

Capacitor de placas concéntricas elípticas

JUAN CAMILO OSPINA VILLA¹ AND AGUSTÍN LÓPEZ ZAPATA¹

*jcospinav@eafit.edu.co, alopezz1@eafit.edu.co

Compiled October 21, 2023

This report presents a computational solution for the Laplace equation in elliptical coordinates for two concentric capacitors using the finite differences method.

<http://dx.doi.org/10.1364/ao.XX.XXXXXX>

1. INTRODUCCIÓN

La solución de ecuaciones diferenciales es fundamental en la modelación y análisis matemático de diversos fenómenos físicos. Sin embargo, encontrar soluciones analíticas para estas suele requerir un desarrollo matemático extenso, que muchas veces resulta en la aparición de funciones especiales, y otro tipo de estructuras que requieren un tratamiento matemático bastante sofisticado. Incluso, en muchas situaciones, no se conoce, o directamente se ha demostrado, utilizando métodos como la teoría diferencial de Galois [1], que no existe una solución analítica para las ecuaciones diferenciales en cuestión. Por lo tanto, se suele acudir a los métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas. Esto es especialmente conveniente, pues la naturaleza discreta de muchos de estos algoritmos es óptima para la computación. Uno de los métodos más utilizados son las diferencias finitas. Este método es ampliamente utilizado para resolver la parte temporal de los esquemas de elementos finitos, pero también puede ser utilizado para resolver problemas espaciales donde los diferenciales de las variables generalizadas u_i se mantengan constantes en todo el espacio. Para ilustrar lo segundo, en el presente informe, se resuelve el potencial eléctrico y el campo eléctrico en coordenadas elípticas utilizando esquemas de diferencias finitas.

2. METODOLOGÍA

A. Proceso de mallado

En el sistema de coordenadas elípticas se trabaja con las variables, μ y ν , las cuales representan la posición de las elipses y el ángulo subtendido por las hipérbolas correspondientemente. En la figura 1 se muestra como se puede visualizar dicho sistema coordenado.

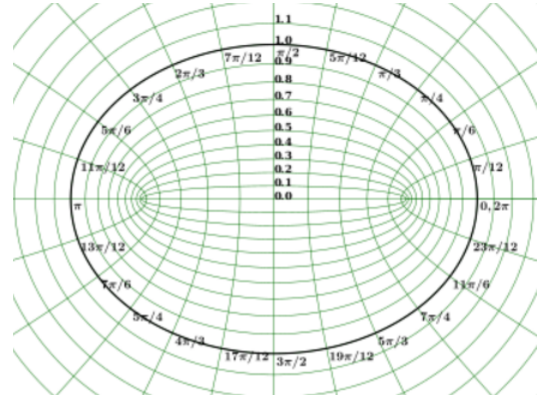


Fig. 1. Plano elíptico [2]

El cambio de variable que relaciona las coordenadas cartesianas con las elípticas es [2]:

$$x = c \cosh(\mu) \cos(\nu) \quad (1)$$

$$y = c \sinh(\mu) \sin(\nu)$$

Donde c se conoce como el foco, debe ser un parámetro positivo $c > 0$. Además si tenemos en cuenta la elipse más grande $\mu = \mu_{max}$, y denotamos a como el intercepto de dicha elipse con el eje X , y b como el intercepto con el eje Y , tenemos que se cumple la relación:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (2)$$

Para motivos de simulación podemos elegir c , y su elección afectará el plano elíptico resultante.

Para el problema en cuestión de dos capacitores elípticos concéntricos se toma el dominio $\mu \in [0.1, 1] \wedge \nu \in [0, 2\pi]$. Dónde el capacitor interno corresponde a la elipse $\mu = 0.1$ y el externo a la elipse $\mu = 1$. La idea es poder construir la malla con n_{u1} divisiones equidistantes en μ y n_{u2} divisiones equidistantes en ν . Es evidente que dada la simetría del problema, podemos generar la malla con cualquier número de divisiones en ambas direcciones, y los diferenciales en cada dirección serían:

$$\Delta\mu = \frac{\mu_{max}}{n_{u1}} \wedge \Delta\nu = \frac{\nu_{max}}{n_{u2}} \quad (3)$$

Véase que en el dominio seleccionado $\mu_{max} = 1 \wedge \nu_{max} = 2\pi$.

Ahora, sabiendo que podemos generar una malla estructurada, con un diferencial constante en cada dirección, proponemos un sistema de enumeración adecuado. Seleccionamos

el nodo inicial, es decir el nodo $i = 0 \wedge j = 0$ en los respectivos mínimos de nuestro dominio selecto. Es decir, el nodo cero se ubica en $(0.1, 0)$ tomando la notación (μ, ν) . A partir de ahí ubicamos nuestros nodos en todas las divisiones angulares de la primera elipse hasta llegar a la posición $(\mu, \nu - \Delta\nu)$. Como el nodo $(0.1, 2\pi) = (0.1, 0)$, en este punto podemos pasar a la siguiente elipse y repetir el proceso hasta llegar a la elipse exterior. Una ventaja inherente de este tipo de enumeración es que dado que las condiciones de frontera se encuentran en las elipses exterior e interior, la matrix global estará organizada de forma conveniente. Esto es, los nodos en el voltaje interno con condición de dirichlet al principio de la matriz global, luego las ecuaciones para todas las elipses intermedias, y por último los nodos en la elipse externa de la malla con su respectiva condición de dirichlet. Bajo este sistema de numeración se deduce la ecuación 4 para pasar del sistema local al sistema global.

$$k = i(n_{u2}) + j \quad (4)$$

donde k corresponde a la coordenada global.

B. Potencial eléctrico

A continuación, se muestra el problema de condiciones de frontera que debemos resolver para encontrar el potencial en los capacitores.

$$\frac{1}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} \right) = 0, \forall (\mu, \nu) \in \Omega \quad (5)$$

$$V(0.1, \nu) = \sin(2\nu), \forall \nu \in [0, 2\pi] \quad V(1, \nu) = 0, \forall \nu \in [0, 2\pi] \quad (6)$$

Para poder resolver el problema debemos plantear nuestro esquema de diferencias finitas. En este caso, véase que el término que acompaña las segundas derivadas puede eliminarse directamente, y nos queda una ecuación equivalente a si tuvieramos un rectángulo en coordenadas cartesianas.

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} \right) = 0, \forall (\mu, \nu) \in \Omega \quad (7)$$

En este caso, como se trata de segundas derivadas, conviene aplicar diferencias finitas centrales en ambas direcciones en la ecuación 7, con lo cual obtenemos:

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta\mu^2} + \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta\nu^2} = 0 \quad (8)$$

Si multiplicamos la expresión 8 por $(\Delta\mu)^2$ y expandimos, obtenemos finalmente:

$$V_{i+1,j} + V_{i,j+1}\alpha + V_{i,j-1}\alpha + V_{i,j}(-2\alpha - 2) + V_{i-1,j} = 0 \quad (9)$$

donde:

$$\alpha = \frac{(\Delta\mu)^2}{(\Delta\nu)^2}$$

Adicionalmente, debemos tener en cuenta que las ecuaciones para los nodos internos y externos son sencillamente.

$$V_{i_{min}j} = V_{int} \wedge V_{i_{max}j} = V_{ext} \quad (10)$$

Donde V_{int} y V_{ext} son las condiciones de frontera de dirichlet propuestas. Teniendo en cuenta además que el programa

planteado permite trabajar con cualesquiera condiciones de frontera.

También es preciso recordar que como en general $(\mu, 0) = (\mu, 2\pi)$, y solo definimos el nodo en la posición angular 0, tenemos que:

$$j = 0 \Rightarrow V_{i,j-1} = V_{i,j_{max}} \quad (11)$$

$$j = j_{max} \Rightarrow V_{i,j_{max}+1} = V_{i,0} \quad (12)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las ecuaciones 9, 10, 11, y 12, podemos plantear nuestro sistema lineal de ecuaciones en coordenadas globales, con $n_{u1} \times n_{u2}$ ecuaciones y encontrar el potencial en todos los nodos de la malla haciendo:

$$x = A^{-1}b \quad (13)$$

donde x es el vector de potenciales en coordenadas globales, A es la matrix del sistema, y b es el vector de términos independientes de las ecuaciones. Por motivos de estandarización la rutina planteada retorna un vector $k \times 3$, donde la primera columna corresponde la coordenada dirección i (μ), la segunda columna a la coordenada en la dirección j (ν), y la tercera al potencial en esa coordenada. El índice del array en las columnas corresponde a la posición del nodo en el sistema global.

C. Campo eléctrico

Para calcular el campo eléctrico se utiliza la expresión bien conocida desde el electromagnetismo [3]:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (14)$$

Si tenemos en cuenta que el gradiente en coordenadas elípticas, tenemos que la ecuación para el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2\mu + \sin^2\nu}} \left(\frac{\partial V}{\partial \mu}, \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) \quad (15)$$

donde c es el foco de las elipses.

Como en este caso tenemos solo primeras derivadas, elegimos esquemas hacia delante, hacia atrás y centrales, priorizado evitar la aparición de nodos fantasmas.

Además, teniendo en cuenta que ya conocemos el potencial en todos los lugares del espacio, podemos construir el vector \vec{E} siguiendo la regla de formación planteada.

$$i = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta\mu} \quad (16)$$

$$i = i_{max} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta\mu} \quad (17)$$

$$i \neq 0 \wedge i \neq i_{max} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta\mu} \quad (18)$$

$$\forall j \in [0, j_{max}] \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta\nu} \quad (19)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 16, 17, 18, 19, 11, y 12, podemos iterar sobre el array del potencial y aplicar las condiciones planteadas para encontrar el campo eléctrico en todos los puntos de espacio. De forma similar a la rutina anterior, retornamos el potencial como un vector $n \times 4$, donde las primeras dos columnas son las coordenadas en i, j del nodo, y las últimas dos son el vector campo eléctrico en dicho nodo.

D. Visualización de los resultados

Para visualizar los resultados aprovechamos la función `contourf` presente en la librería `matplotlib` de `python`. Esta librería nos permite representar una función en el espacio a través de una gráfica de contornos, también conocidas como curvas de nivel, dónde la función $Z(X, Y)$ se representa con un gradiente de colores

En este sentido debemos construir 4 arrays 2D, X y Y , correspondientes a las posiciones de los nodos en coordenadas cartesianas, y V y E , correspondientes al potencial eléctrico y la magnitud del campo eléctrico.

Estos se inicializan como arrays de ceros con las dimensiones $n_{u1} \times n_{u2} + 1$. Véase que la dimensión extra en la dirección de v se debe a que debemos añadir datos en $v = 2\pi$ para cerrar el contorno, con los mismos valores que $v = 0$.

Para completar los arrays, iteramos sobre las respuestas para el potencial, y el campo eléctrico. En cada nodo, hacemos el cambio de variable, utilizando un `linspace` en cada coordenada del dominio, correspondientes a los índices (i, j) de cada uno de los nodos. De esta forma podemos obtener x y y , en cada posición (i, j) , utilizando el ecuación 1. Para V , basta con ubicar cada valor V_k en su posición 2D correspondiente $V(i, j)$. Finalmente, la magnitud del campo eléctrico se puede calcular utilizando la norma habitual de R^2 , para ser ubicada en su posición $E(i, j)$ correspondiente. La norma en coordenadas elípticas se define:

$$\vec{E} = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \quad (20)$$

Una vez tenemos todos los arrays 2D podemos construir los mapas de contorno correspondientes, uno para el potencial eléctrico, y otro para la norma del campo eléctrico.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A. Solución al problema planteado

A continuación, se muestra la solución al problema de condiciones de frontera planteado en 5 y 6, correspondiente al potencial generado por dos placas concéntricas elípticas, donde la placa interna está sometida a un potencial sinusoidal que depende de la coordenada ν , y la placa externa está a tierra:

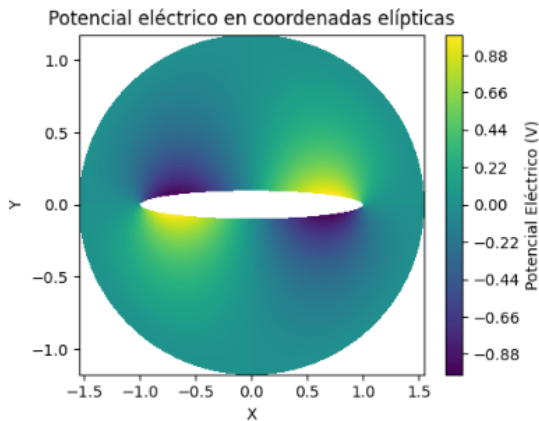


Fig. 2. Potencial eléctrico con función senoidal $\sin(2\nu)$ en la frontera interna

Como es de esperarse, se pueden apreciar 2 máximos, y 2 mínimos de potencial alrededor de la placa interna. Estos corresponden a los máximos y mínimos que tiene la función $\sin(x)$

en el dominio entre $[0, 4\pi]$, teniendo en cuenta que evaluamos la condición de frontera $\sin(2\nu) \forall \nu \in [0, 2\pi]$. A medida que nos alejamos de la placa interior, y nos acercamos a la placa que está conectada a tierra, el potencial se va estabilizando gradualmente, y se vuelve 0 en la mayoría del espacio. El máximo de potencial es 1V, correspondiente al máximo de la función que define la condición de frontera interna.

A continuación se muestra la norma del campo eléctrico generado por los capacitores de placas elípticas paralelas descritos anteriormente.

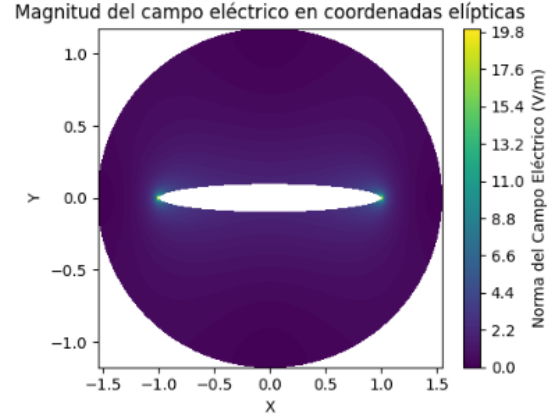


Fig. 3. Magnitud del campo eléctrico con función sinusoidal $\sin(2\nu)$ en la frontera interna

La norma del campo eléctrico más difícil de visualizar e interpretar, pues existen 2 focos de potencial concentrados en la zona cercana al foco del sistema coordenado. Cómo la magnitud en los focos es significativamente más grande que en cualquier otro lugar del espacio, la mayoría, la mayoría de las superficies de nivel se ven de un color azul oscuro con valores entre 0 y 2.2 V/m. Estos focos se deben a que la mayor diferencia de potencial está entre los máximos y mínimos opuestos a los extremos de la placa interna. En consecuencia, la norma del campo está muy concentrada, pues hay un cambio drástico en el potencial que se concentra en los focos. Por otro lado, la diferencia de potencial en todos los demás lugares del espacio es relativamente pequeña, teniendo en cuenta que como se aprecia en la figura 2, el potencial en la mayoría de puntos alejados de la placa interior es prácticamente 0. Esto implica una disminución de la norma del campo eléctrico a medida que nos alejamos de los picos y valles de potencial que se puede apreciar si se observa detenidamente la figura 3

B. Configuraciones adicionales

De forma adicional se plantea la solución para los capacitores cuando es la placa externa la que está conectada a un potencial sinusoidal, con la placa interna conectada a tierra.

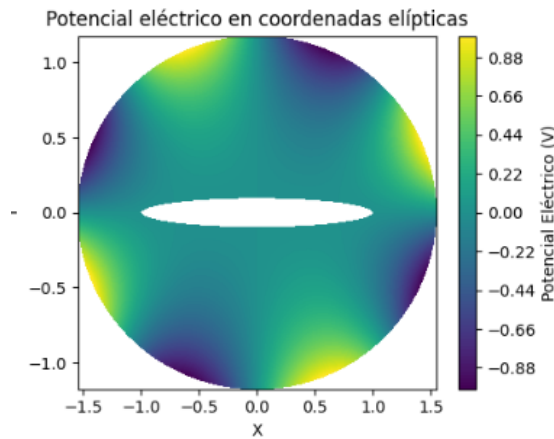


Fig. 4. Potencial eléctrico con función senoidal $\text{sen}(4v)$ en la frontera externa

Similar a la configuración anterior, se pueden apreciar los picos y valles de potencial que emanan de la placa exterior, que en este caso tiene un seno como condición de Dirichlet. Véase que al aumentar la frecuencia angular del seno de 2 a 4, podemos apreciar el doble de picos y valles respectivamente. El potencial máximo sigue siendo 1V, correspondiente al punto máximo de un seno con amplitud unitaria. Este resultado es muy similar al que se obtiene cuando se hace el mismo análisis en coordenadas polares como se muestra en la guía.

A continuación se muestra la norma del campo eléctrico para la situación anterior.

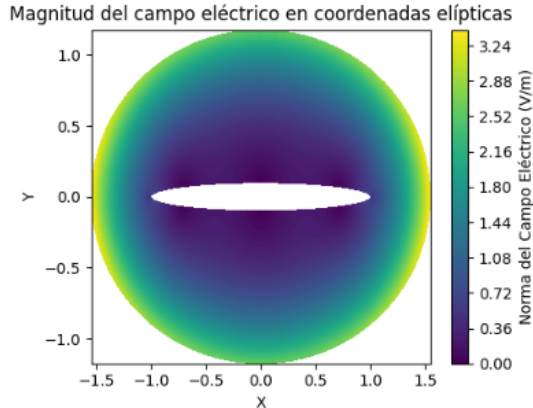


Fig. 5. Magnitud del campo eléctrico con función senoidal $\text{sen}(4v)$ en la frontera externa

Para norma correspondiente se puede ver como se forma un anillo de mayor magnitud de campo eléctrico máximo alrededor de las elipses exteriores, porque es allí donde se concentra la mayor diferencia de potencial entre los picos y valles del potencial. A medida que nos alejamos del exterior, va disminuyendo la magnitud del campo hasta alcanzar el capacitor interno donde el campo es 0. Este resultado también es similar al mostrado en la guía en coordenadas polares.

Por último, se muestra la situación clásica, donde una de las placas está conectada a un potencial mayor y la otra a tierra, como si estuvieran conectadas a una fuente DC. En este caso se pone la placa exterior a 1V y la placa interior a 0V.

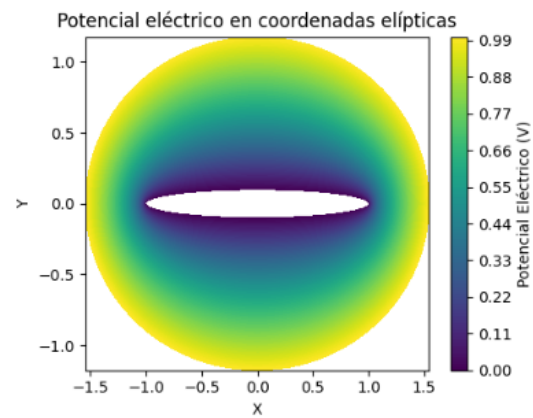


Fig. 6. Potencial eléctrico capacitores elípticos, con frontera externa a 1V, y frontera interna a 0V

En esta configuración se pueden apreciar superficies equipotenciales entre ambas placas, con un gradiente de potencial que se distribuye desde la elipse exterior hasta la elipse interior. Esta situación clásica sirve para verificar la veracidad de la solución aproximada calculada utilizando diferencias finitas.

4. CONCLUSIONES

- El método de las diferencias finitas es una excelente herramienta para solucionar ecuaciones diferenciales en situaciones de alta simetría que permitan un mallado regular con diferencias constantes en cada dirección del sistema coordenado. La naturaleza discreta, y de poder expresarse como sistema lineal que exhibe este método numérico, así como muchos otros, permiten generar implementaciones computacionales óptimas.
- La visualización apropiada de los datos es fundamental para extraer conclusiones relevantes de los datos y cálculos procesados. En la mayoría de casos, la presentación de el análisis hace la diferencia entre tener tan solo datos crudos, o poder extraer información que realmente permita comprender los resultados, en este caso la solución de la ecuación diferencial.
- El buen manejo de las estructuras de datos implementadas en las rutinas de código es esencial para garantizar la eficiencia tanto en memoria y velocidad de los algoritmos planteados. Esto es especialmente cierto cuando se procesan grandes cantidades de datos, y se vuelve muy importante la selección de estructuras que permitan la realización de las operaciones óptimas. Por ejemplo, las matrices dispersas tipo *lilmatrix* permiten modificar con facilidad los elementos dentro de la matriz, contrario a los otros tipos de matrices dispersas prácticamente requieren ser reconstruidas en la memoria para ser editadas pero son muy eficientes en la computación de resultados.

REFERENCES

1. A. R. Magid, *Lectures on differential Galois theory*, 7 (American Mathematical Soc., 1994).
2. Wikipedia, "Elliptical coordinates," (2023).
3. D. K. Cheng, *Fundamentals of Engineering Electromagnetics* (Pearson, 2017), 1st ed.