26.

- **a)** El Ancho de cada Subintervalo se calcula como:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

- **b)** Los puntos nodales que dividen el intervalo son:

$$x_i = a + i\Delta x = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

- **c)** El valor en cada punto nodal estará dado por:

$$f(x_i) = \left(\frac{2i}{n}\right)^3 = \frac{8i^3}{n^3}$$

- **d)**
  - La suma de Riemann para aproximar la integral es:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{8i^3}{n^3}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{16}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1} i^3$$

  - Usando la suma proporcionada:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{(n(n-1))^2}{4}$$

  - Entonces:

$$I \approx \frac{16}{n^4} \cdot \frac{(n(n-1))^2}{4} = \frac{16}{n^4} \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

  - Simplificamos:

$$I \approx \frac{16n^2(n-1)^2}{4n^4} = \frac{4(n-1)^2}{n^2}$$

  - Desarrollamos $(n-1)^2$:

$$(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$$

  - Entonces:

$$I \approx \frac{4(n^2 - 2n + 1)}{n^2} = 4\left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)$$

  - Simplificando cada término:

$$I \approx 4\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

- **g)**

  La suma de Riemann es útil para introducir la integración numérica, pero es ineficiente para estimar integrales con alta precisión debido a su lenta convergencia. Se requiere un gran número de subintervalos, lo que aumenta el costo computacional. En contraste, la cuadratura de Gauss es más eficiente, proporcionando aproximaciones precisas con menos evaluaciones de la función. Por ejemplo, para un polinomio de grado 3, la cuadratura de Gauss con solo 2 puntos puede obtener la integral exacta. Por ello, la cuadratura de Gauss es preferible a la suma de Riemann en términos de eficiencia y precisión.