

April 30, 2024

PARCIAL 1 — Óptica de Fourier

Conceptual (Valor 50 %)

1. (25 %)

Una de las aproximaciones de Fresnel al principio de Huygens-Fresnel lleva a la siguiente expresión:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta, 0) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (1-1)$$

Donde $U(x, y, z)$ es la amplitud del campo de salida, $U(\xi, \eta, 0)$ es la amplitud de campo de entrada y el kernel de convolución de (1-1), su función de respuesta al impulso, viene dado por:

$$h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \quad (1-2)$$

Derive una expresión para la función de transferencia de este formalismo y demuestre que esta es una versión aproximada de la función de transferencia de la propagación en el espacio libre dada por el formalismo de espectro angular (sin aproximaciones), el cual viene dado por:

$$H(f_x, f_y) = e^{i2\pi \frac{z}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}} \quad (1-3)$$

En su derivación establezca con claridad todas las condiciones físicas y geométricas que deben considerarse para llegar a la expresión requerida, a partir de (1-3). Haga un código en Python o Matlab bien comentado que reproduzca la ecuación (1-1).

Solución

Inicialmente, se halla la transformada de Fourier de la función respuesta al impulso dada en la expresión 1-2. Al considerar que el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, obtenemos:

$$H(f_x, f_y) = \mathcal{F} \left\{ \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)} \right\} \quad (1-4)$$

$$H(f_x, f_y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \mathcal{F} \left\{ e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)} \right\} \quad (1-5)$$

La expresión dentro de la transformada es una función separable en x y y , debido a esto, se puede obtener la transformada de cada componente, las cuales son funciones exponenciales con un término cuadrático, por lo que se usa esta propiedad:

$$\mathcal{F} \left\{ e^{iax^2} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{-ia}} e^{-\frac{i\pi^2 f_x^2}{a}} \quad (1-6)$$

Desarrollando para x y y , obtenemos que:

$$\mathcal{F}\left\{e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)}\right\} = \frac{-\lambda z}{i}e^{-i\pi\lambda z(f_x^2+f_y^2)} \quad (1-7)$$

La multiplicación de estas transformadas resultantes junto con el término constante $\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}$ arrojará la transformada de la función completa, la cual está dada en la siguiente expresión:

$$H(f_x, f_y) = e^{ikz}e^{-i\pi\lambda z(f_x^2+f_y^2)} \quad (1-8)$$

Esta representa la propagación que se reduce a una expresión cuadrática de dispersión, junto a un término constante que equivale a un retraso.

Continuando con la expresión en 1-3, la cual es el formalismo del espectro angular sin aproximaciones, se debe satisfacer que $\sqrt{f_x^2 + f_y^2} < \frac{1}{\lambda}$. Si se desarrolla el término de la raíz como una serie de Taylor de la forma:

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{8}b^2 \dots \quad (1-9)$$

Considerando que $b = -(\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2$ y tomando únicamente los dos primeros términos, lo cual restringe a f_x y f_y a ángulos pequeños (aproximación paraxial), se obtiene que:

$$\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} = 1 - \frac{(\lambda f_x)^2}{2} - \frac{(\lambda f_y)^2}{2} \quad (1-10)$$

Al reemplazar esto en la expresión 1-3, se obtiene que:

$$H(f_x, f_y) = e^{i2\pi\frac{z}{\lambda}\left(1 - \frac{(\lambda f_x)^2}{2} - \frac{(\lambda f_y)^2}{2}\right)} \quad (1-11)$$

Recordando de $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, la expresión en 1-11 equivale a:

$$H(f_x, f_y) = e^{ikz}e^{-i\pi\lambda z(f_x^2+f_y^2)} \quad (1-12)$$

Por lo tanto, se obtiene la función de transferencia del formalismo de Fresnel. En la Figura 1, se presenta el campo de entrada correspondiente a la apertura utilizada. Además, se muestra el kernel de Fresnel, que se especifica en la expresión 1-2. El campo de salida se obtiene aplicando el teorema de convolución, donde la transformada de Fourier del producto de las transformadas de Fourier del campo de entrada y del kernel de Fresnel resulta en el campo de salida observado.

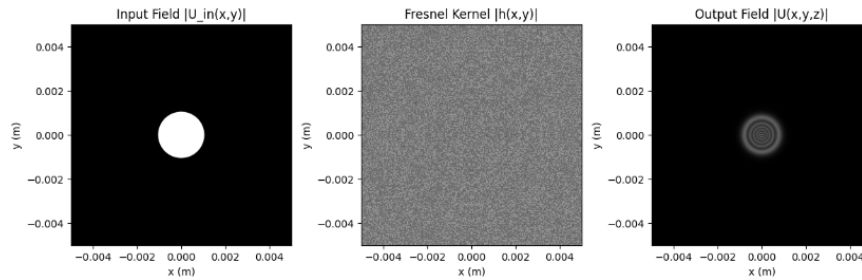


Figura 1: Simulación del campo de entrada, el kernel de Fresnel y el campo de salida

Adicionalmente, se halla la intensidad mediante el cuadrado de la magnitud del campo de salida, representada en la figura 2, y se compara con la intensidad teórica en la figura 3, obteniéndose que ambos patrones son muy similares, y tienen un número de Fresnel de aproximadamente 10, indicando que es campo cercano (zona de Fresnel).

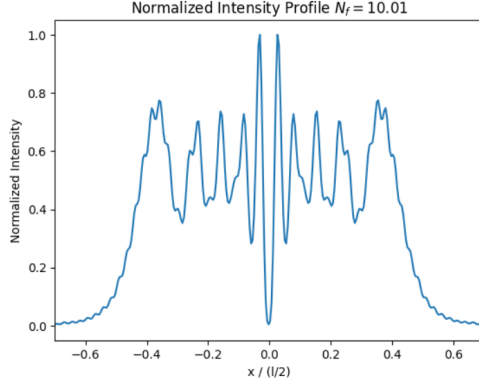


Figura 2: Patrón de intensidad obtenido

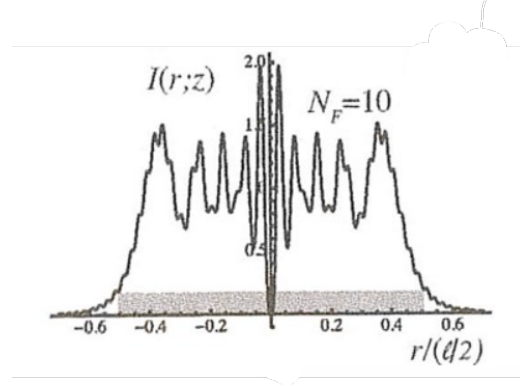


Figura 3: Patrón de intensidad teórico

2. (25 %)

La propagación de Fresnel a lo largo de una secuencia de distancias sucesivas $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ es equivalente a la propagación de Fresnel a lo largo de una sola distancia $z = z_1 + z_2 + z_3, \dots, z_n$. Demuestre lo anterior. Haga un código en Python o Matlab bien comentado que demuestre lo anterior.

Solución

Partamos de la expresión de la aproximación de Fresnel al principio de Huygens-Fresnel en su forma de integral de convolución:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta, 0) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (1-13)$$

Teniendo en cuenta el principio de superposición. Propagando para ciertas distancias sucesivas (de 0 a z_n) tenemos que el campo de salida está definido por la propagación sucesiva de cada una de las distancias, así:

$$U_1(x, y, z_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi, \eta, 0) h_0(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (1-14)$$

$$U_2(x, y, z_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_1(\xi, \eta, z_1) h_1(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (1-15)$$

$$U_3(x, y, z_3) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_2(\xi, \eta, z_2) h_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (1-16)$$

Como fue mencionado, estas son integrales de convolución por lo que se puede escribir en su notación correspondiente, quedando así:

$$U_1(x, y, z_1) = U_0(\xi, \eta, 0) \otimes h_0(x, y) \quad (1-17)$$

$$U_2(x, y, z_2) = U_1(\xi, \eta, z_1) \otimes h_1(x, y) \quad (1-18)$$

$$U_3(x, y, z_3) = U_2(\xi, \eta, z_2) \otimes h_2(x, y) \quad (1-19)$$

Donde la primera operación de convolución corresponde a la propagación de $0 \rightarrow z_1$, la segunda de $z_1 \rightarrow z_2$ y la tercera de $z_2 \rightarrow z_3$. Llegando a esto considerando que tenemos un sistema lineal invariante en el tiempo. Adicionalmente, este tipo de sistemas pueden ser caracterizados completamente por sus respuestas (en nuestro caso las funciones $h_n(x, y)$), esto permite obtener una función de transferencia para las propagaciones (de

la forma mostrada en el primer inciso de este parcial) partiendo de las funciones respuesta al impulso. Esta función de transferencia se obtiene sacando la transformada de Fourier. En este orden de ideas, sacamos la transformada de Fourier para cada una de las propagaciones:

$$F\{U_1(x, y, z_1)\} = F\{U_o(\xi, \eta, 0) \otimes h_o(x, y)\} \quad (1-20)$$

$$F\{U_2(x, y, z_2)\} = F\{U_1(\xi, \eta, z_1) \otimes h_1(x, y)\} \quad (1-21)$$

$$F\{U_3(x, y, z_3)\} = F\{U_2(\xi, \eta, z_2) \otimes h_2(x, y)\} \quad (1-22)$$

Ahora aplicando la propiedad de convolución de la transformada, dejamos la expresión del espectro del campo en términos de sus funciones de transferencia como sigue:

$$G_{z_1}(f_x, f_y) = H_0(f_x, f_y) * G_0(f_x, f_y) \quad (1-23)$$

$$G_{z_2}(f_x, f_y) = H_1(f_x, f_y) * G_{z_1}(f_x, f_y) \quad (1-24)$$

$$G_{z_3}(f_x, f_y) = H_2(f_x, f_y) * G_{z_2}(f_x, f_y) \quad (1-25)$$

Por lo que la propagación hasta la distancia z_3 es equivalente a multiplicar cada una de las funciones de transferencia por la transformada de Fourier del campo de entrada G_0 , así:

$$G_{z_3}(f_x, f_y) = H_2(f_x, f_y) * H_1(f_x, f_y) * H_0(f_x, f_y) * G_0(f_x, f_y) \quad (1-26)$$

Donde la función de transferencia de las propagaciones viene dada por la expresión:

$$H(f_x, f_y) = e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)} \quad (1-27)$$

Quedando así que:

$$G_{z_3}(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) = e^{ik(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3)} e^{-i\pi\lambda(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3)(f_x^2 + f_y^2)} * G_0(f_x, f_y) \quad (1-28)$$

Donde $z = z_1 + z_2 + z_3$, generalizando este resultando para cualquier numero z_n de propagaciones.

Para la simulación realizada se usaron 4 distancias: $z_1 = 3 \cdot 10^{-3}m$, $z_2 = 3.5 \cdot 10^{-3}m$, $z_3 = 4 \cdot 10^{-3}m$ y $z_4 = 4.5 \cdot 10^{-3}m$ y un campo de entrada dado por una apertura circular de radio $5 \cdot 10^{-4}m$.

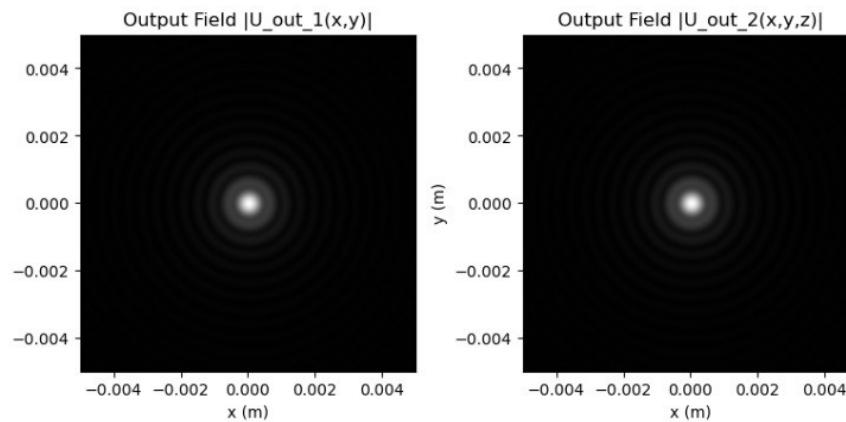


Figura 4: Resultados de la simulación de la propagación de Fresnel

En la figura 4, se observan los dos campos de salidas, el de la izquierda corresponde a la propagación realizada como la sumatoria de distancias y el de la derecha es la propagación realizada con la distancia total. Finalmente, si calculamos el MSE entre las dos imágenes obtenemos un valor de $MSE = 1.8 \cdot 10^{-35}$, comprobando que ambos resultados son iguales.

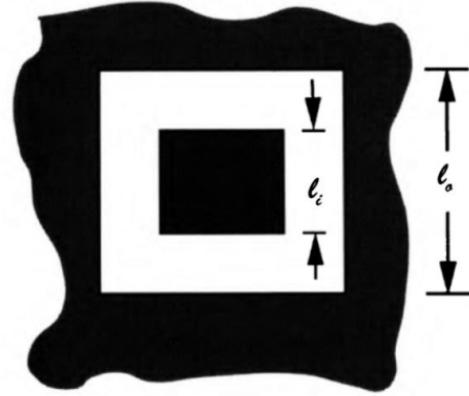
Ejercicios (Valor 50 %)

3. (25 %)

Encuentre una expresión para la distribución de intensidad del patrón de difracción de Fraunhofer de la apertura que se muestra en la figura a la derecha.

Asuma que la iluminación es una onda plana, de amplitud uno en unidades arbitrarias y que incide perpendicularmente sobre la apertura. La apertura es cuadrada y tiene a su vez un obstáculo cuadrado en el centro.

Haga un código en Python o Matlab bien comentado que demuestre lo anterior.



Solución

Se debe calcular la distribución de intensidad de un patrón de difracción de Fraunhofer, que se produce cuando la luz pasa a través de una apertura y se difracta en el campo lejano. Este patrón de difracción es el resultado de la interferencia de la luz que pasa a través de la abertura.

Al tener este tipo de apertura, se debe hallar su respectiva función de transmitancia. Como se trata de una apertura rectangular con un obstáculo rectangular en el centro, lo anterior se puede ver matemáticamente como:

$$t_a(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{l_0}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l_0}\right) - \text{rect}\left(\frac{x}{l_1}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l_1}\right) \quad (1-29)$$

Esta transmitancia es el campo de entrada debido a que la apertura se ilumina por una onda monocromática normalmente incidente de amplitud unitaria. La transformada de Fourier de la función de transmitancia anterior arroja la amplitud del campo en el plano de difracción, por lo tanto, es necesario hallar su transformada para obtener la distribución de intensidad. Teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Fourier, se tiene que la transformada de una función *rect* es:

$$\mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] = \tau \text{sinc}(\omega\tau) \quad (1-30)$$

Así:

$$\mathcal{F}[t_a(x, y)] = l_0^2 \text{sinc}(l_0 f_x) \text{sinc}(l_0 f_y) - l_1^2 \text{sinc}(l_1 f_x) \text{sinc}(l_1 f_y) \quad (1-31)$$

Donde las coordenadas en el plano de difracción se definen como $f_x = \frac{x}{\lambda z}$ y $f_y = \frac{y}{\lambda z}$.

Como se quiere obtener la intensidad $I(x, y)$ en el patrón de difracción de Fraunhofer, la cual es proporcional al cuadrado del módulo de la amplitud del campo, y teniendo en cuenta las coordenadas en el plano de observación, se tiene que:

$$I(x, y) \propto |\mathcal{F}[t_a(x, y)]|^2 \quad (1-32)$$

$$I(x, y) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right)^2 \left[l_0^2 \text{sinc}\left(l_0 \frac{x}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(l_0 \frac{y}{\lambda z}\right) - l_1^2 \text{sinc}\left(l_1 \frac{x}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(l_1 \frac{y}{\lambda z}\right) \right]^2 \quad (1-33)$$

Donde el término $\left(\frac{1}{\lambda z}\right)^2$ es debido a la propagación de una onda esférica en el espacio libre, que se obtiene en los factores de fase de la expresión del campo de salida en difracción de Fraunhofer.

Para la simulación de esta intensidad evidenciada en la figura 5, los parámetros usados para el tamaño de los lados de los rectángulos son $0.1 \cdot 10^{-3}$ m para la interna y $0.3 \cdot 10^{-3}$ m para la externa, longitud de onda de $632 \cdot 10^{-9}$ m y una distancia de propagación de $z = 1$ m. Se puede observar que para ambos casos, el patrón de intensidad es equivalente. Además, el número de Fresnel, que corresponde a 0.004, indica que se está en campo lejano (Fraunhofer).

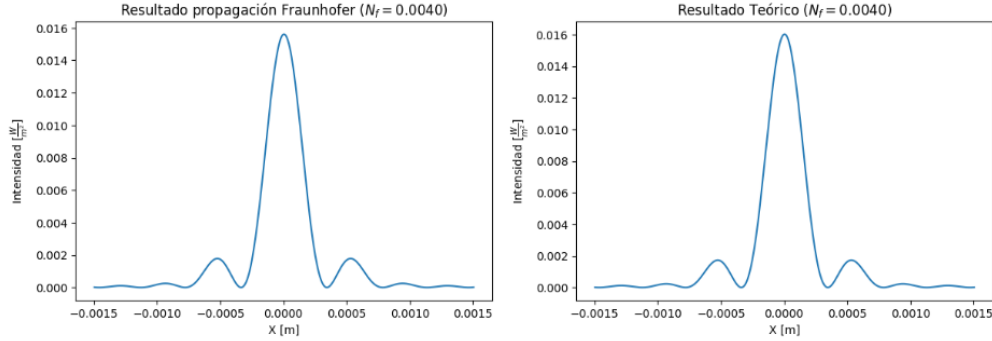


Figura 5: Comparación de la intensidad para la propagación en Fraunhofer y el resultado obtenido en la expresión 1-33.

4. (25 %)

Encuentre una expresión para la distribución de intensidad del patrón de difracción de Fraunhofer a una distancia z de la doble rendija rectangular (Figura de la derecha) ubicada en una pantalla opaca infinita.

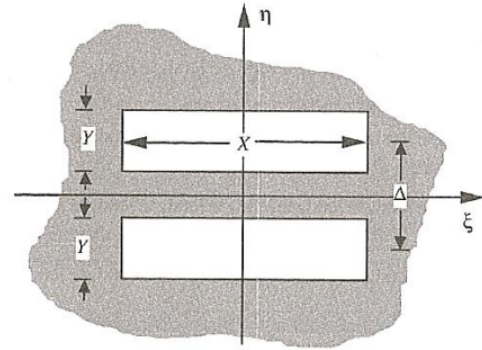
Haga un código en Python o Matlab bien comentado que demuestre lo anterior.

Solución

Al igual que el punto anterior, se debe calcular la distribución de intensidad de un patrón de difracción de Fraunhofer. Para este caso, se tienen dos rendijas horizontales de alto Y y ancho X separados por una distancia vertical Δ como lo muestra la figura. La función de transmitancia viene dada por la siguiente expresión:

$$t_a(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{X}\right) \left[\text{rect}\left(\frac{y - \frac{\Delta}{2}}{Y}\right) + \text{rect}\left(\frac{y + \frac{\Delta}{2}}{Y}\right) \right] \quad (1-34)$$

Estableciendo la condición de separación entre las rendijas por la distancia Δ entre los centros de cada rectángulo. De igual manera que en el inciso anterior, se asume una iluminación de amplitud unitaria monocromática normalmente incidente. Por esta razón, la transmitancia es equivalente al campo de entrada. Ahora, el campo de salida correspondiente a la difracción de Fraunhofer viene dado por la expresión:



$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{K}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, n) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+yn)} d\xi dn \quad (1-35)$$

y por tanto la intensidad se calcula como sigue:

$$I(x, y) = |U(x, y)|^2 \quad (1-36)$$

$$I(x, y) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right)^2 |\mathcal{F}[t_a(x, y)]|^2 \quad (1-37)$$

En este orden de ideas, se desea hallar la transformada de Fourier de la tramitancia, así:

$$\mathcal{F}[t_a(x, y)] = \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{X}\right) \left[\text{rect}\left(\frac{y - \frac{\Delta}{2}}{Y}\right) + \text{rect}\left(\frac{y + \frac{\Delta}{2}}{Y}\right)\right]\right] \quad (1-38)$$

Dado a que la función de tramitancia es una función separable, se puede desarrollar la transformada en cada coordenada y luego multiplicarla, de esta manera:

$$\mathcal{F}[t_a(x, y)] = \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{X}\right)\right] \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{y - \frac{\Delta}{2}}{Y}\right) + \text{rect}\left(\frac{y + \frac{\Delta}{2}}{Y}\right)\right] \quad (1-39)$$

Empecemos desarrollando la transformada en la coordenada x :

$$\mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{X}\right)\right] = \int_{-X/2}^{X/2} e^{-i2\pi(f_x x)} dx \quad (1-40)$$

$$\mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{X}\right)\right] = -\frac{1}{i2\pi f_x} \left(e^{-i2\pi f_x X/2} - e^{i2\pi f_x X/2}\right) \quad (1-41)$$

$$\mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{X}\right)\right] = X \text{sinc}(f_x X) \quad (1-42)$$

Ahora, desarrollemos la transformada en la coordenada y:

$$\mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{y - \frac{\Delta}{2}}{Y}\right) + \text{rect}\left(\frac{y + \frac{\Delta}{2}}{Y}\right)\right] = \left[\int_{-Y/2+\Delta/2}^{Y/2+\Delta/2} e^{-i2\pi(f_y y)} dy + \int_{-Y/2-\Delta/2}^{Y/2-\Delta/2} e^{-i2\pi(f_y y)} dy\right] \quad (1-43)$$

$$= \left(-\frac{1}{i2\pi f_y} \left(e^{-i2\pi f_y(Y/2+\Delta/2)} - e^{-i2\pi f_y(-Y/2+\Delta/2)}\right)\right) + \left(-\frac{1}{i2\pi f_y} \left(e^{-i2\pi f_y(Y/2-\Delta/2)} - e^{-i2\pi f_y(-Y/2-\Delta/2)}\right)\right) \quad (1-44)$$

$$= \frac{1}{i2\pi f_y} \left(-e^{-i\pi f_y Y} e^{-i\pi f_y \Delta} + e^{i\pi f_y Y} e^{-i\pi f_y \Delta}\right) + \frac{1}{i2\pi f_y} \left(-e^{-i\pi f_y Y} e^{i\pi f_y \Delta} + e^{i\pi f_y Y} e^{i\pi f_y \Delta}\right) \quad (1-45)$$

$$= \frac{1}{i2\pi f_y} \left(e^{-i\pi f_y \Delta} (-e^{-i\pi f_y Y} + e^{i\pi f_y Y})\right) + \frac{1}{i2\pi f_y} \left(e^{i\pi f_y \Delta} (-e^{-i\pi f_y Y} + e^{i\pi f_y Y})\right) \quad (1-46)$$

Agrupando finalmente los factores comunes de esta expresión:

$$\mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{y - \frac{\Delta}{2}}{Y}\right) + \text{rect}\left(\frac{y + \frac{\Delta}{2}}{Y}\right)\right] = \frac{1}{i2\pi f_y} (e^{i\pi f_y Y} - e^{-i\pi f_y Y}) (e^{-i\pi f_y \Delta} + e^{i\pi f_y \Delta}) \quad (1-47)$$

Finalmente queda la expresión para la transformada de Fourier en la coordenada y :

$$\mathcal{F} \left[\text{rect} \left(\frac{y - \frac{\Delta}{2}}{Y} \right) + \text{rect} \left(\frac{y + \frac{\Delta}{2}}{Y} \right) \right] = 2Y \text{sinc}(Y f_y) \cos(\pi f_y \Delta) \quad (1-48)$$

Volviendo a la expresión de la transformada de Fourier de la función de la transmitancia (ecuación 1-39):

$$\mathcal{F} [t_a(x, y)] = 2XY \text{sinc}(X f_x) \text{sinc}(Y f_y) \cos(\pi f_y \Delta) \quad (1-49)$$

Ahora para la expresión para la intensidad (ecuación 1-50) y teniendo en cuenta que $f_x = \frac{x}{\lambda z}$ y $f_y = \frac{y}{\lambda z}$ queda finalmente:

$$I(x, y) = I(x, y) = \left(\frac{2XY}{\lambda z} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{Xx}{\lambda z} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{Yy}{\lambda z} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta y}{\lambda z} \right). \quad (1-50)$$

Además, se realizó una simulación de la distribución de intensidad a una distancia z de la doble rendija, donde se obtiene la figura 6. Para llegar a esto, se tienen en cuenta los siguientes parámetros: el largo de las rendijas es $1 \cdot 10^{-3}m$, ancho de las rendijas $0.1 \cdot 10^{-3}m$, una separación entre las rendijas de $0.3 \cdot 10^{-3}m$, longitud de onda de $633 \cdot 10^{-9}m$, y una distancia de propagación $z = 1m$. Observando así, que para ambos resultados la gráfica obtenida es equivalente. Asimismo, al obtener un número de Fresnel $N_F = 0.0158$, sabemos que estamos trabajando en Fraunhofer (campo lejano).

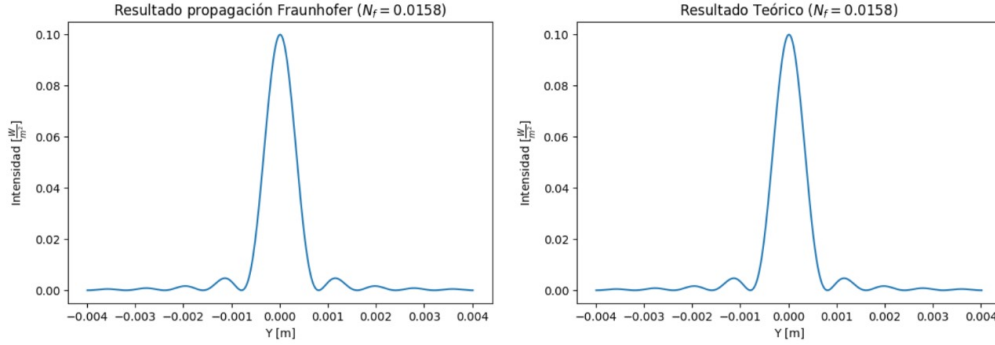


Figura 6: Comparación de la intensidad para la propagación en Fraunhofer y el resultado obtenido en la ecuación 1-50 del problema de la doble rendija.

Anexo Link al notebook de Google Colab donde se encuentran los códigos de cada punto: https://colab.research.google.com/drive/1ZZFqTmczAAIDfBvvEI5B_DEKJ8goJIGk?usp=sharing

Submitted by Alejandra Ocampo, Maria Jose Gil, Camila Posada, Santiago Pascuas, Juan Camilo Ospina, Agustin Lopez, Jacobo Chica on 30 de abril de 2024.