = hd\xi$ la aproximación de la integral estará dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx = h\int_0^2 P(\xi)\,d\xi$$

- Calculando la integral de L_0 desde $\xi = 0$ hasta $\xi = 2$:

$$h\int_0^2 \frac{(\xi - 1)(\xi - 2)}{2}\,d\xi = \left(\frac{h}{3}\right)$$

- Calculando la integral de L_1 desde $\xi = 0$ hasta $\xi = 2$:

$$h\int_0^2 (-\xi^2 + 2\xi)\,d\xi = h\left(\frac{4}{3}\right)$$

- Calculando la integral de L_2 desde $\xi = 0$ hasta $\xi = 2$:

$$h\int_0^2 \frac{\xi(\xi - 1)}{2}\,d\xi = \left(\frac{h}{3}\right)$$

- La aproximación de la integral será entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f_0\left(h \cdot \frac{1}{3}\right) + f_1\left(h \cdot \frac{4}{3}\right) + f_2\left(h \cdot \frac{1}{3}\right) \implies \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$