6

Solución:

La **sustitución hacia atrás** es un método utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales donde la matriz de coeficientes A es **triangular superior**. Es decir, todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero: $A_{ij} = 0$ para $j < i$.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Donde:

- A es una matriz triangular superior de dimensión $n \times n$.
- $\mathbf{x}$ es el vector incógnita.
- $\mathbf{b}$ es el vector de términos independientes.

El objetivo es resolver para $\mathbf{x}$, es decir, encontrar los valores de x_i para $i = n-1, n-2, \ldots, 0$.

Paso 1: Expresar el sistema de ecuaciones

La matriz A siendo triangular superior tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0,n-1} \\ 0 & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} \\ 0 & 0 & A_{22} & \dots & A_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales se puede escribir como:

$$\begin{cases} A_{00}x_0 + A_{01}x_1 + A_{02}x_2 + \cdots + A_{0,n-1}x_{n-1} = b_0 \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1,n-1}x_{n-1} = b_1 \\ A_{22}x_2 + \cdots + A_{2,n-1}x_{n-1} = b_2 \\ \quad \vdots \\ A_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1} \end{cases}$$

Paso 2: Resolver para x_{n-1}

La última ecuación es:

$$A_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1}$$

Si $A_{n-1,n-1} \neq 0$, entonces:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{A_{n-1,n-1}}$$

Paso 3: Resolver para x_i cuando $i \leq n-2$

Para $i = n-2, n-3, \ldots, 0$, consideramos la ecuación i-ésima:

$$A_{i,i}x_i + \sum_{j=i+1}^{n-1} A_{i,j}x_j = b_i$$

Podemos separar el término correspondiente a x_i:

$$A_{i,i}x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} A_{i,j}x_j$$

}

Paso 4: Despejar x_i

Despejando x_i de la ecuación anterior, obtenemos:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} A_{i,j} x_j}{A_{i,i}}$$

Para incluir el caso en que $j = n$, asumimos que $A_{i,n} = 0$ y extendemos el límite superior de la suma hasta n:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j}{A_{i,i}}$$

Ya que $A_{i,n} x_n = 0$ (porque x_n no existe en un sistema de tamaño n, o bien se considera $A_{i,n} = 0$), la expresión es válida.

Esto coincide con la fórmula dada en (5.57):

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j}{A_{i,i}}$$

Paso 5: Verificación detallada

Por ejemplo, para $i = n - 2$:

- La ecuación correspondiente es:

$$A_{n-2,n-2} x_{n-2} + A_{n-2,n-1} x_{n-1} = b_{n-2}$$

- Ya habiendo calculado x_{n-1}, podemos calcular x_{n-2}:

$$\begin{aligned} A_{n-2,n-2} x_{n-2} &= b_{n-2} - A_{n-2,n-1} x_{n-1} \\ x_{n-2} &= \frac{b_{n-2} - A_{n-2,n-1} x_{n-1}}{A_{n-2,n-2}} \end{aligned}$$

- Esto es consistente con la fórmula general:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j}{A_{i,i}}$$

  Ya que para $i = n - 2$, la suma es sobre $j = n - 1$ (y $A_{i,n} x_n = 0$).