21a

Demostración de (a):

Queremos expresar la función $f(x)$ como una combinación lineal de los polinomios de Legendre $P_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x)$$

Paso 1: Multiplicar ambos lados por $P_m(x)$ y integrar en el intervalo $[-1, 1]$.

Multiplicamos ambos lados por $P_m(x)$ y realizamos la integración:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x) \right) P_m(x)\, dx$$

Paso 2: Intercambiar el orden de la suma y la integral en el lado derecho.

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = \sum_{n=0}^{N} c_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx$$

Paso 3: Utilizar la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

Los polinomios de Legendre satisfacen la relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

donde δ_{nm} es el delta de Kronecker:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Paso 4: Simplificar el lado derecho usando la ortogonalidad.

Debido a la ortogonalidad, solo el término donde $n = m$ sobrevive en la suma:

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = c_m \int_{-1}^{1} P_m(x) P_m(x)\, dx = c_m \left(\frac{2}{2m+1} \right)$$

Paso 5: Igualar ambos lados y despejar c_m.

Igualamos las expresiones obtenidas:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = c_m \left(\frac{2}{2m+1} \right)$$

Despejamos c_m:

$$c_m = \left(\frac{2m+1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) \, dx$$

Conclusión:

Hemos demostrado que los coeficientes c_n están dados por:

$$c_n = \left(\frac{2n+1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) \, dx \quad \text{para} \quad n = 0, 1, \ldots, N$$