Derivación, Ejercicio 8

- **a)**
  - El Polinomio de Lagrange es un polinomio que pasa por un conjunto de puntos dados y tiene la forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x) \tag{1}$$

  - Donde cada L_i son las Funciones base de Lagrange definidas como:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{2}$$

  - Teniendo en cuenta el conjunto de soporte $\Omega = \{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\}$ y las ecuaciones (1) y (2) podemos construir el siguiente polinomio de Lagrange de grado dos:

$$P(x) = f(x_0) \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

  - Simplificando:

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

- **b)**
  - Teniendo en cuenta que la derivada de cada $L_i(x)$ respecto a x sigue la forma:

$$L_i'(x) = \frac{1}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} \cdot ((x - x_k) + (x - x_j)) \quad \Longrightarrow \quad L_i'(x) = \frac{2x - (x_j + x_k)}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)}$$

  - Por lo que $P'(x)$ será:

$$P'(x) = f(x_0) \cdot \frac{2x - (x_1 + x_2)}{(x_1 - x_0)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \cdot \frac{2x - (x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \cdot \frac{2x - (x_0 + x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

  - Evaluando $P'(x)$ en $x = x_0$ tenemos que

$$P'(x_0) = f(x_0) \cdot \frac{(2x_0 - x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \cdot \frac{(x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \cdot \frac{(x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

  - Considerando los puntos equidistantes entre sí donde $x_0 = x_0$, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$

$$P'(x_0) = f(x_0) \cdot \frac{(-h - 2h)}{(-h)(-2h)} + f(x_1) \cdot \frac{(-2h)}{h(-h)} + f(x_2) \cdot \frac{(-h)}{(2h)(h)} \quad \Longrightarrow \quad P'(x_0) = f(x_0) \cdot \frac{-3}{2h} + f(x_1) \cdot \frac{2}{h} + f(x_2) \cdot \frac{-1}{2h}$$

  - Por factor común $\frac{1}{2h}$ tenemos finalmente que:

$$P'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2))$$