

# Una revisión al concepto del tiempo en física

J. C. Higuera Calderón<sup>\*1</sup>, F. J. Ordóñez Araújo<sup>†1</sup>, K. N. Ramos G<sup>‡1</sup>, and Y. Lha<sup>§1</sup>

<sup>1</sup>Agujeros Negros Cuánticos, Departamento de física, Facultad de ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

03 de septiembre de 2021

## Resumen

En este trabajo se estudió el concepto del tiempo en varios contextos como el cognitivo, cultural y filosófico, este ultimo resulta importante porque el desarrollo de este concepto desde sus primeras posturas incidió en la revolución científica siglos mas tarde, dicha influencia se dio en la creación de los métodos matemáticos utilizados en la ciencia moderna en donde el tiempo juega un papel fundamental para el entendimiento y la predicción de una gran variedad de fenómenos naturales. Esto se hizo mediante el establecimiento de las bases de la mecánica Newtoniana en donde se introduce la diferencia entre el tiempo absoluto y el tiempo medido. Después, se dieron unas bases matemáticas para el tratamiento formal del tiempo, su simetría y su relación con la conservación de la energía, para posteriormente abordar el cambio conceptual del tiempo introducido en la relatividad producto de una concepción pragmática del tiempo, de la constancia de la velocidad de la luz y el principio de equivalencia. Luego, se abordó el papel del tiempo en la mecánica cuántica en donde se mostró un intento por elevar el tiempo a la categoría de observable, estimando el valor esperado, los autovalores y la hermeticidad del operador tiempo que se definió, también se comentó algunos problemas que trae consigo dicho intento y unas preguntas que deben ser resueltas para poder definir de forma mas coherente el operador tiempo. Finalmente para terminar la continuidad histórica del texto abordamos dos problemas vigentes de la física fundamental respecto al tiempo, el problema de la flecha del tiempo y el de la aparición de dos vacíos no unitariamente equivalentes para distintos observadores en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

## 1. Introducción

A través de los escritos hechos por civilizaciones antiguas se pudo conocer que desde los inicios de la historia humana el tiempo siempre fue sujeto de estudio, en muchos casos asociado a una deidad, por ejemplo la cultura Hindú representa el río cósmico en la imagen divina de Shiva danzante: su danza rige el discurrir del universo, es el flujo del tiempo [1]. Posteriormente, en la civilización griega Anaximandro logró hacer una comprensión del papel tiempo en la naturaleza diciendo «Las cosas se transforman una en otra según necesidad y se hacen mutuamente justicia según el orden del tiempo.», esa visión de Anaximandro estuvo presente desde el inicio de la ciencias naturales, desde la astronomía antigua donde se describía el movimiento de los astros en la esfera celeste a través del tiempo, pasando por la mecánica de Newton, las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de Schrödinger, en todas estas teorías físicas siempre se buscó describir como cambian los sistemas físicos estudiados en el tiempo.

Desde un enfoque experimental para cuantificar el tiempo siempre se han usado como referencia fenómenos periódicos, como el giro del planeta sobre su propio eje conformando así los días, el giro del planeta alrededor del sol conformando los años, etc. Actualmente para

cuantificar el tiempo usamos una medida estándar conocida como segundo, la cual se define como la duración de 9,192,631,770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado base del átomo de cesio 133.

Hoy en día el tiempo ocupa un lugar fundamental en física, a parte de su uso en todas las ramas de la física, tiene un papel especial en las discusiones actuales sobre los fundamentos de la termodinámica y en el planteamiento de una teoría consistente de la gravedad cuántica.

## 2. El tiempo desde perspectivas humanísticas.

El tiempo de forma alternativa a cómo se entiende en las ciencias físicas ha sido un concepto que a lo largo de los milenios ha permeado cada campo de la esfera humana, llegando a considerarse en una multitud de escenarios como algo relevante a tener en cuenta, esto pasando desde todas las culturas existentes y por existir, hasta las múltiples disciplinas que en ellas han tenido origen y junto a las mentes que las han desarrollado, e incluso en cada uno de nosotros lo relacionado al tiempo

ha estado presente en todos los ámbitos de nuestra vida cotidiana, de manera tal que muchos le hemos asignado ciertas conceptualizaciones ya sea de forma intencional o no, que han influido en nuestra toma de decisiones y en la forma en la que vemos la vida y tomamos una actitud hacia esta.

Debido a la generalidad que el concepto presenta, es posible abordarlo también desde perspectivas humanas y conocer cómo nuestra parte psicológica referente al tiempo parte desde nuestra cognición lo cual ha constituido un serio limitante a los problemas concernientes al cómo entendemos este concepto, junto a las ideas de algunos pensadores que a lo largo de los siglos inciden en las disciplinas que llegan a relacionarse con este concepto de forma tan fundamental como lo es la física.

## 2.1. El tiempo visto desde una perspectiva cognoscitiva

Desde una perspectiva biológica sabemos que tenemos órganos específicos que nos permiten tener cierta conciencia de nuestras percepciones, permitiendo a un individuo considerablemente sano experimentar algunas sensaciones, sin embargo, aún no existe un consenso claro del todo acerca de cómo el cerebro, órgano relacionado con la percepción del tiempo, puede trabajar involucrando varias partes para producir una representación adecuada de este, incluso, se desconoce aún más de qué forma esta percepción pueda ser construida por otros seres vivos.

En el caso de los animales con una estructura cerebral lo suficientemente desarrollada, como los mamíferos superiores, existen estudios los cuales sugieren que la percepción del tiempo tiene su origen en la suma de los estímulos asociados a procesos cognitivos relacionados con cambios en su entorno, es así como esta percepción requiere de la aparición de complejos mecanismos neuronales que pueden cambiar según sean los niveles de atención, aprendizajes recientes o cambios en el entorno, todo esto con el fin de proporcionar al individuo un entendimiento de su entorno, esto incluye poder ejecutar tareas predictivas que tienen como fin preparar o advertir al individuo acerca de cómo las condiciones anteriormente percibidas pueden desarrollarse en eventos probables, jugando de esta forma un papel importante en la evolución de muchas especies. [2]

En el caso de los humanos existen investigaciones que señalan una correlación entre la percepción del tiempo y ciertas áreas cerebrales como el cortex frontal, parietal, basal, el cerebelo y el hipocampo, también se ha observado que individuos que presentan daños en estas áreas cerebrales pueden llegar a presentar una percepción del tiempo considerablemente disfuncional con respecto a los requerimientos impuestos en el estado natural o las

exigencias de las sociedades humanas, ejemplos de estos problemas pueden ser alteraciones en la percepción de cómo pasa el tiempo, dificultad para distinguir escalas temporales como segundos y días, ordenamiento deficiente en el planeamiento de tareas o memorias desordenadas que no corresponden a su orden originalmente percibido por el individuo. [2]

Durante la evolución, los organismos han desarrollado cronómetros biológicos para registrar el paso del tiempo, por ejemplo, muchos mamíferos sincronizan la actividad circadiana con los ciclos de luz y oscuridad, a través de la foto-recepción ocular que transmite señales al hipotálamo. Este mecanismo regula persistentemente una variedad de ciclos de sueño-vigilia, que ayuda a los organismos a adaptarse a los ritmos de un día. Sin embargo, independientemente de la luz, la posición del sol en el cielo, o si disponemos de un reloj de pulsera, los humanos de alguna manera podemos estimar cuánto tiempo ha pasado, entre dos sucesos. [3]

En última instancia la subjetividad que tenemos del tiempo también nos permite desarrollar una noción de lo que llamamos, pasado, presente y futuro, también se nos permite describir fenómenos físicos como la velocidad de un objeto que de forma clásica refiere al ritmo o frecuencia con el que este cambia su posición en el espacio, en definitiva nuestra sensibilidad para percibir y responder al tiempo está implicada también en tareas mentales complejas, como atender a lo que pasa, pensar para solucionar problemas o tomar decisiones, aprender de errores anteriores, planificar el futuro o incluso entender las mentes ajenas. [4]

## 2.2. El tiempo visto desde una perspectiva cultural y filosófica

El tiempo ha sido parte de todas nuestras experiencias en formas que nos pueden parecer cotidianas, sin embargo, estas formas también son profundamente culturales. A pesar de que de forma consciente tenemos una noción de que este se puede tomar como dividido en presente, pasado y futuro, dichos tiempos adquieren o pueden adquirir una valoración diferente en unas u otras culturas. [5]

Cada cultura vive la temporalidad desde la diversidad e incluso cada disciplina representa este concepto de forma diferente a conveniencia de esta, de modo que no existe una única percepción del tiempo, sino una gran diversidad de experiencias y de representaciones. De hecho, una de las principales dificultades de adaptación de las personas a una nueva sociedad, una nueva cultura u otra disciplina reside en la manera de como en estas entidades se entiende el tiempo, es decir, su organización y la gestión del mismo, la secuencia de los hechos o de las acciones y en la resolución de los problemas visto

desde una perspectiva pragmática. [5] Una pregunta de varios pensadores común a lo largo de varios siglos es: ¿existe el tiempo como algo independiente de nuestra percepción y nosotros nos adaptamos a este según nos permita nuestra cognición, o es algo que creamos desde la cognición y construimos en forma individual y grupal dentro de los parámetros de cada una de nuestras sociedades?. [5]

La primera respuesta es que el tiempo, en efecto, existe fuera de la conciencia de los individuos y es de carácter lineal y dinámico bajo una concepción clásica que estuvo presente desde los antiguos griegos hasta principios del siglo XX, inclusive bajo otras concepciones de carácter pragmático-experimental en donde el tiempo juega un papel importante en el entendimiento de fenómenos universales como lo es la relatividad, luego, el tiempo no es algo que requiera de la percepción de un observador para existir, y que de hecho se postula que este puede estar íntimamente relacionado con el espacio permitiéndonos incluso comprenderlo mediante las propiedades inherentes del mismo espacio, lo cual hace que lo consideremos como una dimensión más. Mientras, la segunda posición, con carácter más teórico, sostiene que el tiempo universal o visto como fenómeno natural no existe, sino que cada sociedad se orienta en el mundo usando este concepto de forma propia, ya sea para generar un ordenamiento en los sucesos pasados y futuros mediante un esquema relativo a la sociedad, o con la intención de establecer marcadores para la comprensión de otros fenómenos subyacentes como las migraciones o los ciclos de cosechas, de modo que se entiende el tiempo lineal como un artefacto histórico-cultural que se ha universalizado. [5]

Se estima que hace unos quince millones de años ocurrió un fenómeno físico llamado el big-bang el cual entendemos como el origen del espacio y del tiempo, es el punto en el cual el universo empieza a desarrollarse siguiendo unas aparentes reglas que gobiernan los comportamientos a cualquier escala existente hasta el momento presente. Para el hombre primitivo, el tiempo era una sucesión confusa de días y noches, advertía la existencia de fenómenos de carácter cíclico, y era concepto de cambio perpetuo.

La aparición de los seres humanos junto a sus capacidades cognitivas que le dotaban de una constante necesidad de predecir y registrar fenómenos, lo llevaron durante miles de años, a experimentar el esfuerzo por medir el tiempo y crear un calendario factible, este ha sido un evento importante en las sociedades, porque solo de esta forma surge la historia.

En Egipto se conocía el año solar de 365 días, con 12 meses de 30 días y 5 complementarios hace 3000 años antes de cristo, curiosamente el inicio del año estaba determinado por la primera aparición en el amanecer de la estrella Sirius de la constelación canis major (para este

punto de la historia no se había identificado el firmamento con constelaciones), este acontecimiento coincidía ordinariamente con la crecida del río Nilo. Mientras que de Babilonia hemos heredado la semana de siete días, la hora de sesenta minutos, y el minuto de sesenta segundos, tal y como se utiliza en la mayoría del mundo, los babilonios de la época realizaron estos cálculos, convirtiendo la sombra de las estacas en grados, minutos y segundos de ángulo, también utilizando Clepsidras o relojes de agua.

El filósofo Anaximandro (Siglo VI a.c) habla del tiempo como un concepto que tiene como funcionalidad entender otro concepto, este es el ápeiron, el cual es el origen de todas las cosas y el mismo final de estas, en donde todo perece según la disposición del tiempo. Anaximandro pensaba en el tiempo como una propiedad del universo, intangible, y funcionaria de lo necesario, esto es, el nacimiento de el algo, su cambio y dinámica y su decadencia o muerte, todos estos sucesos se encuentran fijados por los tiempos de la sucesión de los entes según la ley de un antes y un después necesario. [6] Esta concepción del tiempo encaja mucho con las concepciones clásicas del tiempo cuando Anaximandro afirma que este es inmutable refiriéndolo como propiedad funcionaria de lo necesario y que marca la sucesión de eventos que siguen leyes físicas como algo necesario.

Heráclito (siglo V a.c) nacido en la ciudad de Éfeso, fue probablemente, el primero en reflexionar sobre el cambio permanente en todo el cosmos, el fluir de las cosas, el devenir, la temporalidad. Él nos dice que todo en la naturaleza está sometido a constante cambio, y que por tanto es imposible definir cualquier cosa que pertenezca a ella, porque inmediatamente deja de ser lo que es para ser otra cosa. Esto implica su famosa aseveración de que nunca una persona tendrá dos veces la misma experiencia, ni verá dos veces lo mismo: el todo se renueva en cada instante, está sometido a un constante devenir. En esta filosofía se diferencian claramente dos mundos: el ser, y el no ser. Según Parménides, el mundo que estás contemplando ahora mismo, no es, es decir que estás viendo una manifestación del mundo del no ser, esto debido a que el universo está en constante cambio y por tal razón afirmar algo en un momento carece de sentido, ahora es otra cosa, entonces, las percepciones de nuestra realidad, todo lo que nos muestran los sentidos, atañe al no ser, es decir, los colores, los aromas, el movimiento, el cambio, el devenir, el tiempo. Por ende, este filósofo concluye que el tiempo pertenece al no ser, que el tiempo no es, que el tiempo no existe. [7]

Para Platón (Siglo IV a.c) el tiempo es una imagen móvil de la eternidad, imita a esta y se desarrolla de forma cíclica según patrones numéricos, Platón afirma que el tiempo nace con el firmamento, y el movimiento de los astros es el lenguaje de este en hechos, es de esta forma que se nos deja ver que la concepción del

tiempo para Platón viene relacionada con el carácter cíclico de los fenómenos y de ahí su carácter eterno, cuyo desarrollo da lugar a la apariencia sensible del tiempo. [8]

Las primeras concepciones de los conceptos fundamentales desarrollados en la mecánica clásica, como el movimiento, fueron abordadas fuera del marco científico moderno por Aristoteles (Siglo III a.c), este filósofo piensa el tiempo conectándolo con el espacio y el movimiento, tres magnitudes que considera continuas. El ahora, el antes y el después son los conceptos con los que intenta precisar el ser del tiempo y su función como medida. Una especie de tiempo cósmico, propio de los astros eternos, alberga el tiempo de los seres perecederos. Y fuera del tiempo se halla lo intemporal, aquello que es imposible que se dé en él. [9]

Aristoteles constata que el tiempo no es un movimiento, pero que no hay tiempo sin movimiento, consistente con la mayoría de las teorías desarrolladas tras la revolución científica, pues ambos se perciben juntos, si algo se ha movido es que algún intervalo de tiempo ha pasado y si algo ha pasado es que algún movimiento se ha producido, de esta manera se establecen las primeras nociones sobre la naturaleza física de las cosas concernientes a un principio de causalidad, queda establecida así una sólida analogía entre espacio, movimiento y tiempo, magnitudes continuas.

También se expone algunas de las características del tiempo que se deducen de lo anteriormente expuesto según Aristóteles: No hay una unidad mínima de tiempo, al igual que no la hay de espacio. Existe la continuidad espacio temporal. Un intervalo temporal puede ser breve o duradero, pero no rápido o lento. El trascurrir del tiempo es igual en todas partes, el tiempo es cuantificable, pero no es lo que cuantifica. Cualquier intervalo de tiempo cuantificado puede repetirse en tanto cantidad. Al igual que medimos el movimiento por el tiempo, también podemos medir el tiempo mediante el movimiento, lo cual es posible porque todo movimiento se da en el espacio. [9] Para Aristoteles espacio y tiempo están profundamente relacionados. Todas estas propiedades son presuntamente bajo las cuales algunos científicos naturales estudiarían la naturaleza después del siglo XVI, e incluso se mantendrían vigentes en pensadores como Albert Einstein el cual logró unificar la relación hasta ese momento independiente entre espacio y tiempo mediante el postulado de la constancia de la velocidad de la luz.

Con la revolución científica (siglo XVI y XVII), especialmente a partir de Galileo, la noción del tiempo cambia. Aparece la noción de un tiempo abstracto, absoluto en el universo, concebido como un parámetro o una variable física que vale para todo movimiento, es en este punto en donde el sentido de la causalidad toma un entendimiento formal. Galileo, al estudiar el problema

de la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento, da un nuevo impulso en la comprensión de la noción de tiempo, a la vez que suscita los problemas que darán lugar a la aparición del cálculo infinitesimal desarrollado por Newton y Leibniz. Entonces se empieza a desarrollar el camino de investigación que el mismo Aristóteles había señalado, en donde el tiempo cobra ahora más sentido con las matemáticas y es posible rectificar su naturaleza mediante el estudio de los movimientos celestes aportando a los pensadores de la época el entendimiento de su sentido práctico.

Tiempo, espacio y materia a partir de esta revolución serán considerados como los tres grandes conceptos de la física clásica, es decir, del mecanicismo. No obstante, el tiempo se podía entender de dos maneras distintas: como una realidad absoluta o como una relación, luego, estas dos maneras de enfocar el tiempo enfrentaron a Newton, que defendía un tiempo absoluto, que lo consideraba como una especie de continente vacío, y a Leibniz, quien lo consideraba como una relación, es decir, el orden universal de los cambios, el orden de sucesiones. Con Newton, el tiempo pierde definitivamente su carácter trascendente y deviene nuevamente en una realidad, pero que posee ahora entidad por sí misma y no mantiene ya, por tanto, una relación con el movimiento ni con un fin para este, lo cual, lleva a que la física construida por Newton y la de los próximos siglos, experimente un enfoque mecanicista, y que la física sea basada en la independencia del tiempo con el espacio y la aceptación de este como un parámetro descriptivo de la realidad. [10]

Lo anterior es también pensado por Kant (siglo XVIII) de una forma diferente, contrayendo ciertas similitudes con lo postulado por Newton. El carácter absoluto del tiempo sugerido por Newton es el que en ese entonces ganaba de mayor aceptación por parte de la filosofía moderna. Kant, a quien el tiempo le sigue resultando de forma esencial un carácter de absoluta independencia con respecto a las cosas, es decir, lo que hay en el espacio, piensa que precisamente esto es lo que determina que su naturaleza haya de ser distinta de la de las cosas que se encuentran en el espacio. Kant considerará que del tiempo no se tiene constancia a partir de la percepción, sino precisamente a partir del hecho de que no puede pensarse la posibilidad de ninguna percepción si no es suponiendo que ésta se dé ya en el tiempo, por tanto, Kant niega que sea un concepto empírico, ya que toda experiencia presupone el tiempo, entonces, tampoco es una cosa. [11]

El pragmatismo como filosofía se le atribuye principalmente a Charles Sanders Peirce (Siglos XIX) [12]. Esta es una corriente filosófica centrada en vincular lo teórico con lo práctico, describiendo un proceso de cómo la teoría se extrae de la práctica y luego esta se aplica a la práctica para mejorar las conclusiones. Esta corrien-

te caracteriza el significado de las cosas a través de las consecuencias, y una de sus características es el renuncio a las formas de pensar fundamentalistas, ya que esta corriente niega la búsqueda de la certeza última. [13] La importancia con esta corriente de pensamiento para la comprensión del concepto de tiempo reside en la máxima pragmática, esta afirma que la concepción total de nuestro objeto es la concepción total de sus efectos [14], por tal, resulta útil que la comprensión del concepto de tiempo se entienda no a través de un **¿qué es el tiempo?**, sino a través de los efectos de este y de su utilidad, luego, este se puede comprender como una dimensión, o con cualquier otro efecto que se le asocie desde un punto de vista práctico, e incluso la famosa frase de Albert Einstein "El tiempo es lo que miden los relojes" presenta un carácter pragmático que aporta al entendimiento de este.

### 3. El tiempo en la mecánica clásica. La perspectiva de Newton

En sus *Principia*, Newton construyó las bases de la mecánica clásica, para ello tuvo que definir los conceptos de espacio y tiempo. Respecto al espacio, Newton afirma que su existencia es necesaria para que los cuerpos puedan existir, además afirma que el tiempo, al igual que el espacio son absolutos y que sin la existencia del tiempo la materia sería inerte, no cambiaría [15].

En la mecánica Newtoniana los conceptos de espacio y tiempo tiene un carácter metafísico ya que a través de ellos se construye una base ontológica de la realidad física. En los principia Newton diferencia el tiempo medido del tiempo absoluto y al respecto dice:

*El tiempo absoluto, verdadero y matemático, por sí mismo y por su propia naturaleza, fluye igual sin relación a ninguna cosa externa y con otro nombre se le llama duración [...] En contraste, el tiempo relativo, aparente y común, lo considera como una medida (exacta o inexacta) sensible y externa de la duración en términos de un movimiento, lo cual es comúnmente utilizado en lugar del tiempo verdadero; como son las horas, días, los meses, los años.*

Cuando Newton intenta diferenciar entre el tiempo absoluto y el tiempo medido se da cuenta que el concepto del tiempo medido le trae consigo dos aspectos fundamentales que están íntimamente relacionados: el de continuidad y de igualdad entre pares, estos conceptos nos permiten afirmar el tiempo absoluto, por un lado en cuanto a la continuidad es un concepto ontológico y por el otro es una abstracción matemática que permite hablar de igualdad.

En el estudio del tiempo, Newton considera que el tiempo absoluto es sinónimo de duración, dicha duración debe ser ininterrumpida en término absolutos, es decir debe ser continua. Este es el sentido de la frase que sostiene que el tiempo absoluto "fluye igual, sin relación a ninguna cosa externa" [16], al respecto Newton dice:

*La duración o perseverancia de la existencia de las cosas permanece siendo la misma, aunque el movimiento sea rápido o lento, o ninguno: por lo tanto esta duración debe de ser distinguida de lo que son sólo sus medidas sensibles.*

En dicha frase Newton dice que el movimiento o reposo de las cosas no afecta el tiempo, algo que siglos mas tarde Einstein cambiaría introduciendo no unitariedad del tiempo y relacionando los distintos relojes de cada observador a través de las transformación de Lorentz.

### 4. El tiempo en relatividad especial y general

Con la llegada del trabajo de Einstein y Mileva en relatividad especial y posteriormente de Einstein en relatividad general, la concepción del tiempo construida hasta entonces fue fuertemente alterada. A partir de la definición práctica del tiempo como aquello que miden los relojes, junto a la definición de observador como una grilla de relojes sincronizados con rayos de luz, tal que todos están en reposo relativo unos de otros y llenan todo el espacio [17], es posible dar un tratamiento matemático y concreto al tiempo, ya no como algo que fluye de forma constante y permea todo el espacio, sino como una cantidad que medimos de forma muy específica y que empezamos a intentar entender de forma análoga a como entendemos las distancias, de tal forma que este fluir constante del tiempo ya no es una hipótesis ad hoc, sino algo que debe ser medido y evaluado.

Una consecuencia de esta concepción práctica del tiempo junto a la existencia de un límite para la velocidad de propagación en nuestro universo es el cambio conceptual de concebir al tiempo y al espacio de forma separada, sino diluidos en el concepto de causalidad. A pesar de esto el tiempo sigue teniendo un papel protagonista, puesto que en tanto somos entidades con energía en reposo, nuestras trayectorias siempre serán de tipo temporal, en donde el tiempo resulta tener un carácter causal y el espacio no.

Antes de adentrarnos en los resultados concernientes al tiempo en la relatividad será útil tener unos conceptos matemáticos que nos permitirán abordar el papel del tiempo en el establecimiento de la física, para eso repasemos el concepto de Vectores de Killing en variedades diferenciales.

## 4.1. Variedades, Simetrías y Vectores de Killing

Dado un campo vectorial suave  $\vec{\xi}$  en una variedad diferencial  $M$ , siempre podemos hallar un conjunto de curvas tal que una y sólo una curva pasa por cada punto  $p \in M$  y el vector tangente a esta curva en el punto  $p$  es  $\vec{\xi}|_p$ . Este conjunto es único y toma el nombre de familia de curvas integrales asociadas al vector  $\vec{\xi}$ .

Dada una familia de curvas integrales podemos definir un difeomorfismo  $\phi_t : M \rightarrow M$  tal que para cada punto  $p \in M$  le asocie un punto  $\phi_t(p)$  a una distancia paramétrica  $t$  a lo largo de la curva integral que pasa por  $p$ , así  $\phi_t$  sera un grupo uniparamétrico de difeomorfismos y se dice que  $\phi_t$  transporta puntos a lo largo de la curva integral generada por  $\vec{\xi}$  que pasa por  $p$ . Si además  $\phi_t$  cumple

$$\phi_t^* g_{ab} = g_{ab}$$

se dice entonces que es un grupo uniparamétrico de isometrías, puesto que el transporte a lo largo de las curvas integrales generadas por  $\vec{\xi}$  no modifica a la métrica, de tal manera que el campo vectorial  $\vec{\xi}$  es llamado un campo vectorial de Killing. Esto puede expresarse por medio de la derivada de Lie de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}} g_{ab} = 0 \quad (1)$$

Dado que la conexión en relatividad general no tiene torsión, entonces esta asociada con la métrica, esto permite hacer una conexión entre la derivada de Lie y la derivada covariante, de tal forma que la ecuación (1) se puede escribir de la siguiente forma, que se conoce como la ecuación de Killing [18].

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \quad (2)$$

Consideremos una geodésica  $\gamma$  con vector tangente  $\vec{v}$  y transportemos la cantidad  $\xi_a v^a$  a lo largo de la geodésica usando la generalización de la derivada direccional con la derivada covariante:

$$v^b \nabla_b (\xi_a v^a) = v^a v^b \nabla_b \xi_a + \xi_a v^b \nabla_b v^a = 0 \quad (3)$$

Donde el primer término se desvanece por la ecuación de Killing (2) y el segundo por la ecuación que define a una geodésica  $v^b \nabla_b v^a = 0$ .

Dado que en relatividad general las geodésicas como de tiempo representan el movimiento espacio-temporal

de partículas libres y las geodésicas nulas representan la trayectoria de rayos de luz, a partir del teorema de Noether podemos asociar a estas cantidades conservadas  $\xi_a v^a$  con simetrías de la variedad, las cuales quedan definidas naturalmente por la expresión 1. De esta forma por cada campo vectorial de Killing la variedad tendría una simetría asociada a este y existiría una cantidad dinámica del sistema que se conserva. En el caso particular de este trabajo nos interesan variedades pseudoriemannianas cuadridimensionales con 3 dimensiones que denominamos espaciales y una temporal, esto porque la Relatividad General plantea que el espacio-tiempo puede modelarse por medio de estas variedades que denominamos Lorentzianas.

En particular de estas variedades diferenciales nos interesaría cuando la coordenada temporal sea una simetría de la variedad i.e. haya una cantidad dinámica conservada en el transporte a través del tiempo, en este caso la energía [18].

## 4.2. El tiempo en relatividad especial

La relatividad especial surge como respuesta a las inconsistencias encontradas entre la electrodinámica y las transformaciones de Galileo, esta inconsistencia puede ejemplificarse con el hecho de que en la electrodinámica no existen soluciones de ondas electromagnéticas estacionarias en el vacío, lo cual puede interpretarse como que no existe un observador el cual sea cómovid a la luz, dicho de otra forma, no hay ninguna transformación que nos pueda llevar a un observador que se mueva a la velocidad de la luz. Esto entra en contradicción con la transformación de Galileo que no posee esta restricción.

Una vez solucionadas estas inconsistencias con el planteamiento de las transformaciones de Lorentz y la posterior formalización de la relatividad especial en términos de una variedad lorentziana con curvatura nula que conocemos como espacio-tiempo de Minkowski, es posible observar con claridad el cambio de paradigma respecto al tiempo dado en la relatividad. Por ejemplo, en este espacio-tiempo de Minkowski puede probarse que la magnitud de la cuadrvelocidad para partículas con  $m_o \geq 0$  es siempre constante y tiene valor  $c^2$  o  $-c^2$  dependiendo de la signatura tomada en la métrica, esto es importante porque permite ver con claridad uno de los resultados fundamentales de la relatividad y es la mezcla del tiempo y el espacio que generan las transformaciones de Lorentz, análogo a como una rotación alrededor del eje Y puede mezclar las coordenadas X y Z; de tal forma que en virtud de la constancia de la cuadrvelocidad un aumento en la velocidad con la que una partícula se mueve en el espacio, implica una disminución en la velocidad con la que esa partícula se mueve en el tiempo, teniendo como consecuencia las muy bien conocidas como dilatación del tiempo y contracción del

espacio.

Como se mencionó anteriormente en relatividad lo fundamental es la causalidad, puesto que esta es la que define el orden de los eventos físicos, para nosotros como observadores con energía en reposo nos es natural tener un orden temporal, pero en virtud de la igualdad en el tratamiento del espacio y el tiempo también hay un orden espacial, esto queda demarcado por el intervalo espacio-temporal  $ds^2 = \eta_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu$ , así mismo hay eventos que no poseen un orden temporal particular de tal forma que un observador podría ver que el evento A ocurre antes que B mientras otro evidencia que B ocurre antes que A.

En términos del formalismo de variedades y vectores de Killing mencionado anteriormente es posible establecer que el espacio-tiempo de Minkowski posee 10 simetrías, de las cuales una de ellas corresponde al tiempo, es decir en el espacio-tiempo de Minkowski la métrica es invariante ante transporte a través de las curvas integrales de tiempo, esto implica que la energía se conserva y que en este espacio-tiempo no hay una distinción entre futuro y pasado, asunto que se abordará con más profundidad en la sección de la flecha del tiempo.

Finalmente el último aspecto del tiempo en la relatividad especial que comentaré radica en su caso límite. Cuando se aplican las transformaciones de Lorentz con la intención de conocer las mediciones del espacio y el tiempo de un observador que se mueve a la velocidad de la luz, nos encontramos con que la dilatación temporal y la contracción espacial divergen, si nos tomáramos en serio este resultado obtendríamos que para una partícula que se mueve a la velocidad de la luz toda la historia del universo es tan solo un instante para ella. Esto nos lleva a otro de los misterios del tiempo en la relatividad y es que, sólo las partículas con energía en reposo (masa) pueden viajar a una velocidad distinta de la luz y por lo tanto según la relatividad especial sólo las partículas con masa pueden percibir la extensión del tiempo.

### 4.3. El tiempo en relatividad general

La relatividad general surge como consecuencia de las inconsistencias entre la relatividad especial y su bien definida forma de establecer el tiempo y el espacio, con la gravitación Newtoniana desarrollada en el marco de la concepción espacio-temporal de la mecánica de Newton. Como resultado de la solución de estas inconsistencias se encontró que no sólo el movimiento relativo cambia la medición de los intervalos espaciales y temporales, sino que la curvatura del espacio-tiempo también modifica la medición de estos intervalos, hechos que están conectados por medio del principio de equivalencia, el cual establece que la caída libre es localmente indistinguible del reposo newtoniano, de tal forma que la ace-

leración constante es también localmente indistinguible de un campo gravitatorio; el principio de equivalencia nos permite entender cual sera el efecto de la curvatura en los intervalos temporales, puesto que a mayor curvatura, mayor es la aceleración indistinguible localmente i.e. mayor la dilatación del tiempo.

Mientras en relatividad especial, mecánica newtoniana y mecánica cuántica se asumen las propiedades del tiempo, como su topología, simetría y velocidad a la que transcurre; en relatividad general estas propiedades deben ser demostradas a partir de la estructura del espacio-tiempo en cuestión, de tal forma que es perfectamente plausible que en un espacio-tiempo no exista un vector de Killing que genere las curvas integrales de tiempo, de tal forma que en este espacio-tiempo no haya simetría temporal y por lo tanto tampoco una conservación de la energía, este es el caso de la métrica usada como primera aproximación para modelar el universo a gran escala, la métrica FLRW [18], además esta naturaleza del tiempo no es necesariamente estática, puesto que el espacio-tiempo en relatividad general es dinámico.

Dada la amplia diversidad de espacio-tiempos admitidos por la relatividad general podemos tener una amplia variedad de comportamientos del tiempo, por ejemplo podemos tener tiempos que sólo estén definidos para subvariedades de nuestro espacio-tiempo, tiempos con simetría a trozos, etc.

Al igual que en relatividad especial tendremos un caso límite de dilatación temporal, que también encuentra su conexión con el límite de la velocidad de la luz. Por ejemplo cuando estudiamos el espacio-tiempo de Schwarzschild se evidencia que al comparar las mediciones de dos observadores, uno de los cuales se encuentra a una distancia fija del agujero negro y otro en caída libre hacia el mismo, se evidencia que el tiempo del observador en caída libre se dilata asintoticamente respecto al del observador a distancia fija, presenciándose la asíntota de esta dilatación cuando el observador en caída libre alcanza el horizonte de eventos del agujero negro, el cual es precisamente la región del espacio desde la cual la velocidad de escape es igual a la de la luz.

Hay un último aspecto para abordar respecto al tiempo en la relatividad general, este corresponde a la pregunta por la topología del tiempo, sin embargo este asunto se abordará en la sección "La topología del tiempo y el carácter térmico del espacio-tiempo de Schwarzschild".

## 5. El tiempo en mecánica cuántica

En la física cuántica el estado de un sistema está determinado por la función de onda, dicha función generalmente depende de la posición y el tiempo. Además, con ella se puede obtener las cantidades medibles en el laboratorio a través de operadores hermíticos y sus correspondientes autovalores, por ejemplo la posición, el momento y la energía tienen sus operadores. Por otra parte, en el formalismo de la mecánica cuántica el tiempo se modela como un parámetro de la función de onda el cual no tiene asociado un operador (no es un observable).

En la mecánica cuántica, el primer sistema físico cuyo estado fue descrito usando una función de onda fue una partícula libre, usando dicha función y de la expresión clásica de la energía se pudo deducir la ecuación de movimiento de la cuántica no relativista, la ecuación de Schrodinger. Ahora usaremos la misma función de una partícula libre para encontrar la forma del operador tiempo.

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4)$$

donde,  $\mathbf{k}$  es número de onda y  $\omega$  es la frecuencia angular.

Recordando la expresión obtenida por de Broglie para el momento  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ , la ecuación de Planck  $E = \hbar\omega$  y tomando la variación respecto a la energía de la función de onda [19] se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial E} &= -\frac{i}{\hbar}tAe^{i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et}{\hbar}} \\ &\quad - i\frac{i}{\hbar}t\Psi(\mathbf{r}, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial E} &= -\frac{i}{\hbar}t \\ \Rightarrow \hat{t} &= i\hbar\frac{\partial}{\partial E} \end{aligned} \quad (5)$$

En la ecuación (5) se muestra la forma obtenida para operador tiempo.

### 5.1. Autovalores del operador tiempo

Cuando se quiere estudiar los autovalores de un operador se recurre a la ecuación de autovalores y autovectores asociada, en la que se hace actuar el operador sobre la función de onda:

$$\hat{t}\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial E}\Psi(\mathbf{r}, t)$$

$$\begin{aligned} &= i\hbar A \left( -\frac{i}{\hbar}t \right) e^{-iEt} \\ &= \hat{t}\Psi(\mathbf{r}, t) = -i^2 t\Psi(\mathbf{r}, t) \\ &= \hat{t}\Psi(\mathbf{r}, t) = t\Psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (6)$$

En la ecuación (6) se observa claramente que los autovalores del operador tiempo son una cantidad real, además se puede ver que es un operador hermítico, como era de esperarse.

### 5.2. Relaciones de commutación del cuadrado del operador tiempo con el operador energía

Se sabe que la relación de commutación entre el operador tiempo y el operador energía es  $i\hbar$ , por lo cual vamos a estudiar la relación de commutación del cuadrado del operador tiempo con el operador energía

$$\begin{aligned} [\hat{t}^2, E]\Psi(\mathbf{r}, t) &= (\hat{t}^2 E - E\hat{t}^2)\Psi(\mathbf{r}, t) \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial E}(E\Psi(\mathbf{r}, t)) - i\hbar E\frac{\partial\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial E^2} \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial E^2}\right)\Psi(\mathbf{r}, t) + i\hbar E\frac{\partial\Psi(\mathbf{r}, t)}{E^2} \\ &\quad - i\hbar E\frac{\partial\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial E^2} \\ \Rightarrow [\hat{t}^2, E]\Psi(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

En la ecuación (7) se puede ver que el operador  $\hat{t}^2$  commuta con el operador energía, son operadores compatibles.

### 5.3. Valor esperado del operador tiempo

En la estimación del valor esperado para el operador tiempo, como es de esperar por temas de consistencia, se calcula de la misma forma que el valor esperado de los operadores cuánticos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{t} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* t\Psi dE = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial}{\partial E} \Psi dE \\ &= i\hbar \left[ \Psi^* \int \frac{\partial\Psi}{\partial E} dE \right]_{-\infty}^{\infty} - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial\Psi^*}{\partial E} \int \frac{\partial\Psi}{\partial E} dE \right) dE \\ &= 0 - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial\Psi^*}{\partial E} \Psi \right) dE = \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi^* t\Psi)^* dE \\ \Rightarrow \langle \hat{t} \rangle &= \langle \hat{t} \rangle^* \end{aligned} \quad (8)$$

En la ecuación (8) se evidencia claramente que el operador tiempo es hermítico ya que la única forma que dicha expresión sea cierta es que el valor esperado sea un número real.

El desarrollo matemático visto anteriormente para la definición del operador tiempo y la estimación de su valor esperado parecen ser coherentes, pero en realidad hay varios problemas que surgen porque en la construcción de la mecánica cuántica se toma la expresión clásica de la energía para deducir la ecuación de Schrodinger (cuántica no relativista) en la cual el tiempo es un parámetro. Esto último dificulta la una unión de mecánica cuántica con la relatividad general porque al momento de pensar en una teoría que las englobe se plantean dos posibilidades, o el tiempo debe ser definido de forma coherente como un operador (diferente al cálculo ya realizado) o los operadores deben degradarse a parámetros porque en la relatividad el tiempo y el espacio están en un mismo nivel de importancia.

Lo mostrado en la ecuación (5) es un intento por elevar el tiempo a la categoría de operador (observable), un intento que tiene varios problemas, uno de estos problemas surge al considerar un operador de tiempo hermítico definido en el espacio de Hilbert porque este no puede satisfacer las relaciones de commutación canónicas ya que de hacerlo implicaría que el operador energía tiene como espectro toda los números reales lo cual que no es física. Además, lo anterior también implicaría que el operador hamiltoniano no es autoadjunto [19]. Este es sólo uno de los problemas plateados, en realidad hay muchos problemas relacionados con la definición del operador tiempo, por ejemplo la relación de incertidumbre entre la energía y el tiempo, algo que no logra entender.

En el estudio del papel del tiempo en la mecánica cuántica quedan muchas preguntas por responder como por ejemplo ¿Es realmente un problema que el espectro del hamiltoniano no esté delimitado por debajo? ¿Por qué no existe un operador de Newton-Wigner similar al tiempo? ¿Existe de hecho una teoría cuántica relativista que incluya un operador cuyos valores propios son coordenadas de tiempo? [20]. Estas preguntas deben ser respondidas para poder comprender mejor el papel del tiempo en la mecánica cuántica y sobre todo para que la física avance hacia el camino de la unificación de la mecánica cuántica con la relatividad general.

## 6. El tiempo en la física contemporánea

Actualmente el tiempo se encuentra presente en varias partes de los fundamentos de la física, en particular la termodinámica estocástica, la mecánica cuántica y el establecimiento de una teoría coherente de la gravedad cuántica. A continuación se discutirán dos incógnitas de los fundamentos de la física relacionados al tiempo, el problema de la flecha del tiempo y el problema de la

topología del tiempo.

### 6.1. El problema de la flecha del tiempo

Nuestras nociones de pasado, presente y futuro tan arraigadas a nuestra cultura, filosofía, psicología y biología, en última instancia deberían poderse articular junto a la física, sea el orden del tiempo algo fundamental o sea una ilusión, la física debería poder darle su lugar como algo fundamental de forma coherente o en su defecto explicar el mecanismo de la ilusión. Aún no existe un consenso respecto a como surge la dirección del tiempo que percibimos en el día a día [21], la cual se asocia con la asimetría temporal planteada por la segunda ley de la termodinámica. Respecto a esto a grandes rasgos hay dos enfoques, uno el cual plantea que la naturaleza del tiempo es algo emergente, puesto que la naturaleza fundamental es simétrica en el tiempo y otro en el cual desde lo fundamental hay asimetría.

Se suele argumentar que las leyes de la física son simétricas en el tiempo, esto intuitivamente se explica con la idea de grabar un video y ponerlo a correr de adelante para atrás, es decir invirtiendo el orden de la sucesión de eventos, sin embargo el plantear formalmente que significa que una teoría física sea simétrica en el tiempo es otro asunto. Para empezar no hay un consenso de que significa que una teoría física sea simétrica y usualmente cuando esto se hace para por ejemplo, decir que la mecánica Newtoniana es simétrica en el tiempo, se incluyen pasos extra no explícitos, en este caso invertir la dirección de los vectores relacionados a cantidades cinemáticas como la velocidad y la aceleración, de no hacerse esta inversión tendríamos que vernos obligados a asumir que la mecánica Newtoniana **no** es simétrica temporalmente [21].

Suponiendo que estos detalles respecto a la definición de la simetría temporal son superados ¿es posible decir que la física fundamental no distingue entre el futuro y el pasado? Si observamos la relatividad general encontraremos que la simetría del tiempo depende del espacio-tiempo particular y que en el caso de FLRW (la métrica que modela el universo a gran escala) esta simetría no se encuentra, también hay reportes de procesos de decaimiento de partículas que violan la simetría CPT, por otra parte observando el estado de la teoría cuántica, con su descripción determinista e indeterminista, nos damos cuenta que el colapso de la función de onda que marca la transición entre la descripción determinista y la indeterminista, es también un proceso asimétrico temporalmente.

A pesar de que se han identificado estas fuentes de asimetría temporal en lo que podría llamarse física fundamental, no se ha esclarecido todavía como surge la asimetría más común para nosotros, la de la segunda

ley de la termodinámica. Cuando se aborda la cuestión de por qué la entropía aumenta con el tiempo i.e. hay asimetría temporal los físicos suelen tomar la opción de concebir al tiempo como una ilusión [1] emergente del carácter estadístico de la segunda ley de la termodinámica [21], sin embargo este argumento sólo nos resuelve la mitad del problema, puesto que nos explica por qué aumenta la entropía hacia el futuro, sin embargo dada la simetría temporal de las leyes de Newton el argumento del carácter estadístico de la segunda ley predice que hacia el pasado la entropía también aumenta, de tal forma que realmente no nos explica la asimetría temporal, para eso hay que incluir condiciones de frontera, es decir información sobre el estado de la entropía en el infinito pasado y en el infinito futuro. Hasta este punto nos queda a grandes rasgos dos opciones, concebir la flecha del tiempo como una ilusión explicada a partir del carácter estadístico de la segunda ley y explicar la baja entropía en el pasado a partir de una condición de frontera puesta en el inicio del universo o explicar como las asimetrías en la física fundamental dan lugar a la asimetría termodinámica [21].

## 6.2. Los tiempos de Schwarzschild y los campos cuánticos

Como se mencionó anteriormente en el caso de la relatividad general es necesario estudiar la estructura temporal del espacio-tiempo de interés. Precisamente el estudio de la estructura temporal del espacio-tiempo de Schwarzschild nos conduce inevitablemente a uno de los problemas fundamentales de la física, el problema de establecer una teoría coherente de la gravedad cuántica.

Para obtener la métrica de Schwarzschild basta con exigir que el espacio-tiempo sea estático, esféricamente simétrico, sin materia y asintóticamente plano, obteniéndose así la siguiente forma funcional:

$$ds^2 = -c^2 \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} dt^2 \right) + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Sin embargo esta métrica presenta problemas, puesto que cuando  $r = \frac{2GM}{C^2}$  entonces el término que acompaña a  $dt^2$  tiende a cero, mientras que el que acompaña a  $dr^2$  diverge; además para el valor  $r = 0$  tenemos el comportamiento opuesto. La divergencia de  $r = \frac{2GM}{C^2}$  puede eliminarse con una correcta elección de coordenadas, tal como se ilustra en la siguiente figura que corresponde a la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal [22].

Al estudiar el espacio-tiempo de Schwarzschild desde las coordenadas de Kruskal encontramos 2 regiones

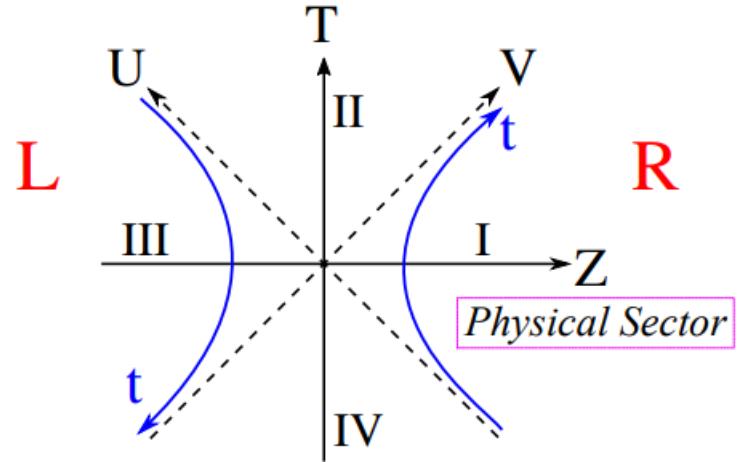


Figura 1: Métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal

desconectadas causalmente, una de las cuales corresponde al espacio-tiempo mapeado por las coordenadas de Schwarzschild. Estas dos regiones desconectadas causalmente resultan cada una ser una subvariedad maximalmente simétrica, teniendo cada una un vector de Killing temporal, por lo tanto una simetría respecto a traslaciones temporales y la conservación de la energía que esto implica. A parte de estos tiempos también tenemos un tiempo global sobre la variedad, el tiempo de Kruskal, el cual sus curvas integrales también son generadas por un vector de Killing. Acá vemos naturalmente un problema, puesto que la región que es susceptible de modelar nuestro universo físico es una subvariedad del espacio-tiempo de Schwarzschild, de tal forma que esta subvariedad puede describirse en términos de dos tiempos, ambos con sus curvas integrales generadas por vectores de Killing y por lo tanto sobre ambos tiempos es posible construir un esquema de cuantización. El problema radica en que la relatividad general no nos da argumentos para elegir un tiempo por sobre el otro y las descripciones de vacío construidas sobre estos dos tiempos son no unitariamente equivalentes.

## Referencias

- [1] Carlo Rovelli. El orden del tiempo, pag 5-50, isbn 978-84-339-6422-9.
- [2] Rhailana Fontes, Jéssica Ribeiro, Daya S Gupta, Dionis Machado, Fernando Lopes-Júnior, Francisco Magalhães, Victor Hugo Bastos, Kaline Rocha, Victor Marinho, Gildálio Lima, et al. Time perception mechanisms at central nervous system. *Neurology international*, 8(1):14–22, 2016.

- [3] Albert Tsao, Jørgen Sugar, Li Lu, Cheng Wang, James J Knierim, May-Britt Moser, and Edvard I Moser. Integrating time from experience in the lateral entorhinal cortex. *Nature*, 561(7721):57–62, 2018.
- [4] Ignacio Morgado Bernal. La percepción del tiempo. *Investigación y ciencia, psicología y neurociencia*, 2014.
- [5] Alfonso Miguel García Hernández. El tiempo a lo largo del tiempo. *Scielo*, Nov-2017.
- [6] Roberto Ranz. Anaximandro y el orden del tiempo. *Medium*, Jan-2015.
- [7] Lucas Gabriel Cantarutti. Eso que llamamos “tiempo” – la eternidad como el no-tiempo. 2008.
- [8] Timeo, platón, 37c-39d. 47a. (traducción de m<sup>a</sup>. Ángeles durán y francisco lisi, diálogos, vol. vi, gredos, madrid 1992, p. 182-185, 196).
- [9] Aristóteles. Física. *Ed. Gredos*.
- [10] Robert DiSalle. *Understanding space-time: The philosophical development of physics from Newton to Einstein*. Cambridge University Press, 2006.
- [11] Crítica de la razón pura, estética trasc., 1, § 6, b 50-b 52 (alfaguara, madrid 1988, 6<sup>a</sup> ed., p. 76-78).
- [12] Susan Haack. Pragmatism, old and new. *Contemporary Pragmatism*, 1(1):3–41, 2004.
- [13] Euipo Pedagógico PPDQ. El legado pedagógico del siglo xx para la escuela del siglo xxi. 2012.
- [14] Charles S Peirce, Morris R Cohen, and John Dewey. How to make our ideas clear 1. In *Chance, Love, and Logic*, pages 32–60. Routledge, 2017.
- [15] Virgilio Niño. la relatividad especial y la mecánica cuántica. pages 3–11.
- [16] Nydia Lara Zavala and Andrea Miranda. Newton, Einstein y la noción de tiempo absoluto. page 18.
- [17] Lorenzo De la Torre. *Elementos de relatividad*. Universidad de Antioquia, 2008.
- [18] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [19] Paul Busch. Department of mathematics, university of york, uk, time Operator in Quantum Mechanics. *OALib*, 06(11):1–6, 2019.
- [20] Masahiko Yamaguchi (<https://physics.stackexchange.com/users/11235/masahikoyamaguchi>). Is there an observable of time? Physics Stack Exchange. URL:<https://physics.stackexchange.com/q/34243> (version: 2012-08-15).