

Informe trabajo final

Dinámica de vuelo

Maria Antonia Restrepo, Andrés Felipe Restrepo, Juan José Henao
Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín
09/011/2025

I. Modelo matemático

La construcción del código viene fundamentada por completo en los modelos matemáticos presentes en el artículo "Robust Flight Control Design Challenge, Problem Formulation and Manual: the Research Civil Aircraft Model (RCAM)", Garteur, Junio 15, 1995. Para empezar, se definen las variables de estado y las variables de control en dos vectores, x y u respectivamente, donde las variables de control tendrán sus correspondientes límites físicos:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_E \\ \delta_R \\ \delta_{th_1} \\ \delta_{th_2} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

Una vez definidas las variables, se procede a hacer cálculos intermedios, esto es, apoyarse de la teoría de dinámica y aerodinámica para calcular la magnitud de la velocidad, el ángulo de ataque, el ángulo de deslizamiento y los vectores de velocidad rotacional y velocidad translacional en el marco de referencia del cuerpo. Nótese que para evitar ambigüedades, se usa la función atan2 para el ángulo de ataque:

$$V_a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{x_3}{x_1} \right) = \text{atan2}(x_3, x_1)$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{x_2}{V_a} \right)$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho V_a^2$$

$$\bar{\omega}_b^{b/e} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{V}^b = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}^T$$

Luego se prosigue a calcular coeficientes aerodinámicos: coeficiente de sustentación, de arrastre y de fuerza lateral.

Se utiliza la correspondiente matriz de rotación para asegurarse que todo quede en el mismo sistema:

$$C_F^S = \begin{bmatrix} -C_D \\ C_y \\ C_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.13 + 0.07(5.5\alpha + 0.654)^2 \\ -16\beta + 0.24u_3 \\ CL_{wb} + CL_l \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_F^w = C_{w/s}(\beta) \bar{C}_F^s$$

$$C_{w/s}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez se tienen los coeficientes, el producto de cada uno con la superficie alar y la presión dinámica da el resultado de las fuerzas. Lo mismo se hace para los momentos, teniendo en cuenta que ambos se deben multiplicar con la matriz

de rotación correspondiente para garantizar que todo quede en el mismo marco de referencia: Para las fuerzas:

$$F_A^S = \begin{bmatrix} -D \\ Y \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_D Q S^S \\ C_Y Q S^S \\ -C_L Q S \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_A^b = C_{b/s}(\alpha) \bar{F}_A^S$$

$$C_{b/s}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Para los momentos, donde también se tienen en cuenta dimensiones de la aeronave:

$$\bar{M}_{Aac}^b = \bar{C}_{Mac}^b \cdot q S \bar{c}$$

$$M_i = M_{ac} + F_x$$

$$C_{Mac}^S = \begin{bmatrix} C_{l_{ac}}^I \\ C_{m_{ac}}^J \\ C_{n_{ac}} \end{bmatrix} = n + \frac{\partial c_m}{\partial x} w_b^b / e + \frac{\partial C_m}{\partial u} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{r}_{eg} = \begin{bmatrix} X_{cg} \\ Y_{cg} \\ Z_{cg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, 23\bar{c} \\ 0 \\ 0, 1\bar{c} \end{bmatrix} \quad \bar{r}_{ac} = \begin{bmatrix} X_{ag} \\ Y_{ag} \\ Z_{ag} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, 12\bar{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, se tienen en cuenta los efectos de la propulsión:

$$F_i = \delta_{lhi} \cdot mg$$

Así como los momentos que los motores producen:

$$\bar{M}_{Ecg_{1/2}}^b = \bar{r}_1^b \times \bar{F}_E \bar{r}_1^b$$

Finalmente, se tiene en cuenta el efecto del peso, el cual solo tiene la componente dada por el producto de la masa por la gravedad en el eje z, pero debe realizarse la rotación correspondiente para que quede en el sistema del cuerpo:

$$\mathbf{F}_g^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} m \quad \bar{\mathbf{F}}_g^b = C_b^e(\phi, \theta, \psi) \bar{\mathbf{F}}_g^e \quad \bar{\mathbf{F}}_g^b = \begin{bmatrix} -g \sin(X_s) \\ g \cos(X_s) \sin(X_q) \\ g \cos(X_s) \cos(X_q) \end{bmatrix} m$$

En este punto ya se tienen todas las fuerzas y momentos correctamente definidos en el mismo sistema, por lo cual se procede a aplicar leyes de Newton para la dinámica traslacional y rotacional, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = (m^{-1}) \times \bar{\mathbf{F}}^b - \bar{\mathbf{w}}_e^b \times \bar{\mathbf{V}}^b \quad ; \quad \begin{bmatrix} \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = I_b^{-1} (\bar{\mathbf{M}}_G^b - \bar{\mathbf{W}}_e^b \times I_b \bar{\mathbf{w}}_e^b)$$

II. Análisis de resultados

En los ejercicios hechos con el programa, se puede decir que:

A. Ejercicio 2:

Con las condiciones iniciales dadas, las gráficas de movimiento longitudinal (figura 1) muestran los modos vistos en clase, a saber, el fugoide y el de periodo corto que luego convergen demostrando la estabilidad longitudinal de la aeronave. La dirección lateral (figura 2) permanece constante, lo cual es coherente con las condiciones iniciales ya que ninguna tenía algún tipo de perturbación lateral.

B. Ejercicio 3:

En la gráfica de movimiento lateral (figura 5) se aprecian picos bruscos en la velocidad en Y (w) y la velocidad rotacional en eje x (q) a los 30 segundos, que es cuando se aplica la deflexión. Este comportamiento es coherente con el modelo utilizado, ya que se asume que dicha deflexión ocurre de manera instantánea, lo que produce los picos; esto se puede corroborar en la figura 3, donde las gráficas muestran que los alerones son la única superficie de control en cambiar, con un modelo instantáneo. Además, los ángulos de alabeo y guiñada cambian considerablemente, contrarios a los constantes cuando no se aplicaban alerones, para, luego de un tiempo considerable (alrededor de los 80 segundos) volverse constantes; esto indica la perturbación obtenida por la implementación de alerones y recobrar su estado después de remover dicha deflexión. Nótese el comportamiento dinámico (no es un salto brusco) en dicha transición. Por el otro lado, los modos de estabilidad longitudinal vuelven a aparecer (figura 4), siendo convergentes.

C. Ejercicio 4:

Al apagar un motor, se espera que se produzca un desbalance lateral. Esto se aprecia en la figura 7, en la gráfica de ψ , donde su valor se vuelve cada vez más negativo al pasar el tiempo. Las demás gráficas vuelven a mostrar los modos de estabilidad dinámica. Una comparación entre la figura 7 y la figura 2 delata como las variables relacionadas al eje lateral dejan de ser constantes, lo cual es de esperarse debido a la pérdida del motor.

III. Gráficas

Las gráficas dadas por el código implementado para cada condición de vuelo son:

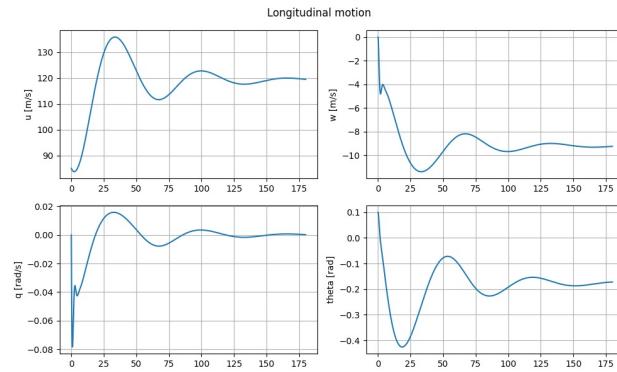


Fig. 1 Ejercicio 2: dinámica de vuelo con condiciones iniciales. Movimiento longitudinal

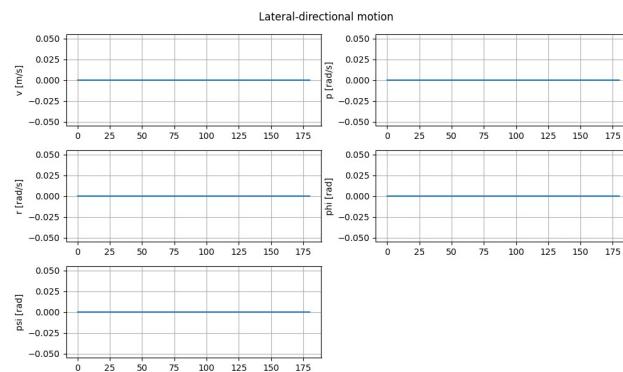


Fig. 2 Ejercicio 2: dinámica de vuelo con condiciones iniciales. Movimiento lateral

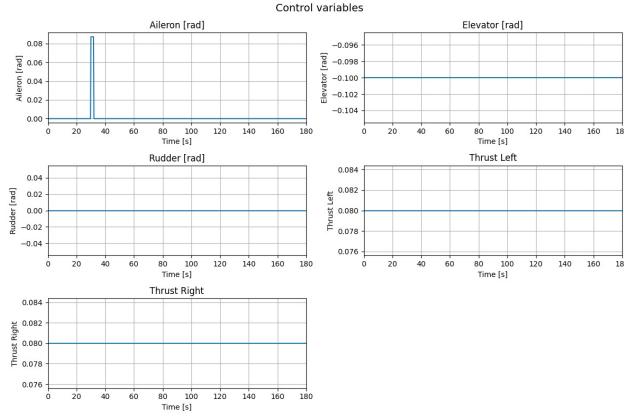


Fig. 3 Ejercicio 3: deflexión de alerón ($+5^\circ$) en 30 segundos

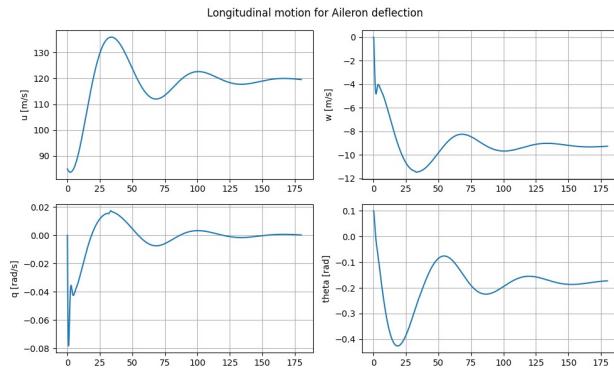


Fig. 4 Ejercicio 3: deflexión de alerón ($+5^\circ$) en 30 segundos. Movimiento longitudinal

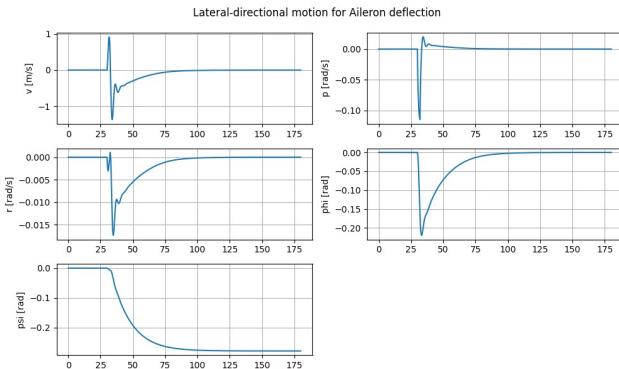


Fig. 5 Ejercicio 3: deflexión de alerón ($+5^\circ$) en 30 segundos. Movimiento lateral

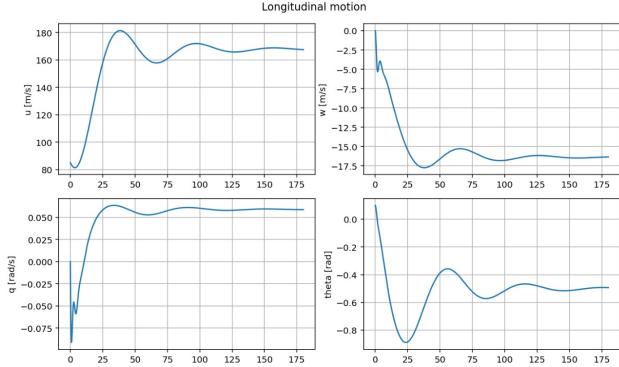


Fig. 6 Ejercicio 4: pérdida de un motor. Movimiento longitudinal

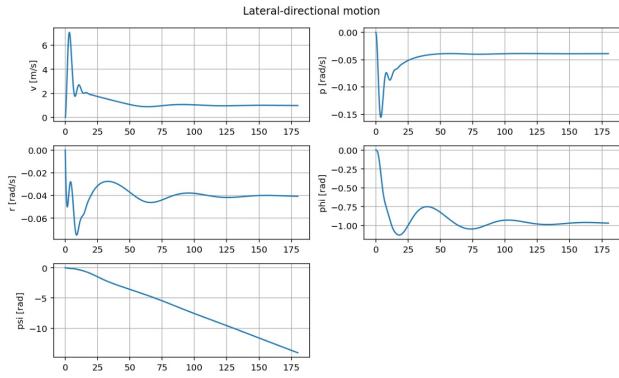


Fig. 7 Ejercicio 4: pérdida de un motor. Movimiento longitudinal

IV. Función de costo

Para realizar la optimización, primero se debe establecer la función de costos J , definida como:

$$J = \sum_i w_i \left(\frac{e_i}{s_i} \right)^2$$

Para hacerla, se siguió el siguiente razonamiento: Se eligen las variables de estado que satisfagan la condición de vuelo deseada. Por ser vuelo recto y nivelado, todas sus aceleraciones serán cero, así como su ángulo de ascenso. El ángulo de guñada se establece también como cero para garantizar vuelo de sur a norte. La velocidad necesaria es de 85m/s, pero se supone que esta velocidad será únicamente en la dirección longitudinal del avión (por ende se tiene un cabeceo de cero, así como sus otras componentes de velocidad). Una vez establecido la condición de vuelo, se añaden todas las variables de control a la función de costo para que también sean optimizadas: de hecho esto es lo que se busca, obtener la posición óptima de cada superficie de control que garantice la condición de vuelo deseada. Luego, se debe normalizar cada variable usada, para lo cual se decidió utilizar variables aerodinámicas: las velocidades se normalizan con la velocidad de vuelo, las aceleraciones con la gravedad, así como haber incluido la cuerda media aerodinámica y la

envergadura para los cambios de los ángulos de Euler; la normalización de aceleraciones no fue trabajada en clase, por lo cual se utilizaron valores empíricos obtenidos en la literatura y los valores angulares son normalizados a través del uso de su rango típico de operación. Para el peso, se le dio 1/4 a la velocidad en x (u) y al ángulo de guiñada ya que se consideraban las variables que se tenían que cumplir con más prioridad: si esto no sucedía, se podía lograr nivelar el avión pero con posibilidad de otra velocidad u orientación, lo cual no cumpliría con la actividad. La otra mitad se repartió para las otras variables. Para las variables de control se utilizó un peso de 0.1 en todas. El cuadro de la figura 8 muestra todas las variables utilizadas, así como su peso y factor de escala.

Función de costo J		X_dot=0	u=85m/s	yaw=0 (South to North)
Variable	Desired value	Scaling factor	Scaling factor value	Weight
u_dot	0 g		9.81	0.04545455
v_dot	0 g		9.81	0.04545455
w_dot	0 g		9.81	0.04545455
p_dot	0 Valores típicos empíricos		100	0.04545455
q_dot	0 Valores típicos empíricos		20	0.04545455
r_dot	0 Valores típicos empíricos		5	0.04545455
theta_dot	0 Uo/c		12.87878788	0.04545455
psi_dot	0 Uo/b		1.897321429	0.04545455
phi_dot	0 Uo/b		1.897321429	0.04545455
u	85 Uo		85	0.25
yaw	0 w		3.141592654	0.25
phi	0 w/4		0.785398163	0.04545455
gamma	0 w/9		0.34906585	0.04545455
def_A		b	44.8m	
def_E		Uo	85m/s	
def_R		c	6.6m	
th1				
th2				

Fig. 8 Parámetros para la función de costo

Al implementar el programa, se llegan a resultados que se consideran satisfactorios (figura 9) ya que se cumple con la velocidad y orientación pedidos y todas las superficies de control están dentro del rango de operación.

```

Condición de vuelo:
Uo = 85.516795m/s
Yaw = -0.015592°
Roll = 0.002696°
Climb = 0.032227°

VARIABLES DE CONTROL ÓPTIMAS:
def_A = -0.022149 rad (-1.27°)
def_E = -0.015166 rad (-0.87°)
def_R = -0.003905 rad (-0.22°)
th1 = 0.091067
th2 = 0.061748

```

Fig. 9 Información entregada por el algoritmo de optimización

V. Link del código

<https://github.com/JuanHenao18/Research-civil-aircraft-model>-

Link